Cointegración y vector de corrección de errores (VECM)

Randall Romero Aguilar, PhD
randall.romero@ucr.ac.cr

EC4301 - Macroeconometría

I Semestre 2020

Última actualización: 22 de junio de 2020

UCR
UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

ESCUELA de ECONOMÍA
UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

Tabla de contenidos

1. Cointegración

Motivation

- A continuación estudiamos la manera de estimar un VAR cuyas series no son estacionarias.

Motivation

- A continuación estudiamos la manera de estimar un VAR cuyas series no son estacionarias.
- En procesos univariados, basta con diferenciar la serie y aplicar técnicas de Box-Jenkins.

Motivation

- A continuación estudiamos la manera de estimar un VAR cuyas series no son estacionarias.
- En procesos univariados, basta con diferenciar la serie y aplicar técnicas de Box-Jenkins.
- En proceso multivariados, es necesario determinar si las series están cointegradas.

Cointegración como equilibrio de largo plazo

- Considere el modelo monetario

$$\underbrace{m_t}_{\text{oferta}} = \underbrace{\beta_0 + \beta_1 p_t + \beta_2 y_t + \beta_3 r_t}_{\text{demanda}} + \underbrace{\epsilon_t}_{\text{brecha}}$$

Cointegración como equilibrio de largo plazo

- Considere el modelo monetario

$$\underbrace{m_t}_{\text{oferta}} = \underbrace{\beta_0 + \beta_1 p_t + \beta_2 y_t + \beta_3 r_t}_{\text{demanda}} + \underbrace{\epsilon_t}_{\text{brecha}}$$

- Para que la noción de equilibrio tenga sentido, la brecha ϵ_t debe ser estacionaria, es decir, I(0)

Cointegración como equilibrio de largo plazo

- Considere el modelo monetario

$$\underbrace{m_t}_{\text{oferta}} = \underbrace{\beta_0 + \beta_1 p_t + \beta_2 y_t + \beta_3 r_t}_{\text{demanda}} + \underbrace{\epsilon_t}_{\text{brecha}}$$

- Para que la noción de equilibrio tenga sentido, la brecha ϵ_t debe ser estacionaria, es decir, I(0)
- Esto a pesar de que m_t, p_t, y_t y r_t sean I(1).

Cointegración como equilibrio de largo plazo

- Considere el modelo monetario

$$\underbrace{m_t}_{\text{oferta}} = \underbrace{\beta_0 + \beta_1 p_t + \beta_2 y_t + \beta_3 r_t}_{\text{demanda}} + \underbrace{\epsilon_t}_{\text{brecha}}$$

- Para que la noción de equilibrio tenga sentido, la brecha ϵ_t debe ser estacionaria, es decir, I(0)
- Esto a pesar de que m_t, p_t, y_t y r_t sean I(1).
- Esto implica que la combinación lineal de variables I(1)

$$\begin{bmatrix} 1 & -\beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_t \\ p_t \\ y_t \\ r_t \end{bmatrix} = \beta_0 + \epsilon_t$$

resulta en un proceso I(0)

Cointegración como equilibrio de largo plazo

- Considere el modelo monetario

$$\underbrace{m_t}_{\text{oferta}} = \underbrace{\beta_0 + \beta_1 p_t + \beta_2 y_t + \beta_3 r_t}_{\text{demanda}} + \underbrace{\epsilon_t}_{\text{brecha}}$$

- Para que la noción de equilibrio tenga sentido, la brecha ϵ_t debe ser estacionaria, es decir, I(0)
- Esto a pesar de que m_t, p_t, y_t y r_t sean I(1).
- Esto implica que la combinación lineal de variables I(1)

$$\begin{bmatrix} 1 & -\beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_t \\ p_t \\ y_t \\ r_t \end{bmatrix} = \beta_0 + \epsilon_t$$

  resulta en un proceso I(0)
- Decimos que m_t, p_t, y_t y r_t están cointegradas, con vector de cointegración $\begin{bmatrix} 1 & -\beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 \end{bmatrix}$.

Cointegración como equilibrio de largo plazo (cont'n)

- Teorías de equilibrio con variables no estacionarias requieren la existencia de una combinación lineal de las variables que sea estacionaria

Cointegración como equilibrio de largo plazo (cont'n)

- Teorías de equilibrio con variables no estacionarias requieren la existencia de una combinación lineal de las variables que sea estacionaria
- Otros ejemplos:

Cointegración como equilibrio de largo plazo (cont'n)

- Teorías de equilibrio con variables no estacionarias requieren la existencia de una combinación lineal de las variables que sea estacionaria
- Otros ejemplos:
  - Teoría de la función de consumo:

$$c_t = \beta y_t^p + c_t^t \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_t \\ y_t^p \end{bmatrix} = c_t^t \quad \text{es estacionario}$$

Cointegración como equilibrio de largo plazo (cont'n)

- Teorías de equilibrio con variables no estacionarias requieren la existencia de una combinación lineal de las variables que sea estacionaria
- Otros ejemplos:
  - Teoría de la función de consumo:

$$c_t = \beta y_t^p + c_t^t \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_t \\ y_t^p \end{bmatrix} = c_t^t \quad \text{es estacionario}$$

  - Teoría de la paridad del poder de compra:

$$e_t + p_t^* - p_t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_t \\ p_t^* \\ p_t \end{bmatrix} \quad \text{es estacionario}$$

Regresión espuria

- Considere dos caminatas aleatorias independientes

$$
\begin{aligned}
y_t &= y_{t-1} + u_t \qquad && u_t \text{ ruido blanco} \\
x_t &= x_{t-1} + v_t \qquad && v_t \text{ ruido blanco}
\end{aligned}
$$

Regresión espuria

- Considere dos caminatas aleatorias independientes

$$y_t = y_{t-1} + u_t \qquad u_t \text{ ruido blanco}$$
$$x_t = x_{t-1} + v_t \qquad v_t \text{ ruido blanco}$$

- Como y_t es independiente de x_t, uno esperaría que en la regresión

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \epsilon_t$$

el R^2 y el β_1 tendieran a cero.

Regresión espuria

- Considere dos caminatas aleatorias independientes

$$y_t = y_{t-1} + u_t \qquad u_t \text{ ruido blanco}$$
$$x_t = x_{t-1} + v_t \qquad v_t \text{ ruido blanco}$$

- Como y_t es independiente de x_t, uno esperaría que en la regresión

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \epsilon_t$$

  el R^2 y el β_1 tendieran a cero.
- Pero este no es el caso. Con series no estacionarias, la correlación espuria puede persistir aún en muestras grandes.

Ejemplo 1:

Regresión espuria

Jupyter 05 Relacion espuria.ipynb
Regresión con series I(1):

$$\log(\text{GDP.COSTA.RICA}_t) = \beta_0 + \beta_1 \log(\text{GDP.MALTA}_t) + \epsilon_t$$

```
                            OLS Regression Results
==============================================================================
Dep. Variable:                    CRI   R-squared:                       0.806
Model:                            OLS   Adj. R-squared:                  0.802
Method:                 Least Squares   F-statistic:                     195.0
Date:                Thu, 02 Jan 2020   Prob (F-statistic):           2.40e-18
Time:                        14:07:58   Log-Likelihood:                 34.197
No. Observations:                  49   AIC:                            -64.39
Df Residuals:                      47   BIC:                            -60.61
Df Model:                           1
Covariance Type:            nonrobust
==============================================================================
                 coef    std err          t      P>|t|      [0.025      0.975]
------------------------------------------------------------------------------
Intercept      4.4814      0.300     14.916      0.000       3.877       5.086
MLT            0.4432      0.032     13.966      0.000       0.379       0.507
==============================================================================
Omnibus:                       57.494   Durbin-Watson:                   0.064
Prob(Omnibus):                  0.000   Jarque-Bera (JB):                5.218
Skew:                           0.156   Prob(JB):                       0.0736
Kurtosis:                       1.432   Cond. No.                         164.
==============================================================================
```

Regresión con series I(0):

$$\Delta \log(\text{GDP.COSTA.RICA}_t) = \beta_0 + \beta_1 \Delta \log(\text{GDP.MALTA}_t) + \epsilon_t$$

```
                            OLS Regression Results
==============================================================================
Dep. Variable:                    CRI   R-squared:                       0.032
Model:                            OLS   Adj. R-squared:                  0.011
Method:                 Least Squares   F-statistic:                     1.537
Date:                Thu, 02 Jan 2020   Prob (F-statistic):              0.221
Time:                        14:09:30   Log-Likelihood:                 102.51
No. Observations:                  48   AIC:                            -201.0
Df Residuals:                      46   BIC:                            -197.3
Df Model:                           1
Covariance Type:            nonrobust
==============================================================================
                 coef    std err          t      P>|t|      [0.025      0.975]
------------------------------------------------------------------------------
Intercept      0.0143      0.006      2.269      0.028       0.002       0.027
MLT            0.1378      0.111      1.240      0.221      -0.086       0.362
==============================================================================
Omnibus:                       27.205   Durbin-Watson:                   1.244
Prob(Omnibus):                  0.000   Jarque-Bera (JB):               58.241
Skew:                          -1.586   Prob(JB):                     2.26e-13
Kurtosis:                       7.365   Cond. No.                         26.4
==============================================================================
```

Definición de cointegración (Engle y Granger 1987)

Se dice que los componentes del vector $x_t = (x_{1t}, x_{2t}, \ldots, x_{nt})'$ están cointegrados de orden (d, b), denotado por $x_t \sim CI(d, b)$, si

1. Todos los componentes de x_t son integrados de orden d.
2. Existe al menos un vector $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ tal que la combinación lineal $\beta x_t = \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \cdots + \beta_n x_{nt}$ es integrada de orden $(d - b)$, donde $b > 0$.

A β se le llama vector de cointegración

Algunas observaciones acerca de la definición de cointegración

1. Cointegración se refiere a combinaciones *lineales* de variables no estacionarias

Algunas observaciones acerca de la definición de cointegración

1. Cointegración se refiere a combinaciones *lineales* de variables no estacionarias
2. Si existe, el vector de cointegración no es único

Algunas observaciones acerca de la definición de cointegración

1. Cointegración se refiere a combinaciones *lineales* de variables no estacionarias
2. Si existe, el vector de cointegración no es único
3. Cointegración se refiere a variables del mismo orden;aunque es posible encontrar relaciones de equilibrio entre variables de distinto orden

Algunas observaciones acerca de la definición de cointegración

1. Cointegración se refiere a combinaciones *lineales* de variables no estacionarias
2. Si existe, el vector de cointegración no es único
3. Cointegración se refiere a variables del mismo orden;aunque es posible encontrar relaciones de equilibrio entre variables de distinto orden
4. Pueden existir varios vectores de cointegración independientes para un conjunto de variables x_t

Algunas observaciones acerca de la definición de cointegración

1. Cointegración se refiere a combinaciones *lineales* de variables no estacionarias
2. Si existe, el vector de cointegración no es único
3. Cointegración se refiere a variables del mismo orden;aunque es posible encontrar relaciones de equilibrio entre variables de distinto orden
4. Pueden existir varios vectores de cointegración independientes para un conjunto de variables x_t
5. En la mayor parte de la literatura se entiende cointegración como el caso $CI(1,1)$.

Pruebas de cointegración: Engle-Granger

Una receta para determinar si las series están cointegradas:

Ingredientes: series de tiempo, software econométrico

Pruebas de cointegración: Engle-Granger

Una receta para determinar si las series están cointegradas:

Ingredientes: series de tiempo, software econométrico

Paso 1: Determinar orden de integración de las series

Pruebas de cointegración: Engle-Granger

Una receta para determinar si las series están cointegradas:

- **Ingredientes:** series de tiempo, software econométrico
- **Paso 1:** Determinar orden de integración de las series
- **Paso 2:** Estimar la relación de equilibrio de largo plazo

Pruebas de cointegración: Engle-Granger

Una receta para determinar si las series están cointegradas:

- Ingredientes: series de tiempo, software econométrico
- Paso 1: Determinar orden de integración de las series
- Paso 2: Estimar la relación de equilibrio de largo plazo
- Paso 3: Estimar el modelo de corrección de errores

Pruebas de cointegración: Engle-Granger

Una receta para determinar si las series están cointegradas:

Ingredientes: series de tiempo, software econométrico

Paso 1: Determinar orden de integración de las series

Paso 2: Estimar la relación de equilibrio de largo plazo

Paso 3: Estimar el modelo de corrección de errores

Paso 4: Evaluar si el modelo es adecuado

Pruebas de cointegración de Engle-Granger

En la prueba (aumentada) de Engle y Granger,

$$\Delta\hat{\epsilon}_t = \gamma\hat{\epsilon}_{t-1} + \sum_{i=1}^{n} a_i \Delta\hat{\epsilon}_{t-i} + \varepsilon_t \qquad \text{(nc)}$$

$$\Delta\hat{\epsilon}_t = \alpha_0 + \gamma\hat{\epsilon}_{t-1} + \sum_{i=1}^{n} a_i \Delta\hat{\epsilon}_{t-i} + \varepsilon_t \qquad \text{(c)}$$

$$\Delta\hat{\epsilon}_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \gamma\hat{\epsilon}_{t-1} + \sum_{i=1}^{n} a_i \Delta\hat{\epsilon}_{t-i} + \varepsilon_t \qquad \text{(ct)}$$

$$\Delta\hat{\epsilon}_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \gamma\hat{\epsilon}_{t-1} + \sum_{i=1}^{n} a_i \Delta\hat{\epsilon}_{t-i} + \varepsilon_t \qquad \text{(ctt)}$$

si $\gamma = 0$ los residuos $\hat{\epsilon}_t$ presentan raíz unitaria, y por ello las series no estaría cointegradas.

Los valores críticos de MacKinnon

- Para probar la hipótesis nula $H_0 : \gamma = 0$ contra la alternativa $H_1 : \gamma < 0$, se utiliza el estadístico t_γ.

Los valores críticos de MacKinnon

- Para probar la hipótesis nula $H_0 : \gamma = 0$ contra la alternativa $H_1 : \gamma < 0$, se utiliza el estadístico t_γ.
- No obstante, t_γ no tiene la distribución $t-$student, ni siquiera asintóticamente.

Los valores críticos de MacKinnon

- Para probar la hipótesis nula $H_0 : \gamma = 0$ contra la alternativa $H_1 : \gamma < 0$, se utiliza el estadístico t_γ.
- No obstante, t_γ no tiene la distribución $t-$student, ni siquiera asintóticamente.
- Dado que no es posible derivar la distribución de t_γ analíticamente, es necesario aproximarla con simulaciones de Monte Carlo.

Los valores críticos de MacKinnon

- Para probar la hipótesis nula $H_0 : \gamma = 0$ contra la alternativa $H_1 : \gamma < 0$, se utiliza el estadístico t_γ.
- No obstante, t_γ no tiene la distribución $t-$student, ni siquiera asintóticamente.
- Dado que no es posible derivar la distribución de t_γ analíticamente, es necesario aproximarla con simulaciones de Monte Carlo.
- A partir de tales simulaciones, MacKinnon (2010) presenta valores críticos, que dependen de

Los valores críticos de MacKinnon

- Para probar la hipótesis nula $H_0 : \gamma = 0$ contra la alternativa $H_1 : \gamma < 0$, se utiliza el estadístico t_γ.
- No obstante, t_γ no tiene la distribución $t-$student, ni siquiera asintóticamente.
- Dado que no es posible derivar la distribución de t_γ analíticamente, es necesario aproximarla con simulaciones de Monte Carlo.
- A partir de tales simulaciones, MacKinnon (2010) presenta valores críticos, que dependen de
    - la especificación determinística (nc, c, ct, ctt),

Los valores críticos de MacKinnon

- Para probar la hipótesis nula $H_0 : \gamma = 0$ contra la alternativa $H_1 : \gamma < 0$, se utiliza el estadístico t_γ.
- No obstante, t_γ no tiene la distribución $t-$student, ni siquiera asintóticamente.
- Dado que no es posible derivar la distribución de t_γ analíticamente, es necesario aproximarla con simulaciones de Monte Carlo.
- A partir de tales simulaciones, MacKinnon (2010) presenta valores críticos, que dependen de
  - la especificación determinística (nc, c, ct, ctt),
  - del número de series en el vector de cointegración

Los valores críticos de MacKinnon

- Para probar la hipótesis nula $H_0 : \gamma = 0$ contra la alternativa $H_1 : \gamma < 0$, se utiliza el estadístico t_γ.
- No obstante, t_γ no tiene la distribución $t-$student, ni siquiera asintóticamente.
- Dado que no es posible derivar la distribución de t_γ analíticamente, es necesario aproximarla con simulaciones de Monte Carlo.
- A partir de tales simulaciones, MacKinnon (2010) presenta valores críticos, que dependen de
  - la especificación determinística (nc, c, ct, ctt),
  - del número de series en el vector de cointegración
  - y del tamaño de muestra T.

Los valores críticos de MacKinnon (cont'n)

- Los valores se obtienen evaluando un polinomio en $\frac{1}{T}$

$$C(p) = \beta_\infty + \beta_1 T^{-1} + \beta_2 T^{-2} + \beta_3 T^{-3}$$

- Los valores se obtienen evaluando un polinomio en $\frac{1}{T}$

$$C(p) = \beta_\infty + \beta_1 T^{-1} + \beta_2 T^{-2} + \beta_3 T^{-3}$$

- Por ejemplo, para probar la cointegración de $N = 3$ variables, con constante y tendencia (ct), la tabla es

Nivel	β_∞	β_1	β_2	β_3
1 %	-4.663	-18.769	-49.793	104.244
5 %	-4.119	-11.892	-19.031	77.332
10%	-3.835	-9.072	-8.504	35.403

Los valores críticos de MacKinnon (cont'n)

- Los valores se obtienen evaluando un polinomio en $\frac{1}{T}$

$$C(p) = \beta_\infty + \beta_1 T^{-1} + \beta_2 T^{-2} + \beta_3 T^{-3}$$

- Por ejemplo, para probar la cointegración de $N = 3$ variables, con constante y tendencia (ct), la tabla es

Nivel	β_∞	β_1	β_2	β_3
1 %	-4.663	-18.769	-49.793	104.244
5 %	-4.119	-11.892	-19.031	77.332
10%	-3.835	-9.072	-8.504	35.403

- Así, si tenemos 50 observaciones:

$$C(5\%) = -4.119 - \frac{11.892}{50} - \frac{19.031}{50^2} + \frac{77.332}{50^3} = -4.3637$$

Ejemplo 2:

Valores críticos de Mackinnon

- En el cuaderno de Jupyter `Mackinnon valores críticos para test de cointegración` se presentan más ejemplos.
- Se muestra cómo los valores críticos cambian con el tamaño de muestra, el número de series que conforman el vector, y la especificación de los componentes determinísticas de las series.

Nota:

Factorización de rango

Suponga que A es una matriz $n \times n$ con rango $r < n$. Existen las matrices X y Y de dimensión $r \times n$ tal que:

$$A = X'Y$$

2. Vector de Corrección de Errores (VECM)

De VAR a VECM

$$y_t = \Phi_1 y_{t-1} + \Phi_2 y_{t-2} + \Phi_3 y_{t-3} + \epsilon_t$$

De VAR a VECM

$$
\begin{aligned}
y_t &= \Phi_1 y_{t-1} + \Phi_2 y_{t-2} + \Phi_3 y_{t-3} + \epsilon_t \\
\Delta y_t &= \left(\Phi_1 - I\right) y_{t-1} + \Phi_2 y_{t-2} + \Phi_3 y_{t-3} + \epsilon_t
\end{aligned}
$$

De VAR a VECM

$$
\begin{aligned}
y_t &= \Phi_1 y_{t-1} + \Phi_2 y_{t-2} + \Phi_3 y_{t-3} + \epsilon_t \\
\Delta y_t &= \left(\Phi_1 - I\right) y_{t-1} + \Phi_2 y_{t-2} + \Phi_3 y_{t-3} + \epsilon_t \\
&= \left(\Phi_1 - I\right) y_{t-1} + \left(\Phi_2 + \Phi_3\right) y_{t-2} + \Phi_3 \left(y_{t-3} - y_{t-2}\right) + \epsilon_t
\end{aligned}
$$

De VAR a VECM

$$
\begin{aligned}
y_t &= \Phi_1 y_{t-1} + \Phi_2 y_{t-2} + \Phi_3 y_{t-3} + \epsilon_t \\
\Delta y_t &= \left(\Phi_1 - I\right) y_{t-1} + \Phi_2 y_{t-2} + \Phi_3 y_{t-3} + \epsilon_t \\
&= \left(\Phi_1 - I\right) y_{t-1} + \left(\Phi_2 + \Phi_3\right) y_{t-2} + \Phi_3 \left(y_{t-3} - y_{t-2}\right) + \epsilon_t \\
&= \begin{array}{r} \left(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 - I\right) y_{t-1} + \left(\Phi_2 + \Phi_3\right) \left(y_{t-2} - y_{t-1}\right) + \\ \cdots + \Phi_3 \left(y_{t-3} - y_{t-2}\right) + \epsilon_t \end{array}
\end{aligned}
$$

De VAR a VECM

$$
\begin{aligned}
y_t &= \Phi_1 y_{t-1} + \Phi_2 y_{t-2} + \Phi_3 y_{t-3} + \epsilon_t \\
\Delta y_t &= \left(\Phi_1 - I\right) y_{t-1} + \Phi_2 y_{t-2} + \Phi_3 y_{t-3} + \epsilon_t \\
&= \left(\Phi_1 - I\right) y_{t-1} + \left(\Phi_2 + \Phi_3\right) y_{t-2} + \Phi_3 \left(y_{t-3} - y_{t-2}\right) + \epsilon_t \\
&= \begin{aligned}[t] &\left(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 - I\right) y_{t-1} + \left(\Phi_2 + \Phi_3\right) \left(y_{t-2} - y_{t-1}\right) + \\ &\qquad \cdots + \Phi_3 \left(y_{t-3} - y_{t-2}\right) + \epsilon_t \end{aligned} \\
&= \left(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 - I\right) y_{t-1} - \left(\Phi_2 + \Phi_3\right) \Delta y_{t-1} - \Phi_3 \Delta y_{t-2} + \epsilon_t
\end{aligned}
$$

De VAR a VECM

$$
\begin{aligned}
y_t &= \Phi_1 y_{t-1} + \Phi_2 y_{t-2} + \Phi_3 y_{t-3} + \epsilon_t \\
\Delta y_t &= \left(\Phi_1 - I\right) y_{t-1} + \Phi_2 y_{t-2} + \Phi_3 y_{t-3} + \epsilon_t \\
&= \left(\Phi_1 - I\right) y_{t-1} + \left(\Phi_2 + \Phi_3\right) y_{t-2} + \Phi_3 \left(y_{t-3} - y_{t-2}\right) + \epsilon_t \\
&= \begin{array}{r} \left(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 - I\right) y_{t-1} + \left(\Phi_2 + \Phi_3\right)\left(y_{t-2} - y_{t-1}\right) + \\ \cdots + \Phi_3 \left(y_{t-3} - y_{t-2}\right) + \epsilon_t \end{array} \\
&= \left(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 - I\right) y_{t-1} - \left(\Phi_2 + \Phi_3\right) \Delta y_{t-1} - \Phi_3 \Delta y_{t-2} + \epsilon_t \\
&= \Pi y_{t-1} + \Gamma_1 \Delta y_{t-1} + \Gamma_2 \Delta y_{t-2} + \epsilon_t
\end{aligned}
$$

De VAR a VECM

$$
\begin{aligned}
y_t &= \Phi_1 y_{t-1} + \Phi_2 y_{t-2} + \Phi_3 y_{t-3} + \epsilon_t \\
\Delta y_t &= (\Phi_1 - I)\, y_{t-1} + \Phi_2 y_{t-2} + \Phi_3 y_{t-3} + \epsilon_t \\
&= (\Phi_1 - I)\, y_{t-1} + (\Phi_2 + \Phi_3)\, y_{t-2} + \Phi_3 (y_{t-3} - y_{t-2}) + \epsilon_t \\
&= \begin{array}{r} (\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 - I)\, y_{t-1} + (\Phi_2 + \Phi_3)(y_{t-2} - y_{t-1}) + \\ \cdots + \Phi_3 (y_{t-3} - y_{t-2}) + \epsilon_t \end{array} \\
&= (\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 - I)\, y_{t-1} - (\Phi_2 + \Phi_3)\, \Delta y_{t-1} - \Phi_3 \Delta y_{t-2} + \epsilon_t \\
&= \Pi y_{t-1} + \Gamma_1 \Delta y_{t-1} + \Gamma_2 \Delta y_{t-2} + \epsilon_t
\end{aligned}
$$

Si hay $0 < r < n$ vectores de cointegración, entonces Π puede ser descompuesta como el producto de los vectores de cointegración β y los coeficientes de corrección de errores α:

De VAR a VECM

$$
\begin{aligned}
y_t &= \Phi_1 y_{t-1} + \Phi_2 y_{t-2} + \Phi_3 y_{t-3} + \epsilon_t \\
\Delta y_t &= (\Phi_1 - I)\, y_{t-1} + \Phi_2 y_{t-2} + \Phi_3 y_{t-3} + \epsilon_t \\
&= (\Phi_1 - I)\, y_{t-1} + (\Phi_2 + \Phi_3)\, y_{t-2} + \Phi_3\,(y_{t-3} - y_{t-2}) + \epsilon_t \\
&= \begin{array}{r} (\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 - I)\, y_{t-1} + (\Phi_2 + \Phi_3)\,(y_{t-2} - y_{t-1}) + \\ \cdots + \Phi_3\,(y_{t-3} - y_{t-2}) + \epsilon_t \end{array} \\
&= (\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 - I)\, y_{t-1} - (\Phi_2 + \Phi_3)\, \Delta y_{t-1} - \Phi_3 \Delta y_{t-2} + \epsilon_t \\
&= \Pi y_{t-1} + \Gamma_1 \Delta y_{t-1} + \Gamma_2 \Delta y_{t-2} + \epsilon_t
\end{aligned}
$$

Si hay $0 < r < n$ vectores de cointegración, entonces Π puede ser descompuesta como el producto de los vectores de cointegración β y los coeficientes de corrección de errores α:

VEC

$$\Delta y_t = \alpha\beta' y_{t-1} + \Gamma_1 \Delta y_{t-1} + \cdots + \Gamma_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + \epsilon_t$$

Ejemplo 3:

Inflación y depreciación en un modelo VEC

- Suponga que en el largo plazo se cumple la PPP: $p_t = e_t + p_t^* + \text{error}_t$ y que las tres variables son I(1) y relacionadas como un VAR(2)

- Suponga que en el largo plazo se cumple la PPP: $p_t = e_t + p_t^* + \text{error}_t$ y que las tres variables son I(1) y relacionadas como un VAR(2)
- La representación VECM es

$$
\begin{aligned}
\Delta p_t^* &= \alpha_1 \left(p_t - e_t - p_t^*\right) + \gamma_{11}\Delta p_{t-1}^* + \gamma_{12}\Delta e_{t-1} + \gamma_{13}\Delta p_{t-1} + \epsilon_{1t} \\
\Delta e_t &= \alpha_2 \left(p_t - e_t - p_t^*\right) + \gamma_{21}\Delta p_{t-1}^* + \gamma_{22}\Delta e_{t-1} + \gamma_{23}\Delta p_{t-1} + \epsilon_{2t} \\
\Delta p_t &= \alpha_3 \left(p_t - e_t - p_t^*\right) + \gamma_{31}\Delta p_{t-1}^* + \gamma_{32}\Delta e_{t-1} + \gamma_{33}\Delta p_{t-1} + \epsilon_{3t}
\end{aligned}
$$

- Suponga que en el largo plazo se cumple la PPP: $p_t = e_t + p_t^* + \text{error}_t$ y que las tres variables son I(1) y relacionadas como un VAR(2)
- La representación VECM es

$$
\begin{aligned}
\Delta p_t^* &= \alpha_1 \left(p_t - e_t - p_t^*\right) + \gamma_{11} \Delta p_{t-1}^* + \gamma_{12} \Delta e_{t-1} + \gamma_{13} \Delta p_{t-1} + \epsilon_{1t} \\
\Delta e_t &= \alpha_2 \left(p_t - e_t - p_t^*\right) + \gamma_{21} \Delta p_{t-1}^* + \gamma_{22} \Delta e_{t-1} + \gamma_{23} \Delta p_{t-1} + \epsilon_{2t} \\
\Delta p_t &= \alpha_3 \left(p_t - e_t - p_t^*\right) + \gamma_{31} \Delta p_{t-1}^* + \gamma_{32} \Delta e_{t-1} + \gamma_{33} \Delta p_{t-1} + \epsilon_{3t}
\end{aligned}
$$

- o bien

$$
\begin{bmatrix} \Delta p_t^* \\ \Delta e_t \\ \Delta p_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{t-1}^* \\ e_{t-1} \\ p_{t-1} \end{bmatrix} + \Gamma_1 \begin{bmatrix} \Delta p_{t-1}^* \\ \Delta e_{t-1} \\ \Delta p_{t-1} \end{bmatrix} + \epsilon_t
$$

- Suponga que en el largo plazo se cumple la PPP: $p_t = e_t + p_t^* + \text{error}_t$ y que las tres variables son I(1) y relacionadas como un VAR(2)
- La representación VECM es

$$
\begin{aligned}
\Delta p_t^* &= \alpha_1 (p_t - e_t - p_t^*) + \gamma_{11}\Delta p_{t-1}^* + \gamma_{12}\Delta e_{t-1} + \gamma_{13}\Delta p_{t-1} + \epsilon_{1t} \\
\Delta e_t &= \alpha_2 (p_t - e_t - p_t^*) + \gamma_{21}\Delta p_{t-1}^* + \gamma_{22}\Delta e_{t-1} + \gamma_{23}\Delta p_{t-1} + \epsilon_{2t} \\
\Delta p_t &= \alpha_3 (p_t - e_t - p_t^*) + \gamma_{31}\Delta p_{t-1}^* + \gamma_{32}\Delta e_{t-1} + \gamma_{33}\Delta p_{t-1} + \epsilon_{3t}
\end{aligned}
$$

- o bien

$$
\begin{bmatrix} \Delta p_t^* \\ \Delta e_t \\ \Delta p_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{t-1}^* \\ e_{t-1} \\ p_{t-1} \end{bmatrix} + \Gamma_1 \begin{bmatrix} \Delta p_{t-1}^* \\ \Delta e_{t-1} \\ \Delta p_{t-1} \end{bmatrix} + \epsilon_t
$$

- Este modelo explica la inflación internacional, la depreciación, y la inflación doméstica en función de sus propios rezagos y la desviación de los precios y tipo de cambio respecto a su equilibrio de largo plazo.

Pruebas de cointegración: Johansen

- La prueba de Johansen puede verse como una generalización multivariada de la prueba aumentada de Dickey-Fuller

Pruebas de cointegración: Johansen

- La prueba de Johansen puede verse como una generalización multivariada de la prueba aumentada de Dickey-Fuller
- La prueba y estrategia de estimación permiten estimar *todos* los vectores de cointegración

Pruebas de cointegración: Johansen

- La prueba de Johansen puede verse como una generalización multivariada de la prueba aumentada de Dickey-Fuller
- La prueba y estrategia de estimación permiten estimar *todos* los vectores de cointegración
- Similar a la prueba ADF, la existencia de raíces unitarias implican que la teoría asintótica estándar no es apropiada.

Raíces unitarias: modelo univariado versus multivariado

- Comparemos la prueba ADF con el VECM

$$\Delta y_t = \pi y_{t-1} + \gamma_1 \Delta y_{t-1} + \cdots + \gamma_p \Delta y_{t-p} + \epsilon_t \qquad \text{(univariado)}$$
$$\Delta y_t = \Pi y_{t-1} + \Gamma_1 \Delta y_{t-1} + \cdots + \Gamma_p \Delta y_{t-p} + \epsilon_t \qquad \text{(multivariado)}$$

Raíces unitarias: modelo univariado versus multivariado

- Comparemos la prueba ADF con el VECM

$$\Delta y_t = \pi y_{t-1} + \gamma_1 \Delta y_{t-1} + \cdots + \gamma_p \Delta y_{t-p} + \epsilon_t \qquad \text{(univariado)}$$
$$\Delta y_t = \Pi y_{t-1} + \Gamma_1 \Delta y_{t-1} + \cdots + \Gamma_p \Delta y_{t-p} + \epsilon_t \qquad \text{(multivariado)}$$

- En la prueba ADF, probamos si y_t tiene raíz unitaria con $\mathrm{H}_0 : \pi = 0$

Raíces unitarias: modelo univariado versus multivariado

- Comparemos la prueba ADF con el VECM

$$
\begin{aligned}
\Delta y_t &= \pi y_{t-1} + \gamma_1 \Delta y_{t-1} + \cdots + \gamma_p \Delta y_{t-p} + \epsilon_t && \text{(univariado)} \\
\Delta y_t &= \Pi y_{t-1} + \Gamma_1 \Delta y_{t-1} + \cdots + \Gamma_p \Delta y_{t-p} + \epsilon_t && \text{(multivariado)}
\end{aligned}
$$

- En la prueba ADF, probamos si y_t tiene raíz unitaria con $\mathrm{H}_0 : \pi = 0$
- En el caso multivariado, Johansen determina si las series están cointegradas a partir del rango de Π

Rango de una matriz vectores de cointegración

Posibles casos del rango:

0: implica $\Pi = 0$, todas las series son I(1) pero no están cointegradas. VAR en diferencias

Rango de una matriz vectores de cointegración

Posibles casos del rango:

- 0: implica $\Pi = 0$, todas las series son I(1) pero no están cointegradas. VAR en diferencias
- $0 < r < N$: hay r vectores de cointegración, y escribimos $\Pi = \alpha\beta'$. VECM

Rango de una matriz vectores de cointegración

Posibles casos del rango:

- 0: implica $\Pi = 0$, todas las series son I(1) pero no están cointegradas. VAR en diferencias
- $0 < r < N$: hay r vectores de cointegración, y escribimos $\Pi = \alpha\beta'$. VECM
- N: cualquier combinación lineal es estacionaria, lo que implica que las series originales eran estacionarias.

Usando los eigenvalores para determinar el rango

- El rango de una matriz es igual al número de sus eigenvalores distintos de cero.

Usando los eigenvalores para determinar el rango

- El rango de una matriz es igual al número de sus eigenvalores distintos de cero.
- Por ello, las pruebas de Johansen están basadas en los eigenvalores de una matriz Π^* semidefinida positiva, derivada a partir de Π.

Usando los eigenvalores para determinar el rango

- El rango de una matriz es igual al número de sus eigenvalores distintos de cero.
- Por ello, las pruebas de Johansen están basadas en los eigenvalores de una matriz Π^* semidefinida positiva, derivada a partir de Π.
- Suponga que obtenemos Π^* y ordenamos sus eigenvalores de manera tal que

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_N \geq 0$$

Prueba de la traza y del máximo eigenvalor

Prueba de la traza

$$\lambda_{\text{traza}}(r) = -T \sum_{i=r+1}^{N} \ln\left(1 - \hat{\lambda}_i\right)$$

Prueba del máximo eigenvalor

$$\lambda_{\max}(r, r+1) = -T \ln\left(1 - \hat{\lambda}_{r+1}\right)$$

Prueba de la traza y del máximo eigenvalor

Prueba de la traza

$$\lambda_{\text{traza}}(r) = -T \sum_{i=r+1}^{N} \ln\left(1 - \hat{\lambda}_i\right)$$

Prueba del máximo eigenvalor

$$\lambda_{\max}(r, r+1) = -T \ln\left(1 - \hat{\lambda}_{r+1}\right)$$

- Note que $\lambda_i \geq 0 \Rightarrow \ln(1 - \lambda_i) \leq 0$. Ambos estadísticos son no-negativos

Prueba de la traza y del máximo eigenvalor

Prueba de la traza

$$\lambda_{\text{traza}}(r) = -T \sum_{i=r+1}^{N} \ln\left(1 - \hat{\lambda}_i\right)$$

Prueba del máximo eigenvalor

$$\lambda_{\max}(r, r+1) = -T \ln\left(1 - \hat{\lambda}_{r+1}\right)$$

- Note que $\lambda_i \geq 0 \Rightarrow \ln(1 - \lambda_i) \leq 0$. Ambos estadísticos son no-negativos
- Valores grandes de los estadísticos apuntan a que los eigenvalores son positivos, implicando la existencia de cointegración.

Ejemplo 4:

Pruebas de Johansen

- Johansen y Juselius (1990) analizan la cointegración de $\begin{bmatrix} m2_t & y_t & i_t^d & i_t^b \end{bmatrix}$, con datos trimestrales de Dinamarca para el período 1974:1 a 1987:3 (T=53).

H_0	$\hat{\lambda}_i$	$\lambda_{\max}$	λ_{traza}
$r = 0$	0.4332	30.09	49.14
$r = 1$	0.1776	10.36	19.05
$r = 2$	0.1128	6.34	8.69
$r = 3$	0.0434	2.35	2.35

Referencias I

Enders, Walter (2014). *Applied Econometric Time Series*. 4ª ed. Wiley. ISBN: 978-1-118-80856-6.

Engle, Robert F. y C.W.J. Granger (mar. de 1987). "Co-integration and Error Correction: Representation, Estimation, and Testing". En: *Econometrica* 55.2, págs. 251-276.

MacKinnon, James G. (2010). *Critical values for cointegration tests*. Queen's Economics Department Working Paper 1227. Kingston, Ont.