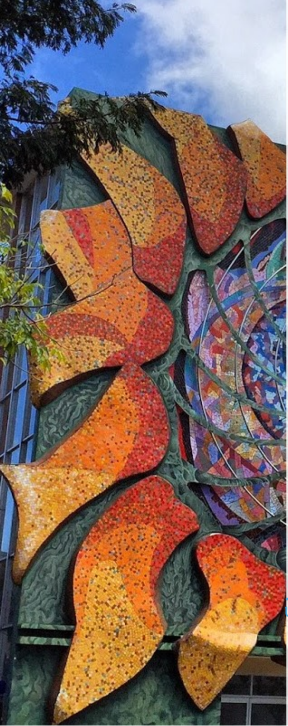


Introducción a la estimación de sistemas de ecuaciones

Randall Romero Aguilar, PhD
randall.romero@ucr.ac.cr

EC4301 - Macroeconometría

I Semestre 2020

Última actualización: 1 de junio de 2020

UCR
UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

ESCUELA de ECONOMÍA
UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

Tabla de contenidos

1. Motivación

¿Cómo afecta el dinero al producto? Keynesianos vs Clásicos*

Cuando la oferta de dinero aumenta, el empleo y el producto real...

Clásicos

no se ven afectados.

$\Rightarrow\Leftarrow$

Keynesianos

también aumentan.

*Basado en Walsh (2010, ch.1)

¿Cómo afecta el dinero al producto? Keynesianos vs Clásicos*

Cuando la oferta de dinero aumenta, el empleo y el producto real...

Clásicos

no se ven afectados.

$\Rightarrow\!\Leftarrow$

Keynesianos

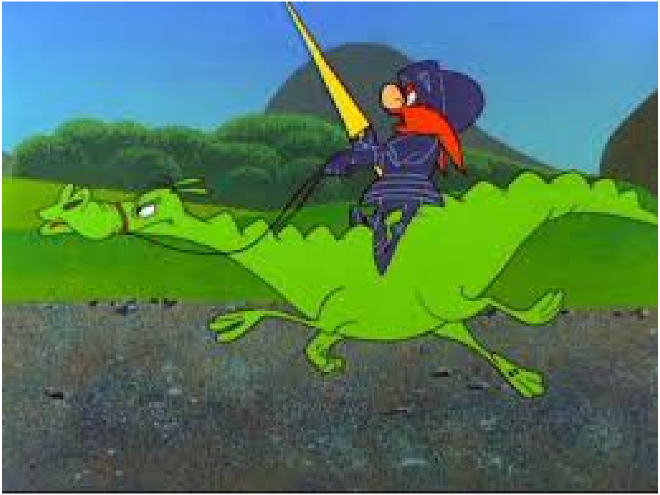
también aumentan.

En palabras de Lucas (1996):

> *Esta tensión entre dos ideas incompatibles —que cambios en dinero son cambios neutrales de unidades, y que inducen movimientos en empleo y producción de la misma direción—ha estado en el centro de la teoría monetaria al menos desde Hume (1752).*

*Basado en Walsh (2010, ch.1)

Un econometrista al rescate



Un econometrista al rescate

- Para resolver este problema, un econometrista estima el modelo

$$y_t = \bar{y} + \alpha_0 m_t + \alpha_1 m_{t-1} + c_0 z_t + c_1 z_{t-1} + u_t$$

donde m es dinero, y es producto, z una variable de control.

Un econometrista al rescate

- Para resolver este problema, un econometrista estima el modelo

$$y_t = \bar{y} + \alpha_0 m_t + \alpha_1 m_{t-1} + c_0 z_t + c_1 z_{t-1} + u_t$$

  donde m es dinero, y es producto, z una variable de control.
- Si $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$, los keynesianos estarían en problemas.

Un econometrista al rescate

- Para resolver este problema, un econometrista estima el modelo

$$y_t = \bar{y} + \alpha_0 m_t + \alpha_1 m_{t-1} + c_0 z_t + c_1 z_{t-1} + u_t$$

  donde m es dinero, y es producto, z una variable de control.
- Si $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$, los keynesianos estarían en problemas.
- Si $\alpha_0 > 0$, los clásicos estarían en problemas.

Una regla de política monetaria

- Suponga que el banco central desea estabilizar el producto alrededor de $\bar{y}$.

Una regla de política monetaria

- Suponga que el banco central desea estabilizar el producto alrededor de $\bar{y}$.
- Para ello fija la oferta de dinero así:

donde se supone que el banco central espera $\mathbb{E}\, z_t = 0$.

Una regla de política monetaria

- Suponga que el banco central desea estabilizar el producto alrededor de $\bar{y}$.
- Para ello fija la oferta de dinero así:

$$m_t^* = \underset{m_t}{\operatorname{argmin}}\, \mathbb{E}\,(y_t - \bar{y})^2$$

donde se supone que el banco central espera $\mathbb{E}\, z_t = 0$.

Una regla de política monetaria

- Suponga que el banco central desea estabilizar el producto alrededor de $\bar{y}$.
- Para ello fija la oferta de dinero así:

$$
\begin{aligned}
m_t^* &= \underset{m_t}{\operatorname{argmin}}\, \mathbb{E}\left(y_t - \bar{y}\right)^2 \\
&= \underset{m_t}{\operatorname{argmin}}\, \mathbb{E}\left(\alpha_0 m_t + \alpha_1 m_{t-1} + c_0 z_t + c_1 z_{t-1} + u_t\right)^2
\end{aligned}
$$

donde se supone que el banco central espera $\mathbb{E}\, z_t = 0$.

Una regla de política monetaria

- Suponga que el banco central desea estabilizar el producto alrededor de $\bar{y}$.
- Para ello fija la oferta de dinero así:

$$\begin{aligned}
m_t^* &= \underset{m_t}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E} \left(y_t - \bar{y}\right)^2 \\
&= \underset{m_t}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E} \left(\alpha_0 m_t + \alpha_1 m_{t-1} + c_0 z_t + c_1 z_{t-1} + u_t\right)^2 \\
&= -\frac{\alpha_1}{\alpha_0} m_{t-1} - \frac{c_1}{\alpha_0} z_{t-1}
\end{aligned}$$

donde se supone que el banco central espera $\mathbb{E}\, z_t = 0$.

Una regla de política monetaria

- Suponga que el banco central desea estabilizar el producto alrededor de $\bar{y}$.
- Para ello fija la oferta de dinero así:

$$\begin{aligned} m_t^* &= \operatorname*{argmin}_{m_t} \mathbb{E}\left(y_t - \bar{y}\right)^2 \\ &= \operatorname*{argmin}_{m_t} \mathbb{E}\left(\alpha_0 m_t + \alpha_1 m_{t-1} + c_0 z_t + c_1 z_{t-1} + u_t\right)^2 \\ &= -\frac{\alpha_1}{\alpha_0} m_{t-1} - \frac{c_1}{\alpha_0} z_{t-1} \end{aligned}$$

  donde se supone que el banco central espera $\mathbb{E}\, z_t = 0$.
- La regla de política sería

$$m_t^* = \pi_1 m_{t-1} + \pi_2 z_{t-1} + \nu_t$$

Otra versión de los hechos

Ahora suponga que el producto real depende solo de cambios sorpresivos en la oferta de dinero ν_t:

$$y_t = \bar{y} + d_0 v_t + d_1 z_t + d_2 z_{t-1} + u_t$$

Otra versión de los hechos

Ahora suponga que el producto real depende solo de cambios sorpresivos en la oferta de dinero ν_t:

$$y_t = \bar{y} + d_0 v_t + d_1 z_t + d_2 z_{t-1} + u_t$$

Pero la regla de política implica $v_t = m_t - \pi_1 m_{t-1} - \pi_2 z_{t-1}$.

Otra versión de los hechos

Ahora suponga que el producto real depende solo de cambios sorpresivos en la oferta de dinero ν_t:

$$y_t = \bar{y} + d_0 v_t + d_1 z_t + d_2 z_{t-1} + u_t$$

Pero la regla de política implica $v_t = m_t - \pi_1 m_{t-1} - \pi_2 z_{t-1}$.

Entonces:

$$y_t = \bar{y} + d_0[m_t - \pi_1 m_{t-1} - \pi_2 z_{t-1}] + d_1 z_t + d_2 z_{t-1} + u_t$$

Otra versión de los hechos

Ahora suponga que el producto real depende solo de cambios sorpresivos en la oferta de dinero ν_t:

$$y_t = \bar{y} + d_0 v_t + d_1 z_t + d_2 z_{t-1} + u_t$$

Pero la regla de política implica $v_t = m_t - \pi_1 m_{t-1} - \pi_2 z_{t-1}$.

Entonces:

$$\begin{aligned} y_t &= \bar{y} + d_0[m_t - \pi_1 m_{t-1} - \pi_2 z_{t-1}] + d_1 z_t + d_2 z_{t-1} + u_t \\ &= \bar{y} + d_0 m_t - d_0 \pi_1 m_{t-1} + d_1 z_t + (d_2 - d_0 \pi_2) z_{t-1} + u_t \end{aligned}$$

Otra versión de los hechos

Ahora suponga que el producto real depende solo de cambios sorpresivos en la oferta de dinero ν_t:

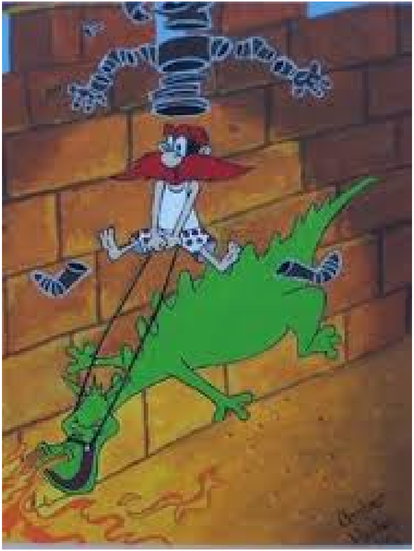
$$y_t = \bar{y} + d_0 v_t + d_1 z_t + d_2 z_{t-1} + u_t$$

Pero la regla de política implica $v_t = m_t - \pi_1 m_{t-1} - \pi_2 z_{t-1}$.

Entonces:

$$\begin{aligned} y_t &= \bar{y} + d_0[m_t - \pi_1 m_{t-1} - \pi_2 z_{t-1}] + d_1 z_t + d_2 z_{t-1} + u_t \\ &= \bar{y} + d_0 m_t - d_0\pi_1 m_{t-1} + d_1 z_t + (d_2 - d_0\pi_2) z_{t-1} + u_t \end{aligned}$$

Un econometrista en problemas



Un econometrista en problemas

El econometrista compara los dos modelos:

keynes $\quad y_t = \bar{y} + \alpha_0 m_t + \alpha_1 m_{t-1} + c_0 z_t + c_1 z_{t-1} + u_t$

clásico $\quad y_t = \bar{y} + d_0 m_t - d_0 \pi_1 m_{t-1} + d_1 z_t + (d_2 - d_0 \pi_2) z_{t-1} + u_t$

- La estimación de la regresión no puede distinguir entre las dos hipótesis propuestas: los modelos resultan en regresiones observacionalmente equivalentes.

Un econometrista en problemas

El econometrista compara los dos modelos:

keynes $\quad y_t = \bar{y} + \alpha_0 m_t + \alpha_1 m_{t-1} + c_0 z_t + c_1 z_{t-1} + u_t$

clásico $\quad y_t = \bar{y} + d_0 m_t - d_0 \pi_1 m_{t-1} + d_1 z_t + (d_2 - d_0 \pi_2) z_{t-1} + u_t$

- La estimación de la regresión no puede distinguir entre las dos hipótesis propuestas: los modelos resultan en regresiones observacionalmente equivalentes.
- Los parámetros estimados pueden depender de la regla de política.

Un econometrista en problemas

El econometrista compara los dos modelos:

keynes $\quad y_t = \bar{y} + \alpha_0 m_t + \alpha_1 m_{t-1} + c_0 z_t + c_1 z_{t-1} + u_t$

clásico $\quad y_t = \bar{y} + d_0 m_t - d_0 \pi_1 m_{t-1} + d_1 z_t + (d_2 - d_0 \pi_2) z_{t-1} + u_t$

- La estimación de la regresión no puede distinguir entre las dos hipótesis propuestas: los modelos resultan en regresiones observacionalmente equivalentes.
- Los parámetros estimados pueden depender de la regla de política.
- Así, el ejercicio estaría sujeto a la crítica de Lucas (1976): no podemos predecir qué pasaría si cambia la política, porque el modelo podría no ser invariante a la política misma.

Un econometrista con más problemas

- Suponga que el econometrista se conforma con estimar el modelo

$$y_t = \bar{y} + \alpha_0 m_t + \alpha_1 m_{t-1} + c_0 z_t + c_1 z_{t-1} + u_t$$

y que z_t es el déficit fiscal.

Un econometrista con más problemas

- Suponga que el econometrista se conforma con estimar el modelo

$$y_t = \bar{y} + \alpha_0 m_t + \alpha_1 m_{t-1} + c_0 z_t + c_1 z_{t-1} + u_t$$

  y que z_t es el déficit fiscal.

- Si τ es la tasa impositiva media y el gasto público $\bar{g}$ es constante, entonces:

$$z_t = \bar{g} - \tau y_t$$

Un econometrista con más problemas

- Suponga que el econometrista se conforma con estimar el modelo

$$y_t = \bar{y} + \alpha_0 m_t + \alpha_1 m_{t-1} + c_0 z_t + c_1 z_{t-1} + u_t$$

  y que z_t es el déficit fiscal.
- Si τ es la tasa impositiva media y el gasto público $\bar{g}$ es constante, entonces:

$$z_t = \bar{g} - \tau y_t$$

- En este caso, estimar el modelo por OLS resulta en estimadores sesgados e inconsistentes!

Nota:

Sesgo de simultaneidad

- Considere el modelo

$$
\begin{aligned}
C_t &= \alpha + \beta Y_t + \epsilon \\
Y_t &= C_t + I_t
\end{aligned}
$$

- Considere el modelo

$$C_t = \alpha + \beta Y_t + \epsilon$$
$$Y_t = C_t + I_t$$

- Esto implica que $Y_t = \frac{\alpha + I_t}{1-\beta} + \frac{\epsilon_t}{1-\beta}$.

- Considere el modelo

$$C_t = \alpha + \beta Y_t + \epsilon$$
$$Y_t = C_t + I_t$$

- Esto implica que $Y_t = \frac{\alpha + I_t}{1-\beta} + \frac{\epsilon_t}{1-\beta}$.
- Si se estima la primera ecuación por OLS, la estimación será inconsistente porque

$$\mathrm{Cov}\left(Y_t, \epsilon_t\right) = \mathrm{Cov}\left(\frac{\epsilon_t}{1-\beta}, \epsilon_t\right) = \frac{1}{1-\beta}\,\mathrm{Var}\left(\epsilon_t\right) \neq 0$$

Un modelo de ecuaciones simultáneas (VAR estructural)

- Dado que en modelos macro las variables son endógenas, es necesario considerar un sistema de ecuaciones.

$$\begin{bmatrix} 1 & -\alpha_0 & -c_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \tau & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t \\ m_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y} \\ 0 \\ \bar{g} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 & c_1 \\ 0 & \pi_1 & \pi_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ m_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_t \\ \nu_t \\ 0 \end{bmatrix}$$

Un modelo de ecuaciones simultáneas (VAR estructural)

- Dado que en modelos macro las variables son endógenas, es necesario considerar un sistema de ecuaciones.

$$\begin{bmatrix} 1 & -\alpha_0 & -c_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \tau & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t \\ m_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y} \\ 0 \\ \bar{g} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 & c_1 \\ 0 & \pi_1 & \pi_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ m_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_t \\ \nu_t \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Su estimación exige imponer (muchas) restricciones. Por ejemplo, acá imponemos la restricción de que z_t no afecta a m_t en el mismo período.

Resolviendo el sesgo de simulateidad

Según Sims (1980, pp.14-15)

> *Debido a que los grandes modelos existentes contienen demasiadas restricciones increíbles, la investigación empírica dedicada a probar teorías macroeconómicas alternativas con demasiada frecuencia procede en un marco de una o pocas ecuaciones.*

Resolviendo el sesgo de simulateidad

Según Sims (1980, pp.14-15)

> *Debido a que los grandes modelos existentes contienen demasiadas restricciones increíbles, la investigación empírica dedicada a probar teorías macroeconómicas alternativas con demasiada frecuencia procede en un marco de una o pocas ecuaciones. Esta razón es suficiente para que valga la pena investigar la posibilidad de crear grandes modelos en un estilo que no tienda a acumular restricciones tan caprichosamente...*

Resolviendo el sesgo de simulateidad

Según Sims (1980, pp.14-15)

> *Debido a que los grandes modelos existentes contienen demasiadas restricciones increíbles, la investigación empírica dedicada a probar teorías macroeconómicas alternativas con demasiada frecuencia procede en un marco de una o pocas ecuaciones. Esta razón es suficiente para que valga la pena investigar la posibilidad de crear grandes modelos en un estilo que no tienda a acumular restricciones tan caprichosamente... Debe ser factible estimar modelos macro de gran escala como formas reducidas sin restricciones, tratando todas las variable como endógenas.*

Un vector autor-regresivo (VAR)

Así, lo que Sims (1980) propone[†] es estimar

$$
\begin{aligned}
y_t &= \bar{y} + \alpha_{11} y_{t-1} + \alpha_{12} m_{t-1} + \alpha_{13} z_{t-1} + u_t^y \\
m_t &= \bar{m} + \alpha_{21} y_{t-1} + \alpha_{22} m_{t-1} + \alpha_{23} z_{t-1} + u_t^m \\
z_t &= \bar{z} + \alpha_{31} y_{t-1} + \alpha_{32} m_{t-1} + \alpha_{33} z_{t-1} + u_t^z
\end{aligned}
$$

- Este es un modelo reducido: Las variables y_t, m_t, z_t no interactuan contemporáneamente.

[†] El modelo original de Sims es de 6 ecuaciones; acá solo ilustramos la propuesta.

Un vector autor-regresivo (VAR)

Así, lo que Sims (1980) propone[†] es estimar

$$
\begin{aligned}
y_t &= \bar{y} + \alpha_{11} y_{t-1} + \alpha_{12} m_{t-1} + \alpha_{13} z_{t-1} + u_t^y \\
m_t &= \bar{m} + \alpha_{21} y_{t-1} + \alpha_{22} m_{t-1} + \alpha_{23} z_{t-1} + u_t^m \\
z_t &= \bar{z} + \alpha_{31} y_{t-1} + \alpha_{32} m_{t-1} + \alpha_{33} z_{t-1} + u_t^z
\end{aligned}
$$

- Este es un modelo reducido: Las variables y_t, m_t, z_t no interactuan contemporáneamente.
- También es un modelo SUR: todas las ecuaciones tienen los mismos regresores; los errores están correlacionados.

[†] El modelo original de Sims es de 6 ecuaciones; acá solo ilustramos la propuesta.

Un vector autor-regresivo (VAR)

Así, lo que Sims (1980) propone[†] es estimar

$$y_t = \bar{y} + \alpha_{11} y_{t-1} + \alpha_{12} m_{t-1} + \alpha_{13} z_{t-1} + u_t^y$$
$$m_t = \bar{m} + \alpha_{21} y_{t-1} + \alpha_{22} m_{t-1} + \alpha_{23} z_{t-1} + u_t^m$$
$$z_t = \bar{z} + \alpha_{31} y_{t-1} + \alpha_{32} m_{t-1} + \alpha_{33} z_{t-1} + u_t^z$$

- Este es un modelo reducido: Las variables y_t, m_t, z_t no interactuan contemporáneamente.
- También es un modelo SUR: todas las ecuaciones tienen los mismos regresores; los errores están correlacionados.
- Al ser un modelo SUR con regresores idénticos, puede estimarse con OLS ecuación por ecuación.

[†] El modelo original de Sims es de 6 ecuaciones; acá solo ilustramos la propuesta.

El curso

En la segunda parte de este curso aprenderemos:

- la teoría básica de estimación de sistemas de ecuaciones.

El curso

En la segunda parte de este curso aprenderemos:

- la teoría básica de estimación de sistemas de ecuaciones.
- la distinción entre modelos estructural, recursivo, y reducido.

El curso

En la segunda parte de este curso aprenderemos:

- la teoría básica de estimación de sistemas de ecuaciones.
- la distinción entre modelos estructural, recursivo, y reducido.
- la estimación y uso de los modelos VAR y VECM.

El curso

En la segunda parte de este curso aprenderemos:

- la teoría básica de estimación de sistemas de ecuaciones.
- la distinción entre modelos estructural, recursivo, y reducido.
- la estimación y uso de los modelos VAR y VECM.
- el concepto de integración.

El curso

En la segunda parte de este curso aprenderemos:

- la teoría básica de estimación de sistemas de ecuaciones.
- la distinción entre modelos estructural, recursivo, y reducido.
- la estimación y uso de los modelos VAR y VECM.
- el concepto de integración.
- el uso de herramientas analíticas:

El curso

En la segunda parte de este curso aprenderemos:

- la teoría básica de estimación de sistemas de ecuaciones.
- la distinción entre modelos estructural, recursivo, y reducido.
- la estimación y uso de los modelos VAR y VECM.
- el concepto de integración.
- el uso de herramientas analíticas:
    - la causalidad de Granger,

El curso

En la segunda parte de este curso aprenderemos:

- la teoría básica de estimación de sistemas de ecuaciones.
- la distinción entre modelos estructural, recursivo, y reducido.
- la estimación y uso de los modelos VAR y VECM.
- el concepto de integración.
- el uso de herramientas analíticas:
    - la causalidad de Granger,
    - las funciones de impulso respuesta,

El curso

En la segunda parte de este curso aprenderemos:

- la teoría básica de estimación de sistemas de ecuaciones.
- la distinción entre modelos estructural, recursivo, y reducido.
- la estimación y uso de los modelos VAR y VECM.
- el concepto de integración.
- el uso de herramientas analíticas:
  - la causalidad de Granger,
  - las funciones de impulso respuesta,
  - la descomposición de varianza,

El curso

En la segunda parte de este curso aprenderemos:

- la teoría básica de estimación de sistemas de ecuaciones.
- la distinción entre modelos estructural, recursivo, y reducido.
- la estimación y uso de los modelos VAR y VECM.
- el concepto de integración.
- el uso de herramientas analíticas:
  - la causalidad de Granger,
  - las funciones de impulso respuesta,
  - la descomposición de varianza,
  - los pronósticos.

2. El modelo SUR

Introducción

- Hay modelos uniecuacionales que aplican a un grupo de variables relacionadas.

Introducción

- Hay modelos uniecuacionales que aplican a un grupo de variables relacionadas.
- Ejemplos:

Introducción

- Hay modelos uniecuacionales que aplican a un grupo de variables relacionadas.
- Ejemplos:
  - Modelo CAPM

$$r_{it} - r_{ft} = \alpha_i + \beta_i \left(r_{Mt} - r_{ft}\right) + \epsilon_{it}$$

Introducción

- Hay modelos uniecuacionales que aplican a un grupo de variables relacionadas.
- Ejemplos:
  - Modelo CAPM

$$r_{it} - r_{ft} = \alpha_i + \beta_i \left(r_{Mt} - r_{ft} \right) + \epsilon_{it}$$

  - Modelos de inversión

$$I_{it} = \beta_{1i} + \beta_{2i} F_{it} + \beta_{3i} C_{it} + \epsilon_{it}$$

Introducción

- Hay modelos uniecuacionales que aplican a un grupo de variables relacionadas.
- Ejemplos:
  - Modelo CAPM

$$r_{it} - r_{ft} = \alpha_i + \beta_i \left(r_{Mt} - r_{ft} \right) + \epsilon_{it}$$

  - Modelos de inversión

$$I_{it} = \beta_{1i} + \beta_{2i} F_{it} + \beta_{3i} C_{it} + \epsilon_{it}$$

- Como los errores ϵ_{it} de las distintas ecuaciones pueden estar correlacionados, es preferible considerar los modelos de manera conjunta.

Modelo de regresiones aparentemente no relacionadas (SUR)

- En este modelo se presentan un grupo de variables dependientes, pero NO simultáneas.

Modelo de regresiones aparentemente no relacionadas (SUR)

- En este modelo se presentan un grupo de variables dependientes, pero NO simultáneas.
- Cada ecuación puede tener sus propias variables explicativas o éstas pueden ser las mismas para todas las ecuaciones.

El modelo SUR: ecuaciones no simultáneas

Las ecuaciones del sistema son

$$\begin{cases} \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1 \, \beta_1 + \epsilon_1 \\ \mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 \, \beta_2 + \epsilon_2 \\ \qquad \vdots \\ \mathbf{y}_M = \mathbf{x}_M \, \beta_M + \epsilon_M \end{cases}$$

El modelo SUR: ecuaciones no simultáneas

Las ecuaciones del sistema son

$$\begin{cases} \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1 \, \beta_1 + \epsilon_1 \\ \mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 \, \beta_2 + \epsilon_2 \\ \qquad \vdots \\ \mathbf{y}_M = \mathbf{x}_M \, \beta_M + \epsilon_M \end{cases}$$

que se pueden expresar como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_M \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{x}_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{x}_M \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_M \end{bmatrix}}_{\beta} + \underbrace{\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_M \end{bmatrix}}_{\epsilon}$$

El modelo SUR: errores correlacionados

Se asume que perturbaciones de distintas observaciones no están correlacionadas, aunque las perturbaciones de distintas ecuaciones sí pueden estar correlacionados:

$$\mathbb{E}\left[\epsilon_i \epsilon_j' \middle| \mathbf{x}\right] = \sigma_{ij} I$$

El modelo SUR: errores correlacionados

Se asume que perturbaciones de distintas observaciones no están correlacionadas, aunque las perturbaciones de distintas ecuaciones sí pueden estar correlacionados:

$$\mathbb{E}\left[\epsilon_i \epsilon_j' \middle| \mathbf{x}\right] = \sigma_{ij} I$$

o bien

$$\underbrace{\mathbb{E}\left[\epsilon \epsilon' \middle| \mathbf{x}\right]}_{\Omega} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{11} I & \sigma_{12} I & \dots & \sigma_{1M} I \\ \sigma_{21} I & \sigma_{22} I & \dots & \sigma_{2M} I \\ & & \ddots & \\ \sigma_{M1} I & \sigma_{M2} I & \dots & \sigma_{MM} I \end{bmatrix}}_{\Sigma \otimes I}$$

Nota:

El producto Kronecker

- Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y B son matrices, el producto Kronecker se define por

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} aB & bB \\ cB & dB \end{bmatrix}$$

- Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y B son matrices, el producto Kronecker se define por
$$A \otimes B = \begin{bmatrix} aB & bB \\ cB & dB \end{bmatrix}$$
- Algunas propiedades importantes:

- Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y B son matrices, el producto Kronecker se define por

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} aB & bB \\ cB & dB \end{bmatrix}$$

- Algunas propiedades importantes:

$$(A \otimes B)' = A' \otimes B'$$

- Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y B son matrices, el producto Kronecker se define por

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} aB & bB \\ cB & dB \end{bmatrix}$$

- Algunas propiedades importantes:

$$(A \otimes B)' = A' \otimes B'$$
$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$$

- Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y B son matrices, el producto Kronecker se define por

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} aB & bB \\ cB & dB \end{bmatrix}$$

- Algunas propiedades importantes:

$$(A \otimes B)' = A' \otimes B'$$
$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$$
$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$$

Estimación de un modelo SUR

El modelo SUR

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \mathbf{x}\,\beta + \epsilon \\ \mathbb{E}\left[\epsilon \mid \mathbf{x}\right] &= 0 \\ \mathrm{Var}\left[\epsilon \mid \mathbf{x}\right] &= \Omega = \Sigma \otimes I \end{aligned}\right\}$$

supuestos del modelo generalizado de regresión lineal!

puede ser estimado por FGLS:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}^{\mathsf{GLS}} &= \left[\mathbf{x}'\,\Omega^{-1}\,\mathbf{x}\right]^{-1}\mathbf{x}'\,\Omega^{-1}\mathbf{Y} \\ &= \left[\mathbf{x}'(\Sigma \otimes I)^{-1}\,\mathbf{x}\right]^{-1}\mathbf{x}'(\Sigma \otimes I)^{-1}\mathbf{Y} \end{aligned}$$

Caso especial del modelo SUR

- Si todas las regresiones tienen los mismos regresores, estimar el sistema SUR por GLS es equivalente a estimar ecuación por ecuación con OLS.

Caso especial del modelo SUR

- Si todas las regresiones tienen los mismos regresores, estimar el sistema SUR por GLS es equivalente a estimar ecuación por ecuación con OLS.
- Este resultado justifica que un VAR sin restricciones se estima ecuación por ecuación con OLS.

SUR: las regresiones tienen los mismos regresores

En el caso especial $\mathbf{x}_1 = \cdots = \mathbf{x}_M = \mathbb{X}$ tenemos

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{x}_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{x}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{X} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbb{X} & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \mathbb{X} \end{bmatrix} = I \otimes \mathbb{X}$$

y el estimador GLS es

$$\hat{\beta}^{\mathsf{GLS}} = \left[\mathbf{x}'(\Sigma \otimes I)^{-1}\,\mathbf{x}\right]^{-1}\mathbf{x}'(\Sigma \otimes I)^{-1}\mathbf{Y}$$

SUR: las regresiones tienen los mismos regresores

En el caso especial $\mathbf{x}_1 = \cdots = \mathbf{x}_M = \mathbb{X}$ tenemos

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{x}_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{x}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{X} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbb{X} & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \mathbb{X} \end{bmatrix} = I \otimes \mathbb{X}$$

y el estimador GLS es

$$\begin{aligned} \hat{\beta}^{\mathsf{GLS}} &= \left[\mathbf{x}'(\Sigma \otimes I)^{-1}\mathbf{x}\right]^{-1}\mathbf{x}'(\Sigma \otimes I)^{-1}\mathbf{Y} \\ &= \left[(I \otimes \mathbb{X})'(\Sigma \otimes I)^{-1}(I \otimes \mathbb{X})\right]^{-1}(I \otimes \mathbb{X})'(\Sigma \otimes I)^{-1}\mathbf{Y} \end{aligned}$$

SUR: las regresiones tienen los mismos regresores

En el caso especial $\mathbf{x}_1 = \cdots = \mathbf{x}_M = \mathbb{X}$ tenemos

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{x}_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{x}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{X} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbb{X} & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \mathbb{X} \end{bmatrix} = I \otimes \mathbb{X}$$

y el estimador GLS es

$$\begin{aligned} \hat{\beta}^{\text{GLS}} &= \left[\mathbf{x}'(\Sigma \otimes I)^{-1}\mathbf{x}\right]^{-1}\mathbf{x}'(\Sigma \otimes I)^{-1}\mathbf{Y} \\ &= \left[(I \otimes \mathbb{X})'(\Sigma \otimes I)^{-1}(I \otimes \mathbb{X})\right]^{-1}(I \otimes \mathbb{X})'(\Sigma \otimes I)^{-1}\mathbf{Y} \\ &= \left[(I \otimes \mathbb{X}')(\Sigma^{-1} \otimes I)(I \otimes \mathbb{X})\right]^{-1}(I \otimes \mathbb{X}')(\Sigma^{-1} \otimes I)\mathbf{Y} \end{aligned}$$

SUR: las regresiones tienen los mismos regresores

En el caso especial $\mathbf{x}_1 = \cdots = \mathbf{x}_M = \mathbb{X}$ tenemos

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{x}_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{x}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{X} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbb{X} & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \mathbb{X} \end{bmatrix} = I \otimes \mathbb{X}$$

y el estimador GLS es

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}^{\mathsf{GLS}} &= \left[\mathbf{x}'(\Sigma \otimes I)^{-1}\mathbf{x}\right]^{-1} \mathbf{x}'(\Sigma \otimes I)^{-1}\mathbf{Y} \\
&= \left[(I \otimes \mathbb{X})'(\Sigma \otimes I)^{-1}(I \otimes \mathbb{X})\right]^{-1} (I \otimes \mathbb{X})'(\Sigma \otimes I)^{-1}\mathbf{Y} \\
&= \left[(I \otimes \mathbb{X}')(\Sigma^{-1} \otimes I)(I \otimes \mathbb{X})\right]^{-1} (I \otimes \mathbb{X}')(\Sigma^{-1} \otimes I)\mathbf{Y} \\
&= \left[\Sigma^{-1} \otimes (\mathbb{X}'\mathbb{X})\right]^{-1} \left[\Sigma^{-1} \otimes \mathbb{X}'\right] \mathbf{Y}
\end{aligned}$$

SUR: las regresiones tienen los mismos regresores

En el caso especial $\mathbf{x}_1 = \cdots = \mathbf{x}_M = \mathbb{X}$ tenemos

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{x}_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{x}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{X} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbb{X} & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \mathbb{X} \end{bmatrix} = I \otimes \mathbb{X}$$

y el estimador GLS es

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}^{\mathsf{GLS}} &= \left[\mathbf{x}'(\Sigma \otimes I)^{-1}\mathbf{x}\right]^{-1} \mathbf{x}'(\Sigma \otimes I)^{-1}\mathbf{Y} \\
&= \left[(I \otimes \mathbb{X})'(\Sigma \otimes I)^{-1}(I \otimes \mathbb{X})\right]^{-1} (I \otimes \mathbb{X})'(\Sigma \otimes I)^{-1}\mathbf{Y} \\
&= \left[(I \otimes \mathbb{X}')(\Sigma^{-1} \otimes I)(I \otimes \mathbb{X})\right]^{-1} (I \otimes \mathbb{X}')(\Sigma^{-1} \otimes I)\mathbf{Y} \\
&= \left[\Sigma^{-1} \otimes (\mathbb{X}'\mathbb{X})\right]^{-1} \left[\Sigma^{-1} \otimes \mathbb{X}'\right] \mathbf{Y} \\
&= \left[\Sigma \otimes (\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}\right] \left[\Sigma^{-1} \otimes \mathbb{X}'\right] \mathbf{Y}
\end{aligned}$$

SUR: las regresiones tienen los mismos regresores

En el caso especial $\mathbf{x}_1 = \cdots = \mathbf{x}_M = \mathbb{X}$ tenemos

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{x}_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{x}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{X} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbb{X} & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \mathbb{X} \end{bmatrix} = I \otimes \mathbb{X}$$

y el estimador GLS es

$$\begin{aligned} \hat{\beta}^{\mathsf{GLS}} &= \left[\mathbf{x}'(\Sigma \otimes I)^{-1}\,\mathbf{x}\right]^{-1} \mathbf{x}'(\Sigma \otimes I)^{-1}\mathbf{Y} \\ &= \left[(I \otimes \mathbb{X})'(\Sigma \otimes I)^{-1}(I \otimes \mathbb{X})\right]^{-1} (I \otimes \mathbb{X})'(\Sigma \otimes I)^{-1}\mathbf{Y} \\ &= \left[(I \otimes \mathbb{X}')(\Sigma^{-1} \otimes I)(I \otimes \mathbb{X})\right]^{-1} (I \otimes \mathbb{X}')(\Sigma^{-1} \otimes I)\mathbf{Y} \\ &= \left[\Sigma^{-1} \otimes (\mathbb{X}'\mathbb{X})\right]^{-1} \left[\Sigma^{-1} \otimes \mathbb{X}'\right] \mathbf{Y} \\ &= \left[\Sigma \otimes (\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}\right] \left[\Sigma^{-1} \otimes \mathbb{X}'\right] \mathbf{Y} \\ &= \left[I \otimes (\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}'\right] \mathbf{Y} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\hat{\beta}^{\mathsf{GLS}} &= \left[I \otimes (\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}'\right] \mathbf{Y} \\
&= \begin{bmatrix} (\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}' & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}' & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & (\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_M \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}'\,\mathbf{y}_1 \\ (\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}'\,\mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ (\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}'\,\mathbf{y}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1^{\mathsf{OLS}} \\ \hat{\beta}_2^{\mathsf{OLS}} \\ \vdots \\ \hat{\beta}_M^{\mathsf{OLS}} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Si todas las regresiones tienen los mismos regresores, el sistema SUR puede estimarse con OLS ecuación por ecuación.

Referencias I

- Greene, William H. (2012). *Econometric Analysis*. 7ª ed. Prentice Hall. ISBN: 978-0-13-139538-1.
- Lucas, Robert E. (1996). "Nobel Lecture: Monetary Neutrality". En: *Journal of Political Economy* 104.4, págs. 661-682.
- Lucas, Robert Jr (ene. de 1976). "Econometric policy evaluation: A critique". En: *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy* 1.1, págs. 19-46.
- Sims, Christopher A. (ene. de 1980). "Macroeconomics and Reality". En: *Econometrica* 48.1.
- Walsh, Carl E. (2010). *Monetary Theory and Policy*. 3ª ed. MIT Press. ISBN: 978-0262-013772.