Ecuaciones en diferencia

Randall Romero Aguilar, PhD
randall.romero@ucr.ac.cr

EC4301 - Macroeconometría

I Semestre 2020

Última actualización: 17 de mayo de 2020

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

ESCUELA de ECONOMÍA
UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

Tabla de contenidos

Introducción

- Este tema constituye el primer paso para el estudio de la econometría de series de tiempo
- En esta presentación, se asumirá que todas las variables son determinísticas (no estocásticas).
- El interés de esta presentación es el estudio de las consecuencias dinámicas de eventos a través del tiempo.
- Se limita la exposición a ecuaciones en diferencia lineales.

Ecuación en diferencia lineal de orden p

- La variable y_t evoluciona como un ecuación en diferencia de orden p cuando depende de sus últimos p valores

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + w_t$$

- Si $w_t = 0$ en todo período t, obtenemos la ecuación en diferencia lineal homogénea

$$y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} - \cdots - \phi_p y_{t-p} = 0$$

- Nuestra meta es responder a: ¿cuál es el efecto sobre la trayectoria de y de un cambio en w?

Ecuación en diferencia de primer orden

- Si $p = 1$, la variable y_t evoluciona como un ecuación en diferencia de primer orden

$$y_t = \phi y_{t-1} + w_t$$

- En este caso, la ecuación homogénea correspondiente es

$$y_t - \phi y_{t-1} = 0$$

1. Solución por sustituciones recursivas

Solución de la ecuación de primer orden

- Dado un valor inicial y_{-1} y la secuencia

$$\{w_0, w_1, \ldots, w_t\}$$

la ecuación puede resolverse de manera recursiva como:

$$y_t = \phi^{t+1} y_{-1} + \phi^t w_0 + \phi^{t-1} w_1 + \cdots + \phi w_{t-1} + w_t$$

Multiplicador dinámico: shock transitorio

- La solución es similar si se desea expresar y_{t+j} a partir de y_t

$$y_{t+j} = \phi^{j+1} y_{t-1} + \phi^j w_t + \phi^{j-1} w_{t+1} + \cdots + \phi w_{t+j-1} + w_{t+j}$$

- El multiplicador dinámico se obtiene simplemente como:

$$\frac{\partial y_{t+j}}{\partial w_t} = \phi^j$$

- El proceso es estable si y sólo si $|\phi| < 1$

Valor presente

- Sea β el factor de descuento. Se define el valor presente:

$$\text{VP} = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j y_{t+j}$$

- ¿Cuál es el efecto de un cambio en w_t sobre el VP de y?

$$\frac{\partial \text{VP}}{\partial w_t} = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \frac{\partial y_{t+j}}{\partial w_t} = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \phi^j = \frac{1}{1 - \beta\phi}$$

siempre y cuando $|\beta\phi| < 1$.

Efecto de un shock permanente

- Supóngase que el cambio en w_t es permanente.
- ¿Qué efecto tiene sobre y en el largo plazo?

$$\lim_{j\to\infty}\sum_{k=0}^{j}\frac{\partial y_{t+j}}{\partial w_{t+k}} = \lim_{j\to\infty}\sum_{k=0}^{j}\phi^{j-k} = \frac{1}{1-\phi}$$

siempre y cuando $|\phi| < 1$.

Efecto acumulado de un shock transitorio

- Se desea la suma de los cambios en y como consecuencia de un único cambio en w_t.
- Esto corresponde al ejemplo del VP cuando $\beta = 1$:

$$\text{EA} = \sum_{j=0}^{\infty} 1^j \frac{\partial y_{t+j}}{\partial w_t} = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j = \frac{1}{1-\phi}, \qquad |\phi| < 1.$$

Nótese que el efecto acumulado de un shock transitorio es igual al efecto de un shock permanente en el largo plazo.

Ecuación en diferencia de orden p

- La variable y_t evoluciona como un ecuación en diferencia de primer orden cuando depende de sus últimos p valores

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + w_t$$

- Es muy complicado analizar por sustitución recursiva la dinámica de una ecuación de orden p.
- Afortunadamente es muy simple expresarla como una ecuación vectorial en diferencia de orden 1, que se resuelve de manera similar a la ecuación escalar.

Solución de la ecuación de orden p

Para resolverla se definen:

$$\xi_t \equiv \begin{bmatrix} y_t \\ y_{t-1} \\ \vdots \\ y_{t-p+1} \end{bmatrix}, \quad F \equiv \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \dots & \phi_{p-1} & \phi_p \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad v_t \equiv \begin{bmatrix} w_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

con lo que la ecuación de orden p que puede escribirse:

$$\xi_t = F\xi_{t-1} + v_t$$

y resolverse como:

$$\xi_{t+j} = F^{j+1}\xi_{t-1} + F^j v_t + F^{j-1} v_{t+1} + \dots + F v_{t+j-1} + v_{t+j}$$

Nota:

Descomposición espectral de una matriz

Descomposición espectral de una matriz

Si los eigenvectores de la matriz cuadrada A son linealmente independientes, entonces

$$A = C\Lambda C^{-1}$$

donde Λ es la matriz diagonal formada por los eigenvalores de A:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

y las columnas de C son los correspondientes eigenvectores de A.

Potencia de una matriz

Si A tiene la descomposición espectral $A = C\Lambda C^{-1}$ es fácil calcular su t-ésima potencia:

$$A^t = C\Lambda^t C^{-1}$$

ya que

$$\Lambda^t = \begin{bmatrix} \lambda_1^t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^t & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^t \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1:

Resolviendo

$$y_t = 0.9y_{t-1} - 0.2y_{t-2} + 3$$

La ecuación puede escribirse como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_t \\ y_{t-1} \end{bmatrix}}_{\xi_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.9 & -0.2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{F} \underbrace{\begin{bmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \end{bmatrix}}_{\xi_{t-1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v}$$

Por sustitución recursiva encontramos

$$\begin{aligned} \xi_t &= \left(I + F + F^2 + \cdots + F^{t-2}\right) v + F^{t-1}\xi_1 \\ &= (I - F)^{-1} (I - F) \left(I + F + F^2 + \cdots + F^{t-2}\right) v + F^{t-1}\xi_1 \\ &= (I - F)^{-1} \left(I - F^{t-1}\right) v + F^{t-1}\xi_1 \end{aligned}$$

Necesitamos una expresión para F^{t-1}. Para ello, buscamos la descomposición espectral de F.

Encontramos los eigenvalores de F:

$$\begin{vmatrix} 0.9-\lambda & -0.2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 0.9\lambda + 0.2 = (\lambda - 0.5)(\lambda - 0.4) = 0$$

es decir, $\lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = 0.4$.

Es fácil mostrar que los eigenvectores son $\begin{bmatrix}\lambda_1 \\ 1\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}\lambda_2 \\ 1\end{bmatrix}$.

Entonces

$$\begin{aligned}
F &= \begin{bmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1\end{bmatrix}^{-1} \quad \Rightarrow \\
F^{t-1} &= \begin{bmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1^{t-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{t-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1\end{bmatrix}^{-1} \quad \Rightarrow \\
&= \tfrac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{bmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1^{t-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{t-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1\end{bmatrix} \\
&= \tfrac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{bmatrix}\lambda_1^t - \lambda_2^t & -\lambda_1\lambda_2\left(\lambda_1^{t-1} - \lambda_2^{t-1}\right) \\ \lambda_1^{t-1} - \lambda_2^{t-1} & -\lambda_1\lambda_2\left(\lambda_1^{t-2} - \lambda_2^{t-2}\right)\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de λ_1 y λ_2

$$F^{t-1} = \begin{bmatrix} 10\left(0.5^t - 0.4^t\right) & -2\left(0.5^{t-1} - 0.4^{t-1}\right) \\ 10\left(0.5^{t-1} - 0.4^{t-1}\right) & -2\left(0.5^{t-2} - 0.4^{t-2}\right) \end{bmatrix}$$

Por otra parte:

$$(I - F)^{-1} = \tfrac{10}{3}\left[\begin{smallmatrix} 1 & -0.2 \\ 1 & 0.1 \end{smallmatrix}\right] = \tfrac{1}{3}\left[\begin{smallmatrix} 10 & -2 \\ 10 & 1 \end{smallmatrix}\right]$$

Sustituyendo lo anterior en la ecuación vectorial:

$$\left[\begin{smallmatrix} y_t \\ y_{t-1} \end{smallmatrix}\right] = \tfrac{1}{3}\left[\begin{smallmatrix} 10 & -2 \\ 10 & 1 \end{smallmatrix}\right] \begin{bmatrix} 1-10\left(0.5^t-0.4^t\right) & 2\left(0.5^{t-1}-0.4^{t-1}\right) \\ -10\left(0.5^{t-1}-0.4^{t-1}\right) & 1-2\left(0.5^{t-2}-0.4^{t-2}\right) \end{bmatrix} \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] + \\ \begin{bmatrix} 10\left(0.5^t-0.4^t\right) & -2\left(0.5^{t-1}-0.4^{t-1}\right) \\ 10\left(0.5^{t-1}-0.4^{t-1}\right) & -2\left(0.5^{t-2}-0.4^{t-2}\right) \end{bmatrix} \left[\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right] = \\ \left[\begin{smallmatrix} 10 & -2 \\ 10 & 1 \end{smallmatrix}\right] \begin{bmatrix} 1-10\left(0.5^t-0.4^t\right) \\ -10\left(0.5^{t-1}-0.4^{t-1}\right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10\left(0.5^t-0.4^t\right) & -2\left(0.5^{t-1}-0.4^{t-1}\right) \\ 10\left(0.5^{t-1}-0.4^{t-1}\right) & -2\left(0.5^{t-2}-0.4^{t-2}\right) \end{bmatrix} \left[\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right]$$

Tomando la primera fila

$$
\begin{aligned}
y_t = 10 - 100\left(0.5^t - 0.4^t\right) + 20\left(0.5^{t-1} - 0.4^{t-1}\right) + \\
10y_1\left(0.5^t - 0.4^t\right) - 2y_0\left(0.5^{t-1} - 0.4^{t-1}\right) \Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_t &= 10 + 10\left(y_1 - 10\right)\left(0.5^t - 0.4^t\right) - 2\left(y_0 - 10\right)\left(0.5^{t-1} - 0.4^{t-1}\right) \\
&= 10 + \left(10y_1 - 100\right)\left(0.5^t - 0.4^t\right) + \left(20 - 2y_0\right)\left(2 \times 0.5^t - 2.5 \times 0.4^t\right) \\
&= 10 + \left(10y_1 - 4y_0 - 60\right)0.5^t - \left(10y_1 - 5y_0 - 50\right)0.4^t
\end{aligned}
$$

Si imponemos las 2 condiciones iniciales: $y_0 = 13, y_1 = 11.3$, la solución de la ecuación es:

$$
y_t = 10 + 0.5^t + 2 \times 0.4^t
$$

Multiplicador dinámico: caso orden p

- De nuevo el multiplicador dinámico se obtiene por derivación:

$$\frac{\partial \xi_{t+j}}{\partial v_t'} = F^j$$

- El primer elemento de ξ_{t+j} es y_{t+j} y el primer elemento de v_t es w_t, por lo tanto:

$$\frac{\partial y_{t+j}}{\partial w_t} = F^j_{(11)}$$

- Ahora la estabilidad depende de F^j.

Estabilidad

- Que F^j tienda a 0 cuando j crece al infinito depende de los eigenvalores de F.
- Si todos son distintos, entonces $F^j = T\Lambda^j T^{-1}$, donde:

$$F^j = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1p} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{p1} & t_{p2} & \dots & t_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^j & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_p^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^{11} & t^{12} & \dots & t^{1p} \\ t^{21} & t^{22} & \dots & t^{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^{p1} & t^{p2} & \dots & t^{pp} \end{bmatrix}$$

- por tanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_{t+j}}{\partial w_t} = F^j_{(11)} &= \left(t_{11}t^{11}\right)\lambda_1^j + \left(t_{12}t^{21}\right)\lambda_2^j + \dots + \left(t_{1p}t^{p1}\right)\lambda_p^j \\ &= c_1\lambda_1^j + c_2\lambda_2^j + \dots + c_p\lambda_p^j \end{aligned}$$

Obteniendo los eigenvalores y los ponderadores

- Los eigenvalores de F se obtienen de resolver:

Ecuación característica

$$|F - \lambda I_p| = \lambda^p - \phi_1 \lambda^{p-1} - \phi_2 \lambda^{p-2} - \cdots - \phi_{p-1}\lambda - \phi_p = 0$$

- Mientras que c_i se obtiene de:

$$c_i = \frac{\lambda_i^{p-1}}{\prod\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p} (\lambda_i - \lambda_k)}$$

- Nótese que:

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_p = \left(t_{11} t^{11}\right) + \left(t_{12} t^{21}\right) + \cdots + \left(t_{1p} t^{p1}\right) = 1$$

Dinámica de ajuste

- Dado que

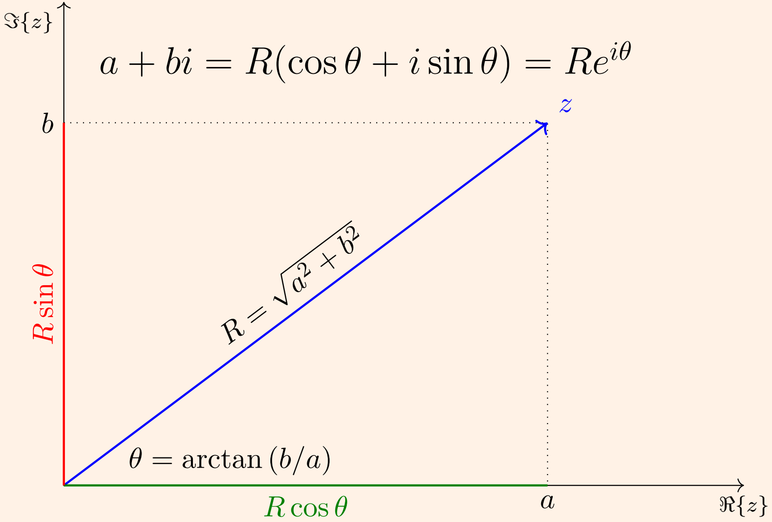
$$
\begin{aligned}
\frac{\partial y_{t+j}}{\partial w_t} &= c_1\lambda_1^j + c_2\lambda_2^j + \cdots + c_p\lambda_p^j \\
1 &= c_1 + c_2 + \cdots + c_p
\end{aligned}
$$

  el multiplicador dinámico es un promedio ponderado de las potencias de los eigenvalores.
- La forma del ajuste dependerá del eigenvalor de mayor valor absoluto λ_{max}
  - Si $0 < \lambda_{max} < 1$, el MD decae geométricamente.
  - Si $-1 < \lambda_{max} < 0$, el MD decae alternando
  - Si $|\lambda_{max}| > 1$, la serie explota (no converge)

Nota:

Números complejos

Representación de números complejos



Multiplicación de números complejos

- Si $z = Re^{i\theta}$ y $w = Se^{i\varphi}$, entonces su producto es

$$zw = RSe^{i(\theta+\varphi)}$$

- Así, si elevamos z a la n-ésima potencia:

$$z^n = \left(Re^{i\theta}\right)^n = R^n e^{in\theta}$$

- Es decir

$$\lim_{n\to\infty} z^n = 0 \Leftrightarrow |R| < 1$$

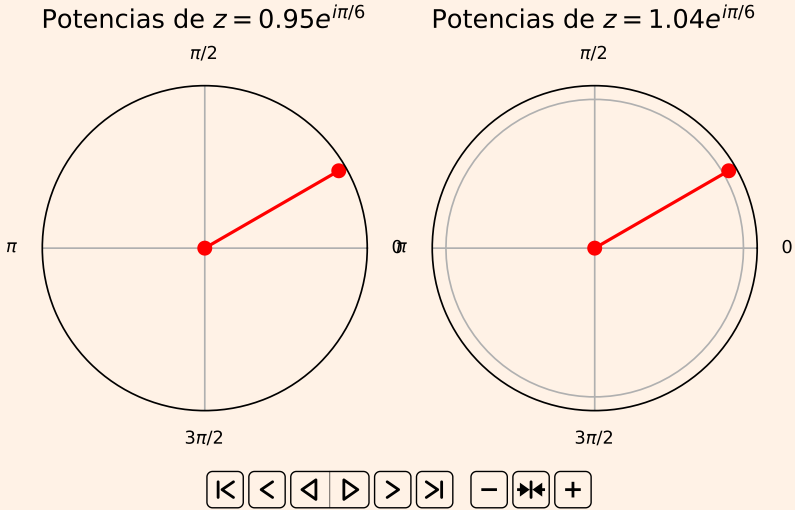


Figura: Ejemplos de potencia de números complejos

Dinámica de ajuste (2)

- ¿Cómo se da el ajuste si λ_{max} es complejo?
- Se sabe que si $\lambda_1 = a + bi$, entonces $\lambda_2 = a - bi$
- Si expresamos λ_j en coordenadas polares:

$$\lambda_1 = R[\cos\theta + i\sin\theta] = Re^{i\theta}$$
$$\lambda_2 = R[\cos\theta - i\sin\theta] = Re^{-i\theta}$$

$$R = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$a = R\cos\theta$$
$$b = R\sin\theta$$

- De lo anterior:

$$\lambda_1^j = R^j e^{ij\theta} = R^j[\cos j\theta + i\sin j\theta]$$
$$\lambda_2^j = R^j e^{-ij\theta} = R^j[\cos j\theta - i\sin j\theta]$$

Dinámica de ajuste (3)

- El promedio de estos dos eigenvalores es:

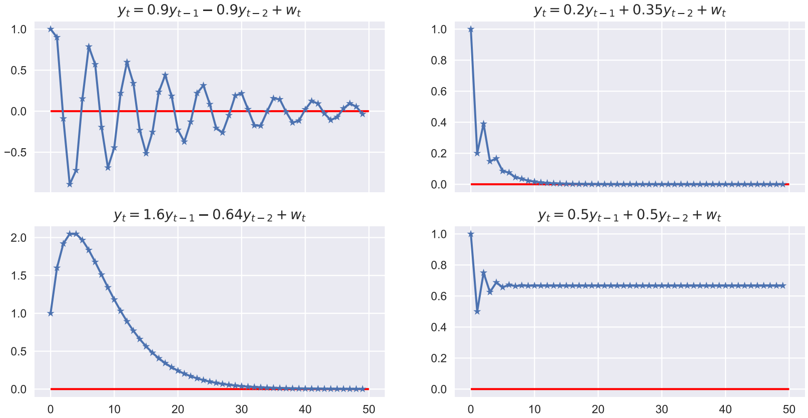
$$
\begin{aligned}
c_1\lambda_1^j + c_2\lambda_2^j &= c_1 R^j[\cos j\theta + i\sin j\theta] + c_2 R^j[\cos j\theta - i\sin j\theta] \\
&= R^j\left[(c_1 + c_2)\cos j\theta + i(c1 - c_2)\sin j\theta\right]
\end{aligned}
$$

Pero c_1 y c_2 son conjugados: $c_1, c_2 = \alpha \pm \beta i$

$$
= R^j\left[2\alpha\cos j\theta - 2\beta\sin j\theta\right]
$$

- que en función de j es periódica, con frecuencia θ y período $\frac{2\pi}{\theta}$

Ejemplo de dinámica de ajuste cuando $p = 2$



- Recordando que

$$\frac{\partial \xi_{t+j}}{\partial v_t'} = F^j$$

Se tiene que:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \frac{\partial \xi_{t+j}}{\partial v_t'} = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j F^j = (I_p - \beta F)^{-1}$$

En este caso su elemento 1,1 es

$$\frac{1}{1 - \phi_1 \beta - \phi_2 \beta^2 - \cdots - \phi_p \beta^p}$$

Efecto acumulado y multiplicador de largo plazo

- Se obtiene del VP en el caso particular en que $\beta = 1$:

$$\frac{1}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \cdots - \phi_p}$$

2. Solución por combinación de soluciones homogéneas y particulares

La estrategia de solución

Para resolver la ecuación lineal en diferencia

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + w_t$$

seguimos estos pasos

Paso 1: Formamos la ecuación homogénea $y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} - \cdots - \phi_p y_{t-p} = 0$ y encontramos sus p soluciones;

Paso 2: Encontramos una solución particular;

Paso 3: Obtenemos la solución general como la suma de la solución particular y una combinación lineal de todas las soluciones homogéneas;

Paso 4: Eliminamos las constantes arbitrarias imponiendo p condiciones iniciales en el problema.

Ecuación homogénea de primer orden

- Para la ecuación

$$y_t = \phi y_{t-1} \quad \Rightarrow y_t - \phi y_{t-1} = 0$$

- Solución trivial: $y_t = y_{t-1} = \cdots = 0$, pero no es única.
- La expresión $y_t^h = \phi^t$ también es una solución:

$$\underbrace{\phi^t}_{y_t^h} - \phi\underbrace{\left(\phi^{t-1}\right)}_{y_{t-1}^h} = 0$$

- Pero si y_t^h es una solución, entonces Ay_t^h también lo es, para cualquier escalar A:

$$Ay_t^h - \phi\left(Ay_{t-1}^h\right) = A\left(y_t^h - \phi y_{t-1}^h\right) = 0$$

Condición inicial para la ecuación homogénea de primer orden

- Hemos obtenido que $y_t = A\phi^t$ resuelve $y_t - \phi y_{t-1} = 0$
- Para determinar una valor específico de A, necesitamos una condición inicial.
- Por ejemplo, supongamos que el valor de y_t en $t = 0$ es conocido. Entonces:

$$y_0 = A\phi^0 \quad \Rightarrow A = y_0$$

- Por lo que en ese caso la solución de la ecuación sería

$$y_t = \phi^t y_0$$

Ecuación homogénea de orden p

- Para la ecuación

$$y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} - \cdots - \phi_{p-1} y_{t-p+1} - \phi_p y_{t-p} = 0$$

- Solución trivial es de nuevo: $y_t = y_{t-1} = \cdots = 0$.
- Supongamos que la expresión $y_t^h = z^t$ también es una solución. Sustituyendo en la ecuación:

$$\begin{aligned} z^t - \phi_1 z^{t-1} - \phi_2 z^{t-2} - \cdots - \phi_{p-1} z^{t-p+1} - \phi_p z^{t-p} &= 0 \\ z^{t-p}\left[z^p - \phi_1 z^{p-1} - \phi_2 z^{p-2} - \cdots - \phi_{p-1} z^1 - \phi_p z^0\right] &= 0 \end{aligned}$$

- Hemos logrado cambiar el problema original por el de encontrar los ceros de un polinomio de grado p:

$$z^p - \phi_1 z^{p-1} - \phi_2 z^{p-2} - \cdots - \phi_{p-1} z - \phi_p = 0$$

- Esta es la misma ecuación característica que encontramos en la sección anterior.

Resolviendo la ecuación característica

- Todo polinomio de grado p tiene exactamente p raíces, no necesariamente distintas o reales.
- Supongamos que $z_1, z_2, \ldots, z_p$ son las raíces del polinomio.
- Las soluciones homogéneas son entonces

$$y_t^h \in \left\{z_1^t, z_2^t, \ldots, z_p^t\right\}$$

- Cualquier combinación lineal de estas soluciones $y_t^h = A_1 z_1^t + \cdots + A_p z_p^t$ también es una solución:

$$\begin{gathered}
y_t - \phi_1 y_{t-1} - \cdots - \phi_p y_{t-p} = \left(A_1 z_1^t + \cdots + A_p z_p^t\right) - \\
\phi_1\left(A_1 z_1^{t-1} + \cdots + A_p z_p^{t-1}\right) - \cdots - \phi_p\left(A_1 z_1^{t-p} + \cdots + A_1 z_p^{t-p}\right) = \\
A_1\left(z_1^t - \phi_1 z_1^{t-1} - \cdots - \phi_p z_1^{t-p}\right) + \cdots + A_p\left(z_p^t - \phi_1 z_p^{t-1} - \cdots - \phi_p z_p^{t-p}\right) = \\
A_1 z_1^{t-p}\left(z_1^p - \phi_1 z_1^{p-1} - \cdots - \phi_p\right) + \cdots + A_p z_p^{t-p}\left(z_p^p - \phi_1 z_p^{p-1} - \cdots - \phi_p\right) = 0
\end{gathered}$$

Ejemplo 2:

Resolviendo

$$y_t = 0.9y_{t-1} - 0.2y_{t-2} + 3$$

`EqDiff2.ipynb`

$$y_t = 0.9y_{t-1} - 0.2y_{t-2} + 3$$

Paso 1: Resolvemos la ecuación homogénea $y_t - 0.9y_{t-1} + 0.2y_{t-2} = 0$:

$$z^2 - 0.9z + 0.2 = (z - 0.4)(z - 0.5) = 0$$
$$z \in \{0.4, 0.5\} \quad \Rightarrow \quad y^h_{1,t} = 0.4^t,\ y^h_{2,t} = 0.5^t$$

Es fácil verificar que son las soluciones:

$$0.4^t - 0.9\,(0.4)^{t-1} + 0.2\,(0.4)^{t-2} = (0.4)^{t-2}\left[(0.4)^2 - 0.9(0.4) + 0.2\right] = 0$$
$$0.5^t - 0.9\,(0.5)^{t-1} + 0.2\,(0.5)^{t-2} = (0.5)^{t-2}\left[(0.5)^2 - 0.9(0.5) + 0.2\right] = 0$$

Paso 2: Supongamos que $y^p_t = c$, una constante, es una solución particular:

$$c = 0.9c - 0.2c + 3 \quad \Rightarrow c = 10 \quad \Rightarrow y^p_t = 10$$

Paso 3: Obtenemos la solución general como la suma de la solución particular y una combinación lineal de todas las soluciones homogéneas:

$$y_t = A_1(0.4)^t + A_2(0.5)^t + 10$$

Paso 4: Eliminamos A_1, A_2 imponiendo 2 condiciones iniciales: $y_0 = 13, y_1 = 11.3$.

$$\begin{cases} 13 & = A_1 + A_2 + 10 \\ 11.3 & = 0.4A_1 + 0.5A_2 + 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 & = 3 \\ 0.4A_1 + 0.5A_2 & = 1.3 \end{cases}$$

entonces $A_1 = 2, A_2 = 1$ y la solución general de la ecuación es:

$$y_t = 2(0.4)^t + (0.5)^t + 10$$

Podemos también resolver este sistema utilizando el paquete sympy de Python:

```python
from sympy import Function, rsolve
from sympy.abc import t

y = Function('y')
rsolve(y(t) - 0.9*y(t-1) + 0.2*y(t-2) - 3, y(t), {y(0):13, y(1): 11.3})
```

3. Solución por medio del operador de rezagos

Introducción

- Este tema constituye una herramienta para simplificar el análisis de ecuaciones en diferencia
- Se asumirá que todas las variables son determinísticas (no estocásticas).
- Se limita la exposición a ecuaciones en diferencia lineales.

Ecuación en diferencia de primer orden

- En este caso
$$y_t = \phi y_{t-1} + w_t$$
- Utilizando el operador de rezagos se resuelve así:
$$\begin{aligned} y_t &= \phi\,\mathrm{L}\,y_t + w_t \\ (1-\phi\,\mathrm{L})y_t &= w_t \\ \left(1+\phi\,\mathrm{L}+\cdots+\phi^t\,\mathrm{L}^t\right)(1-\phi\,\mathrm{L})y_t &= \left(1+\phi\,\mathrm{L}+\cdots+\phi^t\,\mathrm{L}^t\right)w_t \\ \left(1-\phi^{t+1}\,\mathrm{L}^{t+1}\right)y_t &= w_t + \phi w_{t-1} + \cdots + \phi^t w_0 \end{aligned}$$
- Así
$$y_t = \phi^{t+1} y_{-1} + w_t + \phi w_{t-1} + \cdots + \phi^t w_0$$

Solución de "largo plazo"

- En este caso

$$
\begin{aligned}
(1-\phi\,\mathrm{L})y_t &= w_t \\
(1-\phi\,\mathrm{L})^{-1}(1-\phi\,\mathrm{L})y_t &= \left(1+\phi\,\mathrm{L}+\phi^2\,\mathrm{L}^2+\dots\right)w_t \\
y_t &= w_t+\phi w_{t-1}+\phi^2 w_{t-2}+\dots
\end{aligned}
$$

siempre y cuando $|\phi|<1$.

Ecuación en diferencia de orden p

- La variable y_t evoluciona como

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + w_t$$

- Con operador de rezagos:

$$\left(1 - \phi_1 \mathrm{L} - \phi_2 \mathrm{L}^2 - \cdots - \phi_p \mathrm{L}^p\right) y_t = w_t$$

- Para factorizar el polinomio es necesario resolver

$$f(z) \equiv 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \cdots - \phi_p z^p = 0$$

- Con el cambio de variable $z = \frac{1}{\lambda}$ obtenemos

$$\begin{aligned} 1 - \phi_1 \left(\tfrac{1}{\lambda}\right) - \phi_2 \left(\tfrac{1}{\lambda}\right)^2 - \cdots - \phi_p \left(\tfrac{1}{\lambda}\right)^p &= 0 \\ \lambda^p - \phi_1 \lambda^{p-1} - \phi_2 \lambda^{p-2} - \cdots - \phi_{p-1}\lambda - \phi_p &= 0 \end{aligned}$$

- Esta es la misma expresión que se obtuvo con álgebra de matrices: por lo tanto las raíces de $f(z)$ son los recíprocos de las raíces anteriores.

Estabilidad

- Dada la relación existente entre las ecuaciones

$$
\begin{aligned}
1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \cdots - \phi_p z^p &= 0 \\
\lambda^p - \phi_1 \lambda^{p-1} - \phi_2 \lambda^{p-2} - \cdots - -\phi_{p-1}\lambda - \phi_p &= 0
\end{aligned}
$$

está claro que para que el proceso sea estable es necesario que las raíces de

$$1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \cdots - \phi_p z^p = 0$$

estén fuera del círculo unitario, esto es, si z_i es raíz, entonces $|z_i| > 1$.

Referencias I

Enders, Walter (2014). *Applied Econometric Time Series*. 4ª ed. Wiley. ISBN: 978-1-118-80856-6.

Hamilton, James M. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press. ISBN: 0-691-04289-6.