

Modelos de tendencia

Randall Romero Aguilar, PhD

randall.romero@ucr.ac.cr

EC4301 - Macroeconometría

I Semestre 2020

Última actualización: 17 de mayo de 2020

UCR
UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

**ESCUELA de
ECONOMÍA**
UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

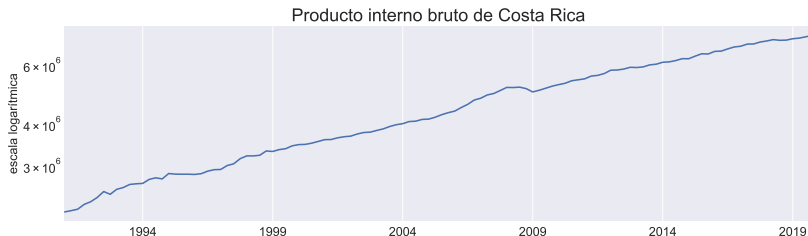
Tabla de contenidos

1. Introducción
2. Modelos de series con tendencia
3. Removiendo una tendencia
4. Series con raíz unitaria y procesos ARIMA
5. Detectando raíces unitarias
6. Otro método para remover una tendencia

1. Introducción

Series con tendencia

- ▶ Hasta ahora, para cada uno de los procesos que hemos estudiado su valor esperado es constante.
- ▶ Sin embargo, muchas de las series que estudiamos en la práctica tienen una tendencia.
- ▶ En tales casos, un modelo de proceso estacionario (como ARMA) no es apropiado para describir la serie.
- ▶ Por ejemplo:



Componentes (no observados) de una serie

- ▶ Para esta lección, es útil imaginar que una serie de tiempo consiste de dos componentes distintos:

$$y_t = \text{tendencia}_t + \text{componente_estacionario}_t$$

- ▶ En el tema 3 del curso aprendimos que una serie estacionaria puede modelarse como un proceso ARMA.
- ▶ Ahora en este tema aprenderemos:
 - ▶ cómo se modela una tendencia,
 - ▶ cómo se determina si una serie tiene tendencia,
 - ▶ cómo extraer una tendencia.

2. Modelos de series con tendencia

- ▶ A las series que tienen tendencia se les conoce como **series integradas**
- ▶ ¿Pero por qué integradas?
- ▶ Supongamos por un momento que $y(t)$ es una variable cuyo valor depende del momento t (continuo) en que se observa.
- ▶ Supongamos también que y cambia a una tasa constante a y que su valor inicial es $y(0)$.
- ▶ ¿A qué es igual $y(t)$?

De los supuestos anteriores:

$$\frac{dy}{d\tau} = a$$
$$dy = a \, d\tau$$

integrando ambos lados

$$\int_0^t dy = \int_0^t a \, d\tau$$
$$y(\tau)|_0^t = a\tau|_0^t$$
$$y(t) - y(0) = at$$

por lo tanto

$$y(t) = y(0) + at$$

- ▶ Supongamos ahora que el tiempo se mide en unidades discretas, que el valor inicial es y_0 y que la variable crece una cantidad fija a cada período.
- ▶ Entonces

$$\Delta y_\tau = a \underbrace{\Delta \tau}_{=1} = a$$

integrando ambos lados

$$\begin{aligned} \sum_{\tau=1}^t \Delta y_\tau &= \sum_{\tau=1}^t a \\ \underbrace{\Delta y_1}_{y_1 - y_0} + \underbrace{\Delta y_2}_{y_2 - y_1} + \underbrace{\Delta y_3}_{y_3 - y_2} + \cdots + \underbrace{\Delta y_t}_{y_t - y_{t-1}} &= at \\ y_t - y_0 &= at \end{aligned}$$

por lo tanto

$$y_t = y_0 + at$$

- Este resultado lo podemos obtener de manera equivalente con el operador de rezagos:

$$\begin{aligned}
 \Delta y_t &= a \\
 (1 + L + L^2 + \dots + L^{t-1}) \Delta y_t &= (1 + L + L^2 + \dots + L^{t-1}) a \\
 (1 + L + L^2 + \dots + L^{t-1}) (1 - L) y_t &= \underbrace{a + a + \dots + a}_{t \text{ veces}} \\
 (1 - L^t) y_t &= at \\
 y_t - y_0 &= at
 \end{aligned}$$

- Vemos que si $\Delta y_t = a$, es decir, la serie **cambia una cantidad fija** a cada período, entonces $y_t = y_0 + at$ tiene una **tendencia determinística**.

- Supongamos en contraposición que el **valor esperado del cambio** es constante, en particular

$$\Delta y_\tau = a + \epsilon_\tau$$

donde ϵ_τ es ruido blanco.

- Entonces, integrando

$$\sum_{\tau=1}^t \Delta y_\tau = \sum_{\tau=1}^t (a + \epsilon_\tau)$$

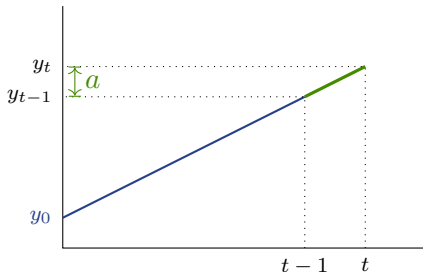
$$y_t - y_0 = at + \sum_{\tau=1}^t \epsilon_\tau \quad \Rightarrow \quad y_t = \left(y_0 + \sum_{\tau=1}^t \epsilon_\tau \right) + at$$

- Decimos que la serie tiene una **tendencia estocástica**.

Tendencias determinísticas versus estocásticas

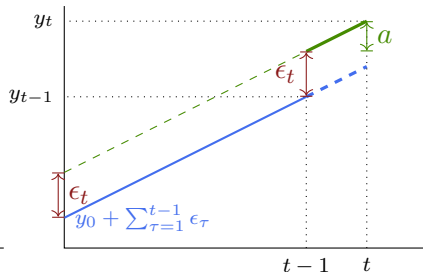
Tendencia determinística

$$\Delta y_t = a$$



Tendencia estocástica

$$\Delta y_t = a + \epsilon_t$$



Tendencias cuadráticas

- ▶ Es sencillo generalizar el procedimiento para obtener tendencias cuadráticas.
- ▶ Si el cambio en la serie es lineal en vez de constante:

$$\begin{aligned}\Delta y_\tau &= a + b\tau \\ \sum_{\tau=1}^t \Delta y_\tau &= \sum_{\tau=1}^t (a + b\tau) = at + b \sum_{\tau=1}^t \tau \\ y_t - y_0 &= at + b \frac{t(t+1)}{2} \\ y_t &= y_0 + \frac{2a+b}{2}t + \frac{b}{2}t^2\end{aligned}$$

Serie estacionaria alrededor de una tendencia (TS)

- Supongamos que $\omega_t = A(L)\epsilon_t$ es una serie estacionaria, tal que

$$\mathbb{E} \omega_t = 0$$

$$\text{Var } \omega_t = \sigma_\omega^2$$

- Definimos una serie

estacionaria alrededor de una tendencia

$$y_t = \underbrace{y_0 + at}_{\text{tendencia}} + \underbrace{\omega_t}_{\text{estacionario}}$$

- Vemos que

$$\mathbb{E} y_t = y_0 + at$$

$$\text{Var } y_t = \sigma_\omega^2$$

- ▶ Por otra parte, su autocovarianza es:

$$\begin{aligned}\text{Cov}(y_t, y_{t-s}) &= \mathbb{E}[(y_t - y_0 - at)(y_{t-s} - y_0 - a(t-s))] \\ &= \mathbb{E}[\omega_t \omega_{t-s}] \\ &= \text{Cov}[\omega_t, \omega_{t-s}]\end{aligned}$$

- ▶ Es decir, la media de y_t no es estacionaria (porque depende de t), pero su varianza-covarianza sí es estacionaria (idéntica a la del proceso ω_t).
- ▶ Por ello, el correlograma de un proceso estacionario alrededor de una tendencia es similar al correlograma de un proceso estacionario.

Caminata aleatoria

- ▶ El proceso de caminata aleatoria es muy utilizado en la teoría económica y financiera, en especial en la formulación de la hipótesis de mercado eficiente.
- ▶ Definimos la serie

caminata aleatoria

$$\Delta y_t = \epsilon_t \quad \text{o bien} \quad y_t = y_{t-1} + \epsilon_t$$

- ▶ Integrando el proceso sabemos que

$$y_t = y_0 + \sum_{\tau=1}^t \epsilon_{\tau}$$

- Consideremos y_0 como dado, y calculemos los momentos condicionales de la caminata aleatoria:

$$\begin{aligned}\mathbb{E} y_t &= \mathbb{E} \left[y_0 + \sum_{\tau=1}^t \epsilon_{\tau} \right] = y_0 \\ \text{Var } y_t &= \text{Var} \left[y_0 + \sum_{\tau=1}^t \epsilon_{\tau} \right] \\ &= \text{Var} [\epsilon_1 + \epsilon_2 + \cdots + \epsilon_t] = t\sigma^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(y_t, y_{t-s}) &= \mathbb{E}[(y_t - y_0)(y_{t-s} - y_0)] \\
&= \mathbb{E}[(\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_{t-s} + \cdots + \epsilon_t)(\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_{t-s})] \\
&= (t-s)\sigma^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{t,s} &= \frac{\text{Cov}(y_t, y_{t-s})}{\sqrt{\text{Var } y_t} \sqrt{\text{Var } y_{t-s}}} = \frac{(t-s)\sigma^2}{\sqrt{t\sigma^2} \sqrt{(t-s)\sigma^2}} \\
&= \sqrt{\frac{t-s}{t}} = \sqrt{1 - \frac{s}{t}}
\end{aligned}$$

Caminata aleatoria con deriva

- ▶ El proceso de caminata aleatoria con deriva es similar a la caminata aleatoria:

caminata aleatoria con deriva

$$\Delta y_t = a + \epsilon_t \quad \text{o bien} \quad y_t = a + y_{t-1} + \epsilon_t$$

- ▶ Integrando el proceso sabemos que

$$y_t = y_0 + at + \sum_{\tau=1}^t \epsilon_{\tau}$$

- ▶ Vemos que la caminata aleatoria con deriva le añade una tendencia lineal determinística at a la caminata aleatoria convencional $y_0 + \sum_{\tau=1}^s \epsilon_{t+\tau}$
- ▶ Este es un ejemplo de un modelo de tendencia puro: no tiene un componente estacionario.

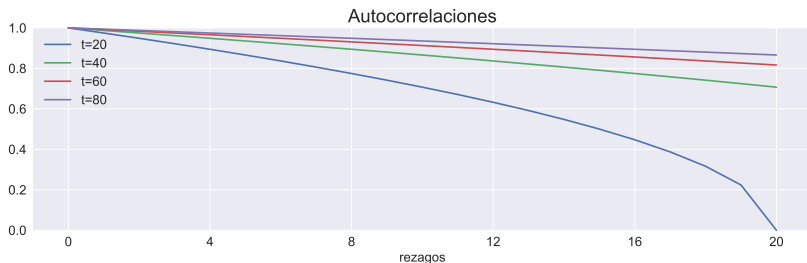
- ▶ Sabemos que añadir un componente determinístico a una variable aleatoria cambia su media en la misma magnitud de ese componente, pero no altera su varianza.
- ▶ Entonces, para la caminata aleatoria con deriva:

$$\mathbb{E} y_t = y_0 + at$$

$$\text{Cov}(y_t, y_{t-s}) = (t-s)\sigma^2$$

$$\text{Var } y_t = t\sigma^2$$

$$\rho_{t,s} = \sqrt{1 - \frac{s}{t}}$$



Pronosticando una caminata aleatoria

- ▶ Es sumamente difícil pronosticar una caminata aleatoria.
- ▶ Supongamos que tenemos datos hasta t y deseamos pronosticar el valor de la serie en $t + k$.
- ▶ En este caso:

$$\mathbb{E}[y_{t+k} | y_t] = y_t \qquad \text{Var}[y_{t+k} | y_t] = k\sigma^2$$

- ▶ Es decir, el mejor pronóstico para cualquier valor futuro de la serie es su valor observado más reciente.
- ▶ Pero la varianza de este pronóstico crece linealmente, resultando infinitamente grande conforme $k \rightarrow \infty$.

Series estacionarias en diferencia (DS)

- ▶ Las caminatas aleatorias (con o sin deriva) son ejemplos de series **estacionarias en diferencia**.
- ▶ Esto quiere decir que si tomamos su primera diferencia, el resultado es una serie estacionaria:

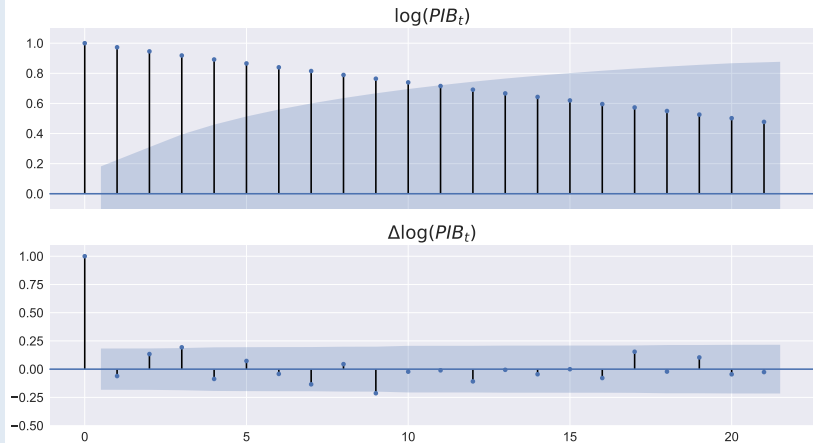
$$\begin{aligned}y_t &= y_0 + at + \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_{t-1} + \epsilon_t \\y_{t-1} &= y_0 + a(t-1) + \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_{t-1} \\ \Rightarrow \Delta y_t &= a + \epsilon_t\end{aligned}$$

- ▶ Por ello, decimos que la serie y_t es **integrada de orden 1**.
- ▶ En general, si una serie z_t debe ser diferenciada d veces para obtener una serie estacionaria, entonces decimos que z_t es **integrada de orde d** , escrito $I(d)$.

Ejemplo 1:

Correlación del PIB

Autocorrelación del PIB trimestral de Costa Rica



3. Removiendo una tendencia

Distinguiendo una serie DS de una TS

- ▶ Comparemos la media y la varianza de estas dos series:

	TS	DS
Proceso	$x_t = x_0 + at + \epsilon_t$	$y_t = y_0 + at + \sum_{\tau=1}^t \epsilon_\tau$
Media	$x_0 + at$	$y_0 + at$
Varianza	σ^2	$t\sigma^2$
Δ	$a + \epsilon_t - \epsilon_{t-1}$	$a + \epsilon_t$
$-(\hat{z}_0 + \hat{a}t)$	ϵ_t	$\sum_{\tau=1}^t \epsilon_\tau$

- ▶ Los dos modelos tiene una media que crece linealmente, por lo que es muy difícil distinguirlos.

Ejemplo 2:

Serie TS vs caminata aleatoria con
deriva

```
import numpy as np
np.random.seed(1)
T = 121
e = np.random.randn(T)
e[0] = 0

x0 = y0 = a = 1
t = np.arange(T)

y = y0 + a*t + e.cumsum()
x = x0 + a*t + e
```

Este código simula una realización de serie estacionaria alrededor de tendencia (TS) y una estacionaria en diferencia (DS).

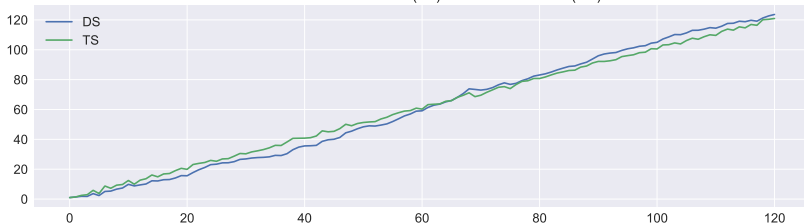
$$x_t = x_0 + at + \epsilon_t \quad (\text{TS})$$

$$y_t = y_0 + at + \sum_{\tau=1}^t \epsilon_{\tau} \quad (\text{DS})$$

Para que sea replicable, fijamos un valor para la función `np.random.seed`

Series no estacionarias

Tendencia determinística (TS) versus estocástica (DS)



- ▶ Hemos visto que para transformar en estacionaria una serie...
 - TS estimamos su tendencia determinística por regresión, usamos los residuos de esta regresión como el componente estacionario
 - DS tomamos su primera diferencia.
- ▶ Hecho esto, podemos modelar el componente estacionario, por ejemplo con ARMA.
- ▶ Pero es importante usar la técnica adecuada para remover la tendencia, según sea el tipo de serie (TS o DS)
- ▶ ¿Qué pasaría si tomamos primera diferencia de una serie TS?, o ¿qué pasaría si removemos una tendencia determinística de una serie DS?

Diferenciando una serie TS

(buscando problemas, parte 1)

- ▶ Para un proceso TS como $x_t = x_0 + at + \epsilon_t$, su primera diferencia es

$$\begin{aligned}\Delta x_t &= a + \epsilon_t - \epsilon_{t-1} \\ &= a + (1 - L)\epsilon_t\end{aligned}$$

- ▶ Es decir, la serie resultante Δx_t es un proceso MA(1).
- ▶ El polinomio de rezagos para la parte MA tiene una raíz unitaria, por lo que el proceso **no es invertible**.
- ▶ Esto puede causar problemas a la hora de estimar el modelo.
- ▶ Este problema también se presenta si diferenciamos una serie que ya es estacionaria: resultamos con un proceso no invertible y que tiene mayor varianza que el proceso original. A esto lo llamamos **sobrediferenciar**.

Restando una tendencia determinística a una serie DS

(buscando problemas, parte 2)

- ▶ Para un proceso DS como $y_t = y_0 + at + \sum_{\tau=1}^t \epsilon_\tau$, remover la tendencia determinística resulta en

$$\tilde{y}_t = \sum_{\tau=1}^t \epsilon_\tau$$

- ▶ Es decir, la serie resultante \tilde{y}_t aún conserva su tendencia estocástica.
- ▶ Vemos que

$$\Delta \tilde{y}_t = \epsilon$$

$$\tilde{y}_t = \tilde{y}_{t-1} + \epsilon$$

- ▶ Esto es un proceso AR(1) con coeficiente autorregresivo igual a uno, por lo que no es estacionario.

4. Series con raíz unitaria y procesos ARIMA

- ▶ La caminata aleatoria (con o sin deriva) puede verse como un modelo AR(1) en el cual la raíz del polinomio de rezagos es uno:

$$y_t = c + 1y_{t-1} + \epsilon_t$$
$$(1 - 1L)y_t = c + \epsilon_t$$

- ▶ Por ello, en general decimos que un proceso con tendencia estocástica tiene raíz unitaria.

- Consideremos el siguiente proceso AR(2)

$$y_t = 0.6y_{t-1} + 0.4y_{t-2} + \epsilon_t$$

- Su polinomio de rezagos es $1 - 0.6L - 0.4L^2 = (1 - 0.4L)(1 - 1L)$, cuyas raíces son 1 y 2.5. Es decir, este proceso también tiene una raíz unitaria, y por tanto no es estacionario.
- La factorización del polinomio de rezagos nos sugiere escribir

$$(1 - 0.4L)(1 - 1L)y_t = \epsilon_t$$

$$(1 - 0.4L)\Delta y_t = \epsilon_t$$

$$\Delta y_t = 0.4\Delta y_{t-1} + \epsilon_t$$

- Visto como un proceso para $y^* \equiv \Delta y_t$, este es un proceso AR(1) estacionario.

Procesos ARIMA(p,d,q)

- ▶ En el ejemplo anterior, como la primera diferencia de y_t es un proceso AR(1) estacionario, decimos que y_t es un proceso ARIMA(1,1,0).
- ▶ En general, si un proceso integrado de orden d , y_t , es diferenciado d veces y su resultado $\Delta^d y_t$ es un proceso ARMA(p,q), entonces decimos que y_t tiene un proceso ARIMA(p,d,q):

Autorregresivo integrado de media móvil: ARIMA

Sea $\{\epsilon_t\}$ ruido blanco; el proceso estocástico

$$\Phi(L)(1 - L)^d y_t = \Theta(L)\epsilon_t$$

es llamado proceso ARIMA(p,d,q), donde $\Phi(L)$ es un polinomio de grado p cuyas raíces están fuera del círculo unitario, y $\Theta(L)$ es un polinomio de grado q .

Nota:

Repaso del modelo clásico de
regresión lineal

- ▶ En el modelo clásico de regresión lineal se tiene

$$y_i = \beta_1 x_{1,i} + \beta_2 x_{2,i} + \cdots + \beta_k x_{k,i} + \epsilon_i$$

donde $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ es un error homoscedástico y no-autocorrelacionado.

- ▶ Si se cumplen los supuestos del MCRL, este modelo se puede estimar de manera insesgada y eficiente por medio del estimador mínimos cuadrados ordinarios.

- Para hacer un test sobre un parámetro

$$H_0 : \beta_j = q \qquad H_1 : \beta_j \neq q$$

utilizamos el valor estimado por mínimos cuadrados ordinarios $\hat{\beta}_j$ y su error estándar $s.e.(\beta_j)$, y decimos que **si la hipótesis nula es cierta** entonces el estadístico

$$\frac{\hat{\beta}_j - q}{s.e.(\beta_j)} \sim t_{n-k}$$

(tiene una distribución t -Student con $n - k$ grados de libertad, donde n es el número de observaciones y k el número de parámetros estimados).

- ▶ Es decir, con un nivel de significancia α , el intervalo

$$[q + t_{\alpha/2} s.e.(\beta_j), q + t_{1-\alpha/2} s.e.(\beta_j)]$$

contendrá al valor estimado $\hat{\beta}_j$ en $100(1 - \alpha)\%$ de las muestras **siempre y cuando sea cierto que $\beta_j = q$.**

- ▶ Por ello, cuando encontramos un valor $\hat{\beta}_j$ que no está contenido en ese intervalo, rechazamos la hipótesis nula, y decimos que β_j es significativamente distinto de q , **a sabiendas de que nuestro procedimiento incurrirá en el error tipo-1 (rechazar una hipótesis verdadera) en $100\alpha\%$ de las muestras.**
- ▶ Para que este procedimiento tenga validez, es necesario que el estadístico efectivamente tenga la distribución t -Student, lo cual es cierto **siempre que se cumplan los supuestos del modelo clásico de regresión lineal.**

Regresión espuria

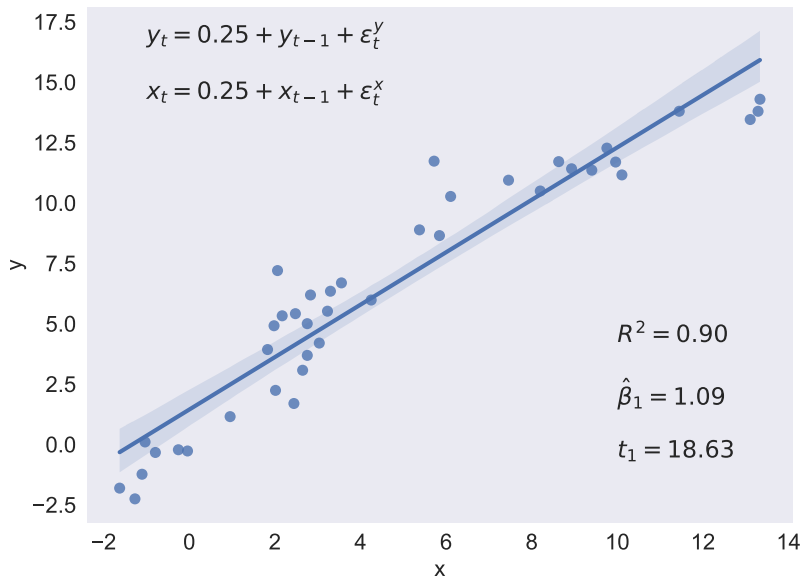
- ▶ En 1974, Granger y Newbold demostraron, via simulaciones, que si una serie $I(1)$ se estima en función de otra serie $I(1)$ completamente independiente de ella, los estadísticos usuales tenderán a mostrar que las dos series están relacionadas.
- ▶ Es decir, si y_t, x_t son dos series $I(1)$ independientes, al correr la regresión

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \epsilon_t$$

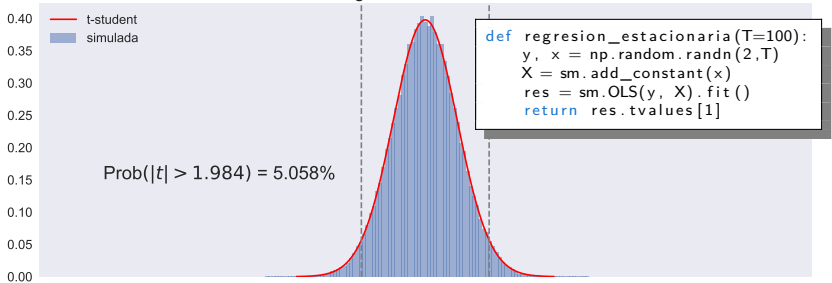
fallaríamos en rechazar la hipótesis nula $\beta_1 = 0$ (la cual es cierta porque y_t no depende de x_t) con una frecuencia mayor a la que sugiere la distribución t -student correspondiente:

$$\frac{\hat{\beta}_1}{s.e(\beta_1)} \sim t_{T-2} \quad \Leftarrow \text{¡ya no es cierto!}$$

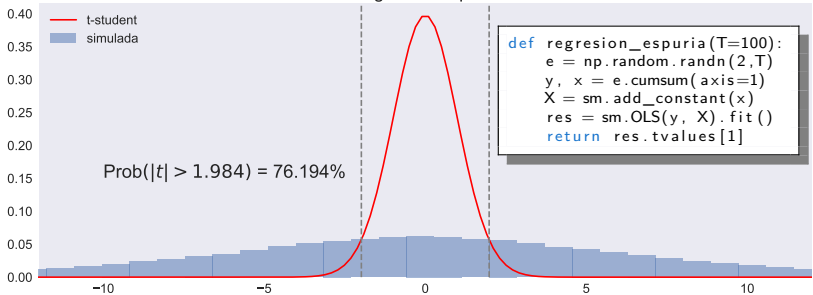
- ▶ Este fenómeno de encontrar relaciones inexistentes entre variables integradas se conoce como **regresión espuria**.



Regresión estacionaria



Regresión espuria



Regresión lineal con series integradas

¿Cómo estudiar la relación entre series integradas sin incurrir en regresiones espurias?

- ▶ Supongamos que tanto y_t como x_t son series $I(1)$.
- ▶ Entonces, por definición, Δy_t y Δx_t son series estacionarias.
- ▶ En tal caso, el modelo

$$\Delta y_t = \beta_0 + \beta_1 \Delta x_t + \epsilon_t$$

puede estimarse por mínimos cuadrados, y la prueba $\beta_1 = 0$ se realiza usando el procedimiento usual.

- ▶ Una alternativa mejor, que estudiaremos con detalladamente más tarde en el curso, es estimar la regresión en niveles

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \epsilon_t$$

y determinar si los residuos de esta regresión son estacionarios. Si lo son, diremos que y_t está cointegrada con x_t .

Procesos AR(p) con raíz unitaria

- Recordemos que el proceso AR(p) puede escribirse

$$\begin{aligned}y_t &= c + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \epsilon_t \\(1 - \phi_1 L^1 - \cdots - \phi_p L^p) y_t &= c + \epsilon_t \\ \Phi(L) y_t &= c + \epsilon_t\end{aligned}$$

- Supongamos que los coeficientes autorregresivos suman uno.
- Entonces

$$\begin{aligned}\Phi(1) &= 1 - \phi_1 1^1 - \cdots - \phi_p 1^p \\ &= 1 - (\phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_p) = 1 - 1 = 0\end{aligned}$$

- Es decir, si $\phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_p = 1$, entonces el proceso tiene raíz unitaria.

5. Detectando raíces unitarias

Caminata aleatoria como serie AR(1)

- ▶ El modelo más sencillo de una serie con raíz unitaria, la caminata aleatoria, es un proceso AR(1)

$$y_t = \phi y_{t-1} + \epsilon_t$$

en el cual se cumple que $\phi = 1$.

- ▶ Entonces resulta natural, para determinar si una serie es una caminata aleatoria, estimar esta ecuación y comprobar la hipótesis $\phi = 1$.
- ▶ Alternativamente, restando y_{t-1} de ambos lados podemos estimar

$$y_t - y_{t-1} = (\phi - 1)y_{t-1} + \epsilon_t$$

$$\Delta y_t = \gamma y_{t-1} + \epsilon_t$$

y comprobar si

$$H_0 : \quad \gamma_0 = 0 \quad \text{versus} \quad H_1 : \quad \gamma_0 < 0$$

- ▶ No obstante, Dickey y Fuller (1979) encontraron que si la hipótesis nula es verdadera, la regresión anterior tiene series no estacionarias en ambos lados de la ecuación, por lo que no se cumple que

$$z = \frac{\hat{\gamma}}{s.e.(\gamma)}$$

tenga una distribución t -Student.

- ▶ Para determinar la distribución de este estadístico, de manera que pueda realizarse la prueba de hipótesis, Dickey y Fuller realizaron experimentos de Monte Carlo, en los cuales
 - ▶ Se simula una caminata aleatoria con un tamaño de muestra predeterminado.
 - ▶ Se estima el modelo AR(1)
 - ▶ Se calcula el valor de z
- ▶ Realizando muchas simulaciones como la anterior es posible aproximar la verdadera distribución del estadístico z bajo la hipótesis nula $\gamma = 0$.

Las pruebas de Dickey-Fuller



¿Tiene la serie y_t una raíz unitaria?

H_0

$$\left. \begin{aligned} \Delta y_t &= \gamma y_{t-1} + \epsilon_t \\ \Delta y_t &= a_0 + \gamma y_{t-1} + \epsilon_t \\ \Delta y_t &= a_0 + b_0 t + \gamma y_{t-1} + \epsilon_t \end{aligned} \right\} \gamma = 0$$

Test

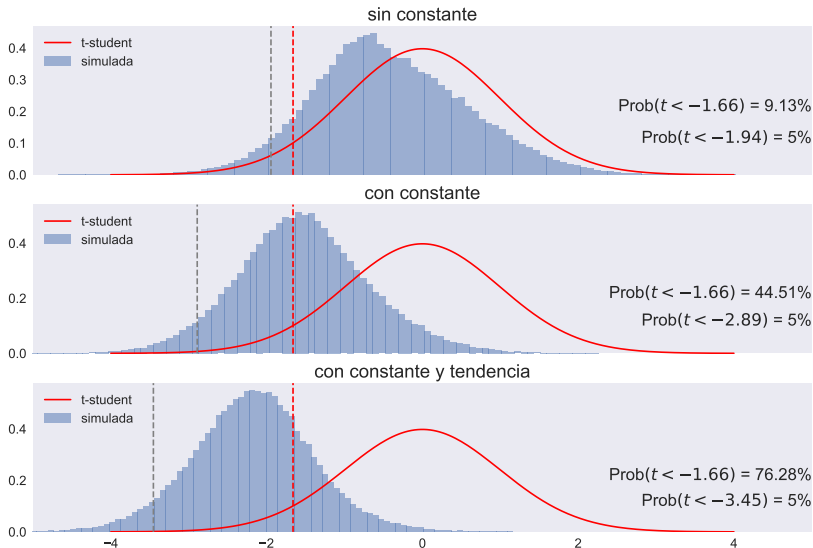
Estimar $z = \frac{\hat{\gamma}}{s.e.(\gamma)}$ por mínimos cuadrados.



Si z es menor que el valor crítico de Dickey Fuller, entonces $\gamma < 0$, es decir, no hay raíz unitaria.

La distribución de Dickey-Fuller

Distribución de Dickey-Fuller para T=100 observaciones



Ejemplo 3:

Pruebas Dickey-Fuller



`bccr.ServicioWeb() (33783)`



`tendencias-pib.ipynb`

- ▶ Al estimar por mínimos cuadrados ordinarios la regresión

$$\Delta \log \text{PIB}_t = c + \phi \log \text{PIB}_{t-1} + \epsilon_t$$

encontramos

	coef	std err	t	P> t	[0.025	0.975]
const	0.1010	0.042	2.393	0.018	0.017	0.185
IPIB	-0.0059	0.003	-2.143	0.034	-0.011	-0.000

- ▶ Los resultados de la tabla indican que ϕ es significativamente distinto de cero al 5% de significancia, **pero este resultado es incorrecto** porque en esta regresión el estadístico t no tiene la distribución t -Student.
- ▶ Además, la prueba reportada es de dos colas, mientras que la apropiada es de una cola.

- ▶ Por ello, recurrimos a los valores críticos de Dickey-Fuller

	z	1%	5%	10%
sin constante	10.709	-2.585	-1.944	-1.615
con constante	-2.143	-3.489	-2.887	-2.580
con constante y tendencia	-2.483	-4.040	-3.449	-3.150

- ▶ Como en todos los casos el valor z estimado es mayor que el valor crítico de Dickey-Fuller (sin importar cuál nivel de significancia utilizamos), no podemos rechazar la hipótesis de que el PIB tenga raíz unitaria.

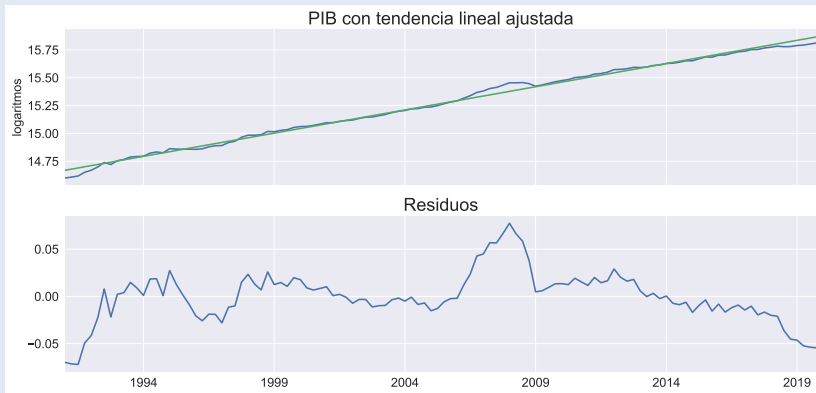
- ▶ Por otra parte, si realizamos las pruebas de Dickey-Fuller a la primera diferencia del (logaritmo del) PIB trimestral encontramos

	z	1%	5%	10%
sin constante	-6.344	-2.586	-1.944	-1.615
con constante	-11.254	-3.489	-2.887	-2.580
con constante y tendencia	-11.641	-4.040	-3.450	-3.150

- ▶ Como en todos los casos el valor z estimado es menor que el valor crítico de Dickey-Fuller (sin importar cuál nivel de significancia utilizamos), concluimos que el crecimiento trimestral del PIB es estacionario (no tiene raíz unitaria).
- ▶ Dado que no pudimos rechazar que el PIB tuviese raíz unitaria, pero sí lo hicimos para su primer diferencia, concluimos que el PIB es una serie $I(1)$.

- ▶ ¿Qué hubiera pasado si en vez de diferenciar la serie, le extraemos una tendencia lineal?
- ▶ Obtenemos los residuos de la regresión

$$\log \text{PIB}_t = c + at + \epsilon_t$$



Al aplicar las pruebas de Dickey-Fuller a los residuos, vemos que

- ▶ la prueba sin constante rechaza la presencia de una raíz unitaria, con 5% de significancia
- ▶ las otras dos pruebas no rechazan esta hipótesis.

	z	1%	5%	10%
sin constante	-2.523	-2.585	-1.944	-1.615
con constante	-2.515	-3.489	-2.887	-2.580
con constante y tendencia	-2.483	-4.040	-3.449	-3.150

Caminata aleatoria como serie AR(p)

- ▶ No todas las series de tiempo pueden representarse apropiadamente como un proceso AR(1).
- ▶ La prueba de Dickey-Fuller puede aplicarse en estos casos también, aunque con modificaciones.
- ▶ Consideremos por ejemplo un proceso AR(2):

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \epsilon_t$$

$$y_t = (\phi_1 + \phi_2 - 1)y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} + y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \epsilon_t$$

$$y_t - y_{t-1} = (\phi_1 + \phi_2 - 1)y_{t-1} - \phi_2 (y_{t-1} - y_{t-2}) + \epsilon_t$$

$$\Delta y_t = (\phi_1 + \phi_2 - 1)y_{t-1} - \phi_2 \Delta y_{t-1} + \epsilon_t$$

$$\Delta y_t = \gamma y_{t-1} + a_1 \Delta y_{t-1} + \epsilon_t$$

- ▶ Esta serie tiene raíz unitaria si $\gamma = 0$.

La prueba aumentada de Dickey-Fuller

- ▶ Para permitir la posibilidad que la serie original sea AR(p+1), la **prueba aumentada de Dickey-Fuller** introduce p rezagos de la variable dependiente en la regresión original:

$$\Delta y_t = \gamma y_{t-1} + a_1 \Delta y_{t-1} + \cdots + a_p \Delta y_{t-p} + \epsilon_t$$

$$\Delta y_t = a_0 + \gamma y_{t-1} + a_1 \Delta y_{t-1} + \cdots + a_p \Delta y_{t-p} + \epsilon_t$$

$$\Delta y_t = a_0 + b_0 t + \gamma y_{t-1} + a_1 \Delta y_{t-1} + \cdots + a_p \Delta y_{t-p} + \epsilon_t$$

- ▶ En cualquiera de las formulaciones, la hipótesis nula es $\gamma = 0$.
- ▶ Se utilizan los mismos valores críticos de la prueba de Dickey-Fuller.

Ejemplo 4:

Pruebas aumentada de Dickey-Fuller



bccr



tendencias-pib.ipynb

- ▶ Al realizar las pruebas aumentadas de Dickey-Fuller del (logaritmo del) PIB trimestral de Costa Rica encontramos

	z	1%	5%	10%	p
sin constante	3.985	-2.587	-1.944	-1.615	9
con constante	-1.559	-3.494	-2.889	-2.582	9
con constante y tendencia	-1.586	-4.047	-3.453	-3.152	9

- ▶ Esto confirma lo que ya habíamos encontrado: no podemos rechazar la hipótesis de que el PIB tenga raíz unitaria.
- ▶ En todos los casos, el número de rezagos corresponde al máximo rezago significativo.

- ▶ Por otra parte, si realizamos las pruebas de Dickey-Fuller a la primera diferencia del (logaritmo del) PIB trimestral encontramos

	z	1%	5%	10%	p
sin constante	-1.694	-2.587	-1.944	-1.615	7
con constante	-4.465	-3.494	-2.889	-2.582	8
con constante y tendencia	-4.719	-4.047	-3.453	-3.152	8

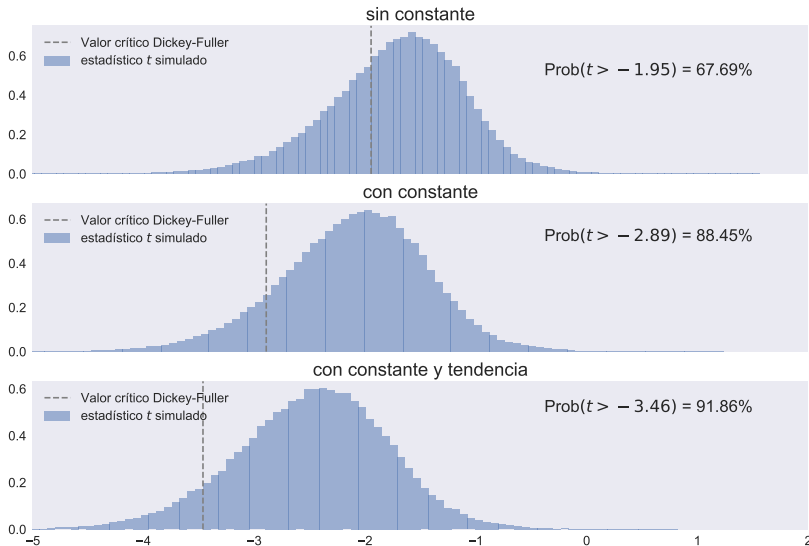
- ▶ De nuevo concluimos que el crecimiento trimestral del PIB es estacionario (no tiene raíz unitaria).

Interpretando una prueba de Dickey Fuller

- ▶ **Importante:** En la prueba DF, no rechazar la hipótesis de que una serie tenga raíz unitaria...
 - ▶ **no implica** que la serie sí tenga tal raíz unitaria.
 - ▶ solamente decimos que **no hay evidencia** suficiente para descartarla con un nivel “razonable” de significancia.
- ▶ Esto es así porque bien podría ser el caso de que el verdadero valor de ϕ sea ligeramente menor a uno (en cuyo caso el proceso AR(1) es estacionario), pero la prueba Dickey-Fuller no puede distinguirlo efectivamente de 1.

Potencia de la distribución de Dickey-Fuller

Distribución de estadístico t para AR(1) cuando $\rho = 0.95$, con $T=100$ observaciones,



Limitaciones de las pruebas de raíz unitaria

- ▶ Hemos visto que la prueba de Dickey-Fuller tienen muy poca potencia para casos en que el proceso es persistente pero no integrado.
- ▶ Esto es una limitación también de otras pruebas de raíz unitaria, como la de Phillips-Perron.
- ▶ Por ello, cuando se estudian series macroeconómicas con estos tests, usualmente se encuentra que tienen raíces unitarias.
- ▶ Esto se debe a que la hipótesis nula es que sí hay raíz unitaria, y esta hipótesis solamente se rechaza cuando existe **fuerte evidencia** en su contra.

- ▶ Kwiatkowski, Phillips, Schmidt y Shin (1992) proponen una *prueba de estacionariedad*: la hipótesis nula es que la serie es estacionaria.
- ▶ Para ello, asumen que una serie puede ser expresada como la suma de una tendencia determinística, una caminata aleatoria, y un error estacionario (no necesariamente ruido blanco):

$$y_t = \underbrace{\xi t}_{\text{tendencia}} + \underbrace{r_t}_{\text{caminata}} + \underbrace{\omega_t}_{\text{estacionario}}$$

donde r_t es una caminata aleatoria

$$r_t = r_{t-1} + u_t, \quad u_t \sim N(0, \sigma_u^2)$$

- ▶ La hipótesis de estacionariedad es simplemente $\sigma_u^2 = 0$.

- ▶ Bajo la hipótesis nula, $r_t = r_{t-1} = \dots = r_0$ una constante, por lo que la serie sería estacionaria alrededor de una tendencia:

$$y_t = r_0 + \xi t + \omega_t$$

- ▶ KPSS también consideran el caso particular en el que $\xi = 0$, es decir, la serie es simplemente estacionaria.

$$y_t = r_0 + \omega_t$$

- ▶ En cualquiera de estos dos casos, si e_1, e_2, \dots, e_T son los residuos de la regresión, se define

$$S_t = \sum_{i=1}^t e_i, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (\text{suma parcial de residuos})$$

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T e_t^2 \quad (\text{varianza estimada del error})$$

- ▶ $\hat{\sigma}_e^2$ es un estimador consistente de la varianza de la parte estacionaria ω_t solo si es ruido blanco.
- ▶ Pero en la práctica, las series económicas rara vez cumplen esa restricción, por lo que KPSS proponen esta corrección para tomar en cuenta la posible correlación de ω_t :

$$s^2(l) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T e_t^2 + \frac{2}{T} \sum_{s=1}^l \left[\left(1 - \frac{s}{1+l} \right) \sum_{t=s+1}^T e_t e_{t-s} \right]$$

- ▶ Así, para hacer una prueba KPSS hay que decidir:
 - ▶ si incluir o no la tendencia determinística
 - ▶ cuántos rezagos l incluir en la estimación de la varianza $s^2(l)$

La prueba KPSS



¿Es la serie y_t estacionaria?

H_0

$$y_t = \xi t + r_t + \omega_t$$

$$r_t = r_{t-1} + u_t, \quad u_t \sim N(0, \sigma_u^2)$$

$$\sigma_u^2 = 0$$

Test

$$LM = \sum_{t=1}^T \frac{S_t^2}{s^2(l)}$$



Si LM es mayor que el valor crítico, rechazar la hipótesis nula y concluir que la serie tiene raíz unitaria.

- ▶ KPSS proporcionan los siguientes valores críticos asintóticos, los cuales obtuvieron por simulación 50 000 iteraciones con muestras de 2000 datos.

	c	ct
10%	0.347	0.119
5%	0.463	0.146
2.5%	0.574	0.176
1%	0.739	0.216

- ▶ Las pruebas son de una cola: se rechaza la hipótesis nula (de que la serie es estacionaria) cuando el estadístico LM es mayor al valor crítico seleccionado.

Ejemplo 5:

Pruebas KPSS



bccr



tendencias-pib.ipynb

- ▶ Al realizar las pruebas KPSS del (logaritmo del) PIB trimestral de Costa Rica encontramos

	nivel		diferencia	
	c	ct	c	ct
0	11.569	1.186	0.371	0.046
1	5.864	0.632	0.395	0.051
2	3.952	0.444	0.368	0.049
3	2.994	0.350	0.326	0.044
4	2.419	0.296	0.313	0.043
5	2.035	0.262	0.300	0.042
6	1.762	0.238	0.294	0.042

Valores críticos

	c	ct
10%	0.347	0.119
5%	0.463	0.146
2.5%	0.574	0.176
1%	0.739	0.216

- ▶ En todas las especificaciones, podemos rechazar al 1% que el PIB sea estacionario.
- ▶ Al 5%, en ningún caso podemos rechazar que el crecimiento del PIB (diferencia del logaritmo) sea estacionaria.
- ▶ Juntos, estos resultados señalan que el PIB es un proceso $I(1)$.

Ejemplo 6:

Raíces unitarias en series macroeconómicas de Estados Unidos



`NelsonPlosser.ipynb`

- ▶ En uno de los artículos más citados en macroeconomía, Nelson y Plosser (1982) examinaron varias series macro de uso común, averiguando si tenían raíces unitarias.
- ▶ Aplicando la prueba aumentada de Dickey-Fuller, concluyeron que todas menos una de las series analizadas tenían raíz unitaria.

Table 5

Tests for autoregressive unit roots*

$$z_t = \hat{\mu} + \hat{\gamma}t + \hat{\rho}_1 z_{t-1} + \hat{\rho}_2(z_{t-1} - z_{t-2}) + \dots + \hat{\rho}_k(z_{t-k+1} - z_{t-k}) + \hat{\mu}_t$$

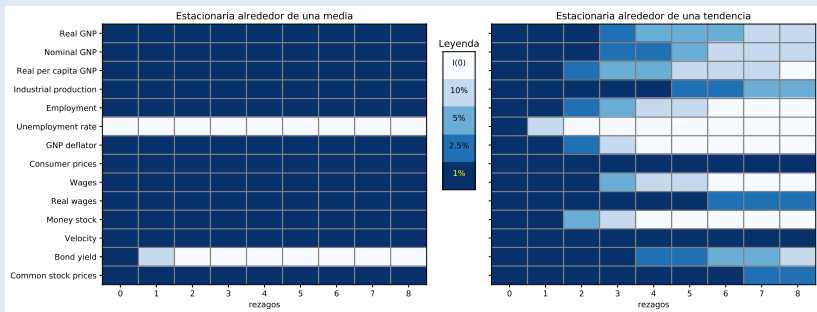
Series	T	k	$\hat{\mu}$	$t(\hat{\mu})$	$\hat{\gamma}$	$t(\hat{\gamma})$	$\hat{\rho}_1$	$t(\hat{\rho}_1)$	$s(\hat{u})$	r_1
Real GNP	62	2	0.819	3.03	0.006	3.03	0.825	-2.99	0.058	-0.02
Nominal GNP	62	2	1.06	2.37	0.006	2.34	0.899	-2.32	0.087	0.03
Real per capita GNP	62	2	1.28	3.05	0.004	3.01	0.818	-3.04	0.059	-0.02
Industrial production	111	6	0.103	4.32	0.007	2.44	0.835	-2.53	0.097	0.03
Employment	81	3	1.42	2.68	0.002	2.54	0.861	-2.66	0.035	0.10
Unemployment rate	81	4	0.513	2.81	-0.000	-0.23	0.706	-3.55*	0.407	0.02
GNP deflator	82	2	0.260	2.55	0.002	2.65	0.915	-2.52	0.046	-0.03
Consumer prices	111	4	0.090	1.76	0.001	2.84	0.986	-1.97	0.042	-0.06
Wages	71	3	0.566	2.30	0.004	2.30	0.910	-2.09	0.060	0.00
Real wages	71	2	0.487	3.10	0.004	3.14	0.831	-3.04	0.034	-0.01
Money stock	82	2	0.133	3.52	0.005	3.03	0.916	-3.08	0.047	0.03
Velocity	102	1	0.052	0.99	-0.000	-0.65	0.941	-1.66	0.067	0.11
Interest rate	71	3	-0.186	-0.95	0.003	1.75	1.03	0.686	0.283	-0.02
Common stock prices	100	3	0.481	2.02	0.003	2.37	0.913	-2.05	0.158	0.20

- ▶ En su artículo original, KPSS aplican su prueba a las mismas series que utilizaron Nelson y Plosser.
- ▶ Encontraron que para varias de las series no era posible rechazar la hipótesis de que fueran estacionarias alrededor de una tendencia.

Table 5

 $\hat{\eta}_\mu$ and $\hat{\eta}_\tau$ tests for trend stationarity applied to Nelson–Plosser data.

Series	Lag truncation parameter (<i>l</i>)								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\hat{\eta}_\mu$: 5% critical value is 0.463									
Real GNP	5.96	3.06	2.08	1.59	1.30	1.11	0.97	0.86	0.78
Nominal GNP	5.81	2.98	2.04	1.56	1.28	1.09	0.95	0.85	0.77
Real per capital GNP	5.54	2.84	1.94	1.50	1.22	1.05	0.92	0.82	0.75
Industrial production	10.79	5.48	3.70	2.81	2.27	1.92	1.66	1.47	1.32
Employment	7.57	3.87	2.63	2.01	1.64	1.39	1.21	1.08	0.98
Unemployment rate	0.31	0.18	0.14	0.11	0.10	0.10	0.09	0.09	0.09
GNP deflator	7.51	3.82	2.59	1.97	1.60	1.35	1.18	1.04	0.94
Consumer prices	7.90	4.02	2.73	2.08	1.69	1.43	1.24	1.10	0.99
Wages	6.72	3.43	2.33	1.78	1.45	1.23	1.07	0.95	0.86
Real wages	6.96	3.55	2.40	1.83	1.48	1.26	1.09	0.97	0.88
Money	8.01	4.08	2.76	2.10	1.70	1.44	1.25	1.11	1.00
Velocity	8.40	4.29	2.90	2.21	1.80	1.52	1.32	1.17	1.05
Interest rate	0.78	0.42	0.30	0.24	0.20	0.17	0.16	0.14	0.13
Stock prices	8.01	4.10	2.79	2.13	1.74	1.48	1.29	1.15	1.04
$\hat{\eta}_\tau$: 5% critical value is 0.146									
Real GNP	0.630	0.337	0.242	0.198	0.173	0.158	0.148	0.141	0.137
Nominal GNP	0.755	0.392	0.273	0.215	0.181	0.159	0.143	0.132	0.124
Real per capital GNP	0.528	0.283	0.204	0.167	0.147	0.134	0.126	0.121	0.118
Industrial production	0.822	0.446	0.320	0.257	0.220	0.196	0.179	0.166	0.155
Employment	0.526	0.278	0.198	0.158	0.136	0.122	0.112	0.105	0.101
Unemployment rate	0.216	0.124	0.094	0.079	0.071	0.066	0.063	0.061	0.061
GNP deflator	0.492	0.256	0.178	0.140	0.117	0.103	0.093	0.086	0.081
Consumer prices	1.85	0.943	0.641	0.491	0.401	0.342	0.301	0.270	0.246
Wages	0.612	0.317	0.220	0.173	0.145	0.128	0.115	0.107	0.101
Real wages	0.956	0.511	0.365	0.293	0.252	0.226	0.208	0.194	0.184
Money	0.445	0.228	0.158	0.124	0.104	0.092	0.084	0.079	0.075
Velocity	1.78	0.932	0.647	0.504	0.418	0.360	0.319	0.287	0.262
Interest rate	0.845	0.457	0.323	0.255	0.214	0.186	0.166	0.151	0.140
Stock prices	1.23	0.646	0.454	0.359	0.302	0.264	0.237	0.216	0.199



6. Otro método para remover una tendencia

Desagregación de una serie de tiempo

- ▶ Tenemos una muestra de T observaciones de la variable aleatoria Y_t :

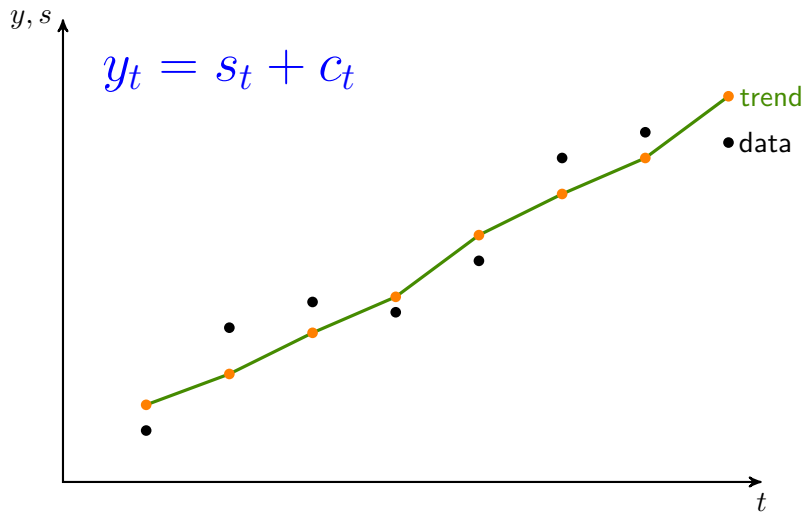
$$\{y_1, y_2, \dots, y_T\}$$

- ▶ Y_t tiene dos componentes: crecimiento (tendencia) s_t y ciclo c_t .

$$y_t = s_t + c_t$$

- ▶ Asumimos que la tendencia es una curva *suave*, aunque no necesariamente una línea recta.

Tendencia



- ▶ Partiendo de y_t , Hodrick y Prescott 1997 “extraen” la tendencia s_t

$$\{s_1, s_2, \dots, s_T\},$$

tratando de balancear dos objetivos mutuamente excluyentes:

1. el ajuste a los datos originales, es decir, $y_t - s_t$ debe ser pequeño.
 2. la tendencia resultante debe ser suaver, por lo que los cambios de pendiente $(s_{t+1} - s_t) - (s_t - s_{t-1})$ también deben ser pequeños.
- ▶ La importancia relativa de estos dos factores es ponderada con el parámetro λ .

Formalmente, la tendencia la definen por:

$$s_i^{HP} = \underset{s_1, \dots, s_T}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{t=1}^T (y_t - s_t)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} [(s_{t+1} - s_t) - (s_t - s_{t-1})]^2 \right\}$$
$$= \underset{s_1, \dots, s_T}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{t=1}^T (y_t - s_t)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} (s_{t+1} - 2s_t + s_{t-1})^2 \right\}$$

Definimos las matrices

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_T \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_T \end{bmatrix}$$

$$A_{T-2 \times T} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Reescribimos el problema de optimización

$$s_i^{HP} = \operatorname{argmin}_{s_1, \dots, s_T} \left\{ \sum_{t=1}^T (y_t - s_t)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} (s_{t+1} - 2s_t + s_{t-1})^2 \right\}$$

$$= \operatorname{argmin}_S \{ (Y - S)'(Y - S) + \lambda (AS)'(AS) \}$$

$$= \operatorname{argmin}_S \{ Y'Y - 2Y'S + S'(I + \lambda A'A)S \}$$

Resolviendo el problema

- Taking the FOC

$$S^{HP} = \underset{S}{\operatorname{argmin}} \{Y'Y - 2Y'S + S'(I + \lambda A'A)S\}$$

$$\Rightarrow -2Y + 2(I + \lambda A'A)S = 0$$

- Then, the HP filter is

$$S^{HP} = (I + \lambda A'A)^{-1} Y \quad (\text{tendencia})$$

$$C^{HP} \equiv Y - S^{HP} = \left[I - (I + \lambda A'A)^{-1} \right] Y \quad (\text{ciclo})$$

Ejemplo 7:

El filtro HP

Asumimos que tenemos $T = 5$ datos $Y = [y_1, y_2, y_3, y_4, y_5]'$ y que $\lambda = 4$. Los datos de tendencia $S = [s_1, s_2, s_3, s_4, s_5]'$ están dados por:

$$\begin{array}{rclclcl} s_1 = & 0.67y_1 & +0.36y_2 & +0.13y_3 & -0.02y_4 & -0.14y_5 \\ s_2 = & 0.36y_1 & +0.34y_2 & +0.23y_3 & +0.10y_4 & -0.02y_5 \\ s_3 = & 0.13y_1 & +0.23y_2 & +0.29y_3 & +0.23y_4 & +0.13y_5 \\ s_4 = & -0.02y_1 & +0.10y_2 & +0.23y_3 & +0.34y_4 & +0.36y_5 \\ s_5 = & -0.14y_1 & -0.02y_2 & +0.13y_3 & +0.36y_4 & +0.67y_5 \end{array}$$

Observe que cada dato de tendencia s_t es simplemente un promedio ponderado de todos los datos en Y . Además. algunas de las ponderaciones son negativas!

Por otra parte, los datos del ciclo $C = [c_1, c_2, c_3, c_4, c_5]'$ están dados por:

$$\begin{array}{rclclcl} c_1 = & 0.33y_1 & -0.36y_2 & -0.13y_3 & +0.02y_4 & +0.14y_5 \\ c_2 = & -0.36y_1 & +0.66y_2 & -0.23y_3 & -0.10y_4 & +0.02y_5 \\ c_3 = & -0.13y_1 & -0.23y_2 & +0.71y_3 & -0.23y_4 & -0.13y_5 \\ c_4 = & 0.02y_1 & -0.10y_2 & -0.23y_3 & +0.66y_4 & -0.36y_5 \\ c_5 = & 0.14y_1 & +0.02y_2 & -0.13y_3 & -0.36y_4 & +0.33y_5 \end{array}$$

De nuevo, observe que cada dato del ciclo c_t es un promedio ponderado de todos los puntos en Y , pero donde las ponderaciones suman cero.

- ▶ El resultado del filtro es muy sensible a la escogencia de λ .
- ▶ Como regla habitual, λ se escoge según la frecuencia de los datos
 - ▶ Anuales $\Rightarrow 100$
 - ▶ Trimestrales $\Rightarrow 1600$
 - ▶ Mensuales $\Rightarrow 14400$

El filtro HP tiene malas propiedades estadísticas

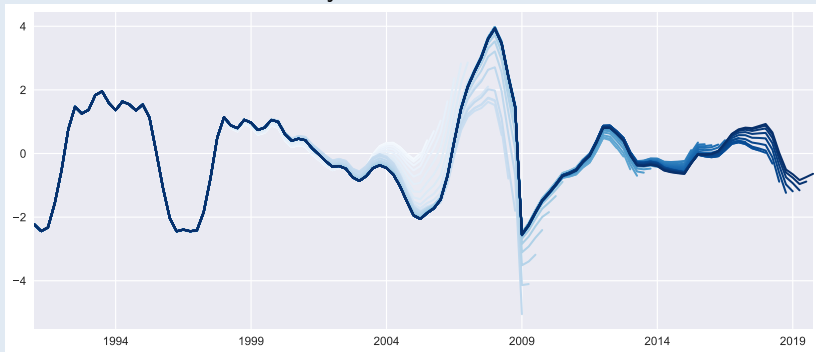
Hamilton 2017: Why You Should Never Use the HP Filter?

1. El filtro Hodrick-Prescott introduce relaciones dinámicas espurias que no tienen sustento en el proceso generador de datos subyacente.
2. Los valores filtrados al final de la muestra son muy distintos de los del medio, y también están caracterizados por una dinámica espuria.
3. Una formalización estadística del problema típicamente produce valores de λ que distan mucho de los usados comúnmente en la práctica.
4. Para Hamilton, hay una alternativa mejor: una regresión AR(4) alcanza todos los objetivos buscados por usuarios del filtro HP pero con ninguno de sus desventajas.

Ejemplo 8:

Filtrando el PIB de Costa Rica con
HP

Los datos filtrados son muy sensibles a nueva información.



HP puede inducir conclusiones equivocadas acerca del comovimiento de series

Cogley y Nason (1995) analizaron las propiedades espectrales del filtro HP

- ▶ Cuando se mide el componente cíclico de una serie de tiempo, ¿es buena idea usar el filtro HP?
- ▶ Depende de la serie original
 - Sí, si es estacionaria alrededor de tendencia
 - No, si es estacionaria en diferencia
- ▶ Este resultado tiene implicaciones importantes para modelos DSGE
 - ▶ Cuando se aplica el filtro HP a una serie integrada, el filtro introduce periodicidad y comovimiento en las frecuencias del ciclo económico, aún si no estaban presentes en los datos originales.



Cogley, Timothy y James M. Nason (1995). "Effects of the Hodrick-Prescott filter on trend and difference stationary time series Implications for business cycle research". En: *Journal of Economic Dynamics and Control* 19.1-2, págs. 253-278. ISSN: 0165-1889.



Enders, Walter (2015). *Applied Econometric Time Series*. 4ª ed. Wiley. ISBN: 978-1-118-80856-6.



Hamilton, James D. (2017). "Why You Should Never Use the Hodrick-Prescott Filter". En: *Review of Economics and Statistics* 100.5.



Hodrick, Robert J. y Edward C. Prescott (1997). "Postwar U.S. Business Cycles: An Empirical Investigation". En: *Journal of Money, Credit and Banking* 29.1, págs. 1-16. ISSN: 00222879, 15384616.



Levendis, John D. (2018). *Time Series Econometrics. Learning Through Replication*. Springer. ISBN: 978-3-319-98281-6.