

基于 SDE 的含风电电力系统随机小干扰稳定分析

周明¹, 元博¹, 张小平², 李庚银¹

(1. 新能源电力系统国家重点实验室(华北电力大学), 北京市 昌平区 102206;

2. 伯明翰大学, 英国 伯明翰 B15 2TT)

Stochastic Small Signal Stability Analysis of Wind Power integrated Power Systems Based on Stochastic Differential Equations

ZHOU Ming¹, YUAN Bo¹, ZHANG Xiaoping², LI Gengyin¹

(1. State Key Laboratory of Alternate Electrical Power System with Renewable Energy Sources (North China Electric Power University), Changping District, Beijing 102206, China; 2. University of Birmingham, Birmingham B15 2TT, UK)

ABSTRACT: Focusing on the impact of the ever-increasing stochastic wind power on power system stability, this paper presented a small signal stability modeling and analysis approach under stochastic domain. The asynchronous wind turbine mechanical power was considered as stochastic excitation and was modeled by the stochastic process, the system equations of state were modeled by the stochastic differential equations (SDE). It overcame the defect of ordinary differential equations in modeling stochastic process. Then the Ito formula and Ito isometry were employed to deduce the analytical solutions of the system equations of state. Then the definition of moment stability was proposed to describe stochastic stability. The criterion for system small signal moment stability was presented for the system with stochastic excitation. The simulation on the two-machine infinite-bus system showed the effectiveness of the proposed method. The stochastic state equations can be directly solved in the method. Compared to the conventional probabilistic stability analysis methods, this paper which can reflect the intrinsic character of stochastic stability more accurately and the obtained operating trajectory in stochastic space can be more conducive to stability control.

KEY WORDS: wind power fluctuation; small signal stability; stochastic differential equation; moment stability

摘要: 针对不断增加的随机波动性风电功率对电力系统稳定性的影响, 提出一种在随机空间下的电力系统小干扰稳定性建模和分析方法。选取风机机械功率作为随机激励, 用随机过程对其进行建模, 进而建立用随机微分方程描述的系统状

态方程, 克服了常微分方程无法从本质上描述随机过程的缺点。通过伊藤等距性质及伊藤公式给出了状态方程的解析解, 进而给出了随机激励下系统小干扰稳定性的判别方法, 并提出矩稳定性的定义用以刻画随机小扰动稳定性。双机无穷大系统算例验证了所提方法的有效性。相对于常规的概率型稳定性分析方法, 该方法直接对随机状态方程进行求解, 与传统概率稳定分析方法相比, 能够更准确地揭示随机稳定性的本质, 且在随机空间下给出的运动轨迹更利于稳定控制。

关键词: 风电波动; 小干扰稳定; 随机微分方程; 矩稳定性

0 引言

电力系统小干扰稳定性分析一般用常微分方程组描述系统状态, 通过求解状态方程的特征根来分析其稳定性, 这是一种确定性分析方法。近年来随着风电等波动性电源份额的迅速增加, 大量随机波动性输入使常规小干扰稳定建模和分析方法面临难题, 且大量的随机激励给电力系统稳定控制也带来了新的挑战。

随机因素在电力系统状态方程上表现为 3 个方面: 1) 随机激励(如随机波动的风功率); 2) 初始状态的随机性(系统平衡点不是潮流方程的一个确定解, 而是一个随机量); 3) 状态方程系数的随机性(例如风电场由于风机随机投切导致的变结构)。由于问题的复杂性, 本文针对随机激励下系统小干扰稳定性建模和分析开展研究。

如何建模随机因素是随机与确定性小干扰稳定分析的根本区别^[1-6]。现有的考虑随机因素的小干扰稳定分析方法可分为模拟法与解析法 2 类。模拟法主要基于蒙特卡罗仿真(Monte Carlo Simulation,

基金项目: 国家自然科学基金重大项目(51190103); 国家 863 高技术基金项目(2012AA050208)。

Project Supported by the Major Program of the National Natural Science Foundation of China (51190103); The National High Technology Research and Development of China 863 Program (2012AA050208).

MCS)^[7-9]。MCS作为一种数值分析方法,通过对随机源产生大量场景,然后对每个场景进行确定性计算,得到系统关键特征值的概率分布,其本质仍然是确定性方法,计算量大,且给出的是稳定性分析的统计结果,难以细致刻画随机因素对系统动态过程的影响。考虑随机因素的小干扰稳定性分析解析法近年来有一些研究成果^[10-15]。文献[11]利用Gram-Charlie级数展开方法推导了系统关键特征值的概率密度函数。文献[13-14]对概率性小干扰稳定性分析得到的系统特征值进行了灵敏度分析并提出了相应加强稳定性的控制措施。这种方法虽然计算量相对MCS大大减少,但不足是它们仍然利用常微分方程组描述状态方程,系统的不确定性因素大多是在仿真前进行建模,在仿真过程中,系统实际上仍然是确定性系统。常微分方程是基于黎曼积分的确定性方程,无法从本质上描述随机元素对系统状态方程的影响,导致无法对仿真过程中系统存在的随机激励进行建模。为了克服这种不足,有学者引入了随机积分及随机微分方程(stochastic differential equation, SDE)理论对电力系统稳定性进行分析^[16-18]。文献[17]利用随机积分对电力系统的随机元素进行建模,文献[18]利用随机李亚普诺夫函数及数值方法分析了含风电电力系统的暂态稳定性。但是将随机微分方程理论应用于小干扰稳定性分析的研究目前基本上还是空白。

与常规的确定性或概率性稳定性分析方法不同的是:本文直接对随机激励下的系统状态方程在随机空间上进行建模和分析,能准确刻画随机激励对系统动态过程的影响。选取异步风电机组机械功率作为随机激励,建立了风电机组的随机动态模型;引入伊藤随机积分理论,建立了基于SDE的小干扰稳定分析模型和方法,借助于伊藤公式,给出了系统在随机激励下的小扰动稳定性判据,并进一步提出了适合刻画随机稳定性的定义——矩稳定性。算例验证了所提方法的有效性,且能给出系统在随机小扰动后的运行轨迹,更利于进行稳定控制。

1 随机积分理论的数学描述

1.1 伊藤随机微分方程

传统的电力系统动态模型是一组基于确定性积分(黎曼积分)的常微分方程。从本质上看,黎曼积分无法描述系统中的随机因素,这主要是因为计算黎曼和需要确定被积函数在被积区间上每个点

的唯一确定值。而本文使用的随机微分方程基于伊藤积分,可以有效克服这一缺点,更为准确地对系统中的随机因素进行建模。本节将介绍一些预备知识,引入随机微分方程理论为随机稳定性建模和分析做准备。

伊藤随机微分方程是描述物理、经济、金融等广泛随机现象的重要工具。这些现象的共同点是用一个随机变化的运动作为模型中的输入,其一般表述^[19]如下:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{X}(t), t) + \mathbf{G}(\mathbf{X}(t), t)\mathbf{B}(t), \\ t &\in [t_0, T], \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \end{aligned} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{B}(t)$ 为 m 维随机过程,每个分量是一个Wiener过程(Wiener过程定义见附录A); $\mathbf{G}(\mathbf{X}(t), t)$ 为 $n \times m$ 矩阵函数; \mathbf{X}_0 为随机变量; f 和 g 为 $[t_0, T]$ 上的Borel可测函数。

与常微分方程不同的是,随机微分方程的解是一个随机过程。常微分方程可以看作是式(1)中 $\mathbf{B}(t)$ 退化成确定性函数, \mathbf{X}_0 退化成定常数后的特殊情况,即随机微分方程是常微分方程的拓广。

1.2 伊藤等距性质与伊藤公式

本节引入对分析式(1)随机微分方程至关重要的伊藤积分、伊藤等距性质及伊藤公式。限于篇幅,文中定理的证明可参见给出的参考文献。

式(1)中的随机过程 B_t 是确定性积分无法处理的,需要定义随机意义下的积分。随机积分有多种定义方式,本文选择应用最广泛的伊藤积分。

伊藤积分^[20] 考虑区间 $[0, T]$ 与概率空间 (Ω, Σ, P) ,令 $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \dots \subseteq A_T \subseteq \Sigma$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ 为一族 σ 代数(σ 代数为测度论的基础概念,其定义见附录A),若 $f(t, B_t)$ 满足以下条件:

1) B_t 是Wiener过程, $f(t, B_t)$ 为 (A_t) -适应过程((A_t) -adapted process)(这里的 A_t 是流(filtration),流与适应过程的定义见附录A);

$$2) \quad E\left(\int_0^T f(t, B_t) dt\right) < \infty \quad (2)$$

那么函数 f 对 B_t 的伊藤积分可定义为下式的均方极限。

$$\begin{cases} \int_0^T f(t, B_t) dB_t = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(t_i, B_{t_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \\ \lambda \triangleq \max_{0 \leq k \leq n-1} \{t_{k+1} - t_k\} \rightarrow 0 \end{cases} \quad (3)$$

伊藤积分等距性质^[20] 若 $f(t, B_t)$ 满足伊藤积分的定义条件,则有:

$$E((\int_S^T f(t, B_t) dB_t)^2) = E(\int_S^T f^2(t, B_t) dt) \quad (4)$$

证明可见文献[20]。

伊藤公式^[20] 令 $B(t) = (B_1(t), \dots, B_m(t))$ 为一个 m 维 Wiener 过程。若函数 u_i 和 v_{ij} 满足伊藤随机过程定义(伊藤随机过程定义见附录 A)中的条件($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$)，则可以得到一个如下 n 维伊藤过程：

$$\begin{cases} dX_1 = u_1 dt + v_{11} dB_1 + \dots + v_{1m} dB_m \\ \vdots \\ dX_n = u_n dt + v_{n1} dB_1 + \dots + v_{nm} dB_m \end{cases} \quad (5)$$

用矩阵形式表示为：

$$dX(t) = u dt + v dB(t) \quad (6)$$

$$\text{式中：} X(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ \vdots \\ X_n(t) \end{bmatrix}; u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}; v = \begin{bmatrix} v_{11} & \dots & v_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \dots & v_{nm} \end{bmatrix};$$

$$dB(t) = \begin{bmatrix} dB_1(t) \\ \vdots \\ dB_m(t) \end{bmatrix}.$$

若 $g(t, x) = (g_1(t, x), \dots, g_p(t, x))$ 是一组 x 二次可微，且对 t 连续可微的实值函数，则 $Y_t = g(t, X_t)$ 也是伊藤过程，而且有：

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{\partial g_k}{\partial t}(t, X) dt + \sum_i \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(t, X_i) dX_i + \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i \partial x_j}(t, X) dX_i dX_j \end{aligned} \quad (7)$$

式中： $dt \cdot dt = dt \cdot dB_i = dB_i \cdot dt = 0$ ； $dB_i \cdot dB_i = dt$ ； $dB_i \cdot dB_j = 0$ 。证明可见文献[20]。

2 异步风电机组随机动态建模

异步风电机组的戴维南等值模型如图 1 所示。

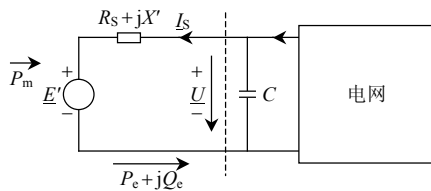


图 1 异步风机动态模型

Fig. 1 Dynamic model of the asynchronous wind turbine

风电场的风速随机变化会使得风机的机械功率随之改变，风机的机械功率输入 P_m 可表示为

$$P_m = P_{m,0} + \Delta P_h \quad (8)$$

式中： $P_{m,0}$ 为机械功率的确定部分； ΔP_h 为由于风速随机变化引起的机械功率波动，本文用伊藤微分

对这部分功率波动进行建模：

$$d\Delta P_h(t) = \mathcal{G} dB(t) \quad (9)$$

式中： $B(t)$ 为 Wiener 过程； \mathcal{G} 为扩散系数，表示功率波动的强度。在小干扰稳定涉及的较短时间区间内，机械功率通常在一个均值点附近波动，可以认为机械功率的波动是一个 Wiener 过程。

风电机组的定子电流方程为

$$I_s = \frac{U - E'}{R_s + jX'} \quad (10)$$

式中： U 为定子电压； I_s 为定子电流； E' 为暂态电势； R_s 为定子电阻； X' 用下式计算：

$$X' = X_s + \frac{X_r X_m}{X_r + X_m} \quad (11)$$

式中： X_r 为转子漏抗； X_s 为定子漏抗； X_m 为励磁电抗。

风电机组的电磁暂态方程为：

$$\frac{dE'}{dt} = -\frac{1}{T_0'} [E' - j(X_0 - X') I_s] - j\omega_s s E' \quad (12)$$

式中 s 为转差。 T_0' 和 X_0 用下式计算：

$$\begin{cases} T_0' = \frac{X_r + X_m}{2\pi f_s R_r} \\ X_0 = X_r + X_m \end{cases}$$

式中： f_s 为电网频率； R_r 为转子电阻。

风电机组机电动力学方程为

$$\frac{ds}{dt} = \frac{P_m - P_e}{2H(1-s)} \quad (13)$$

式中： H 为惯性系数； P_e 为电磁功率，计算式为

$$P_e = P_e'(1-s) = \text{Re}\{E' I_s^*\} \quad (14)$$

当风电机组处于稳态运行时，假设其初值为 E_0' 、 s_0 、 I_{s0} 、 U_0 。发生小扰动后，在平衡点附近线性化并将 2 阶无穷小变量 $\Delta E' \Delta s$ 和 $\Delta E' \Delta E'^*$ 忽略，可以得到以下状态方程^[21]：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta E_r' \\ \Delta E_m' \\ \Delta s \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -K_7 & \omega_s s_0 + K_8 & \omega_s E_{r0}' \\ -\omega_s s_0 - K_8 & -K_7 & -\omega_s E_{m0}' \\ -\frac{K_9}{h} & -\frac{K_{10}}{h} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta E_r' \\ \Delta E_m' \\ \Delta s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{h} \end{bmatrix} \mathcal{G} B(t) \end{aligned} \quad (15)$$

式中 E_r' 和 E_m' 分别为 E' 实部和虚部。其他计算如下：

$$K_7 + jK_8 = \frac{1}{T'_0} \left[1 + \frac{j(X_0 - X')}{R_s + jX' + Z_{eq}} \right]$$

式中 Z_{eq} 为母线等值阻抗。 $K_9 = -G + \operatorname{Re}\{I_{s0}\}$; $K_{10} = -B + \operatorname{Im}\{I_{s0}\}$; $G + jB = \underline{E}'_0 / (R_s - jX' + Z_{eq}^*)$; $h = 2H(1 - s_0)$ 。

从式(15)的形式可知, 由于 $B(t)$ 为 Wiener 过程, 因此式(15)是一个随机微分方程。

3 电力系统随机小干扰稳定建模与分析

本节将从一个简单的双机无穷大系统入手, 分析电力系统随机小干扰稳定机理。考虑一个如图 2 所示的系统, 其中 G1 为同步电机。

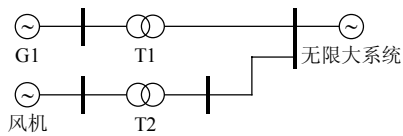


图2 双机无穷大系统

Fig. 2 Two-machine infinite-bus system

建立该系统的随机状态方程, 其中风机采用上节提出的随机动态模型, 同步电机模型采用经典 3 阶模型^[22]:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta\delta \\ \Delta\omega \\ \Delta E'_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_0 & 0 \\ -\frac{K_1}{T_j} & -\frac{D}{T_j} & -\frac{K_2}{T_j} \\ -\frac{K_4 + K_c K_5}{T'_{d0}} & 0 & -\frac{1 + K_3 K_c K_6}{K_3 T'_{d0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\delta \\ \Delta\omega \\ \Delta E'_q \end{bmatrix} \quad (16)$$

式中: δ 为同步发电机功角; ω 为同步发电机转速; E'_q 为 q 轴暂态电势。其他各参数意义及计算见附录 B。

将式(15)与式(16)联立, 可得到图 2 所示系统的随机状态方程:

$$d\Delta X(t) = A\Delta X(t)dt + KdB_t \quad (17)$$

其初始平衡状态为 $\Delta X(0)$ 。其中: $\Delta X = [\Delta\delta \ \Delta\omega \ \Delta E'_q \ \Delta E'_r \ \Delta E'_m \ \Delta s]^T$, $A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$,

$$K = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ g/h]^T, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \omega_0 & 0 \\ -K_1/T_j & -D/T_j & -K_2/T_j \\ -(K_4 + K_c K_5)/T'_{d0} & 0 & -(1 + K_3 K_c K_6)/(K_3 T'_{d0}) \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -K_7 & \omega_s s_0 + K_8 & \omega_s E'_{r0} \\ -\omega_s s_0 - K_8 & -K_7 & -\omega_s E'_{m0} \\ -K_9/h & -K_{10}/h & 0 \end{bmatrix}.$$

式(17)是一个 n 维随机微分方程, 其解是一个随机过程。要分析系统(17)的稳定性, 传统的稳定

性定义已经不再适用, 此处给出随机稳定性的定义。确定性情况下电力系统的稳定性定义为系统在遭受干扰后能够恢复到可以容许的平衡状态。而随机情形下系统的稳定性定义有许多种, 此处选用较普遍的矩稳定性定义。

随机 p 阶矩稳定 令 $\Delta X(t_0)$ 为随机微分方程系统(17)的初始平衡状态, 若式(17)给出的 $\Delta X(t)$ 满足:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E \|\Delta X(t)\|_p < c \quad (18)$$

式中 c 为非负常数, 则称 $\Delta X(t_0)$ 是随机 p 阶矩稳定。特别地, 若 $c=0$, 则称 $\Delta X(t_0)$ 是随机渐近 p 阶矩稳定。

通常比较关心的是 $p=1$ 和 $p=2$ 时的矩稳定性, 它们分别代表着随机激励影响的系统在 $t \rightarrow +\infty$ 时, 其响应的均值和方差是有界的。下文根据矩稳定性定义分析系统的随机稳定性。

首先推导式(17)的解析解形式, 将其两端同时乘以 $\exp(-At)$, 可得:

$$\exp(-At)d\Delta X(t) - \exp(-At)A\Delta X(t)dt = \exp(-At)KdB_t \quad (19)$$

式中 $n \times n$ 矩阵 F 的 $\exp(F)$ 运算定义为

$$\exp(F) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} F^n \quad (20)$$

令 g 为 $[0, \infty) \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的映射:

$$g(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \exp(-At)[x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T \quad (21)$$

应用伊藤公式, 可得:

$$d(\exp(-At)\Delta X(t)) = (-A)\exp(-At)\Delta X(t)dt + \exp(-At)d\Delta X(t) \quad (22)$$

代入式(19), 可得:

$$d(\exp(-At)\Delta X(t)) = \exp(-At)KdB_t \quad (23)$$

对两边从 0 到 t 积分, 有:

$$\exp(-At)\Delta X(t) - \Delta X(0) = \int_0^t \exp(-As)KdB_s \quad (24)$$

因此,

$$\Delta X(t) = \exp(At)[\Delta X(0) + \int_0^t \exp(-As)KdB_s] \quad (25)$$

显然系统的稳定性由式(25)决定, 但要得到其具体形式是非常困难的, 这是因为 $\exp(At)$ 的计算非常困难。然而, 与确定性情况类似, 可以通过分析 $\Delta X(t)$ 的一些性质来分析系统的稳定性。

式(25)由 2 部分组成, 一部分是确定性的:

$$\exp(\mathbf{A}t)\Delta\mathbf{X}(0) \quad (26)$$

另一部分是一个随机过程:

$$\xi_t = \exp(\mathbf{A}t) \int_0^t \exp(-\mathbf{A}s) \mathbf{K} d\mathbf{B}_s \quad (27)$$

对于第一部分, 即式(26)为一个确定性系统

$$d\Delta\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}\Delta\mathbf{X}(t)dt \quad (28)$$

的解析解, $t \rightarrow +\infty$ 时, $\exp(\mathbf{A}t)\Delta\mathbf{X}(0)$ 的值取决于 \mathbf{A} 的特征值。令 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为矩阵 \mathbf{A} 的特征值, 则 $t \rightarrow +\infty$ 时, 对于任意 $\Delta\mathbf{X}(0)$, 若有

$$\operatorname{Re}(\lambda_1), \operatorname{Re}(\lambda_2), \dots, \operatorname{Re}(\lambda_n) < 0 \quad (29)$$

则 $\exp(\mathbf{A}t)\Delta\mathbf{X}(0) \rightarrow 0$ 。

显然, 若式(29)不成立, 则原随机系统(17)也是不稳定的。下文将在式(29)成立的基础上进一步讨论原随机系统的稳定性。

对于随机过程(27), 有:

$$E\xi_t = \exp(\mathbf{A}t)E\left[\int_0^t \exp(-\mathbf{A}s) d\mathbf{B}_s\right] \mathbf{K} = 0 \quad (30)$$

即

$$E(\Delta\mathbf{X}(t)) = \exp(\mathbf{A}t)E(\Delta\mathbf{X}(0)) \quad (31)$$

下文求 $\Delta\mathbf{X}(t)$ 的协方差矩阵:

$$\begin{aligned} \operatorname{var}(\Delta\mathbf{X}(t)) &= E(\Delta\mathbf{X}(t)\Delta\mathbf{X}(t)^T) - \\ &E(\Delta\mathbf{X}(t))E(\Delta\mathbf{X}(t))^T \end{aligned} \quad (32)$$

而

$$\begin{aligned} E(\Delta\mathbf{X}(t))E(\Delta\mathbf{X}(t)^T) &= \\ \exp(\mathbf{A}t)E(\Delta\mathbf{X}(0))E(\Delta\mathbf{X}(0)^T)\exp(\mathbf{A}^T t) \end{aligned} \quad (33)$$

且有

$$\begin{aligned} E(\Delta\mathbf{X}(t)\Delta\mathbf{X}(t)^T) &= \\ \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{K}\mathbf{K}^T - \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{K}\mathbf{K}^T\exp(\mathbf{A}^T t))(\mathbf{A}^T)^{-1} \end{aligned} \quad (34)$$

(证明要应用到矩阵运算知识及伊藤等距性质, 具体见附录 C), 所以有:

$$\begin{aligned} \operatorname{var}(\Delta\mathbf{X}(t)) &= \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{K}\mathbf{K}^T - \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{K}\mathbf{K}^T\exp(\mathbf{A}^T t))(\mathbf{A}^T)^{-1} - \\ &\exp(\mathbf{A}t)E(\Delta\mathbf{X}(0))E(\Delta\mathbf{X}(0)^T)\exp(\mathbf{A}^T t) \end{aligned} \quad (35)$$

显然 $t \rightarrow +\infty$ 时, 若式(29)成立, 则对于任意有限方差的初值 $\Delta\mathbf{X}(0)$, 有

$$E\Delta\mathbf{X}(t) \rightarrow 0 \quad (36)$$

$$\operatorname{var} \Delta\mathbf{X}(t) \rightarrow \mathbf{A}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{K}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \quad (37)$$

可见 $t \rightarrow +\infty$ 时, 初值 $\Delta\mathbf{X}(0)$ 的影响越来越小, 而 $\Delta\mathbf{X}(t)$ 具有期望为 0 的正态极限分布。它表示小扰动发生后, 系统的解在长时间运行后稳定在与初值无关的按正态分布的位置, 其中协方差矩阵

$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{K}^T (\mathbf{A}^{-1})^T$ 表示随机波动 $\mathbf{K} d\mathbf{B}_t$ 与阻尼 $\mathbf{A}\Delta\mathbf{X}(t)$ 之间的平衡结果, 协方差矩阵的对角线元素即为系统各个状态变量的极限边际分布方差。根据以上推导分析可以得到以下结论。

令 $\Delta\mathbf{X}(t_0)$ 为有随机激励的系统 $d\Delta\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}\Delta\mathbf{X}(t)dt + \mathbf{K}d\mathbf{B}_t$ 的初始平衡状态, 若 $\Delta\mathbf{X}(t_0)$ 的期望和方差有界, 且状态矩阵 \mathbf{A} 的所有特征值的实部均小于 0, 则 $\Delta\mathbf{X}(t_0)$ 是随机渐近 1 阶矩稳定且随机 2 阶矩稳定的。

再来观察 $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{K}^T (\mathbf{A}^{-1})^T$ 的结构, 由于 \mathbf{K} 为仅有 1 个元素不为 0 的列向量, 通过矩阵运算可以证明, 协方差矩阵有以下形式:

$$\operatorname{var} \Delta\mathbf{X}(t) \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (38)$$

式中: $\mathbf{0}_{3 \times 3}$ 为 3×3 的 0 矩阵; $\mathbf{R}_{3 \times 3}$ 为 3×3 的实矩阵。

由式(38)可知: 在用随机微分方程描述的系统, 当系统状态方程的特征根实部均小于 0 时, 即使异步风机存在机械功率的随机波动, 表示同步机的状态变量 $\Delta\delta$ 、 $\Delta\omega$ 、 $\Delta E'_q$ 在扰动发生后的稳态运行点仍将趋向于常数 0, 这和确定性系统是相同的; 而存在功率波动的异步机将运行在按正态分布的极限位置上。系统状态变量轨迹的振荡模式同样由矩阵 \mathbf{A} 的特征值决定。

4 算例分析

本节在第 3 节图 2 所示的双机无穷大系统上进行仿真分析, 同步机和异步风机的参数分别由文献[11,21]中得到, 异步风机机械功率波动强度 J 取 1。应用于随机微分方程(17), 可以得到:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 377 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.193 & 0 & -0.148 & 0 & 0 & 0 \\ -0.194 & 0 & -0.136 & 35 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6.167 & 8 & -2.285 \\ 0 & 0 & 0 & 2.285 & 4 & -6.167 \\ 0 & 0 & 0 & 0.010 & 5 & 0.663 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.164 \ 2]^T$$

表 1 是系统的特征值、振荡频率及阻尼比。表中特征值实部全部小于 0, 故系统的稳态分布随机状态向量期望为 0, 协方差矩阵由式(38)可得:

$$\operatorname{var} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \begin{bmatrix} 0.307 \ 6 \times 10^{-3} & -0.434 \ 7 \times 10^{-2} & 0.102 \ 8 \times 10^{-3} \\ -0.434 \ 7 \times 10^{-2} & 0.614 \ 2 \times 10^{-1} & -0.145 \ 2 \times 10^{-2} \\ 0.102 \ 8 \times 10^{-3} & -0.145 \ 2 \times 10^{-2} & 0.343 \ 4 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (39)$$

表 1 系统振荡模式
Tab. 1 System oscillation mode

振荡模式	λ	f/Hz	阻尼比/%
1	$-0.0729 \pm j8.5193$	1.3559	0.8557
2	-1.2177	0	100
3	-6.5963	0	100
4	$-2.8696 \pm j13.2487$	2.1086	21.1686

系统状态方程特征值实部均小于 0，因此系统应是随机渐进 1 阶矩稳定及 2 阶矩稳定的。利用数值仿真得到小干扰后系统部分状态变量：风机暂态电势的虚部 E'_m 和滑差 s 的响应曲线如图 3、4 所示，同步机的 δ 和 E'_q 的响应曲线如图 5、6 所示。

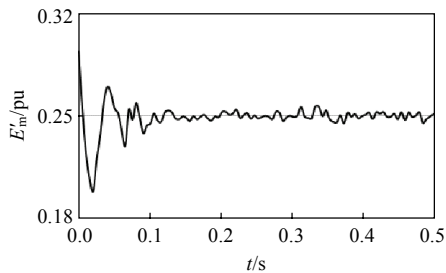


图 3 异步风机状态变量 E'_m 小干扰响应曲线
Fig. 3 Response of E'_m of asynchronous wind turbine under small disturbance

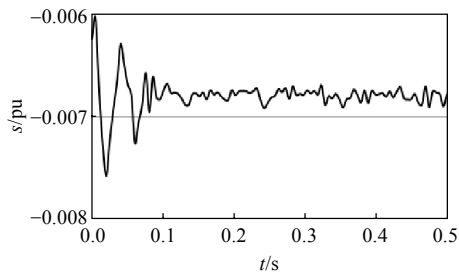


图 4 异步风机状态变量 s 小干扰响应曲线
Fig. 4 Response of s of asynchronous wind turbine under small disturbance

由图 3、4 可知，异步风机在小扰动后由于机械功率的随机波动，其运行点稳定在以扰动前运行点为期望的正态分布区间内，其变化幅度即方差(由式(39)给出)与机械功率的波动强度有关。这里给出的小扰动后风机状态量的随机动态过程对控制器的设计能起到更好的指导作用。

图 5、6 表明，同步发电机在小扰动后其运行点稳定在扰动前的稳态初始值，并没受到异步风机机械功率随机波动的影响。

5 结论

本文提出了一种在随机空间下电力系统小干

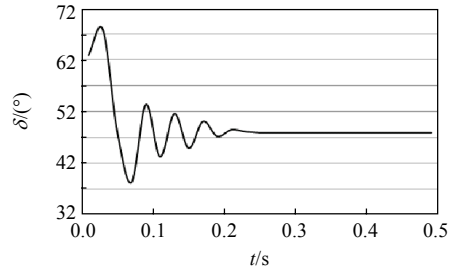


图 5 同步发电机状态变量 δ 小干扰响应曲线
Fig. 5 Response of δ of synchronous generator under small disturbance

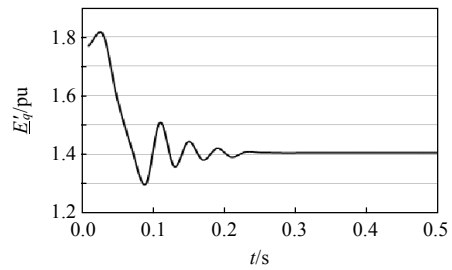


图 6 同步发电机状态变量 E'_q 小干扰响应曲线
Fig. 6 Response of E'_q of synchronous generator under small disturbance

扰稳定建模和分析方法以及一种随机稳定性定义。选取风机机械功率作为随机输入，建立了基于 Wiener 过程的异步风机的随机动态模型。以含异步风机及同步发电机的双机无穷大系统为例，建立了基于随机微分方程的小干扰稳定分析模型，给出了随机状态方程的解析解，揭示了随机激励下系统小干扰稳态特性及轨迹，采用 1 阶、2 阶矩稳定性定义进一步刻画随机稳定性特征。该研究基于随机动态模型分析系统的随机稳定性问题，能更准确地描述系统动态过程，所得结果能更好地服务于系统稳定控制。本文研究方法有望进一步拓宽到状态方程具有随机系数的系统稳定性分析中。

参考文献

[1] 杨黎晖, 马西奎. 双馈风电机组对电力系统低频振荡特性的影响[J]. 中国电机工程学报, 2011, 31(10): 19-25.
Yang Lihui, Ma Xikui. Impact of doubly fed induction generator wind turbine on power system low-frequency oscillation characteristic[J]. Proceedings of the CSEE, 2011, 31(10): 19-25(in Chinese).
[2] 张红光, 张粒子, 陈树勇, 等. 大容量风电场对电力系统小干扰稳定和阻尼特性的影响[J]. 电网技术, 2007, 31(13): 75-80.
Zhang Hongguang, Zhang Lizhi, Chen Shuyong, et al. Influence of large scale wind farms on power system small

- signal stability and damping characteristic[J]. Power System Technology, 2007, 31(13): 75-80(in Chinese).
- [3] 李媛媛, 邱跃丰, 马世英, 等. 风电机组接入对系统小干扰稳定性的影响研究[J]. 电网技术, 2012, 36(8): 50-55.
- Li Yuanyuan, Qiu Yuefeng, Ma Shiyong, et al. Impact of grid connected wind turbine generators on small signal stability of power grid[J]. Power System Technology, 2012, 36(8): 50-55(in Chinese).
- [4] 关宏亮, 迟永宁, 戴慧珠, 等. 异步风电机组接入系统的小干扰稳定及控制[J]. 电力系统及其自动化, 2008, 32(4): 54-58.
- Guan Hongliang, Chi Yongning, Dai Huizhu, et al. Small signal stability and control of wind turbine with asynchronous generator integration into power system[J]. Automation of Electric Power Systems, 2008, 32(4): 54-58(in Chinese).
- [5] Huang Hui, Mao Chengxiong, Lu Jiming. Small-signal modeling and analysis of wind turbine with direct drive permanent magnet synchronous generator connected to power grid[J]. IET Renewable Power Generation, 2012, 6(1): 48-58.
- [6] Wu Feng, Zhang Xiaoping, Ju Ping. Small signal stability analysis and optimal control of a wind turbine with doubly fed induction generator[J]. IET Generation, Transmission and Distribution, 2007, 1(5): 751-760.
- [7] Nwankpa C, Shahidepour S M, Schuss Z. A stochastic approach to small signal disturbance stability analysis[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 1992, 7(4): 1519-1528.
- [8] Jose R, Delia G, Istvan E. Assessment and enhancement of small signal stability considering uncertainties[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2009, 24(1): 198-207.
- [9] Agreira F, Jesus F, de Figueiredo L. Probabilistic steady-state security assessment of an electric power system using a monte carlo approach[C]//Proceedings of the 41st International Universities Power Engineering Conference. Newcastle: Northumbria University, 2006: 1011-1015.
- [10] Jahromi N, Papefthymiou G, Sluis L. An analytical approach to the indication of small disturbance angle stability in future power systems[C]//43rd International Universities Power Engineering Conference. Padova, Italy: University of Padova, 2008: 1-5.
- [11] Su Buqing, Du W, Chen L. Probabilistic analysis of small-signal stability of large-scale power systems as affected by penetration of wind generation[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2012, 27(2): 762-770.
- [12] Wang K, Tse C, Tsang K. Algorithm for power system dynamic stability studies taking account the variation of load power[C]//4th International Conference on Advances in Power System Control Operation and Management. HongKong: IEE Hong Kong, 1997: 445-450.
- [13] Chung C, Wang K, Tse X. Probabilistic eigenvalue sensitivity analysis and PSS design in multimachine systems[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2003, 18(4): 1439-1445.
- [14] Chung C, Wang K, Tse X. Probabilistic design of FACTS device for power system small signal stability enhancement[C]//Proceedings of the 18th International Conference on Electricity Distribution. Turin: CIRED, 2005: 1-4.
- [15] 杜文娟, 卜思齐, 王海风. 考虑并网风电随机波动的电力系统小干扰概率稳定性分析[J]. 中国电机工程学报, 2011, 31(s1): 7-11.
- Du Wenjuan, Bu Siqi, Wang Haifeng. Effect of stochastic variation of grid-connected wind generation on power system small-signal probabilistic stability[J]. Proceedings of the CSEE, 2011, 31(s1): 7-11(in Chinese).
- [16] Faried S, Billinton R, Aboreshaid S. Probabilistic evaluation of transient stability of a power system incorporating wind farms[J]. IET Renewable Power Generation, 2010, 4(4): 299-307.
- [17] Zhao Y, Zhao J, Hill D. Numerical simulation for stochastic transient stability assessment[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2012, 27(4): 1741-1749.
- [18] Odun-Ayo T, Crow M. Structure-preserved power system transient stability using stochastic energy functions[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2012, 27(3): 1450-1458.
- [19] 胡宣达. 随机微分方程稳定性理论[M]. 南京: 南京大学出版社, 1986: 63-64.
- Hu X. Stability theory of stochastic differential equations[M]. Nanjing: Nanjing University Press, 1986: 63-64(in Chinese).
- [20] Oksendal B. Stochastic differential equations-An introduction with applications(fifth edition)[M]. New York: Springer-Verlag, 1994: 21-54.
- [21] Pidre J, Carrillo C, Lorenzo A. Probabilistic model for mechanical power fluctuations in asynchronous wind parks[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2003, 18(2): 761-768.

附录 A Wiener 过程、代数、流与适应过程:

Wiener 过程定义 若一个随机过程 $B = \{B_t, t \geq 0\}$ 满足: 1) $B_0 = 0$; 2) $E(B_t) = 0$; 3) $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$.

其中 $N(0, t-s)$ 为期望为 0, 方差为 $t-s$ 的正态分布, 则称 B_t 为 Wiener 过程。

σ 代数 数学中某个集合 X 上的 σ 代数又叫 σ 域, 是 X 的幂集的一个子集, 这个子集满足对于可数个集合的并集运算

和补集运算的封闭性,严格定义如下。设 X 为非空集合,满足以下条件的集合系 \mathcal{Q} 称为 X 上的一个 σ 代数: 1) X 在 \mathcal{Q} 中; 2) 若集合 A 在 \mathcal{Q} 中,那么它的补集 A^c 也在 \mathcal{Q} 中; 3) 若可数个集合 A_1, A_2, \dots, A_n 在 \mathcal{Q} 中,那么它们的并集也在 \mathcal{Q} 中。

对于确定的 σ 代数, X 的子集中属于 \mathcal{Q} 的称为可测集合,而在概率论中,这些集合被称为随机事件。

可测空间 (Ω, \mathcal{F}) 上一族 σ 代数 $\{F_t, t \in \mathbf{R}^+\}$ 满足 $F_t \subset F$ 且对于任意 $s < t$, $F_s \subset F_t$, 则称 $\{F_t, t \in \mathbf{R}^+\}$ 为流 (filtration), 记为 (F_t) 。

适应过程 若对于任意 t , $X_t \in F_t$, 则称 X_t 为 (F_t) -适应过程。

伊藤随机过程 令 B_t 为一维 Wiener 过程, 若对于任意 $t \geq 0$, 函数 u 和 v 满足以下条件: 1) $P(\int_0^t v(s)^2 ds < \infty) = 1$; 2) $P(\int_0^t |u(s)| ds < \infty) = 1$ 。则形如下式的随机过程 X_t 称为伊藤随机过程:

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s, X_s) ds + \int_0^t v(s, X_s) dB_s$$

附录 B 同步电机模型

同步电机模型如下:

$$\begin{cases} K_1 = \frac{E'_q U}{x'_{d\Sigma}} \cos \delta_0 + U^2 \frac{x'_{d\Sigma} - x_{q\Sigma}}{x'_{d\Sigma} x_{q\Sigma}} \cos(2\delta_0) \\ K_2 = \frac{U}{x'_{d\Sigma}} \sin \delta_0 \\ K_3 = \frac{x'_{d\Sigma}}{x_{d\Sigma}} \\ K_4 = \frac{x_{d\Sigma} - x'_{d\Sigma}}{x'_{d\Sigma}} U \sin \delta_0 \\ K_5 = \frac{U_{Gd|0} U x_q \cos \delta_0}{U_{G|0} x_{q\Sigma}} - \frac{U_{Gq|0} U x'_d \sin \delta_0}{U_{G|0} x'_{d\Sigma}} \\ K_6 = \frac{U_{Gq|0} (x_{d\Sigma} - x_d)}{U_{G|0} x'_{d\Sigma}} \end{cases}$$

式中: U 为母线电压; U_G 为发电机端电压; x_d 为发电机 d 轴同步电抗; $x_{d\Sigma}$ 为计入了输电系统总电抗后的 d 轴总同步电抗; x'_d 为发电机 d 轴暂态电抗; $x'_{d\Sigma}$ 为计入了输电系统总电抗后的 d 轴暂态总电抗; x'_{d0} 为发电机定子开路时励磁绕组时间常数。

附录 C 协方差矩阵推导证明

协方差矩阵推导证明如下:

$$\begin{aligned} E(\Delta X(t) \Delta X(t)^T) &= E(\exp(A t) \int_0^t \exp(-A s) K dB_s \cdot \\ &\int_0^t K^T \exp(-A^T s) dB_s^T \exp(A^T t)) = \\ &E(\int_0^t \exp(A(t-s)) K dB_s \int_0^t K^T \exp(A^T(t-s)) dB_s^T) = \\ &E(\int_0^t \exp(A(t-s)) K K^T \exp(A^T(t-s)) ds) = \\ &A^{-1} [K K^T - \exp(A t) K K^T \exp(A^T t)] (A^T)^{-1} \end{aligned}$$



周明

收稿日期: 2013-11-18。

作者简介:

周明(1967), 女, 博士, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为电力系统优化运行、电力系统规划与可靠性、电力市场等, zhouming@ncepu.edu.cn;

元博(1987), 男, 博士研究生, 主要研究方向新能源电力系统优化、稳定性分析;

张小平(1964), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为智能电网技术、可再生能源发电系统、FACTS 和 HVDC 的建模与控制、电力市场;

李庚银(1964), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事新能源电力系统、电能质量、新型输配电技术等方面的研究。

(责任编辑 刘浩芳)