GeoGebra 点运算的使用小结

华南师范大学　肖建伟　2019/7/17

GeoGebra 虽然只是一款轻量级的数学软件，但它的解析和代数能力是非常强大的，其中一点就体现在对“点运算”的处理上。下面，我们来总结一下点运算在 GeoGebra 中的一些用法。

一、点运算的运算规则

首先需要指出的是，GGB 中的点具有向量和复数的双重性质，点运算本质上是向量运算或复数运算。

向量运算：空间中的点和向量一一对应，对应关系为：空间中的一点 A，对应于以原点O为起点，A 为终点的向量$\overrightarrow{OA}$。

在下面我们将看到，点的加减法、乘法、向量积运算，遵循向量的运算法则。

复数运算：平面上的点和复数一一对应，对应关系为：平面上的一点 A，对应的复数为$x_A + y_A\, i$

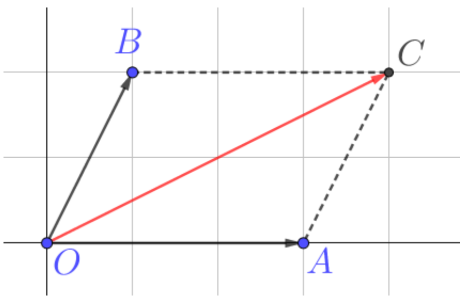
点的除法运算及其它运算，遵循复数的运算法则。

1. 点的加法运算

运算规则与向量的加法一致：对应的坐标分量相加，**结果得到的是一个点**。以平面上的点为例，设 A=（x_1,y_1），B=（x_2,y_2），那么

$$A+B=（x_1+x_2,y_1+y_2）$$

假设 C=A+B，那么点 C 就是 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 的终点，也就是以 OA、OB 为邻边的、与∠O成对角的平行四边形的顶点。



点与数值混合运算：GeoGebra 支持点和数值的混合运算，如果 a 为一个数

值，那么

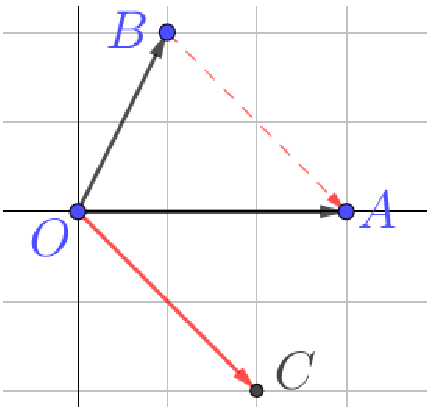
$$A + a = A + (a, a) = (x_1 + a, y_1 + a)$$

2. 点的减法运算

运算规则与向量的减法一致：对应的坐标分量作差，**结果得到的是一个点。** 以平面上的点为例：

$$A - B = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

假设 C=A-B，那么点 C 就是 $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ 的终点，也就是向量 $\overrightarrow{BA}$ 的终点（**把 $\overrightarrow{BA}$ 的起点平移到原点**）。



点与数值的混合运算：

$$A - a = A - (a, a) = (x_1 - a, y_1 - a)$$

3. 点的乘法运算（数量积运算）

运算规则与向量的数量积一致：对应的坐标分量相乘并求和，**结果是一个数值**。以平面上的点为例：

$$A * B = x_1x_2 + y_1y_2$$

也就是说，两点相乘，结果是与这两点对应的两个向量的数量积，即

$$A * B = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$$

值得一提的是，A^2的效果等同于$A * A$，但指数取其它数值就没有定义了。

点与一个数值相乘，运算规则同向量的数乘：$A * a = (ax_1, ay_1)$

4. 点的除法运算

运算规则与复数的除法一致：平面上的两个点作除法运算，等同于与这两点对应的两个复数作除法运算，**得到的是一个复数（复平面上的点）。**

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\frac{x_1+y_1\,i}{x_2+y_2 i}$$

5. 点的向量积运算

GeoGebra 中的点也能进行类似于向量积的运算，运算规则是：A、B 两点做“向量积”运算，**结果是一个数值**，该数值的大小为$|\overrightarrow{OA}|\,|\overrightarrow{OB}|sin\theta$，$\theta$是$\overrightarrow{OA}$向$\overrightarrow{OB}$转过的角度，且选取逆时针方向为正方向，即：

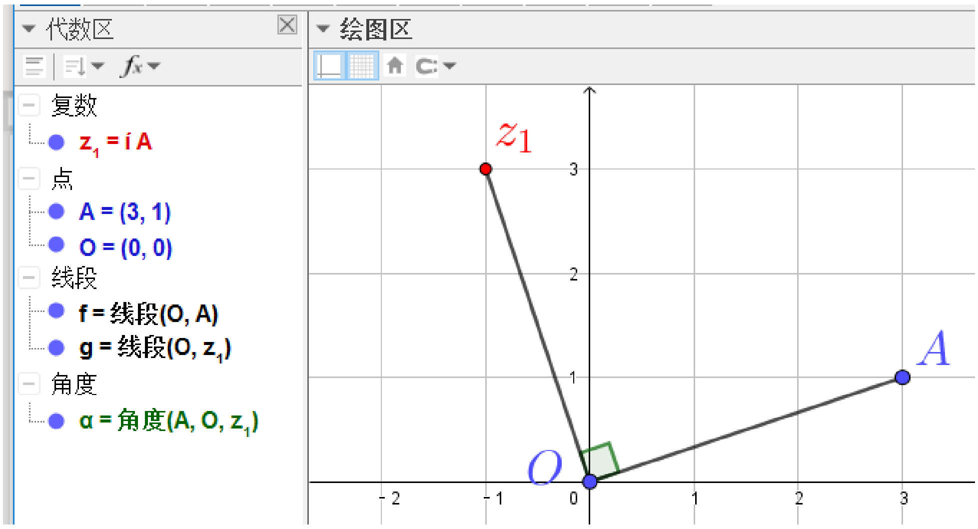
$$\mathrm{A}\otimes\mathrm{B}=|\overrightarrow{OA}|\,|\overrightarrow{OB}|sin\theta$$

其中“⊗”是 GeoGebra 中向量积的表示符号。

6. 点的复数运算

除了点的除法运算外，在 $\sqrt{\mathrm{A}}$、A^B 等形式的运算中，也是把点看作是复数来进行处理的，这些运算与复数的运算法则一致，且运算结果为一复数（复平面上的点）。由于这些特殊运算平时很少用到，所以本文不作具体讨论。

其中有一个比较实用的是：**用虚实单位 i 乘上一个点，效果等同于将这个点绕原点逆时针旋转 90°**，如下图所示：



二、点运算的应用举例

1. 获取某些几何参数

例 1　求点到原点的距离

输入：abs(A)

例 2　求两点的距离

输入：abs(A-B)或 abs(B-A)

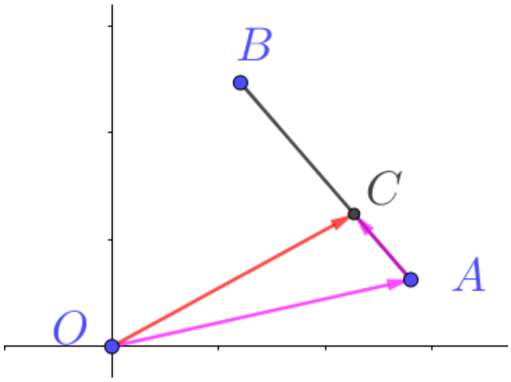
例 3　获取$\overrightarrow{AB}$的单位向量

输入：单位向量(B-A)

或　　　　向量((B-A)/abs(B-A))

2.绘制特定位置的点

例 4　绘制线段 AB 的 3 等分点 C（靠近点 A 侧）。



因为$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，所以采用点运算的方法，点 C 的位置可以这样来确定：

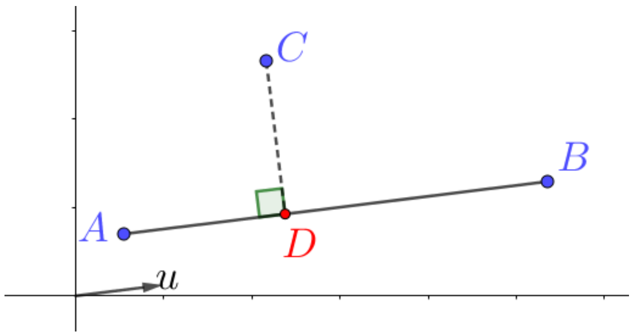
C=A+1/3（B-A）

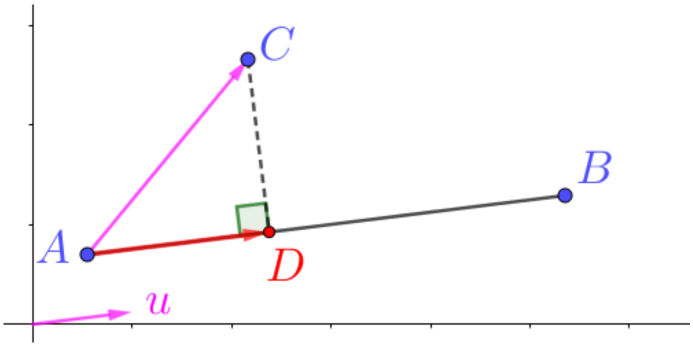
进一步地，采用这个方法还可以绘制出线段上满足其它特定比例的点。

例 5　获取△ABC 的重心位置

输入：1/3（A+B+C）

例 6　作点 C 在线段 AB 上的垂足 D





根据数量积的知识，A 到 D 的距离（相对位置）d 可由以下数量积给出：

$$d = \overrightarrow{AC} \cdot \vec{u}$$

其中，$\vec{u}$为 $\overrightarrow{AB}$ 的单位向量。那么，点 D 的位置可表示为：

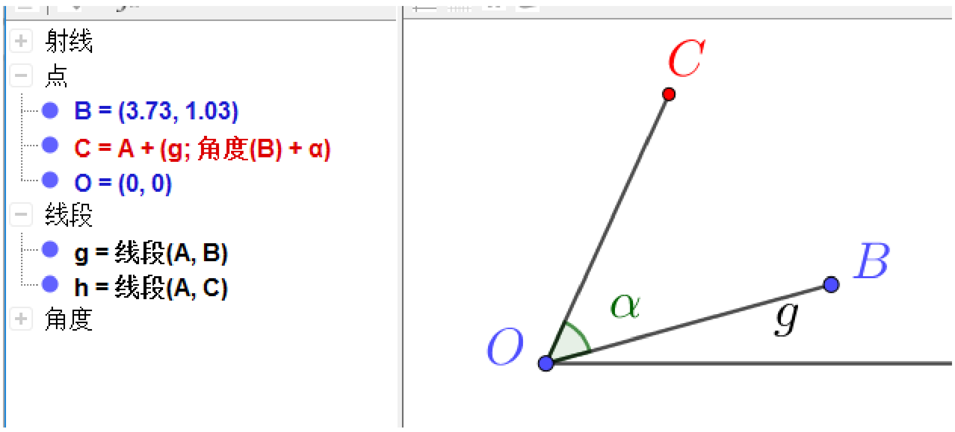
$$\mathrm{D} = \mathrm{A} + \mathrm{d}\vec{u} = A + (\overrightarrow{AC} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{u}$$

相应地，在 GeoGebra 中这样输入指令：

$$\mathrm{D} = \mathrm{A} + (\mathrm{C} - \mathrm{A})\, u\, u$$

这种方法对于垂足在线段延长线外的情况也是适用的。

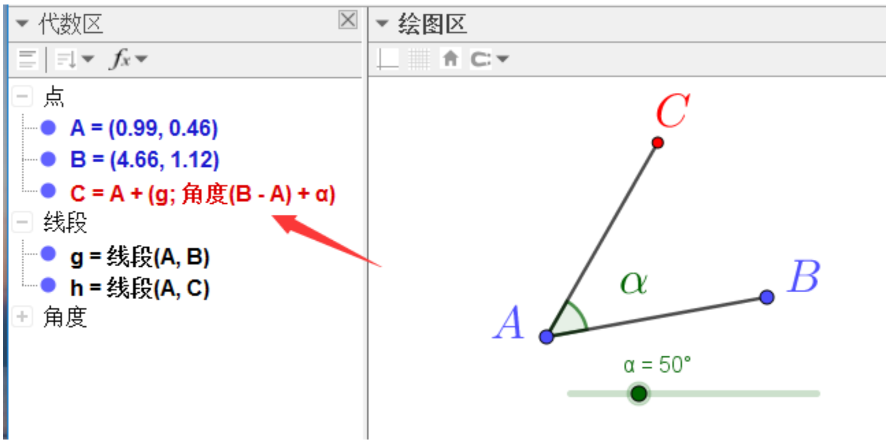
例 7.1　作点 B 绕原点旋转α后的一点 C



指令：A + (g;　角度(B) + α)

这里采用了极坐标下的坐标写法。其中，g 为线段 AB 的长度，“角度(B)”表示点 B 的极角，关于极坐标的具体用法请参考【1】。

例 7.2 作点 B 绕点任意一点 A 旋转α后的一点 C

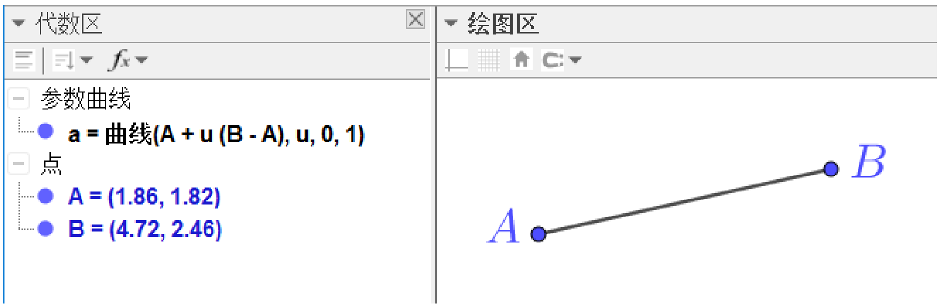


指令：A + (g; 角度(B - A) + α)

其中，g 为 AB 长度，“角度(B-A)”表示 B-A 所得到的点的极角。

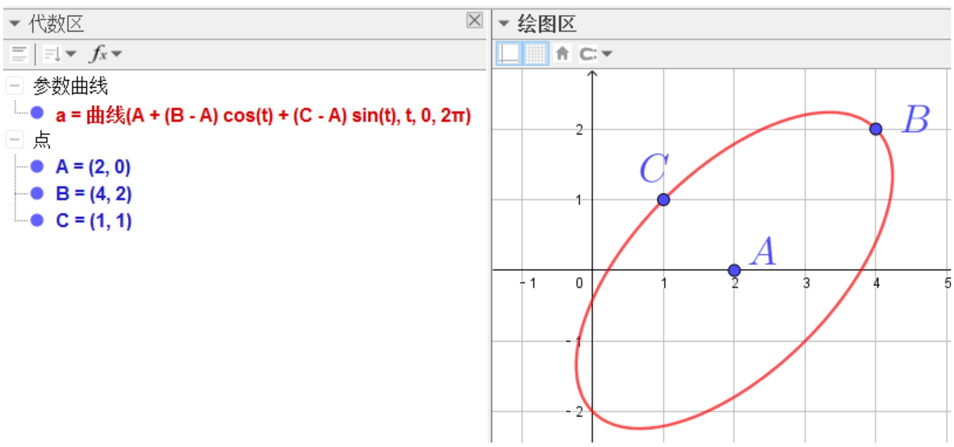
3. 绘制参数曲线

例 8 绘制以 A、B 为端点的参数曲线（线段）



指令：曲线（A+t(B-A), t, 0, 1）

例 9 绘制非标准椭圆



设椭圆中心为 A，长短轴的两个顶点分别为 B、C，（图中 AB⊥AC）。指令：

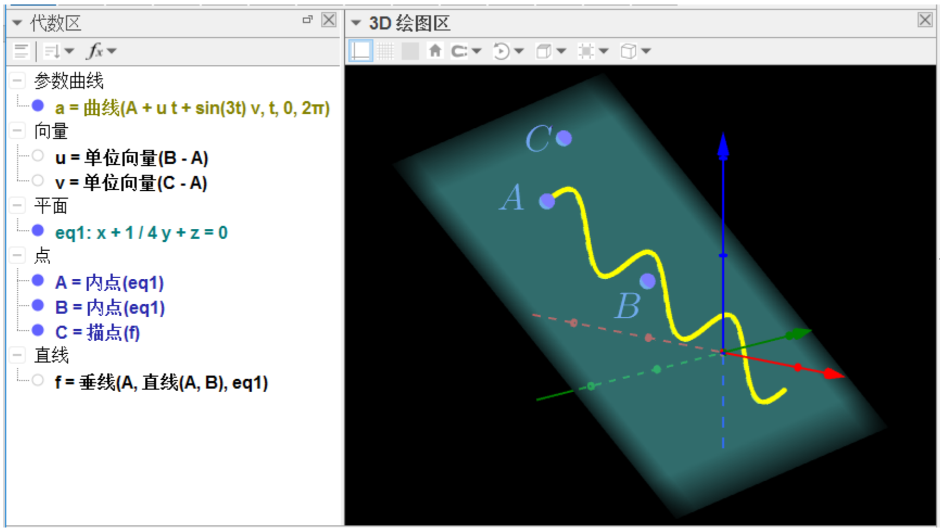
曲线(A + (B - A) cos(t) + (C - A) sin(t), t, 0, 2π)

用同样的方法，可以非常方便地绘制出三维空间中的椭圆（圆）。

例 10 绘制空间中给定平面上的曲线

如下图，绘制一个在蓝色平面上的正弦曲线。其中，ABC 均为平面上的点，且 AB⊥AC，u、v 分别为$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$的单位向量。那么，以 AB 为“x 轴”，AC 为“y 轴”的正弦曲线的方程可这样来写：

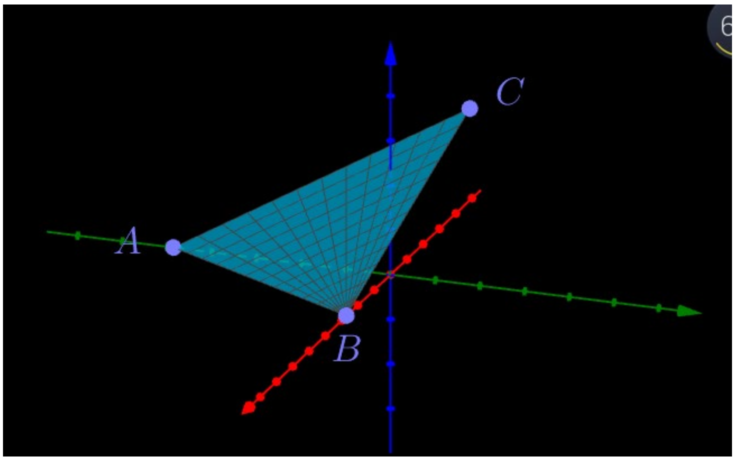
曲线(A + u t + sin(3t) v, t, 0, 2π)



4. 绘制曲面

例 11 绘制空间中由三点所围成的平面区域，指令：

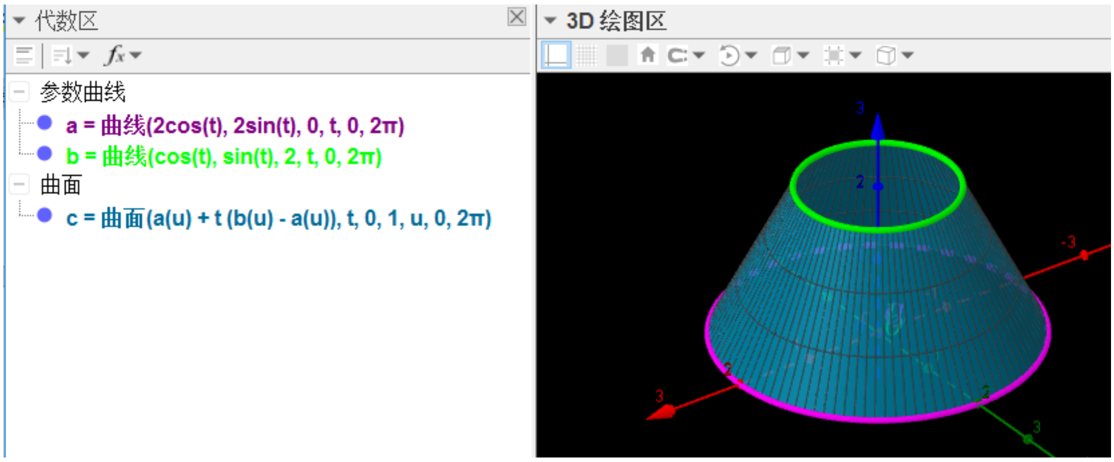
曲面(A + u (B - A) + (1 - u) v (C - A), u, 0, 1, v, 0, 1)



例 12 绘制圆台的侧面，指令：

曲面(a(u) + t (b(u) - a(u)), t, 0, 1, u, 0, 2π)

其中，a 为圆台下底面圆周的曲线方程，b 为上底面圆周的曲线方程。该指令的具体理解可参考【2】。



结语

GeoGebra 中的点运算，本质上是向量或复数运算，灵活地运用这一算法，在几何作图中能够达到事半功倍的效果。

参考资料

【1】潘立强，《geogebra 中极坐标的使用小结》

【2】赵林，《GeoGebra 中一类曲面的作法(以牟合方盖为例)》