# Tarea 1:

Juan Gerardo Fuentes Almeida

**Abstract**—Se demuestra analíticamente el Teorema de Taylor a partir del Teorema del Valor Medio y del Teorema Fundamental del Cálculo

## 1 INTRODUCCIÓN

EL Teorema de Taylor nos permite aproximar una función derivable dentro de una vecindad cercana alrededor de un punto mediante un polinomio cuyos coeficientes dependen de las derivadas de la función en ese punto.

Teorema de Taylor: Sea $f : \Re^n \rightarrow \Re$ una función continuamente diferenciable y $p \in \Re$. Entonces tenemos que:

$$f(x+p) = f(x) + \nabla f(x)^T p + \frac{1}{2} p^T \nabla^2 f(x+tp)p$$

con $t \in (0,1)$

## 2 TEORÍA

### 2.1 Teorema del Valor Medio

Uno de los Teoremas más importantes del Cálculo es el Teorema del Valor Medio, el cual se emplea en la demostración de teoremas tanto de Cálculo Diferencial como de Cálculo Integral, así como de otras materias como el Análisis numérico. Se establece básicamente que si una función $f$ es continua y diferenciable en el intervalo $(a,b)$, se tiene que:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

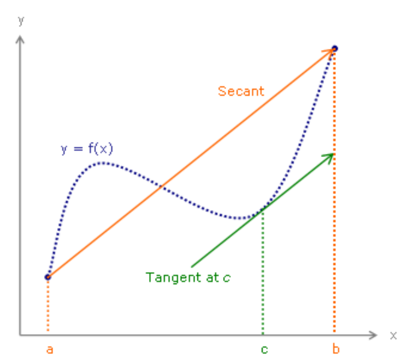


Fig. 1. Teorema del Valor Medio

### 2.2 Teorema Fundamental del Calculo

El Teorema Fundamental del Cálculo o Teorema de Newton estipula que para una $f : \Re \rightarrow \Re$ diferenciable se cumple que:

$$f(1) = f(0) + \int_0^1 f'(t)dt$$

### 2.3 Demostracion del Teorema de Taylor

Sea $f : \Re^n \rightarrow \Re$ una función continuamente diferenciable y $p \in \Re$, por el Teorema del Valor Medio:

$$f(x+p) = f(x) + \nabla f(x+tp)p \text{ con } t \in (0,1)$$

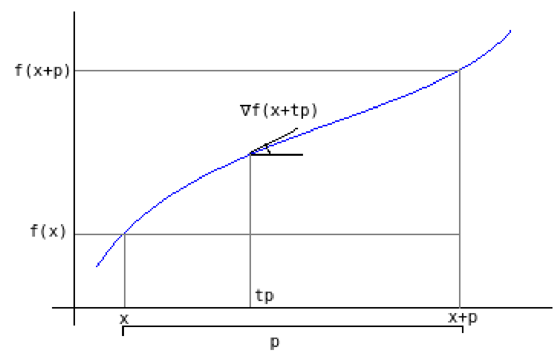


Fig. 2. Interpretación geométrica del Teorema del Valor Medio

Ahora, también por el teorema de Newton sabemos que:

$$f(1) = f(0) + \int_0^1 f'(t)dt$$

por tanto podemos formular una expresión para $f(x+p)$ utilizando esta definición, pero utilizando $p$ como un factor de escalamiento:

$$f(x+p) = f(x) + \int_0^1 \nabla f(x+\xi p)d\xi \text{ con } \xi \in (0,1)$$

Luego por comparación vemos que:

$$\nabla f(x+tp)p = \int_0^1 \nabla f(x+\xi p)d\xi$$

Si damos una interpretación geométrica al término de la derecha podemos hallar una expresión que lo aproxime (Figura 2).

De la gráfica deducimos que el valor de la integral puede ser aproximado por el área del trapecio formado por el gradiente de $g(x+tp)$:

$$\int_0^1 \nabla f(x+\xi p)d\xi \simeq g(x)p + \frac{1}{2} p \nabla g(x+tp)p \text{ con } t \in (0,1)$$

pero vemos que $g(x) = \nabla f(x)$, por lo tanto

$$\int_0^1 \nabla f(x+\xi p)d\xi \simeq \nabla f(x)p + \frac{1}{2} p^T \nabla^2 f(x+tp)p$$

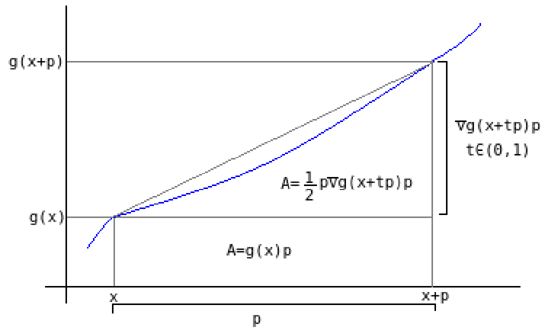


Fig. 3. Aproximación del Área bajo una curva $g(x)$

Finalmente sustituyendo el lado derecho de la igualdad en el Teorema de Newton hemos demostrado lo que queríamos.

$$f(x+p) = f(x) + \nabla f(x)p + \tfrac{1}{2}p^T\nabla^2 f(x+tp)p$$

## 3 Conclusiones

Entre las muchas aplicaciones del Teorema de Taylor podemos encontrar el cálculo de Límites, aproximaciones con acotación de error con relación al residuo de Lagrange, el estudio de extremos relativos como en el caso de muchos problemas de optimización, y en algunos casos para la clasificación de series numéricas.

## References

[1] Jorge Nocedal and Stephen J. Wright. *Numerical optimization*. Springer series in operations research and financial engineering. Springer, New York, NY, 2. ed. edition, 2006.
[2] Louis Leithold. *The Calculus*. Oxford University Press. Oxford, 7. ed. edition, 1998.