Sistemas de ecuaciones simultáneas

Randall Romero Aguilar, PhD
randall.romero@ucr.ac.cr

EC4301 - Macroeconometría

I Semestre 2020

Última actualización: 11 de junio de 2020

Tabla de contenidos

Introducción

- En Economía, muchas de las teorías se construyen como modelos de ecuaciones simultáneas

Introducción

- En Economía, muchas de las teorías se construyen como modelos de ecuaciones simultáneas
- Ejemplos:

Introducción

- En Economía, muchas de las teorías se construyen como modelos de ecuaciones simultáneas
- Ejemplos:

Un modelo de oferta y demanda

$$q_t^d = \alpha_0 + \alpha_1 p_t + \alpha_2 x_t + \epsilon_t^d$$
$$q_t^s = \beta_0 + \beta_1 p_t + \epsilon_t^s$$
$$q_t^d = q_t^s = q$$

Introducción

- En Economía, muchas de las teorías se construyen como modelos de ecuaciones simultáneas
- Ejemplos:

Un modelo de oferta y demanda

$$q_t^d = \alpha_0 + \alpha_1 p_t + \alpha_2 x_t + \epsilon_t^d$$
$$q_t^s = \beta_0 + \beta_1 p_t + \epsilon_t^s$$
$$q_t^d = q_t^s = q$$

Un modelo de demanda agregada

$$C_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \epsilon_{1t}$$
$$I_t = \beta_0 + \beta_1 \left(Y_t - Y_{t-1}\right) + \epsilon_{2t}$$
$$Y_t = C_t + I_t + G_t$$

Modelo de ecuaciones simultáneas

- En este modelo se presentan un grupo de variables dependientes que se determinan simultáneamente en un sistema de ecuaciones.

Modelo de ecuaciones simultáneas

- En este modelo se presentan un grupo de variables dependientes que se determinan simultáneamente en un sistema de ecuaciones.
- Se asume que existen tantas ecuaciones como variables dependientes en el sistema.

1. Representación

Modelo en forma estructural

- Hay K variables exógenas, M endógenas, y M ecuaciones.

Modelo en forma estructural

- Hay K variables exógenas, M endógenas, y M ecuaciones.
- Se cuenta con T observaciones de cada variable.

Modelo en forma estructural

- Hay K variables exógenas, M endógenas, y M ecuaciones.
- Se cuenta con T observaciones de cada variable.

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{11} y_{t1} + \cdots + \gamma_{M1} y_{tM} + \beta_{11} x_{t1} + \cdots + \beta_{K1} x_{tK} = \epsilon_{t1} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

Modelo en forma estructural

- Hay K variables exógenas, M endógenas, y M ecuaciones.
- Se cuenta con T observaciones de cada variable.

$$\begin{cases} \gamma_{11}y_{t1} + \cdots + \gamma_{M1}y_{tM} + \beta_{11}x_{t1} + \cdots + \beta_{K1}x_{tK} = \epsilon_{t1} \\ \gamma_{12}y_{t1} + \cdots + \gamma_{M2}y_{tM} + \beta_{12}x_{t1} + \cdots + \beta_{K2}x_{tK} = \epsilon_{t2} \\ \\ \\ \end{cases}$$

Modelo en forma estructural

- Hay K variables exógenas, M endógenas, y M ecuaciones.
- Se cuenta con T observaciones de cada variable.

$$\begin{cases} \gamma_{11} y_{t1} + \cdots + \gamma_{M1} y_{tM} + \beta_{11} x_{t1} + \cdots + \beta_{K1} x_{tK} = \epsilon_{t1} \\ \gamma_{12} y_{t1} + \cdots + \gamma_{M2} y_{tM} + \beta_{12} x_{t1} + \cdots + \beta_{K2} x_{tK} = \epsilon_{t2} \\ \vdots \\ \gamma_{1M} y_{t1} + \cdots + \gamma_{MM} y_{tM} + \beta_{1M} x_{t1} + \cdots + \beta_{KM} x_{tK} = \epsilon_{tM} \end{cases}$$

Ecuaciones en forma estructural: Matrices

Escribimos las ecuaciones como $y_t'\Gamma + x_t'B = \epsilon_t'$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 & \dots & y_M \end{bmatrix}_t}_{y_t'} \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1M} \\ & \ddots & \\ \gamma_{M1} & \cdots & \gamma_{MM} \end{bmatrix}}_{\Gamma}$$

En las matrices Γ y B, cada columna corresponde a una ecuación, y cada fila a una variable.

Ecuaciones en forma estructural: Matrices

Escribimos las ecuaciones como $y_t'\Gamma + x_t'B = \epsilon_t'$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 & \dots & y_M \end{bmatrix}_t}_{y_t'} \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \dots & \gamma_{1M} \\ & \ddots & \\ \gamma_{M1} & \dots & \gamma_{MM} \end{bmatrix}}_{\Gamma} + \dots$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_K \end{bmatrix}_t}_{x_t'} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1M} \\ & \ddots & \\ \beta_{K1} & \dots & \beta_{KM} \end{bmatrix}}_{B}$$

En las matrices Γ y B, cada columna corresponde a una ecuación, y cada fila a una variable.

Ecuaciones en forma estructural: Matrices

Escribimos las ecuaciones como $y_t'\Gamma + x_t'B = \epsilon_t'$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 & \dots & y_M \end{bmatrix}_t}_{y_t'} \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \dots & \gamma_{1M} \\ & \ddots & \\ \gamma_{M1} & \dots & \gamma_{MM} \end{bmatrix}}_{\Gamma} + \dots$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_K \end{bmatrix}_t}_{x_t'} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1M} \\ & \ddots & \\ \beta_{K1} & \dots & \beta_{KM} \end{bmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} \epsilon_1 & \dots & \epsilon_M \end{bmatrix}_t}_{\epsilon_t'}$$

En las matrices Γ y B, cada columna corresponde a una ecuación, y cada fila a una variable.

Modelo en forma estructural: Matrices

Juntando todas las observaciones $y_t'\Gamma + x_t'B = \epsilon_t'$ obtenemos

$$\begin{aligned} y_1'\Gamma + x_1'B &= \epsilon_1' \\ y_2'\Gamma + x_2'B &= \epsilon_2' \\ &\vdots \\ y_T'\Gamma + x_T'B &= \epsilon_T' \end{aligned}$$

Modelo en forma estructural: Matrices

Juntando todas las observaciones $y_t'\Gamma + x_t'B = \epsilon_t'$ obtenemos

$$\begin{matrix} y_1'\Gamma + x_1'B = \epsilon_1' \\ y_2'\Gamma + x_2'B = \epsilon_2' \\ \vdots \\ y_T'\Gamma + x_T'B = \epsilon_T' \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1'\Gamma \\ y_2'\Gamma \\ \vdots \\ y_T'\Gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1'B \\ x_2'B \\ \vdots \\ x_T'B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1' \\ \epsilon_2' \\ \vdots \\ \epsilon_T' \end{bmatrix}$$

Modelo en forma estructural: Matrices

Juntando todas las observaciones $y_t'\Gamma + x_t'B = \epsilon_t'$ obtenemos

$$\begin{aligned} y_1'\Gamma + x_1'B &= \epsilon_1' \\ y_2'\Gamma + x_2'B &= \epsilon_2' \\ &\vdots \\ y_T'\Gamma + x_T'B &= \epsilon_T' \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1'\Gamma \\ y_2'\Gamma \\ \vdots \\ y_T'\Gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1'B \\ x_2'B \\ \vdots \\ x_T'B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1' \\ \epsilon_2' \\ \vdots \\ \epsilon_T' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_T' \end{bmatrix} \Gamma + \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_T' \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} \epsilon_1' \\ \epsilon_2' \\ \vdots \\ \epsilon_T' \end{bmatrix}$$

Modelo en forma reducida

Postmultiplicando la forma estructural por Γ^{-1} tenemos

$$y_t'\Gamma + x_t'B = \epsilon_t'$$

Modelo en forma reducida

Postmultiplicando la forma estructural por Γ^{-1} tenemos

$$\begin{aligned} y_t'\Gamma + x_t'B &= \epsilon_t' \\ y_t'\Gamma\Gamma^{-1} + x_t'B\Gamma^{-1} &= \epsilon_t'\Gamma^{-1} \end{aligned}$$

Modelo en forma reducida

Postmultiplicando la forma estructural por Γ^{-1} tenemos

$$\begin{aligned} y_t'\Gamma + x_t'B &= \epsilon_t' \\ y_t'\Gamma\Gamma^{-1} + x_t'B\Gamma^{-1} &= \epsilon_t'\Gamma^{-1} \\ y_t' - x_t'\Pi &= \nu_t' \end{aligned}$$

Modelo en forma reducida

Postmultiplicando la forma estructural por Γ^{-1} tenemos

$$\begin{aligned} y_t'\Gamma + x_t'B &= \epsilon_t' \\ y_t'\Gamma\Gamma^{-1} + x_t'B\Gamma^{-1} &= \epsilon_t'\Gamma^{-1} \\ y_t' - x_t'\Pi &= \nu_t' \\ y_t' &= x_t'\Pi + \nu_t' \end{aligned}$$

Modelo en forma reducida

Postmultiplicando la forma estructural por Γ^{-1} tenemos

$$\begin{aligned} y_t'\Gamma + x_t'B &= \epsilon_t' \\ y_t'\Gamma\Gamma^{-1} + x_t'B\Gamma^{-1} &= \epsilon_t'\Gamma^{-1} \\ y_t' - x_t'\Pi &= \nu_t' \\ y_t' &= x_t'\Pi + \nu_t' \end{aligned}$$

o bien

Modelo en forma reducida

Postmultiplicando la forma estructural por Γ^{-1} tenemos

$$\begin{aligned} y_t'\Gamma + x_t'B &= \epsilon_t' \\ y_t'\Gamma\Gamma^{-1} + x_t'B\Gamma^{-1} &= \epsilon_t'\Gamma^{-1} \\ y_t' - x_t'\Pi &= \nu_t' \\ y_t' &= x_t'\Pi + \nu_t' \end{aligned}$$

o bien

$$Y\Gamma + XB = E$$

Modelo en forma reducida

Postmultiplicando la forma estructural por Γ^{-1} tenemos

$$\begin{aligned} y_t'\Gamma + x_t'B &= \epsilon_t' \\ y_t'\Gamma\Gamma^{-1} + x_t'B\Gamma^{-1} &= \epsilon_t'\Gamma^{-1} \\ y_t' - x_t'\Pi &= \nu_t' \\ y_t' &= x_t'\Pi + \nu_t' \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} Y\Gamma + XB &= E \\ Y\Gamma\Gamma^{-1} + XB\Gamma^{-1} &= E\Gamma^{-1} \end{aligned}$$

Modelo en forma reducida

Postmultiplicando la forma estructural por Γ^{-1} tenemos

$$\begin{aligned} y_t'\Gamma + x_t'B &= \epsilon_t' \\ y_t'\Gamma\Gamma^{-1} + x_t'B\Gamma^{-1} &= \epsilon_t'\Gamma^{-1} \\ y_t' - x_t'\Pi &= \nu_t' \\ y_t' &= x_t'\Pi + \nu_t' \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} Y\Gamma + XB &= E \\ Y\Gamma\Gamma^{-1} + XB\Gamma^{-1} &= E\Gamma^{-1} \\ Y - X\Pi &= V \end{aligned}$$

Modelo en forma reducida

Postmultiplicando la forma estructural por Γ^{-1} tenemos

$$\begin{aligned} y_t'\Gamma + x_t'B &= \epsilon_t' \\ y_t'\Gamma\Gamma^{-1} + x_t'B\Gamma^{-1} &= \epsilon_t'\Gamma^{-1} \\ y_t' - x_t'\Pi &= \nu_t' \\ y_t' &= x_t'\Pi + \nu_t' \end{aligned} \quad \text{o bien} \quad \begin{aligned} Y\Gamma + XB &= E \\ Y\Gamma\Gamma^{-1} + XB\Gamma^{-1} &= E\Gamma^{-1} \\ Y - X\Pi &= V \\ Y &= X\Pi + V \end{aligned}$$

Modelo en forma reducida

Postmultiplicando la forma estructural por Γ^{-1} tenemos

$$
\begin{aligned}
y_t'\Gamma + x_t'B &= \epsilon_t' \\
y_t'\Gamma\Gamma^{-1} + x_t'B\Gamma^{-1} &= \epsilon_t'\Gamma^{-1} \\
y_t' - x_t'\Pi &= \nu_t' \\
y_t' &= x_t'\Pi + \nu_t'
\end{aligned}
\quad \text{o bien} \quad
\begin{aligned}
Y\Gamma + XB &= E \\
Y\Gamma\Gamma^{-1} + XB\Gamma^{-1} &= E\Gamma^{-1} \\
Y - X\Pi &= V \\
Y &= X\Pi + V
\end{aligned}
$$

donde hemos definido $\Pi \equiv -B\Gamma^{-1}$ como los parámetros reducidos del sistema, y $v_t' \equiv \epsilon_t'\Gamma^{-1}$.

Modelo en forma reducida

Postmultiplicando la forma estructural por Γ^{-1} tenemos

$$\begin{aligned} y_t'\Gamma + x_t'B &= \epsilon_t' \\ y_t'\Gamma\Gamma^{-1} + x_t'B\Gamma^{-1} &= \epsilon_t'\Gamma^{-1} \\ y_t' - x_t'\Pi &= \nu_t' \\ y_t' &= x_t'\Pi + \nu_t' \end{aligned} \quad \text{o bien} \quad \begin{aligned} Y\Gamma + XB &= E \\ Y\Gamma\Gamma^{-1} + XB\Gamma^{-1} &= E\Gamma^{-1} \\ Y - X\Pi &= V \\ Y &= X\Pi + V \end{aligned}$$

donde hemos definido $\Pi \equiv -B\Gamma^{-1}$ como los parámetros reducidos del sistema, y $v_t' \equiv \epsilon_t'\Gamma^{-1}$.

Forma Reducida

$$Y = X\Pi + V$$

Ejemplo 1:

Forma estructural y reducida del modelo de oferta y demanda

Un modelo de oferta y demanda

$$\begin{cases} q_t^d = \alpha_0 + \alpha_1 p_t + \alpha_2 x_t + \epsilon_t^d \\ q_t^s = \beta_0 + \beta_1 p_t + \epsilon_t^s \\ q_t^d = q_t^s = q \end{cases}$$

Su forma estructural es

$$\underbrace{\begin{bmatrix} q_t & p_t \end{bmatrix}}_{y_t'} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha_1 & -\beta_1 \end{bmatrix}}_{\Gamma} +$$

Note que cada columna de Γ y de B corresponden a una ecuación del modelo.

Un modelo de oferta y demanda

$$\begin{cases} q_t^d = \alpha_0 + \alpha_1 p_t + \alpha_2 x_t + \epsilon_t^d \\ q_t^s = \beta_0 + \beta_1 p_t + \epsilon_t^s \\ q_t^d = q_t^s = q \end{cases}$$

Su forma estructural es

$$\underbrace{\begin{bmatrix} q_t & p_t \end{bmatrix}}_{y_t'} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha_1 & -\beta_1 \end{bmatrix}}_{\Gamma} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_t \end{bmatrix}}_{x_t'} \underbrace{\begin{bmatrix} -\alpha_0 & -\beta_0 \\ -\alpha_2 & 0 \end{bmatrix}}_{B} =$$

Note que cada columna de Γ y de B corresponden a una ecuación del modelo.

Un modelo de oferta y demanda

$$\begin{cases} q_t^d = \alpha_0 + \alpha_1 p_t + \alpha_2 x_t + \epsilon_t^d \\ q_t^s = \beta_0 + \beta_1 p_t + \epsilon_t^s \\ q_t^d = q_t^s = q \end{cases}$$

Su forma estructural es

$$\underbrace{\begin{bmatrix} q_t & p_t \end{bmatrix}}_{y_t'} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha_1 & -\beta_1 \end{bmatrix}}_{\Gamma} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_t \end{bmatrix}}_{x_t'} \underbrace{\begin{bmatrix} -\alpha_0 & -\beta_0 \\ -\alpha_2 & 0 \end{bmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} \epsilon_t^d & \epsilon_t^s \end{bmatrix}}_{\epsilon_t'}$$

Note que cada columna de Γ y de B corresponden a una ecuación del modelo.

Así, $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha_1 & -\beta_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \Gamma^{-1} = \frac{1}{\beta_1 - \alpha_1} \begin{bmatrix} \beta_1 & 1 \\ -\alpha_1 & -1 \end{bmatrix}$

Así, $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha_1 & -\beta_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \Gamma^{-1} = \frac{1}{\beta_1 - \alpha_1} \begin{bmatrix} \beta_1 & 1 \\ -\alpha_1 & -1 \end{bmatrix}$

Los parámetros reducidos son:

Así, $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha_1 & -\beta_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \Gamma^{-1} = \frac{1}{\beta_1 - \alpha_1} \begin{bmatrix} \beta_1 & 1 \\ -\alpha_1 & -1 \end{bmatrix}$
Los parámetros reducidos son:

$\Pi = -B\Gamma^{-1}$

Así, $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha_1 & -\beta_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \Gamma^{-1} = \frac{1}{\beta_1 - \alpha_1} \begin{bmatrix} \beta_1 & 1 \\ -\alpha_1 & -1 \end{bmatrix}$
Los parámetros reducidos son:

$$\Pi = -B\Gamma^{-1} = \frac{1}{\beta_1 - \alpha_1} \begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \alpha_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 & 1 \\ -\alpha_1 & -1 \end{bmatrix}$$

Así, $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha_1 & -\beta_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \Gamma^{-1} = \frac{1}{\beta_1 - \alpha_1} \begin{bmatrix} \beta_1 & 1 \\ -\alpha_1 & -1 \end{bmatrix}$
Los parámetros reducidos son:

$$\Pi = -B\Gamma^{-1} = \frac{1}{\beta_1 - \alpha_1} \begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \alpha_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 & 1 \\ -\alpha_1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\beta_1 - \alpha_1} \begin{bmatrix} \alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0 & \alpha_0 - \beta_0 \\ \alpha_2\beta_1 & \alpha_2 \end{bmatrix}$$

Así, $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha_1 & -\beta_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \Gamma^{-1} = \frac{1}{\beta_1 - \alpha_1} \begin{bmatrix} \beta_1 & 1 \\ -\alpha_1 & -1 \end{bmatrix}$

Los parámetros reducidos son:

$$\Pi = -B\Gamma^{-1} = \frac{1}{\beta_1 - \alpha_1} \begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \alpha_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 & 1 \\ -\alpha_1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\beta_1 - \alpha_1} \begin{bmatrix} \alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0 & \alpha_0 - \beta_0 \\ \alpha_2\beta_1 & \alpha_2 \end{bmatrix}$$

y los shocks reducidos son:

Así, $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha_1 & -\beta_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \Gamma^{-1} = \frac{1}{\beta_1 - \alpha_1} \begin{bmatrix} \beta_1 & 1 \\ -\alpha_1 & -1 \end{bmatrix}$
Los parámetros reducidos son:

$$\Pi = -B\Gamma^{-1} = \frac{1}{\beta_1 - \alpha_1} \begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \alpha_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 & 1 \\ -\alpha_1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\beta_1 - \alpha_1} \begin{bmatrix} \alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0 & \alpha_0 - \beta_0 \\ \alpha_2\beta_1 & \alpha_2 \end{bmatrix}$$

y los shocks reducidos son:

$$\nu_t' = \epsilon_t' \Gamma^{-1}$$

Así, $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha_1 & -\beta_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \Gamma^{-1} = \frac{1}{\beta_1 - \alpha_1} \begin{bmatrix} \beta_1 & 1 \\ -\alpha_1 & -1 \end{bmatrix}$
Los parámetros reducidos son:

$$\Pi = -B\Gamma^{-1} = \frac{1}{\beta_1 - \alpha_1} \begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \alpha_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 & 1 \\ -\alpha_1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\beta_1 - \alpha_1} \begin{bmatrix} \alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0 & \alpha_0 - \beta_0 \\ \alpha_2\beta_1 & \alpha_2 \end{bmatrix}$$

y los shocks reducidos son:

$$\nu_t' = \epsilon_t'\Gamma^{-1} = \frac{1}{\beta_1 - \alpha_1} \begin{bmatrix} \epsilon_t^d & \epsilon_t^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 & 1 \\ -\alpha_1 & -1 \end{bmatrix}$$

Así, $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha_1 & -\beta_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \Gamma^{-1} = \frac{1}{\beta_1 - \alpha_1} \begin{bmatrix} \beta_1 & 1 \\ -\alpha_1 & -1 \end{bmatrix}$

Los parámetros reducidos son:

$$\Pi = -B\Gamma^{-1} = \frac{1}{\beta_1 - \alpha_1} \begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \alpha_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 & 1 \\ -\alpha_1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\beta_1 - \alpha_1} \begin{bmatrix} \alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0 & \alpha_0 - \beta_0 \\ \alpha_2\beta_1 & \alpha_2 \end{bmatrix}$$

y los shocks reducidos son:

$$\nu_t' = \epsilon_t'\Gamma^{-1} = \frac{1}{\beta_1 - \alpha_1} \begin{bmatrix} \epsilon_t^d & \epsilon_t^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 & 1 \\ -\alpha_1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\beta_1 - \alpha_1} \begin{bmatrix} \beta_1\epsilon_t^d - \alpha_1\epsilon_t^s & \epsilon_t^d - \epsilon_t^s \end{bmatrix}$$

Así, $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha_1 & -\beta_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \Gamma^{-1} = \frac{1}{\beta_1 - \alpha_1} \begin{bmatrix} \beta_1 & 1 \\ -\alpha_1 & -1 \end{bmatrix}$
Los parámetros reducidos son:

$$\Pi = -B\Gamma^{-1} = \frac{1}{\beta_1 - \alpha_1} \begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \alpha_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 & 1 \\ -\alpha_1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\beta_1 - \alpha_1} \begin{bmatrix} \alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0 & \alpha_0 - \beta_0 \\ \alpha_2\beta_1 & \alpha_2 \end{bmatrix}$$

y los shocks reducidos son:

$$\nu_t' = \epsilon_t'\Gamma^{-1} = \frac{1}{\beta_1 - \alpha_1} \begin{bmatrix} \epsilon_t^d & \epsilon_t^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 & 1 \\ -\alpha_1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\beta_1 - \alpha_1} \begin{bmatrix} \beta_1\epsilon_t^d - \alpha_1\epsilon_t^s & \epsilon_t^d - \epsilon_t^s \end{bmatrix}$$

por lo que la forma reducida es:

$$\underset{y_t'}{\begin{bmatrix} q_t & p_t \end{bmatrix}} = \underset{x_t'}{\begin{bmatrix} 1 & x_t \end{bmatrix}} \underset{\Pi}{\begin{bmatrix} \frac{\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0}{\beta_1 - \alpha_1} & \frac{\alpha_0 - \beta_0}{\beta_1 - \alpha_1} \\ \frac{\alpha_2\beta_1}{\beta_1 - \alpha_1} & \frac{\alpha_2}{\beta_1 - \alpha_1} \end{bmatrix}} + \underset{\nu_t'}{\begin{bmatrix} \frac{\beta_1\epsilon_t^d - \alpha_1\epsilon_t^s}{\beta_1 - \alpha_1} & \frac{\epsilon_t^d - \epsilon_t^s}{\beta_1 - \alpha_1} \end{bmatrix}}$$

La forma reducida corresponde a la cantidad y precio de equilibrio:

$$\begin{cases} q_t^* = \underbrace{\frac{\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0}{\beta_1 - \alpha_1}}_{\pi_{11}} + \underbrace{\frac{\alpha_2\beta_1}{\beta_1 - \alpha_1}}_{\pi_{21}} x_t + \underbrace{\frac{\beta_1\epsilon_t^d - \alpha_1\epsilon_t^s}{\beta_1 - \alpha_1}}_{\nu_1} \\ p_t^* = \underbrace{\frac{\alpha_0 - \beta_0}{\beta_1 - \alpha_1}}_{\pi_{12}} + \underbrace{\frac{\alpha_2}{\beta_1 - \alpha_1}}_{\pi_{22}} x_t + \underbrace{\frac{\epsilon_t^d - \epsilon_t^s}{\beta_1 - \alpha_1}}_{\nu_2} \end{cases}$$

A partir de la forma reducida, es fácil calcular el efecto de shocks o de cambios en variables exógenas sobre las endógenas. Por ejemplo:

$$\frac{\partial q_t^*}{\partial x_t} = \pi_{21} = \frac{\alpha_2\beta_1}{\beta_1 - \alpha_1} \qquad \frac{\partial p_t^*}{\partial \epsilon_t^s} = \frac{-1}{\beta_1 - \alpha_1}$$

La forma reducida corresponde a la cantidad y precio de equilibrio:

$$\begin{cases} q_t^* = \underbrace{\frac{\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0}{\beta_1 - \alpha_1}}_{\pi_{11}} + \underbrace{\frac{\alpha_2\beta_1}{\beta_1 - \alpha_1}}_{\pi_{21}} x_t + \underbrace{\frac{\beta_1\epsilon_t^d - \alpha_1\epsilon_t^s}{\beta_1 - \alpha_1}}_{\nu_1} \\ p_t^* = \underbrace{\frac{\alpha_0 - \beta_0}{\beta_1 - \alpha_1}}_{\pi_{12}} + \underbrace{\frac{\alpha_2}{\beta_1 - \alpha_1}}_{\pi_{22}} x_t + \underbrace{\frac{\epsilon_t^d - \epsilon_t^s}{\beta_1 - \alpha_1}}_{\nu_2} \end{cases}$$

A partir de la forma reducida, es fácil calcular el efecto de shocks o de cambios en variables exógenas sobre las endógenas. Por ejemplo:

$$\frac{\partial q_t^*}{\partial x_t} = \pi_{21} = \frac{\alpha_2\beta_1}{\beta_1 - \alpha_1} \qquad \frac{\partial p_t^*}{\partial \epsilon_t^s} = \frac{-1}{\beta_1 - \alpha_1}$$

Nótese que a partir de la forma reducida, el efecto de una variable exógena es observable (es un parámetro reducido), no así el efecto de un shock estructural (está combinado con los demás shocks estructurales en el shock reducido).

Ejemplo 2:

Forma estructural y reducida del modelo de demanda agregada

Un modelo de demanda agregada

$$\begin{cases} C_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \epsilon_{1t} \\ I_t = \beta_0 + \beta_1 \left(Y_t - Y_{t-1}\right) + \epsilon_{2t} \\ Y_t = C_t + I_t + G_t \end{cases}$$

Su forma estructural es

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & -\beta_1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\Gamma'} \underbrace{\begin{bmatrix} C_t \\ I_t \\ Y_t \end{bmatrix}}_{y_t} +$$

Un modelo de demanda agregada

$$\begin{cases} C_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \epsilon_{1t} \\ I_t = \beta_0 + \beta_1 \left(Y_t - Y_{t-1}\right) + \epsilon_{2t} \\ Y_t = C_t + I_t + G_t \end{cases}$$

Su forma estructural es

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & -\beta_1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\Gamma'} \underbrace{\begin{bmatrix} C_t \\ I_t \\ Y_t \end{bmatrix}}_{y_t} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\alpha_0 & 0 & 0 \\ -\beta_0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{B'} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ Y_{t-1} \\ G_t \end{bmatrix}}_{x_t} =$$

Un modelo de demanda agregada

$$\begin{cases} C_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \epsilon_{1t} \\ I_t = \beta_0 + \beta_1 \left(Y_t - Y_{t-1}\right) + \epsilon_{2t} \\ Y_t = C_t + I_t + G_t \end{cases}$$

Su forma estructural es

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & -\beta_1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\Gamma'} \underbrace{\begin{bmatrix} C_t \\ I_t \\ Y_t \end{bmatrix}}_{y_t} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\alpha_0 & 0 & 0 \\ -\beta_0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{B'} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ Y_{t-1} \\ G_t \end{bmatrix}}_{x_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} \epsilon_{1t} \\ \epsilon_{2t} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\epsilon_t}$$

Un modelo de demanda agregada

$$\begin{cases} C_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \epsilon_{1t} \\ I_t = \beta_0 + \beta_1 \left(Y_t - Y_{t-1}\right) + \epsilon_{2t} \\ Y_t = C_t + I_t + G_t \end{cases}$$

Su forma estructural es

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & -\beta_1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\Gamma'} \underbrace{\begin{bmatrix} C_t \\ I_t \\ Y_t \end{bmatrix}}_{y_t} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\alpha_0 & 0 & 0 \\ -\beta_0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{B'} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ Y_{t-1} \\ G_t \end{bmatrix}}_{x_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} \epsilon_{1t} \\ \epsilon_{2t} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\epsilon_t}$$

Como tomamos la transpuesta, note que cada fila de Γ' y de B' corresponden a una ecuación del modelo.

Así, $\Gamma' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & -\beta_1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \Gamma'^{-1} = \frac{1}{1-\alpha_1-\beta_1} \begin{bmatrix} 1-\beta_1 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ \beta_1 & 1-\alpha_1 & \beta_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Los parámetros reducidos son:

$$\begin{aligned}
\Pi' = -\Gamma'^{-1}B' &= \frac{1}{1-\alpha_1-\beta_1} \begin{bmatrix} 1-\beta_1 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ \beta_1 & 1-\alpha_1 & \beta_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 \\ \beta_0 & -\beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{1-\alpha_1-\beta_1} \begin{bmatrix} \alpha_0 - \alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 & -\alpha_1\beta_1 & \alpha_1 \\ \alpha_0\beta_1 + \beta_0 - \alpha 1\beta_0 & \alpha_1\beta_1 - \beta_1 & \beta_1 \\ \alpha_0 + \beta_0 & -\beta_1 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Así, $\Gamma' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & -\beta_1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \Gamma'^{-1} = \frac{1}{1-\alpha_1-\beta_1} \begin{bmatrix} 1-\beta_1 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ \beta_1 & 1-\alpha_1 & \beta_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Los parámetros reducidos son:

$$\Pi' = -\Gamma'^{-1}B' = \frac{1}{1-\alpha_1-\beta_1} \begin{bmatrix} 1-\beta_1 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ \beta_1 & 1-\alpha_1 & \beta_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 \\ \beta_0 & -\beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{1-\alpha_1-\beta_1} \begin{bmatrix} \alpha_0 - \alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 & -\alpha_1\beta_1 & \alpha_1 \\ \alpha_0\beta_1 + \beta_0 - \alpha 1\beta_0 & \alpha_1\beta_1 - \beta_1 & \beta_1 \\ \alpha_0 + \beta_0 & -\beta_1 & 1 \end{bmatrix}$$

y los shocks reducidos son:

$$\nu_t = \Gamma'^{-1}\epsilon_t = \frac{1}{1-\alpha_1-\beta_1} \begin{bmatrix} 1-\beta_1 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ \beta_1 & 1-\alpha_1 & \beta_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{1t} \\ \epsilon_{2t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{1-\alpha_1-\beta_1} \begin{bmatrix} (1-\beta_1)\epsilon_{1t} + \alpha_1\epsilon_{2t} \\ \beta_1\epsilon_{1t} + (1-\alpha_1)\epsilon_{2t} \\ \epsilon_{1t} + \epsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

Así, $\Gamma' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & -\beta_1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \Gamma'^{-1} = \frac{1}{1-\alpha_1-\beta_1} \begin{bmatrix} 1-\beta_1 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ \beta_1 & 1-\alpha_1 & \beta_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Los parámetros reducidos son:

$$\begin{aligned}
\Pi' = -\Gamma'^{-1} B' &= \frac{1}{1-\alpha_1-\beta_1} \begin{bmatrix} 1-\beta_1 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ \beta_1 & 1-\alpha_1 & \beta_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 \\ \beta_0 & -\beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{1-\alpha_1-\beta_1} \begin{bmatrix} \alpha_0 - \alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 & -\alpha_1\beta_1 & \alpha_1 \\ \alpha_0\beta_1 + \beta_0 - \alpha 1\beta_0 & \alpha_1\beta_1 - \beta_1 & \beta_1 \\ \alpha_0 + \beta_0 & -\beta_1 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

y los shocks reducidos son:

$$\begin{aligned}
\nu_t = \Gamma'^{-1}\epsilon_t &= \frac{1}{1-\alpha_1-\beta_1} \begin{bmatrix} 1-\beta_1 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ \beta_1 & 1-\alpha_1 & \beta_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{1t} \\ \epsilon_{2t} \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{1-\alpha_1-\beta_1} \begin{bmatrix} (1-\beta_1)\epsilon_{1t} + \alpha_1\epsilon_{2t} \\ \beta_1\epsilon_{1t} + (1-\alpha_1)\epsilon_{2t} \\ \epsilon_{1t} + \epsilon_{2t} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

por lo que la forma reducida es:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} C_t \\ I_t \\ Y_t \end{bmatrix}}_{y_t} = \underbrace{\frac{1}{1-\alpha_1-\beta_1} \begin{bmatrix} \alpha_0 - \alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 & -\alpha_1\beta_1 & \alpha_1 \\ \alpha_0\beta_1 + \beta_0 - \alpha 1\beta_0 & \alpha_1\beta_1 - \beta_1 & \beta_1 \\ \alpha_0 + \beta_0 & -\beta_1 & 1 \end{bmatrix}}_{\Pi'} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ Y_{t-1} \\ G_t \end{bmatrix}}_{x_t} + \underbrace{\frac{1}{1-\alpha_1-\beta_1} \begin{bmatrix} (1-\beta_1)\epsilon_{1t} + \alpha_1\epsilon_{2t} \\ \beta_1\epsilon_{1t} + (1-\alpha_1)\epsilon_{2t} \\ \epsilon_{1t} + \epsilon_{2t} \end{bmatrix}}_{\nu_t}$$

La forma reducida corresponde al consumo, inversión, e ingreso de equilibrio:

$$\begin{cases} C_t^* = \frac{\alpha_0 - \alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0}{1-\alpha_1-\beta_1} - \frac{\alpha_1\beta_1}{1-\alpha_1-\beta_1} Y_{t-1} + \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1-\beta_1} G_t + \frac{(1-\beta_1)\epsilon_{1t} + \alpha_1\epsilon_{2t}}{1-\alpha_1-\beta_1} \\ I_t^* = \frac{\alpha_0\beta_1 + \beta_0 - \alpha 1\beta_0}{1-\alpha_1-\beta_1} + \frac{\alpha_1\beta_1 - \beta_1}{1-\alpha_1-\beta_1} Y_{t-1} + \frac{\beta_1}{1-\alpha_1-\beta_1} G_t + \frac{\beta_1\epsilon_{1t} + (1-\alpha_1)\epsilon_{2t}}{1-\alpha_1-\beta_1} \\ Y_t^* = \frac{\alpha_0 + \beta_0}{1-\alpha_1-\beta_1} - \frac{\beta_1}{1-\alpha_1-\beta_1} Y_{t-1} + \frac{1}{1-\alpha_1-\beta_1} G_t + \frac{\epsilon_{1t} + \epsilon_{2t}}{1-\alpha_1-\beta_1} \end{cases}$$

Así, el multiplicador del gasto público es:

$$\frac{\partial Y_t^*}{\partial G_t} = \pi_{33} = \frac{1}{1-\alpha_1-\beta_1}$$

De nuevo, observe que los shocks reducidos son combinaciones lineales de los shocks estructurales.

2. Identificación

Identificación

- El problema de identificación en ecuaciones simultáneas se refiere a cómo obtener los parámetros estructurales B, Γ, Σ a partir de los parámetros reducidos Π, Ω.

$$\left.\begin{array}{l} \Pi = -B\Gamma^{-1} \\ \\ \Omega = \left(\Gamma^{-1}\right)' \Sigma \Gamma^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} B = ? \\ \Gamma = ? \\ \Sigma = ? \end{cases}$$

Identificación

- El problema de identificación en ecuaciones simultáneas se refiere a cómo obtener los parámetros estructurales B, Γ, Σ a partir de los parámetros reducidos Π, Ω.

$$\left.\begin{aligned} \Pi &= -B\Gamma^{-1} \\ \\ \Omega &= \left(\Gamma^{-1}\right)' \Sigma\Gamma^{-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} B = ? \\ \Gamma = ? \\ \Sigma = ? \end{cases}$$

- No es un problema de estimación, sino de resolución de un sistema de ecuaciones no lineales.

Identificación (cont'n)

- Considere la matriz $F \neq I$, y defina $\tilde{\Gamma} = \Gamma F$ y $\tilde{B} = BF$. Entonces

$$
\begin{aligned}
Y\Gamma + XB &= E && \text{(estructura verdadera)} \\
Y\tilde{\Gamma} + X\tilde{B} &= \tilde{E} && \text{(estructura falsa)}
\end{aligned}
$$

- Considere la matriz $F \neq I$, y defina $\tilde{\Gamma} = \Gamma F$ y $\tilde{B} = BF$. Entonces

$$Y\Gamma + XB = E \qquad \text{(estructura verdadera)}$$
$$Y\tilde{\Gamma} + X\tilde{B} = \tilde{E} \qquad \text{(estructura falsa)}$$

- Pero ambas tienen la misma forma reducida!:

$$\begin{aligned}\tilde{\Pi} &= -\tilde{B}\tilde{\Gamma}^{-1} \\ &= -BFF^{-1}\Gamma^{-1} \\ &= -B\Gamma^{-1} \\ &= \Pi\end{aligned}$$

- Considere la matriz $F \neq I$, y defina $\tilde{\Gamma} = \Gamma F$ y $\tilde{B} = BF$. Entonces

$$Y\Gamma + XB = E \qquad \text{(estructura verdadera)}$$
$$Y\tilde{\Gamma} + X\tilde{B} = \tilde{E} \qquad \text{(estructura falsa)}$$

- Pero ambas tienen la misma forma reducida!:

$$\begin{aligned}\tilde{\Pi} &= -\tilde{B}\tilde{\Gamma}^{-1} \\ &= -BFF^{-1}\Gamma^{-1} \\ &= -B\Gamma^{-1} \\ &= \Pi\end{aligned}$$

- Decimos que las estructuras son observacionalmente equivalentes.

Identificación: contando parámetros

parámetros estructurales		parámetros reducidos	
Γ	M^2		
B	KM	Π	KM
Σ	$\frac{M(M+1)}{2}$	Ω	$\frac{M(M+1)}{2}$
Total:	$\frac{M}{2}(1+2K+3M)$	Total:	$\frac{M}{2}(1+2K+M)$

Para identificar los parámetros B, Γ, Σ a partir de Π, Ω tenemos:

$$\underbrace{\tfrac{M}{2}(1+2K+3M)}_{\text{\# de incógnitas}} - \underbrace{\tfrac{M}{2}(1+2K+M)}_{\text{\# de ecuaciones}} = \underbrace{M^2}_{\text{exceso de parámetros}}$$

Identificación de la ecuación j

Dado que tenemos más parámetros estructurales que reducidos, es necesario tener información no muestral:

- normalizaciones

Identificación de la ecuación j

Dado que tenemos más parámetros estructurales que reducidos, es necesario tener información no muestral:

- normalizaciones
- identidades

Identificación de la ecuación j

Dado que tenemos más parámetros estructurales que reducidos, es necesario tener información no muestral:

- normalizaciones
- identidades
- exclusiones

Identificación de la ecuación j

Dado que tenemos más parámetros estructurales que reducidos, es necesario tener información no muestral:

- normalizaciones
- identidades
- exclusiones
- restricciones lineales

Identificación de la ecuación j

Dado que tenemos más parámetros estructurales que reducidos, es necesario tener información no muestral:

- normalizaciones
- identidades
- exclusiones
- restricciones lineales
- restricciones en varianza

Identificación via restricciones lineales por ecuación

La forma estructural puede escribirse como $Az_t = \epsilon_t$:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{M1} & \beta_{11} & \cdots & \beta_{K1} \\ \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{M2} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{K2} \\ & & & \vdots & & \\ \gamma_{1M} & \cdots & \gamma_{MM} & \beta_{1M} & \cdots & \beta_{KM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t1} \\ \vdots \\ y_{tM} \\ x_{t1} \\ \vdots \\ x_{tK} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{t1} \\ \epsilon_{t2} \\ \vdots \\ \epsilon_{tM} \end{bmatrix}$$

Identificación via restricciones lineales por ecuación

La forma estructural puede escribirse como $Az_t = \epsilon_t$:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \dots & \gamma_{M1} & \beta_{11} & \dots & \beta_{K1} \\ \gamma_{12} & \dots & \gamma_{M2} & \beta_{12} & \dots & \beta_{K2} \\ & & & \vdots & & \\ \gamma_{1M} & \dots & \gamma_{MM} & \beta_{1M} & \dots & \beta_{KM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t1} \\ \vdots \\ y_{tM} \\ x_{t1} \\ \vdots \\ x_{tK} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{t1} \\ \epsilon_{t2} \\ \vdots \\ \epsilon_{tM} \end{bmatrix}$$

Algunos de los parámetros de la fila j:
$\begin{bmatrix} \gamma_{1j} & \dots & \gamma_{Mj} & \beta_{1j} & \dots & \beta_{Kj} \end{bmatrix}$ están restringidos porque:

- una variable endógena está normalizada, ej: $\gamma_{jj} = 1$

Identificación via restricciones lineales por ecuación

La forma estructural puede escribirse como $Az_t = \epsilon_t$:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \dots & \gamma_{M1} & \beta_{11} & \dots & \beta_{K1} \\ \gamma_{12} & \dots & \gamma_{M2} & \beta_{12} & \dots & \beta_{K2} \\ & & & \vdots & & \\ \gamma_{1M} & \dots & \gamma_{MM} & \beta_{1M} & \dots & \beta_{KM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t1} \\ \vdots \\ y_{tM} \\ x_{t1} \\ \vdots \\ x_{tK} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{t1} \\ \epsilon_{t2} \\ \vdots \\ \epsilon_{tM} \end{bmatrix}$$

Algunos de los parámetros de la fila j:
$\begin{bmatrix} \gamma_{1j} & \dots & \gamma_{Mj} & \beta_{1j} & \dots & \beta_{Kj} \end{bmatrix}$ están restringidos porque:

- una variable endógena está normalizada, ej: $\gamma_{jj} = 1$
- alguna variable está excluida, ej: $\gamma_{3j} = 0$ o bien $\beta_{2j} = 0$

Identificación via restricciones lineales por ecuación

La forma estructural puede escribirse como $Az_t = \epsilon_t$:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \dots & \gamma_{M1} & \beta_{11} & \dots & \beta_{K1} \\ \gamma_{12} & \dots & \gamma_{M2} & \beta_{12} & \dots & \beta_{K2} \\ & & & \vdots & & \\ \gamma_{1M} & \dots & \gamma_{MM} & \beta_{1M} & \dots & \beta_{KM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t1} \\ \vdots \\ y_{tM} \\ x_{t1} \\ \vdots \\ x_{tK} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{t1} \\ \epsilon_{t2} \\ \vdots \\ \epsilon_{tM} \end{bmatrix}$$

Algunos de los parámetros de la fila j:
$\begin{bmatrix} \gamma_{1j} & \dots & \gamma_{Mj} & \beta_{1j} & \dots & \beta_{Kj} \end{bmatrix}$ están restringidos porque:

- una variable endógena está normalizada, ej: $\gamma_{jj} = 1$
- alguna variable está excluida, ej: $\gamma_{3j} = 0$ o bien $\beta_{2j} = 0$
- dos variables tienen el mismo coeficiente, ej: $\beta_{2j} = \beta_{3j}$

Restricción de normalización

La más sencilla de las restricciones es la normalización: en cada ecuación, el parámetro de una variable (usualmente endógena) es uno.
Ejemplos:

Un modelo de oferta y demanda

$$1q_t^d = \alpha_0 + \alpha_1 p_t + \alpha_2 x_t + \epsilon_t^d$$
$$1q_t^s = \beta_0 + \beta_1 p_t + \epsilon_t^s$$
$$q_t^d = q_t^s$$

Un modelo de demanda agregada

$$1C_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \epsilon_{1t}$$
$$1I_t = \beta_0 + \beta_1 \left(Y_t - Y_{t-1}\right) + \epsilon_{2t}$$
$$Y_t = C_t + I_t + G_t$$

Restricción de exclusión

La exclusión se refiere a que alguna variable del modelo no aparece en cierta ecuación (es decir, su coeficiente es cero en esa ecuación). Ejemplos:

Un modelo de oferta y demanda

$$q_t^d = \alpha_0 + \alpha_1 p_t + \alpha_2 x_t + \epsilon_t^d$$
$$q_t^s = \beta_0 + \beta_1 p_t + 0 x_t + \epsilon_t^s$$
$$q_t^d = q_t^s$$

Un modelo de demanda agregada

$$C_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + 0 Y_{t-1} + 0 G_t + 0 I_t + \epsilon_{1t}$$
$$I_t = \beta_0 + \beta_1 (Y_t - Y_{t-1}) + 0 G_t + 0 C_t + \epsilon_{2t}$$
$$Y_t = C_t + I_t + G_t$$

Restricción de combinación lineal de parámetros

En este caso, una combinación lineal de parámetros es conocida. El caso más sencillo es cuando dos parámetros son iguales.
Ejemplo:

Un modelo de demanda agregada

$$
\begin{aligned}
C_t &= \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \epsilon_{1t} \\
I_t &= \beta_0 + \beta_1 Y_t + (-\beta_1) Y_{t-1} + \epsilon_{2t} \\
Y_t &= C_t + I_t + G_t
\end{aligned}
$$

es decir, en la ecuación de inversión la suma de los parámetros de Y_t y de Y_{t-1} debe ser igual a cero.

Nota:

El rango de una matriz

- El rango de una matriz A de tamaño $M \times N$ se denota por rango$[A]$ y se define como el número de filas (o columnas) que son linealmente independientes.

- El rango de una matriz A de tamaño $M \times N$ se denota por rango$[A]$ y se define como el número de filas (o columnas) que son linealmente independientes.
- Necesariamente, se cumple que

$$\text{rango}[A] \leq \min\{M, N\}$$

- El rango de una matriz A de tamaño $M \times N$ se denota por rango$[A]$ y se define como el número de filas (o columnas) que son linealmente independientes.
- Necesariamente, se cumple que

$$\text{rango}[A] \leq \min \{M, N\}$$

- Si rango$[A] = M$, decimos que A tiene rango fila completo.

- El rango de una matriz A de tamaño $M \times N$ se denota por rango$[A]$ y se define como el número de filas (o columnas) que son linealmente independientes.
- Necesariamente, se cumple que

$$\text{rango}[A] \leq \min\{M, N\}$$

- Si rango$[A] = M$, decimos que A tiene rango fila completo.
- Si rango$[A] = N$, decimos que A tiene rango columna completo.

La condición de rango

Sea $\tilde{A}_j$ la matriz formada por aquellas columnas de A en las que la ecuación j tiene restricciones.

Condición de rango

La ecuación j está idenficada si y solo si la matriz $\tilde{A}_j$ tiene rango fila completo; es decir

$$\text{rango}\left[\tilde{A}_j\right] = M$$

Esta condición es necesaria y suficiente.

La condición de orden

Note que para que se cumpla la condición de rango, es necesario que $\tilde{A}_j$ tenga al menos M columnas.

Condición de orden

Para que la ecuación j esté identificada, es necesario que el número de restricciones en tal ecuación sea mayor o igual al número de variables endógenas del sistema ($=$ al número de ecuaciones).

Esta condición es necesaria pero no suficiente.

Clasificación de ecuaciones

	Condición de orden	Condición de rango
Sobre-identificada	Se cumple con desigualdad	Se cumple
Exactamente identificada	Se cumple con igualdad	Se cumple
Sub-identificada	alguna condición no se cumple	

- Se dice que está identificada sólo si está “sobre-identificada” o “exactamente-identificada”

Clasificación de ecuaciones

	Condición de orden	Condición de rango
Sobre-identificada	Se cumple con desigualdad	Se cumple
Exactamente identificada	Se cumple con igualdad	Se cumple
Sub-identificada	alguna condición no se cumple	

- Se dice que está identificada sólo si está “sobre-identificada” o “exactamente-identificada”
- Solo las ecuaciones identificadas pueden ser estimadas

Ejemplo 3:

Identificación en el modelo de oferta y la demanda

En el ejemplo 1 encontramos esta forma estructural para el modelo de oferta y demanda

$$\underset{y_t'}{\begin{bmatrix} q_t & p_t \end{bmatrix}} \underset{\Gamma}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha_1 & -\beta_1 \end{bmatrix}} + \underset{x_t'}{\begin{bmatrix} 1 & x_t \end{bmatrix}} \underset{B}{\begin{bmatrix} -\alpha_0 & -\beta_0 \\ -\alpha_2 & 0 \end{bmatrix}} = \underset{\epsilon_t'}{\begin{bmatrix} \epsilon_t^d & \epsilon_t^s \end{bmatrix}}$$

que puede escribirse también como

$$Az_t = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\alpha_1 & -\alpha_0 & -\alpha_2 \\ 1 & -\beta_1 & -\beta_0 & 0 \\ & \Gamma' & B' & \end{array}\right] \underset{z_t}{\begin{bmatrix} q_t \\ p_t \\ 1 \\ x_t \end{bmatrix}} = \underset{\epsilon_t}{\begin{bmatrix} \epsilon_t^d \\ \epsilon_t^s \end{bmatrix}}$$

Entonces

$$\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Demanda $\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ no cumple condición de orden, por lo tanto es no-identificada.

Oferta $\tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ cumple condición de rango si y solo si $\alpha_2 \neq 0$.

En conclusión, podemos estimar la oferta siempre y cuando la demanda efectivamente dependa de x_t. La demanda no puede ser estimada.

Ejemplo 4:

Identificación de un modelo de demanda agregada

En el ejemplo 1 encontramos esta forma estructural para el modelo de oferta y demanda

$$
Az_t = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\alpha_1 & -\alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\beta_1 & -\beta_0 & \beta_1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]}_{\Gamma' \quad\quad B'} \underbrace{\begin{bmatrix} C_t \\ I_t \\ Y_t \\ 1 \\ Y_{t-1} \\ G_t \end{bmatrix}}_{z_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} \epsilon_{1t} \\ \epsilon_{2t} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\epsilon_t}
$$

En este caso las matrices de restricciones de las ecuaciones 1 y 2 son idénticas:

$$
\tilde{A}_1 = \tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta_1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}
$$

Ec. consumo

- Tenemos rango $\left[\tilde{A}_1\right] = 3 \quad \Rightarrow$ identificada.

Ec. consumo

- Tenemos rango $\left[\tilde{A}_1\right] = 3 \quad \Rightarrow$ identificada.
- $\tilde{A}_1$ tiene 4 columnas pero 3 filas $\Rightarrow$ sobre-identificada.

Ec. consumo

- Tenemos rango $\left[\tilde{A}_1\right] = 3 \quad \Rightarrow$ identificada.
- $\tilde{A}_1$ tiene 4 columnas pero 3 filas $\Rightarrow$ sobre-identificada.

Ec. inversión

- Dado que $\tilde{A}_2 = \tilde{A}_1$, sabemos que esta ecuación también está sobre-identificada.

Ec. consumo

- Tenemos rango $\left[\tilde{A}_1\right] = 3 \quad \Rightarrow$ identificada.
- $\tilde{A}_1$ tiene 4 columnas pero 3 filas $\Rightarrow$ sobre-identificada.

Ec. inversión

- Dado que $\tilde{A}_2 = \tilde{A}_1$, sabemos que esta ecuación también está sobre-identificada.

Ec. ingreso

- Es una identidad $\Rightarrow$ no hay nada que estimar.

El modelo recursivo:

Un sistema de ecuaciones no simultáneas

$$
\begin{aligned}
y_1 &= x'\beta_1 + \epsilon_1 \\
y_2 &= x'\beta_2 + \gamma_{12} y_1 + \epsilon_2 \\
&\vdots \\
y_M &= x'\beta_M + \gamma_{1M} y_1 + \cdots + \gamma_{M-1,M} y_{M-1} + \epsilon_M
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\gamma_{12} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\gamma_{1M} & -\gamma_{2M} & \dots & 1 \end{bmatrix}}_{\Gamma' \text{ es triangular}}
\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix}}_{y_t}
+
\underbrace{\begin{bmatrix} -\beta_1 \\ -\beta_2 \\ \vdots \\ -\beta_M \end{bmatrix}}_{B'}
\underbrace{x'}_{x_t}
=
\underbrace{\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_M \end{bmatrix}}_{\epsilon_t}
$$

El modelo recursivo:

El término de error

$$\mathbb{E}\,\epsilon_j = 0$$

$$\mathbb{E}\,\epsilon_j^2 = \sigma_j^2$$

$$\mathbb{E}\,\epsilon_i\epsilon_j = 0 \quad (i \neq j)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{E}[\epsilon_t\epsilon_t'] = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_M^2 \end{bmatrix}}_{\Sigma \text{ es diagonal}}$$

Contando parámetros del modelo recursivo

parámetros estructurales		parámetros reducidos	
Γ	$\frac{M(M-1)}{2}$		
B	KM	Π	KM
Σ	M	Ω	$\frac{M(M+1)}{2}$
Total:	$\frac{M}{2}(1+2K+M)$	Total:	$\frac{M}{2}(1+2K+M)$

Asi, para identificar B, Γ, Σ a partir de Π, Ω tenemos:

$$\underbrace{\frac{M}{2}(1+2K+M)}_{\#\text{ de incógnitas}} - \underbrace{\frac{M}{2}(1+2K+M)}_{\#\text{ de ecuaciones}} = \underbrace{0}_{\text{exceso de parámetros}}$$

es decir, el sistema está exactamente identificado

Ejemplo 5:

Identificación de un SVAR(1)

- Considere el modelo

$$
\begin{aligned}
x_t &= \phi y_t + \beta_{11} x_{t-1} + \beta_{21} y_{t-1} + \epsilon_{1t} \\
y_t &= \gamma x_t + \beta_{12} x_{t-1} + \beta_{22} y_{t-1} + \epsilon_{2t}
\end{aligned}
$$

- Considere el modelo

$$
\begin{aligned}
x_t &= \phi y_t + \beta_{11} x_{t-1} + \beta_{21} y_{t-1} + \epsilon_{1t} \\
y_t &= \gamma x_t + \beta_{12} x_{t-1} + \beta_{22} y_{t-1} + \epsilon_{2t}
\end{aligned}
$$

- o bien, en forma matricial

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -\phi \\ -\gamma & 1 \end{bmatrix}}_{\Gamma'} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} \\ \beta_{12} & \beta_{22} \end{bmatrix}}_{-B'} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{1t} \\ \epsilon_{2t} \end{bmatrix}
$$

- Considere el modelo

$$x_t = \phi y_t + \beta_{11} x_{t-1} + \beta_{21} y_{t-1} + \epsilon_{1t}$$
$$y_t = \gamma x_t + \beta_{12} x_{t-1} + \beta_{22} y_{t-1} + \epsilon_{2t}$$

- o bien, en forma matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -\phi \\ -\gamma & 1 \end{bmatrix}}_{\Gamma'} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} \\ \beta_{12} & \beta_{22} \end{bmatrix}}_{-B'} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{1t} \\ \epsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

- Hay 2 ecuaciones pero cada una tiene únicamente una restricción (la normalización), por lo que la condición de orden no se cumple $\Rightarrow$ ninguna ecuación está identificada.

- Considere el modelo

$$
\begin{aligned}
x_t &= \phi y_t + \beta_{11} x_{t-1} + \beta_{21} y_{t-1} + \epsilon_{1t} \\
y_t &= \gamma x_t + \beta_{12} x_{t-1} + \beta_{22} y_{t-1} + \epsilon_{2t}
\end{aligned}
$$

- o bien, en forma matricial

$$
\underset{\Gamma'}{\begin{bmatrix} 1 & -\phi \\ -\gamma & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \underset{-B'}{\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} \\ \beta_{12} & \beta_{22} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{1t} \\ \epsilon_{2t} \end{bmatrix}
$$

- Hay 2 ecuaciones pero cada una tiene únicamente una restricción (la normalización), por lo que la condición de orden no se cumple $\Rightarrow$ ninguna ecuación está identificada.
- Para poder estimar este modelo, sería necesario añadir nuevas restricciones.

- Suponga que estamos dispuestos a asumir que x_t no responde a y_t contemporáneamente, es decir $\phi = 0$. Entonces, la forma reducida del modelo sería

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underbrace{\beta_{11}}_{\pi_{11}} & \underbrace{\beta_{21}}_{\pi_{21}} \\ \underbrace{\beta_{12} + \gamma\beta_{11}}_{\pi_{12}} & \underbrace{\beta_{22} + \gamma\beta_{21}}_{\pi_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{1t} \\ \epsilon_{2t} + \gamma\epsilon_{1t} \end{bmatrix}$$

- Suponga que estamos dispuestos a asumir que x_t no responde a y_t contemporáneamente, es decir $\phi = 0$. Entonces, la forma reducida del modelo sería

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\pi_{11}}{\beta_{11}} & \underset{\pi_{21}}{\beta_{21}} \\ \underset{\pi_{12}}{\beta_{12} + \gamma\beta_{11}} & \underset{\pi_{22}}{\beta_{22} + \gamma\beta_{21}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{1t} \\ \epsilon_{2t} + \gamma\epsilon_{1t} \end{bmatrix}$$

- Entonces, si lográramos identificar γ los demás parámetros estructurales serían:

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= \pi_{11} & \beta_{21} &= \pi_{21} \\ \beta_{12} &= \pi_{12} - \gamma\pi_{11} & \beta_{22} &= \pi_{22} - \gamma\pi_{21} \end{aligned}$$

- Suponga además que estamos dispuestos a asumir que los errores no están correlacionados:

$$\mathrm{Var}[\epsilon_t] = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}}_{\Sigma}$$

- Suponga además que estamos dispuestos a asumir que los errores no están correlacionados:

$$\mathrm{Var}[\epsilon_t] = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}}_{\Sigma}$$

- Entonces, la varianza de los errores reducidos Ω es:

$$\begin{aligned}\Omega \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{bmatrix}}_{\Gamma'^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\Gamma^{-1}} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \gamma\sigma_1^2 \\ \gamma\sigma_1^2 & \gamma^2\sigma_1^2 + \sigma_2^2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

- Suponga además que estamos dispuestos a asumir que los errores no están correlacionados:

$$\mathrm{Var}[\epsilon_t] = \underset{\Sigma}{\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}}$$

- Entonces, la varianza de los errores reducidos Ω es:

$$\Omega \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} = \underset{\Gamma'^{-1}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{bmatrix}} \underset{\Sigma}{\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}} \underset{\Gamma^{-1}}{\begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \gamma\sigma_1^2 \\ \gamma\sigma_1^2 & \gamma^2\sigma_1^2 + \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

- Así, conociendo Ω (estimado a partir de la forma reducida), los parámetros estructurales estarían identificados!

$$\sigma_1^2 = \sigma_x^2 \qquad \gamma = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \qquad \sigma_2^2 = \sigma_y^2 - \gamma^2\sigma_x^2$$

- Antes de continuar, observe que

$$\Omega \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{bmatrix}}_{\Gamma'^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\Gamma^{-1}}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \gamma\sigma_1 & \sigma_2 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 & \gamma\sigma_1 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}}_{L'}$$

- Antes de continuar, observe que

$$\Omega \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{bmatrix}}_{\Gamma'^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\Gamma^{-1}}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \gamma\sigma_1 & \sigma_2 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 & \gamma\sigma_1 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}}_{L'}$$

- Es decir, hemos descompuesto Ω como el producto de una matriz triangular inferior y su transpuesta:

$$\Omega = LL'$$

- Antes de continuar, observe que

$$\Omega \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{bmatrix}}_{\Gamma'^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\Gamma^{-1}}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \gamma\sigma_1 & \sigma_2 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 & \gamma\sigma_1 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}}_{L'}$$

- Es decir, hemos descompuesto Ω como el producto de una matriz triangular inferior y su transpuesta:

$$\Omega = LL'$$

- Esta es la descomposición de Choleski. Toda matriz simétrica semi-definida positiva puede ser descompuesta así.

- Antes de continuar, observe que

$$\Omega \equiv \begin{bmatrix}\sigma_x^2 & \sigma_{xy}\\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\\ \gamma & 1\end{bmatrix}}_{\Gamma'^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & 0\\ 0 & \sigma_2^2\end{bmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{bmatrix}1 & \gamma\\ 0 & 1\end{bmatrix}}_{\Gamma^{-1}}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0\\ \gamma\sigma_1 & \sigma_2\end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix}\sigma_1 & \gamma\sigma_1\\ 0 & \sigma_2\end{bmatrix}}_{L'}$$

- Es decir, hemos descompuesto Ω como el producto de una matriz triangular inferior y su transpuesta:

$$\Omega = LL'$$

- Esta es la descomposición de Choleski. Toda matriz simétrica semi-definida positiva puede ser descompuesta así.
- La diagonal de L identifica las desviaciones estándar de los errores estructurales.

3. El término de error: plim vs $\mathbb{E}$

Supuestos acerca del término de error: esperanza

Forma estructural	Forma reducida
$\mathbb{E}\left[\epsilon_t \vert x_t\right] = 0$	$\mathbb{E}\left[\nu_t \vert x_t\right] = \left(\Gamma^{-1}\right)' 0 = 0$
$\mathbb{E}\left[\epsilon_t \epsilon_t' \vert x_t\right] = \Sigma$	$\mathbb{E}\left[\nu_t \nu_t' \vert x_t\right] = \left(\Gamma^{-1}\right)' \Sigma \Gamma^{-1} = \Omega$
$\mathbb{E}\left[\epsilon_t \epsilon_s' \vert x_t, x_s\right] = 0$	$\mathbb{E}\left[\nu_t \nu_s' \vert x_t, x_s\right] = \left(\Gamma^{-1}\right)' 0 \Gamma^{-1} = 0$

Nota:

plim

Convergencia en probabilidad

- Una secuencia $\{X_n\}$ de variables aleatorias converge en probabilidad hacia la variable aleatoria X si para todo $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \Pr\left(|X_n - X| > \epsilon\right) = 0$$

Convergencia en probabilidad

- Una secuencia $\{X_n\}$ de variables aleatorias converge en probabilidad hacia la variable aleatoria X si para todo $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(|X_n - X| > \epsilon\right) = 0$$

- Para denotar que $\{X_n\}$ converge en probabilidad hacia X escribimos

$$X_n \xrightarrow{p} X \qquad \text{o bien} \qquad \operatorname{plim} X_n = X$$

Propiedades de la convergencia en probabilidad

Sean c una constante, $g()$ una función continua, y X_n, Y_n dos secuencias de variables aleatorias. Entonces:

- $\operatorname{plim} c = c$

Propiedades de la convergencia en probabilidad

Sean c una constante, $g()$ una función continua, y X_n, Y_n dos secuencias de variables aleatorias. Entonces:

- $\operatorname{plim} c = c$
- $\operatorname{plim} cX_n = c \operatorname{plim} X_n$

Propiedades de la convergencia en probabilidad

Sean c una constante, $g()$ una función continua, y X_n, Y_n dos secuencias de variables aleatorias. Entonces:

- $\operatorname{plim} c = c$
- $\operatorname{plim} cX_n = c \operatorname{plim} X_n$
- $\operatorname{plim} (X_n + Y_n) = \operatorname{plim} X_n + \operatorname{plim} Y_n$

Propiedades de la convergencia en probabilidad

Sean c una constante, $g()$ una función continua, y X_n, Y_n dos secuencias de variables aleatorias. Entonces:

- $\operatorname{plim} c = c$
- $\operatorname{plim} cX_n = c \operatorname{plim} X_n$
- $\operatorname{plim} (X_n + Y_n) = \operatorname{plim} X_n + \operatorname{plim} Y_n$
- $\operatorname{plim} (X_n Y_n) = (\operatorname{plim} X_n) (\operatorname{plim} Y_n)$

Propiedades de la convergencia en probabilidad

Sean c una constante, $g()$ una función continua, y X_n, Y_n dos secuencias de variables aleatorias. Entonces:

- $\operatorname{plim} c = c$
- $\operatorname{plim} cX_n = c \operatorname{plim} X_n$
- $\operatorname{plim} (X_n + Y_n) = \operatorname{plim} X_n + \operatorname{plim} Y_n$
- $\operatorname{plim} (X_n Y_n) = (\operatorname{plim} X_n) (\operatorname{plim} Y_n)$
- $\operatorname{plim} g(X_n) = g (\operatorname{plim} X_n)$

Supuestos acerca del término de error:
limíte de probabilidad

Si suponemos que

$$\begin{aligned}
\text{plim}\left(\tfrac{1}{T}E'E\right) &= \Sigma \\
\text{plim}\left(\tfrac{1}{T}X'X\right) &= Q \\
\text{plim}\left(\tfrac{1}{T}X'E\right) &= 0
\end{aligned}$$

Tenemos que

$$\text{plim}\left(\frac{1}{T}\begin{bmatrix} Y' \\ X' \\ V' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y & X & V \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \Pi' Q \Pi + \Omega & \Pi' Q & \Omega \\ Q\Pi & Q & 0' \\ \Omega & 0 & \Omega \end{bmatrix}$$

Supuestos acerca del término de error:
limíte de probabilidad

Forma estructural	Forma reducida
$\text{plim}\left(\frac{1}{T}E'E\right) = \Sigma$	$\text{plim}\left(\frac{1}{T}V'V\right) = \left(\Gamma^{-1}\right)'\Sigma\Gamma^{-1} = \Omega$
$\text{plim}\left(\frac{1}{T}X'X\right) = Q$	$\text{plim}\left(\frac{1}{T}X'X\right) = Q$
$\text{plim}\left(\frac{1}{T}X'E\right) = 0$	$\text{plim}\left(\frac{1}{T}X'V\right) = 0\Gamma^{-1} = 0$

4. Estimación

Métodos de estimación

- Se clasifican en métodos indirectos y métodos directos.

Métodos de información limitada

- OLS
- IV
- 2SLS
- GMM
- LIML

Métodos de estimación

- Se clasifican en métodos indirectos y métodos directos.
- Los directos se clasifican en dos grupos:

Métodos de información limitada

- OLS
- IV
- 2SLS
- GMM
- LIML

Métodos de información completa

- 3SLS
- FIML
- GMM

Consistencia de OLS de la forma reducida

El estimador OLS de las pendientes Π es consistente

$$\operatorname{plim} \hat{\Pi} = \operatorname{plim} \left[\left(X'X \right)^{-1} X'Y \right]$$

Consistencia de OLS de la forma reducida

El estimador OLS de las pendientes Π es consistente

$$\begin{aligned}\operatorname{plim}\hat{\Pi} &= \operatorname{plim}\left[\left(X'X\right)^{-1}X'Y\right]\\ &= \operatorname{plim}\left[\left(\tfrac{1}{T}X'X\right)^{-1}\tfrac{1}{T}X'Y\right]\end{aligned}$$

Consistencia de OLS de la forma reducida

El estimador OLS de las pendientes Π es consistente

$$
\begin{aligned}
\operatorname{plim} \hat{\Pi} &= \operatorname{plim} \left[\left(X'X \right)^{-1} X'Y \right] \\
&= \operatorname{plim} \left[\left(\tfrac{1}{T} X'X \right)^{-1} \tfrac{1}{T} X'Y \right] \\
&= \left(\operatorname{plim} \tfrac{1}{T} X'X \right)^{-1} \operatorname{plim} \left(\tfrac{1}{T} X'Y \right)
\end{aligned}
$$

Consistencia de OLS de la forma reducida

El estimador OLS de las pendientes Π es consistente

$$\begin{aligned}
\operatorname{plim} \hat{\Pi} &= \operatorname{plim} \left[\left(X'X \right)^{-1} X'Y \right] \\
&= \operatorname{plim} \left[\left(\tfrac{1}{T} X'X \right)^{-1} \tfrac{1}{T} X'Y \right] \\
&= \left(\operatorname{plim} \tfrac{1}{T} X'X \right)^{-1} \operatorname{plim} \left(\tfrac{1}{T} X'Y \right) \\
&= Q^{-1} \left(Q\Pi \right)
\end{aligned}$$

Consistencia de OLS de la forma reducida

El estimador OLS de las pendientes Π es consistente

$$\begin{aligned}
\operatorname{plim}\hat{\Pi} &= \operatorname{plim}\left[\left(X'X\right)^{-1}X'Y\right] \\
&= \operatorname{plim}\left[\left(\tfrac{1}{T}X'X\right)^{-1}\tfrac{1}{T}X'Y\right] \\
&= \left(\operatorname{plim}\tfrac{1}{T}X'X\right)^{-1}\operatorname{plim}\left(\tfrac{1}{T}X'Y\right) \\
&= Q^{-1}\left(Q\Pi\right) \\
&= \Pi
\end{aligned}$$

El estimador MCO de la varianza Ω también es consistente

$$\begin{aligned}
\operatorname{plim}\hat{\Omega} &= \operatorname{plim}\left[\tfrac{1}{T}\hat{V}'\hat{V}\right] \\
&= \operatorname{plim}\left[\tfrac{1}{T}\left(Y - X\hat{\Pi}\right)'\left(Y - X\hat{\Pi}\right)\right] \\
&= \operatorname{plim}\left(\tfrac{1}{T}Y'Y\right) - \operatorname{plim}\left(\tfrac{1}{T}Y'X\hat{\Pi}\right) - \operatorname{plim}\left(\hat{\Pi}'\tfrac{1}{T}X'Y\right) + \dots \\
&\qquad\qquad \dots \operatorname{plim}\left(\hat{\Pi}'\tfrac{1}{T}X'X\hat{\Pi}\right) \\
&= \Pi'Q\Pi + \Omega - \left(\Pi'Q\right)\Pi - \Pi'\left(Q\Pi\right) + \Pi'\left(Q\right)\Pi \\
&= \Omega
\end{aligned}$$

Mínimos cuadrados indirectos (ILS)

- Es posible estimar Π y Ω consistentemente con OLS, pero estos parámetros no son de interés (excepto para proyectar $Y|X$).

Mínimos cuadrados indirectos (ILS)

- Es posible estimar Π y Ω consistentemente con OLS, pero estos parámetros no son de interés (excepto para proyectar $Y|X$).
- No obstante, si el sistema está identificado, se puede usar Mínimos Cuadrados Indirectos (ILS), que consiste en estimar $\hat{\Gamma}^{\text{ILS}}$, $\hat{B}^{\text{ILS}}$ y $\hat{\Sigma}^{\text{ILS}}$ en función de $\hat{\Pi}^{\text{OLS}}$ y $\hat{\Omega}^{\text{OLS}}$.

Mínimos cuadrados indirectos (ILS)

- Es posible estimar Π y Ω consistentemente con OLS, pero estos parámetros no son de interés (excepto para proyectar $Y|X$).
- No obstante, si el sistema está identificado, se puede usar Mínimos Cuadrados Indirectos (ILS), que consiste en estimar $\hat{\Gamma}^{\mathsf{ILS}}$, $\hat{B}^{\mathsf{ILS}}$ y $\hat{\Sigma}^{\mathsf{ILS}}$ en función de $\hat{\Pi}^{\mathsf{OLS}}$ y $\hat{\Omega}^{\mathsf{OLS}}$.
- Propiedades:

Mínimos cuadrados indirectos (ILS)

- Es posible estimar Π y Ω consistentemente con OLS, pero estos parámetros no son de interés (excepto para proyectar $Y|X$).
- No obstante, si el sistema está identificado, se puede usar Mínimos Cuadrados Indirectos (ILS), que consiste en estimar $\hat{\Gamma}^{\text{ILS}}$, $\hat{B}^{\text{ILS}}$ y $\hat{\Sigma}^{\text{ILS}}$ en función de $\hat{\Pi}^{\text{OLS}}$ y $\hat{\Omega}^{\text{OLS}}$.
- Propiedades:
  - factible pero ineficiente

Mínimos cuadrados indirectos (ILS)

- Es posible estimar Π y Ω consistentemente con OLS, pero estos parámetros no son de interés (excepto para proyectar $Y|X$).
- No obstante, si el sistema está identificado, se puede usar Mínimos Cuadrados Indirectos (ILS), que consiste en estimar $\hat{\Gamma}^{\text{ILS}}$, $\hat{B}^{\text{ILS}}$ y $\hat{\Sigma}^{\text{ILS}}$ en función de $\hat{\Pi}^{\text{OLS}}$ y $\hat{\Omega}^{\text{OLS}}$.
- Propiedades:
  - factible pero ineficiente
  - puede haber más de una solución (si está sobre- identificado).

Mínimos cuadrados ordinarios (OLS)

Escribimos la ecuación j como

$$y_j = Y_j \gamma_j + X_j \beta_j + \epsilon_j$$

Mínimos cuadrados ordinarios (OLS)

Escribimos la ecuación j como

$$y_j = Y_j\gamma_j + X_j\beta_j + \epsilon_j = \underbrace{\begin{bmatrix} Y_j & X_j \end{bmatrix}}_{Z_j} \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_j \\ \beta_j \end{bmatrix}}_{\delta_j} + \epsilon_j$$

Mínimos cuadrados ordinarios (OLS)

Escribimos la ecuación j como

$$y_j = Y_j\gamma_j + X_j\beta_j + \epsilon_j = \underbrace{\begin{bmatrix} Y_j & X_j \end{bmatrix}}_{Z_j} \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_j \\ \beta_j \end{bmatrix}}_{\delta_j} + \epsilon_j = Z_j\delta_j + \epsilon_j$$

Mínimos cuadrados ordinarios (OLS)

Escribimos la ecuación j como

$$y_j = Y_j\gamma_j + X_j\beta_j + \epsilon_j = \underbrace{\begin{bmatrix} Y_j & X_j \end{bmatrix}}_{Z_j} \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_j \\ \beta_j \end{bmatrix}}_{\delta_j} + \epsilon_j = Z_j\delta_j + \epsilon_j$$

Estimador OLS

$$\hat{\delta}_j^{\text{OLS}} = \left(Z_j' Z_j\right)^{-1} Z_j' y_j$$

Mínimos cuadrados ordinarios (OLS)

Escribimos la ecuación j como

$$y_j = Y_j\gamma_j + X_j\beta_j + \epsilon_j = \underbrace{\begin{bmatrix} Y_j & X_j \end{bmatrix}}_{Z_j} \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_j \\ \beta_j \end{bmatrix}}_{\delta_j} + \epsilon_j = Z_j\delta_j + \epsilon_j$$

Estimador OLS

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_j^{\text{OLS}} &= \left(Z_j' Z_j\right)^{-1} Z_j' y_j \\ &= \left(Z_j' Z_j\right)^{-1} Z_j' (Z_j \delta_j + \epsilon_j) \end{aligned}$$

Mínimos cuadrados ordinarios (OLS)

Escribimos la ecuación j como

$$y_j = Y_j\gamma_j + X_j\beta_j + \epsilon_j = \underbrace{\begin{bmatrix} Y_j & X_j \end{bmatrix}}_{Z_j} \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_j \\ \beta_j \end{bmatrix}}_{\delta_j} + \epsilon_j = Z_j\delta_j + \epsilon_j$$

Estimador OLS

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_j^{\text{OLS}} &= \left(Z_j'Z_j\right)^{-1} Z_j'y_j \\ &= \left(Z_j'Z_j\right)^{-1} Z_j'(Z_j\delta_j + \epsilon_j) \\ &= \delta_j + \left(Z_j'Z_j\right)^{-1} Z_j'\epsilon_j \end{aligned}$$

Mínimos cuadrados ordinarios (OLS)

Escribimos la ecuación j como

$$y_j = Y_j\gamma_j + X_j\beta_j + \epsilon_j = \underbrace{\begin{bmatrix} Y_j & X_j \end{bmatrix}}_{Z_j} \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_j \\ \beta_j \end{bmatrix}}_{\delta_j} + \epsilon_j = Z_j\delta_j + \epsilon_j$$

Estimador OLS

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_j^{\text{OLS}} &= \left(Z_j'Z_j\right)^{-1} Z_j'y_j \\ &= \left(Z_j'Z_j\right)^{-1} Z_j'(Z_j\delta_j + \epsilon_j) \\ &= \delta_j + \left(Z_j'Z_j\right)^{-1} Z_j'\epsilon_j \\ &= \delta_j + \begin{bmatrix} Y_j'Y_j & Y_j'X_j \\ X_j'Y_j & X_j'X_j \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y_j'\epsilon_j \\ X_j'\epsilon_j \end{bmatrix} \end{aligned}$$

OLS es inconsistente porque $\operatorname{plim}\left[\frac{1}{T}Y_j'\epsilon_j\right] \neq 0$ (sesgo de simultaneidad)

Caso particular: Modelo recursivo

En el modelo recursivo donde Γ es triangular y Σ es diagonal,

$$
\begin{aligned}
y_1 &= x'\beta_1 + \epsilon_1 \\
y_2 &= x'\beta_2 + \gamma_{12} y_1 + \epsilon_2 \\
&\vdots \\
y_M &= x'\beta_M + \gamma_{1M} y_1 + \cdots + \gamma_{M-1,M} y_{M-1} + \epsilon_M
\end{aligned}
$$

OLS es consistente y eficiente, porque no hay sesgo de simultaneidad:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}\left[y_1, \epsilon_2\right] &= \mathrm{Cov}\left[x'\beta_1 + \epsilon_1, \epsilon_2\right] = 0 \\
\mathrm{Cov}\left[y_1, \epsilon_3\right] &= \mathrm{Cov}\left[x'\beta_1 + \epsilon_1, \epsilon_3\right] = 0 \\
\mathrm{Cov}\left[y_2, \epsilon_3\right] &= \mathrm{Cov}\left[x'\beta_2 + \gamma_{12} y_1 + \epsilon_2, \epsilon_3\right] = 0
\end{aligned}
$$

y así sucesivamente.

Variables instrumentales (IV)

- Para la ecuación $y_j = Y_j\gamma_j + X_j\beta_j + \epsilon_j = Z_j\delta_j + \epsilon_j$ suponemos que existe matriz $\underset{T \times (M_j + K_j)}{W_j}$ tal que:

Variables instrumentales (IV)

- Para la ecuación $y_j = Y_j\gamma_j + X_j\beta_j + \epsilon_j = Z_j\delta_j + \epsilon_j$ suponemos que existe matriz $\underset{T\times(M_j+K_j)}{W_j}$ tal que:

$$\text{plim}\left(\frac{1}{T}W_j'Z_j\right) = \Sigma_{WZ}$$ (instrumento correlacionado con regresores)

Variables instrumentales (IV)

- Para la ecuación $y_j = Y_j\gamma_j + X_j\beta_j + \epsilon_j = Z_j\delta_j + \epsilon_j$ suponemos que existe matriz $\underset{T\times(M_j+K_j)}{W_j}$ tal que:

$$\text{plim}\left(\tfrac{1}{T}W_j'Z_j\right) = \Sigma_{WZ} \qquad \left(\text{instrumento correlacionado con regresores}\right)$$
$$\text{plim}\left(\tfrac{1}{T}W_j'W_j\right) = \Sigma_{WW} \qquad \left(\text{instrumento tiene varianza finita}\right)$$

Variables instrumentales (IV)

- Para la ecuación $y_j = Y_j\gamma_j + X_j\beta_j + \epsilon_j = Z_j\delta_j + \epsilon_j$ suponemos que existe matriz $\underset{T\times(M_j+K_j)}{W_j}$ tal que:

$$\text{plim}\left(\tfrac{1}{T}W_j'Z_j\right) = \Sigma_{WZ} \qquad \text{(instrumento correlacionado con regresores)}$$
$$\text{plim}\left(\tfrac{1}{T}W_j'W_j\right) = \Sigma_{WW} \qquad \text{(instrumento tiene varianza finita)}$$
$$\text{plim}\left(\tfrac{1}{T}W_j'\epsilon_j\right) = 0 \qquad \text{(instrumento NO correlacionado con errores)}$$

Variables instrumentales (IV)

- Para la ecuación $y_j = Y_j\gamma_j + X_j\beta_j + \epsilon_j = Z_j\delta_j + \epsilon_j$ suponemos que existe matriz $\underset{T\times(M_j+K_j)}{W_j}$ tal que:

$$\text{plim}\left(\tfrac{1}{T}W_j'Z_j\right) = \Sigma_{WZ} \qquad \text{(instrumento correlacionado con regresores)}$$

$$\text{plim}\left(\tfrac{1}{T}W_j'W_j\right) = \Sigma_{WW} \qquad \text{(instrumento tiene varianza finita)}$$

$$\text{plim}\left(\tfrac{1}{T}W_j'\epsilon_j\right) = 0 \qquad \text{(instrumento NO correlacionado con errores)}$$

Estimador IV

$$\begin{aligned}\hat{\delta}_j^{\text{IV}} &= \left(W_j'Z_j\right)^{-1}W_j'y_j \\ &= \delta_j + \left(\tfrac{1}{T}W_j'Z_j\right)^{-1}\left(\tfrac{1}{T}W_j'\epsilon_j\right)\end{aligned}$$

Variables instrumentales (IV)

- Para la ecuación $y_j = Y_j\gamma_j + X_j\beta_j + \epsilon_j = Z_j\delta_j + \epsilon_j$ suponemos que existe matriz $\underset{T\times(M_j+K_j)}{W_j}$ tal que:

$$\text{plim}\left(\tfrac{1}{T}W_j'Z_j\right) = \Sigma_{WZ} \qquad \left(\text{instrumento correlacionado con regresores}\right)$$

$$\text{plim}\left(\tfrac{1}{T}W_j'W_j\right) = \Sigma_{WW} \qquad \left(\text{instrumento tiene varianza finita}\right)$$

$$\text{plim}\left(\tfrac{1}{T}W_j'\epsilon_j\right) = 0 \qquad \left(\text{instrumento NO correlacionado con errores}\right)$$

Estimador IV

$$\begin{aligned}\hat{\delta}_j^{\,\mathsf{IV}} &= \left(W_j'Z_j\right)^{-1}W_j'y_j \\ &= \delta_j + \left(\tfrac{1}{T}W_j'Z_j\right)^{-1}\left(\tfrac{1}{T}W_j'\epsilon_j\right)\end{aligned}$$

IV es consistente porque $\text{plim}\left[\frac{1}{T}W_j'\epsilon_j\right] = 0$

Mínimos cuadrados en dos etapas (2SLS)

Consiste en usar como intrumentos para Y_j los valores ajustados por la regresión de Y_j en todas las X's del sistema.

Mínimos cuadrados en dos etapas (2SLS)

Consiste en usar como intrumentos para Y_j los valores ajustados por la regresión de Y_j en todas las X's del sistema.

Etapa 1 Ajustar Y_j por OLS usando todas las X

$$\hat{Y_j}^{\mathsf{OLS}} = X\hat{\Pi}_j^{\mathsf{OLS}} = X\left(X'X\right)^{-1}X'Y_j$$

Mínimos cuadrados en dos etapas (2SLS)

Consiste en usar como intrumentos para Y_j los valores ajustados por la regresión de Y_j en todas las X's del sistema.

Etapa 1 Ajustar Y_j por OLS usando todas las X

$$\hat{Y_j}^{\mathsf{OLS}} = X\hat{\Pi}_j^{\mathsf{OLS}} = X\left(X'X\right)^{-1}X'Y_j$$

Etapa 2 Usar IV con $W = \left[\hat{Y_j}^{\mathsf{OLS}} \quad X\right]$:

Mínimos cuadrados en dos etapas (2SLS)

Consiste en usar como intrumentos para Y_j los valores ajustados por la regresión de Y_j en todas las X's del sistema.

Etapa 1 Ajustar Y_j por OLS usando todas las X

$$\hat{Y_j}^{\text{OLS}} = X\hat{\Pi_j}^{\text{OLS}} = X\left(X'X\right)^{-1}X'Y_j$$

Etapa 2 Usar IV con $W = \begin{bmatrix}\hat{Y_j}^{\text{OLS}} & X\end{bmatrix}$:

Estimador 2SLS

$$\hat{\delta_j}^{\text{2SLS}} = \begin{bmatrix}\hat{Y_j'}^{\text{OLS}}Y_j & \hat{Y_j'}^{\text{OLS}}X_j \\ X_j'Y_j & X_j'X_j\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\hat{Y_j'}^{\text{OLS}}y_j \\ X_j'y_j\end{bmatrix}$$

Mínimos cuadrados en dos etapas (2SLS)

Consiste en usar como intrumentos para Y_j los valores ajustados por la regresión de Y_j en todas las X's del sistema.

Etapa 1 Ajustar Y_j por OLS usando todas las X

$$\hat{Y}_j^{\text{OLS}} = X\hat{\Pi}_j^{\text{OLS}} = X\left(X'X\right)^{-1}X'Y_j$$

Etapa 2 Usar IV con $W = \left[\hat{Y}_j^{\text{OLS}} \quad X\right]$:

Estimador 2SLS

$$\hat{\delta}_j^{\text{2SLS}} = \begin{bmatrix} \hat{Y}_j'^{\text{OLS}} Y_j & \hat{Y}_j'^{\text{OLS}} X_j \\ X_j' Y_j & X_j' X_j \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{Y}_j'^{\text{OLS}} y_j \\ X_j' y_j \end{bmatrix}$$

Si no hay autocorrelación ni heteroscedasticidad entonces 2SLS es el estimador IV más eficiente usando sólo la información de X

Ejemplo 6:

El Modelo Klein I

- TableF10-3.txt
- klein-model.do

En 1950 Klein estimó este modelo (conocido ahora como el modelo I de Klein) con datos anuales de 1921 a 1941*:

$$
\begin{aligned}
\underset{\text{consumo}}{C_t} &= \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 P_{t-1} + \alpha_3 (Wp_t + Wg_t) + \epsilon_{1t} \\
\underset{\text{inversión}}{I_t} &= \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 P_{t-1} + \beta_3 K_{t-1} + \epsilon_{2t} \\
\underset{\substack{\text{salarios}\\\text{privados}}}{Wp_t} &= \gamma_0 + \gamma_1 X_t + \gamma_2 X_{t-1} + \gamma_3 A_t + \epsilon_{3t} \\
\underset{\text{producto}}{X_t} &= C_t + I_t + G_t \\
\underset{\text{utilidades}}{P_t} &= X_t - T_t - Wp_t \\
\underset{\text{capital}}{K_t} &= K_{t-1} + I_{t-1}
\end{aligned}
$$

*Basado en Greene (2012, pp332-333)

- Las variables exógenas son:

- Las variables exógenas son:
  - G_t = gasto (no salarial) del gobierno

- Las variables exógenas son:
  - G_t = gasto (no salarial) del gobierno
  - T_t = impuestos indirectos a las empresas + exportaciones netas

- Las variables exógenas son:
  - G_t = gasto (no salarial) del gobierno
  - T_t = impuestos indirectos a las empresas + exportaciones netas
  - Wg_t = gastos salarial del gobierno

- Las variables exógenas son:
  - G_t = gasto (no salarial) del gobierno
  - T_t = impuestos indirectos a las empresas + exportaciones netas
  - Wg_t = gastos salarial del gobierno
  - A_t = tendecia, años desde 1931

- Las variables exógenas son:
    - G_t = gasto (no salarial) del gobierno
    - T_t = impuestos indirectos a las empresas + exportaciones netas
    - Wg_t = gastos salarial del gobierno
    - A_t = tendecia, años desde 1931
- Hay tres variables predeterminadas: los rezagos del stock de capital, utilidades privadas, y demanda total.

- Las variables exógenas son:
  - G_t = gasto (no salarial) del gobierno
  - T_t = impuestos indirectos a las empresas + exportaciones netas
  - Wg_t = gastos salarial del gobierno
  - A_t = tendecia, años desde 1931
- Hay tres variables predeterminadas: los rezagos del stock de capital, utilidades privadas, y demanda total.
- El modelo contiene 3 ecuaciones de comportamiento, una condición de equilibrio, y dos identidades contables.

El estimador 2SLS del sistema es (estadístico p en paréntesis):

$$C_t = \underset{(0.00)}{16.55} + \underset{(0.88)}{0.02}\,P_t + \underset{(0.04)}{0.22}\,P_{t-1} + \underset{(0.00)}{0.81}(Wp_t + Wg_t) + \epsilon_{1t}$$

$$I_t = \underset{(0.01)}{20.28} + \underset{(0.39)}{0.15}\,P_t + \underset{(0.00)}{0.62}\,P_{t-1} - \underset{(0.00)}{0.16}\,K_{t-1} + \epsilon_{2t}$$

$$Wp_t = \underset{(0.19)}{1.50} + \underset{(0.00)}{0.44}\,X_t + \underset{(0.00)}{0.15}\,X_{t-1} + \underset{(0.00)}{0.13}\,A_t + \epsilon_{3t}$$

Ejemplo 7:

El modelo de la telaraña

telaraña.ipynb

En el modelo de la telaraña para los mercados de maíz y de trigo

$$
\begin{aligned}
q^s_{mt} &= 200 && +0.5p_{m,t-1} && -0.2p_{w,t-1} && +\epsilon^s_{mt} && \text{(oferta de maíz)}\\
q^s_{wt} &= 80 && -0.2p_{m,t-1} && +0.4p_{w,t-1} && +\epsilon^s_{wt} && \text{(oferta de trigo)}\\
q^d_{mt} &= 100 && -0.2p_{mt} && +1.2p_{wt} && +\epsilon^d_{mt} && \text{(demanda de maíz)}\\
q^d_{wt} &= 50 && +1.1p_{mt} && -0.4p_{wt} && +\epsilon^d_{wt} && \text{(demanda de trigo)}
\end{aligned}
$$

- Los agricultores pueden sembrar maíz o trigo, pero tardan un período en producirlo.
- Los consumidores están dispuestos a sustituir el consumo de maíz y trigo en respuesta a los precios que encuentran.

Este modelo puede escribirse

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0.2 & -1.2 \\ 0 & 1 & -1.1 & 0.4 \end{bmatrix}}_{\Gamma} \underbrace{\begin{bmatrix} q_{mt} \\ q_{wt} \\ p_{mt} \\ p_{wt} \end{bmatrix}}_{Y_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} 200 & 0.5 & -0.2 \\ 80 & -0.2 & 0.4 \\ 100 & 0 & 0 \\ 50 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ p_{m,t-1} \\ p_{w,t-1} \end{bmatrix}}_{Y_{t-1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \epsilon^s_{mt} \\ \epsilon^s_{wt} \\ \epsilon^d_{mt} \\ \epsilon^d_{wt} \end{bmatrix}}_{\epsilon_t}$$

Este modelo puede escribirse

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0.2 & -1.2 \\ 0 & 1 & -1.1 & 0.4 \end{bmatrix}}_{\Gamma} \underbrace{\begin{bmatrix} q_{mt} \\ q_{wt} \\ p_{mt} \\ p_{wt} \end{bmatrix}}_{Y_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} 200 & 0.5 & -0.2 \\ 80 & -0.2 & 0.4 \\ 100 & 0 & 0 \\ 50 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ p_{m,t-1} \\ p_{w,t-1} \end{bmatrix}}_{Y_{t-1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \epsilon^s_{mt} \\ \epsilon^s_{wt} \\ \epsilon^d_{mt} \\ \epsilon^d_{wt} \end{bmatrix}}_{\epsilon_t}$$

- Vemos que las ecuaciones de oferta no son simultáneas, pero las de demanda sí lo son.

Este modelo puede escribirse

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0.2 & -1.2 \\ 0 & 1 & -1.1 & 0.4 \end{bmatrix}}_{\Gamma} \underbrace{\begin{bmatrix} q_{mt} \\ q_{wt} \\ p_{mt} \\ p_{wt} \end{bmatrix}}_{Y_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} 200 & 0.5 & -0.2 \\ 80 & -0.2 & 0.4 \\ 100 & 0 & 0 \\ 50 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ p_{m,t-1} \\ p_{w,t-1} \end{bmatrix}}_{Y_{t-1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \epsilon^s_{mt} \\ \epsilon^s_{wt} \\ \epsilon^d_{mt} \\ \epsilon^d_{wt} \end{bmatrix}}_{\epsilon_t}$$

- Vemos que las ecuaciones de oferta no son simultáneas, pero las de demanda sí lo son.
- Para ilustrar el sesgo de simultaneidad del estimador OLS, y que el estimador 2SLS sí es insesgado, realizamos experimentos de Monte Carlo.

Este modelo puede escribirse

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0.2 & -1.2 \\ 0 & 1 & -1.1 & 0.4 \end{bmatrix}}_{\Gamma} \underbrace{\begin{bmatrix} q_{mt} \\ q_{wt} \\ p_{mt} \\ p_{wt} \end{bmatrix}}_{Y_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} 200 & 0.5 & -0.2 \\ 80 & -0.2 & 0.4 \\ 100 & 0 & 0 \\ 50 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ p_{m,t-1} \\ p_{w,t-1} \end{bmatrix}}_{Y_{t-1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \epsilon^s_{mt} \\ \epsilon^s_{wt} \\ \epsilon^d_{mt} \\ \epsilon^d_{wt} \end{bmatrix}}_{\epsilon_t}$$

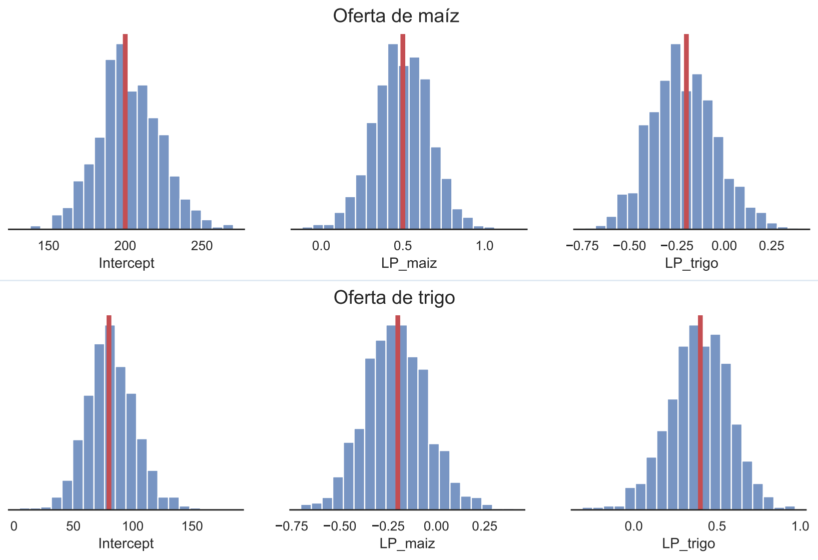
- Vemos que las ecuaciones de oferta no son simultáneas, pero las de demanda sí lo son.
- Para ilustrar el sesgo de simultaneidad del estimador OLS, y que el estimador 2SLS sí es insesgado, realizamos experimentos de Monte Carlo.
- En particular estimamos 1000 veces este modelo a partir de series simuladas de 24 observaciones.

Este modelo puede escribirse

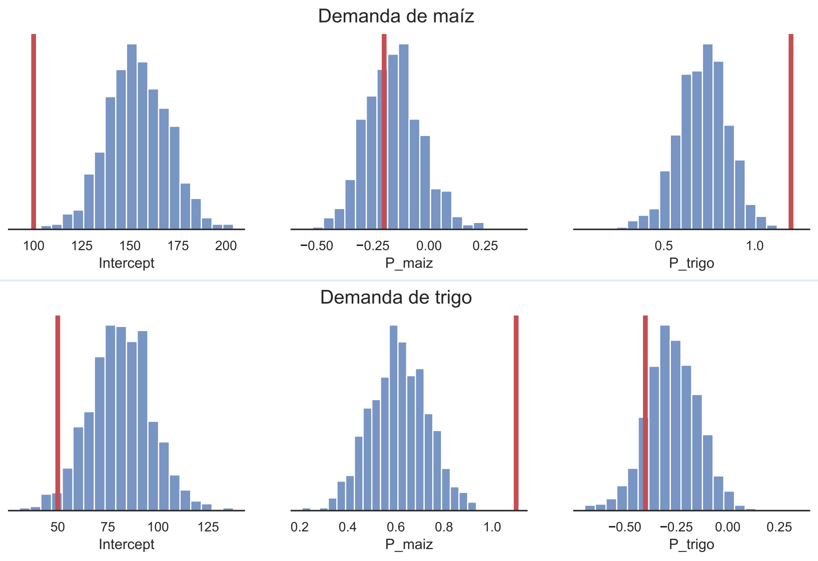
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0.2 & -1.2 \\ 0 & 1 & -1.1 & 0.4 \end{bmatrix}}_{\Gamma} \underbrace{\begin{bmatrix} q_{mt} \\ q_{wt} \\ p_{mt} \\ p_{wt} \end{bmatrix}}_{Y_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} 200 & 0.5 & -0.2 \\ 80 & -0.2 & 0.4 \\ 100 & 0 & 0 \\ 50 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ p_{m,t-1} \\ p_{w,t-1} \end{bmatrix}}_{Y_{t-1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \epsilon^s_{mt} \\ \epsilon^s_{wt} \\ \epsilon^d_{mt} \\ \epsilon^d_{wt} \end{bmatrix}}_{\epsilon_t}$$

- Vemos que las ecuaciones de oferta no son simultáneas, pero las de demanda sí lo son.
- Para ilustrar el sesgo de simultaneidad del estimador OLS, y que el estimador 2SLS sí es insesgado, realizamos experimentos de Monte Carlo.
- En particular estimamos 1000 veces este modelo a partir de series simuladas de 24 observaciones.
- En las figuras que siguen vemos la distribución obtenida para cada parámetro y lo comparamos con el verdadero valor poblacional.

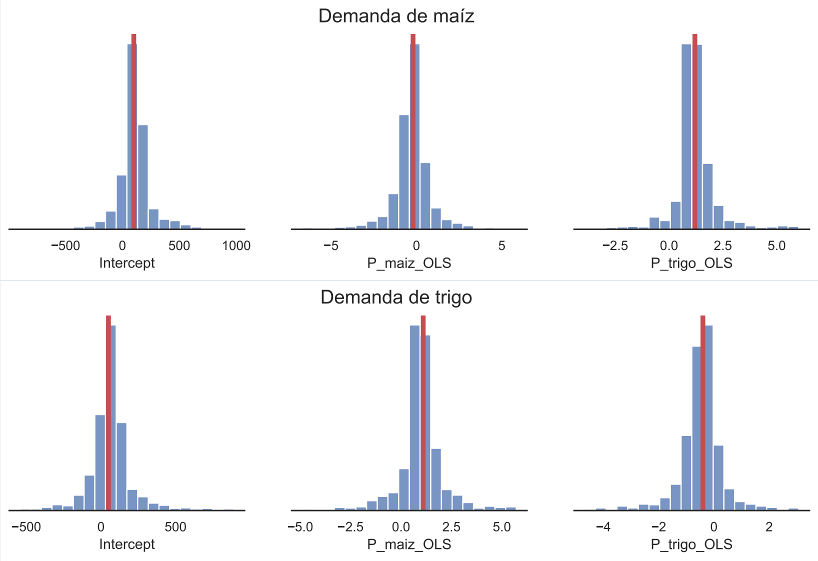
Las ecuaciones de oferta no son simultáneas, por lo que pueden ser estimadas por OLS.



Las ecuaciones de demanda sí son simultáneas, por lo que la estimación OLS estaría sesgada.



Por ello, estimamos el sistema por 2SLS.



Referencias I

Greene, William H. (2012). *Econometric Analysis*. 7ª ed. Prentice Hall. ISBN: 978-0-13-139538-1.