

Modellbildung
Beispielsammlung

4.Semester ET-Studium

Oktober 2019

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Prüfungen	3
2.1	26.06.2015	3
2.2	19.03.2019	6
2.3	17.05.2019	9
2.4	12.07.2019	13

1 Einleitung

In dieser Ausarbeitung befinden sich sämtliche Rechenwege der Modellbildungsprüfung beginnend ab dem Jahr 2015. Die Angaben zu den hier ausgearbeiteten Prüfungen befinden sich auf der Homepage des ACIN. Sämtlichen verwendeten Formeln befinden sich in der Formelsammlung, welche ebenfalls auf der Homepage des ACIN zu finden ist. Ich hoffe dieses Dokument hilft euch weiter.

2 Prüfungen

2.1 26.06.2015

Beispiel 1

a)

Die generalisierten Koordinaten lauten

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix}$$

Die beiden Ortsvektoren \mathbf{r}_2 und \mathbf{r}_K werden direkt aus Angabe abgelesen.

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}L_2 + L_1 \sin \varphi \\ -L_1 \cos \varphi \end{bmatrix}, \mathbf{r}_K = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}L_2 + L_1 \sin \varphi + l \sin \psi \\ -L_1 \cos \varphi - l \cos \psi \end{bmatrix}$$

b)

Den translatorische Geschwindigkeitsvektor erhält man durch die zeitliche Ableitung des entsprechenden Ortsvektors.

$$\dot{\mathbf{r}}_K = \underbrace{L_1 \dot{\varphi} \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}_2} + l \dot{\psi} \begin{bmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{bmatrix}$$

c)

Zwischenrechnungen für die Ermittlung der kinetischen Energie:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_2^T \mathbf{r}_2 &= L_1^2 \dot{\varphi}^2 \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \\ &= L_1^2 \dot{\varphi}^2 \underbrace{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}_{=1} \\ &= L_1^2 \dot{\varphi}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_K^T \mathbf{r}_K &= \left(L_1 \dot{\varphi} \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \end{bmatrix} + l \dot{\psi} \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \end{bmatrix} \right) \left(L_1 \dot{\varphi} \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} + l \dot{\psi} \begin{bmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{bmatrix} \right) \\ &= L_1^2 \dot{\varphi}^2 \underbrace{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}_{=1} + l^2 \dot{\psi}^2 \underbrace{(\cos^2 \psi + \sin^2 \psi)}_{=1} + 2L_1 l (\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi) \\ &= L_1^2 \dot{\varphi}^2 + l^2 \dot{\psi}^2 + 2L_1 l \dot{\varphi} \dot{\psi} (\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi) \end{aligned}$$

Nun können die kinetischen Energien des Systems bestimmt werden. Diese lauten hier

$$\begin{aligned}
T_{tr} &= \frac{1}{2} (m_2 + m_M) L_1^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_K \left[L_1^2 \dot{\varphi}^2 + l^2 \dot{\psi}^2 + 2L_1 l \dot{\varphi} \dot{\psi} (\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi) \right] \\
T_{rot} &= 2 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} m_1 L_1^2 + m_1 \left(\frac{L_1}{2} \right)^2 \right) \dot{\varphi}^2 \\
T &= T_{tr} + T_{rot} \\
&= \frac{1}{2} (m_2 + m_M) L_1^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_K \left[L_1^2 \dot{\varphi}^2 + l^2 \dot{\psi}^2 + 2L_1 l \dot{\varphi} \dot{\psi} (\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi) \right] \\
&\quad + 2 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} m_1 L_1^2 + m_1 \left(\frac{L_1}{2} \right)^2 \right) \dot{\varphi}^2
\end{aligned}$$

d)

Nun kann wie folgt die potentielle Energie bestimmt werden. Die potentielle Energie der Ruhelage lautet

$$\begin{aligned}
V &= 2m_1 g \frac{L_1}{2} (1 - \cos \varphi) + (m_2 + m_M) g L_1 (1 - \cos \varphi) \\
&\quad + m_K g [L_1 (1 - \cos \varphi) + l (1 - \cos \psi)] + 2 \frac{1}{2} c_1 \varphi^2
\end{aligned}$$

Hinweis:

Die Ruhelage befindet sich bei $\varphi = 0$, d.h. das Maximum der potentiellen Energie tritt bei $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ und deswegen wird $\cos \varphi$ durch $(1 - \cos \varphi)$ ersetzt.

e)

Um die Bewegungsgleichungen zu bestimmen, benötigt man als erstes aller erstes die Langrange-Funktion die wie folgt lautet

$$\begin{aligned}
L &= T - V \\
&= \frac{1}{2} (m_2 + m_M) L_1^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_K \left[L_1^2 \dot{\varphi}^2 + l^2 \dot{\psi}^2 + 2L_1 l \dot{\varphi} \dot{\psi} (\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi) \right] + 2 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} m_1 L_1^2 + m_1 \left(\frac{L_1}{2} \right)^2 \right) \dot{\varphi}^2 \\
&\quad - 2m_1 g \frac{L_1}{2} (1 - \cos \varphi) - (m_2 + m_M) g L_1 (1 - \cos \varphi) - m_K g [L_1 (1 - \cos \varphi) + l (1 - \cos \psi)] - 2 \frac{1}{2} c_1 \varphi^2
\end{aligned}$$

Als nächstes benötigt man die generalisierten Kräfte die hier wie folgt lauten

$$\mathbf{f}_q = \begin{bmatrix} -2d_1 \varphi \\ \tau \end{bmatrix}$$

Nun wertet man den Euler-Lagrange-Formalismus aus, der hier folgendermaßen aussieht

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi} \right) &= -2d_1 \dot{\varphi} \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \psi} \right) &= \tau
\end{aligned}$$

partiellen Ableitungen

1. generalisierte Koordinate:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= (m_2 + m_M) L_1^2 \dot{\varphi} + m_K \left(L_1^2 \dot{\varphi} + L_1 l \dot{\psi} (\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi) \right) + 2 \left(\frac{1}{12} m_1 L_1^2 + m_1 \left(\frac{L_1}{2} \right)^2 \right) \dot{\varphi} \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= (m_2 + m_M) L_1^2 \ddot{\varphi} + m_K \left(L_1^2 \ddot{\varphi} + L_1 l \frac{d}{dt} \left(\dot{\psi} (\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi) \right) \right) + 2 \left(\frac{1}{12} m_1 L_1^2 + m_1 \left(\frac{L_1}{2} \right)^2 \right) \ddot{\varphi} \\
&= \left(2 \left(\frac{1}{12} m_1 L_1^2 + m_1 \left(\frac{L_1}{2} \right)^2 \right) + (m_2 + m_M + m_K) \right) \ddot{\varphi} + m_K L_1 \frac{d}{dt} (\psi (\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi)) \\
\frac{\partial L}{\partial \varphi} &= m_K L_1 l \dot{\varphi} \dot{\psi} (\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi) - m_1 g L_1 \sin \varphi - (m_2 + m_M) L_1 g - m_K g L_1 \sin \varphi - 2c_1 \varphi \\
&= m_K L_1 l \dot{\varphi} \dot{\psi} (\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi) - (m_1 + m_M + m_2 + m_K) g L_1 - 2c_1 \varphi
\end{aligned}$$

2. generalisierte Koordinate:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} &= m_K l^2 \dot{\psi} + m_K L_1 \dot{\varphi} (\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi) \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) &= m_K l^2 \ddot{\psi} + m_K L_1 \frac{d}{dt} (\dot{\varphi} (\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi)) \\
\frac{\partial L}{\partial \psi} &= m_K L_1 l \dot{\varphi} \dot{\psi} (\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi) - m_K g l \sin \psi
\end{aligned}$$

Somit lauten die Bewegungsgleichungen

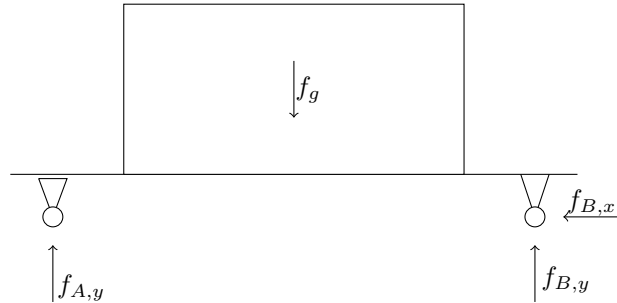
$$\begin{aligned}
&\left(2 \left(\frac{1}{12} m_1 L_1^2 + m_1 \left(\frac{L_1}{2} \right)^2 \right) + (m_2 + m_M + m_K) \right) \ddot{\varphi} + m_K L_1 \frac{d}{dt} (\psi (\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi)) \\
&\quad - m_K L_1 l \dot{\varphi} \dot{\psi} (\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi) + (m_1 + m_M + m_2 + m_K) g L_1 + 2c_1 \varphi = -2d_1 \dot{\varphi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&m_K l^2 \ddot{\psi} + m_K L_1 \frac{d}{dt} (\dot{\varphi} (\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi)) \\
&\quad - m_K L_1 l \dot{\varphi} \dot{\psi} (\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi) + m_K g l \sin \psi = \tau
\end{aligned}$$

2.2 19.03.2019

Beispiel 1

a)



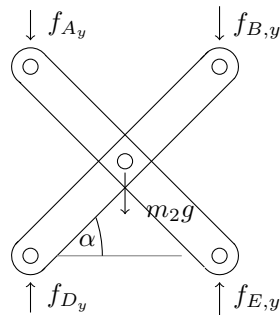
Um die Kräfte in den Lagern zu bestimmen, stellen wir zuerst das Kräftegleichgewicht und die Momenten Gleichung im Punkt B auf.

$$\begin{aligned} x : 0 &= f_{B,x} \\ y : 0 &= f_A + f_{B,y} - f_g \\ M_B : 0 &= b f_g - 2L \cos(\alpha) \end{aligned}$$

Formt man nun die Momenten Gleichung nach f_A um folgt:

$$f_A = \frac{b f_g}{2L \cos(\alpha)} \quad f_{B,x} = 0 \quad f_{B,y} = \left(1 - \frac{b}{2L \cos(\alpha)}\right) f_g$$

b)

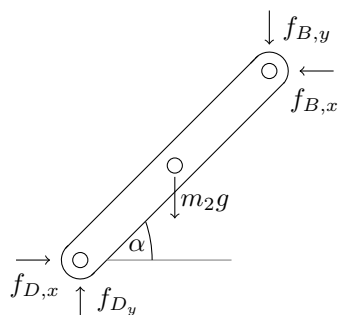


Um die Kräfte in den Punkten D und E zu bestimmen, stellen wir das Kräftegleichgewicht in den Trägern auf, daraus folgt:

$$f_{D,y} = m_2 g + f_{B,y} \quad f_{E,y} = m_2 g + f_A$$

c)

Um die Kräfte in den Lagern D und E in horizontaler (x-Richtung) zu bestimmen schneiden wir die Hubstangen getrennt voneinander frei und stellen die Kraftgleichungen und die Momenten Gleichung auf.



$$x : 0 = f_{E,x} - f_{D,x}$$

y : wurde bereits bestimmt

$$M_D : 0 = m_2 g \cos(\alpha) + f_{B,x} \sin(\alpha) + f_{B,y} \cos(\alpha)$$

Aus der Momenten Gleichung folgt:

$$f_{B,x} = \frac{m_2 g - f_{B,y}}{\tan \alpha} = f_{E,x} \quad F(\alpha) = f_{D,x} = -f_{E,x}$$

d)

Um die Haftbedingung zu berechnen formt man $F(\alpha) = \mu_H f_{D,y}$ um und setzt für $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ein:

$$\mu_H \geq \frac{F(\alpha)}{f_{D,y}} = \frac{m_1 + m_2}{m_2 + \frac{m_1 b}{\sqrt{2}L}}$$

Beispiel 2

a)

Die Oberfläche des Öl's strahlt nicht auf sich selbst, deshalb lautet der Sichtfaktor Matrixeintrag $F_{OO} = 0$, aus der Summationsregel folgt $F_{OH} = 1 - F_{OO} = 1$. Aus dem Reziprozitätsgesetz folgt $F_{HO} = \frac{A_O}{A_H} F_{OH}$. Der Letzte Eintrag lautet wegen der Summationsregel $F_{HH} = 1 - \frac{A_O}{A_H}$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{A_O}{A_H} & 1 - \frac{A_O}{A_H} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \sigma \left(\left(\frac{\varepsilon_H A_H - \varepsilon_H A_O + A_O}{-A_O \varepsilon_H \varepsilon_O + \varepsilon_H A_H + A_O \varepsilon_O} + \frac{(-1 + \varepsilon_H) A_O}{-A_O \varepsilon_H \varepsilon_O + \varepsilon_H A_H + A_O \varepsilon_O} \right) \varepsilon_O T_O^4 + \left(-\frac{(-1 + \varepsilon_O) A_H}{-A_O \varepsilon_H \varepsilon_O + \varepsilon_H A_H + A_O \varepsilon_O} - \frac{A_H}{-A_O \varepsilon_H \varepsilon_O + \varepsilon_H A_H + A_O \varepsilon_O} \right) \varepsilon_H T_H^4 \right) \\ \sigma \left(\left(-\frac{A_O (\varepsilon_H A_H - \varepsilon_H A_O + A_O)}{A_H (-A_O \varepsilon_H \varepsilon_O + \varepsilon_H A_H + A_O \varepsilon_O)} - \frac{A_O^2 (-1 + \varepsilon_H)}{A_H (-A_O \varepsilon_H \varepsilon_O + \varepsilon_H A_H + A_O \varepsilon_O)} \right) \varepsilon_O T_O^4 + \left(-\frac{A_O (-1 + \varepsilon_O)}{-A_O \varepsilon_H \varepsilon_O + \varepsilon_H A_H + A_O \varepsilon_O} + \frac{A_O}{-A_O \varepsilon_H \varepsilon_O + \varepsilon_H A_H + A_O \varepsilon_O} \right) \varepsilon_H T_H^4 \right) \end{bmatrix}$$

Der Vektor $\dot{\mathbf{q}}$ besteht aus den Einträgen \dot{q}_O und \dot{q}_H , wir benötigen aber nur den ersten Eintrag, weil

$$\dot{Q}_{rad} = A_O \dot{q}_O \text{ lautet.}$$

b)

Um die stationäre thermische Energiebilanz zu bestimmen müssen alle Wärmeströme die ein- oder aus-treten addiert werden.

$$\dot{m}_{LM} c_{p,LM} (T_\infty - T_L) + 0.2 \dot{m}_{LM} c_{p,O} - A_O \alpha_{OL} (T_O - T_\infty) - \dot{Q}_{rad} + P_{el} \eta = 0$$

c)

Die Temperatur T_O lautet nun \bar{T}_O und wird in die Lösung von b eingesetzt. Danach muss die Gleichung nach P_{el} umgeformt werden. Daraus ergibt sich.

$$P_{el} = \frac{1}{\eta} \left(-\dot{m}_{LM} c_{p,LM} (T_\infty - T_L) - 0.2 \dot{m}_{LM} c_{p,O} - A_O \alpha_{OL} (T_O - T_\infty) + \dot{Q}_{rad} \right)$$

d)

Die Anfangsbedingung der Differentialgleichung lautet $T_O(t = 0) = \bar{T}_O$ und die Differentialgleichung erhält man indem man die Fouriersche Wärmeleitgleichung nach dem Volumen integriert. Zu beachten ist das auf der rechten Seite alle ein- und ausfließenden Wärmeströme stehen:

$$\int \rho c_{p,O} \frac{\partial T_O}{\partial t} dV = \int -\alpha_{O,L} (T_O - T_\infty) - \dot{q}_{rad} dA$$

$$m_O c_{p,O} \frac{\partial T_O}{\partial t} = A_O \alpha_{O,L} (T_O - T_\infty) - \dot{Q}_{rad}$$

2.3 17.05.2019

Beispiel 2

a)

Beispiel 3

a)

Der Vektor vom Ursprung zum Schwerpunkt des Rades kann direkt aus Angabe abgelesen werden und lautet deshalb:

$$\mathbf{r}_r = \begin{bmatrix} p \cos \alpha - r \sin \alpha \\ p \sin \alpha + r \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Der translatorische Geschwindigkeitsvektor erhält man durch die Ableitung vom Ortsvektor nach den Freiheitsgraden.

Translatorischer Geschwindigkeitsvektor:

$$\mathbf{v}_r = \dot{\mathbf{r}}_r = \begin{bmatrix} \dot{p} \cos \alpha \\ \dot{p} \sin \alpha \end{bmatrix}$$

Die rotatorische Geschwindigkeit lautet:

$$\omega_r = \frac{\dot{p}}{r}$$

b)

Der Vektor zum Schwerpunkt des Stabes kann ebenfalls aus der Angabe abgelesen werden und lautet deshalb:

$$\mathbf{r}_S = \begin{bmatrix} p \cos \alpha - r \sin \alpha + l_s \sin \varphi \\ p \sin \alpha + r \cos \alpha + l_s \cos \varphi \end{bmatrix}$$

Analog zu a) lautet der translatorische Geschwindigkeitsvektor:

$$\mathbf{v}_S = \dot{\mathbf{r}}_S = \begin{bmatrix} \dot{p} \cos \alpha + l_s \cos \varphi \dot{\varphi} \\ \dot{p} \sin \alpha - l_s \sin \varphi \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

c)

Als erstes wird die translatorische kinetische Energie des System wie folgt ermittelt:

Vereinfachungen:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_r^T \dot{\mathbf{r}}_r &= \begin{bmatrix} \dot{p} \cos \alpha & \dot{p} \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \cos \alpha \\ \dot{p} \sin \alpha \end{bmatrix} \\ &= \dot{p}^2 \cos^2 \alpha + \dot{p}^2 \sin^2 \alpha \\ &= \dot{p}^2 \underbrace{(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)}_{=1} \\ &= \dot{p}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{r}}_S^T \dot{\mathbf{r}}_S &= \begin{bmatrix} \dot{p} \cos \alpha + l_s \cos \varphi \dot{\varphi} & \dot{p} \sin \alpha - l_s \sin \varphi \dot{\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \cos \alpha + l_s \cos \varphi \dot{\varphi} \\ \dot{p} \sin \alpha - l_s \sin \varphi \dot{\varphi} \end{bmatrix} \\
&= (\dot{p} \cos \alpha + l_s \cos \varphi \dot{\varphi})^2 + (\dot{p} \sin \alpha - l_s \sin \varphi \dot{\varphi})^2 \\
&= \dot{p}^2 \cos^2 \alpha + 2l_s \dot{p} \dot{\varphi} \cos \alpha \cos \varphi + l_s^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi + \dot{p}^2 \sin^2 \alpha - 2l_s \dot{p} \dot{\varphi} \sin \alpha \sin \varphi + l_s^2 \sin^2 \varphi \dot{\varphi}^2 \\
&= \dot{p}^2 \underbrace{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}_{=1} + 2l_s \dot{p} \dot{\varphi} \underbrace{(\cos \varphi \cos \alpha - \sin \varphi \sin \alpha)}_{\cos(\varphi+\alpha)} + l_s^2 \dot{\varphi}^2 \underbrace{(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)}_{=1} \\
&= \dot{p}^2 + 2l_s \dot{p} \dot{\varphi} \cos(\varphi + \alpha) + l_s^2 \dot{\varphi}^2
\end{aligned}$$

Nun kann man schließlich die translatorische kinetischen Energie des Rades und des Stabes bestimmen.

$$\begin{aligned}
T_{trans,r} &= \frac{1}{2} m_r \dot{p}^2 \\
T_{trans,s} &= \frac{1}{2} m_s (\dot{p}^2 + l_s^2 \dot{\varphi}^2 + 2l_s \dot{p} \dot{\varphi} \cos(\varphi + \alpha))
\end{aligned}$$

Die kinetische Energie besitzt jedoch auch einen rotatorischen Anteil. Dieser lautet für die beiden Teilsysteme:

$$\begin{aligned}
T_{rot,r} &= \frac{1}{2} \Theta_r \frac{\dot{p}^2}{r^2} \\
T_{rot,s} &= \frac{1}{2} \Theta_s \dot{\varphi}^2
\end{aligned}$$

Da wir nun sämtliche Teilenergien ermittelt haben, beträgt die gesamte kinetische Energie des vorliegenden Systems:

$$\begin{aligned}
T &= T_{trans,r} + T_{rot,r} + T_{trans,s} + T_{rot,s} \\
&= \frac{1}{2} m_r \dot{p}^2 + \frac{1}{2} \Theta_r \frac{\dot{p}^2}{r^2} + \frac{1}{2} m_s (\dot{p}^2 + l_s^2 \dot{\varphi}^2 + 2l_s \dot{p} \dot{\varphi} \cos(\varphi + \alpha)) + \frac{1}{2} \Theta_s \dot{\varphi}^2
\end{aligned}$$

Als nächstes wird nun die gesamte potentielle Energie des gegebenen System ermittelt. Zuerst berechnet man wieder die Energien der Teilsysteme und addiert dieser zum Schluss wieder zusammen.

$$\begin{aligned}
V_r &= m_r g (p \sin \alpha + r \cos \alpha) \\
V_s &= m_s g (p \sin \alpha + r \cos \alpha + l_s \cos \varphi) \\
V &= V_r + V_s = m_r g (p \sin \alpha + r \cos \alpha) + m_s g (p \sin \alpha + r \cos \alpha + l_s \cos \varphi)
\end{aligned}$$

d)

Um den Vektor der generalisierten Kräfte zu bestimmen benötigt man zuerst den Richtungsvektor zu den Angriffspunkten der extern wirkenden Kräfte, hier f_{ext} .

Angriffspunkt der Kraft:

$$\mathbf{r}_f = \begin{bmatrix} p \cos \alpha - r \sin \alpha + 2l_s \sin \varphi \\ p \sin \alpha + r \cos \alpha + 2l_s \cos \varphi \end{bmatrix}$$

Weiters benötigt man auch den Vektor der externen Kräfte.

Kraftvektor:

$$\mathbf{f}_{ext}^T = f_{ext} \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \end{bmatrix}$$

Nun werden die partiellen Ableitung nach \mathbf{q} vom Angriffspunkt der Kraft gebildet:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_f}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} 2l_s \cos \varphi \\ -2l_s \sin \varphi \end{bmatrix} \quad \frac{\partial \mathbf{r}_f}{\partial p} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}$$

Der Vektor der generalisierten Kräfte wird nun wie folgt ermittelt:

$$\mathbf{f}_q = \mathbf{f}_{ext}^T \frac{\partial \mathbf{r}_f}{\partial \mathbf{q}}$$

generalisierte Kräfte:

$$\begin{aligned} f_{q,\varphi} &= f_{ext} \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2l_s \cos \varphi \\ -2l_s \sin \varphi \end{bmatrix} \\ &= f_{ext} (2l_s \cos \beta \cos \varphi - 2l_s \sin \beta \sin \varphi) \\ &= f_{ext} 2l_s \underbrace{(\cos \beta \cos \varphi - \sin \beta \sin \varphi)}_{\cos(\beta+\varphi)} \\ &= f_{ext} 2l_s \cos(\beta + \varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{q,p} &= f_{ext} \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \\ &= f_{ext} \underbrace{(\cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha)}_{\cos(\beta-\alpha)} \\ &= f_{ext} \cos(\beta - \alpha) \end{aligned}$$

gesamter Vektor:

$$\mathbf{f}_q = f_{ext} \begin{bmatrix} 2l_s \cos(\beta + \varphi) \\ \cos(\beta - \alpha) \end{bmatrix}$$

e)

Zum Schluss sollen noch die Bewegungsgleichungen mithilfe des Euler-Lagrange-Formalismus bestimmt werden.

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2} m_r \dot{p}^2 + \frac{1}{2} \Theta_r \frac{\dot{p}^2}{r^2} + \frac{1}{2} m_s (\dot{p}^2 + l_s^2 \dot{\varphi}^2 + 2l_s \dot{p} \dot{\varphi} \cos(\varphi + \alpha)) + \frac{1}{2} \Theta_s \dot{\varphi}^2 \\ &\quad - m_r g (p \sin \alpha + r \cos \alpha) - m_s g (p \sin \alpha + r \cos \alpha + l_s \cos \varphi) \end{aligned}$$

Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi} \right) &= 2l_s f_{ext} \cos(\beta + \varphi) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial p} \right) &= f_{ext} \cos(\beta - \alpha) \end{aligned}$$

Zwischenschritte:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m_s (l_s^2 \dot{\varphi} + l_s \dot{p} \cos(\varphi + \alpha)) + \Theta_s \dot{\varphi} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{p}} &= m_r \dot{p} + \frac{\Theta_r}{r^2} \dot{p} + m_s (\dot{p} + 2l_s \dot{\varphi} \cos(\varphi + \alpha)) \end{aligned}$$

auf tretende Ableitungen:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m_s l_s \sin(\varphi + \alpha) \dot{p} \dot{\varphi} + m_s g l_s \sin \varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial p} = -g(m_s + m_r) \sin \alpha$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = m_s l_s \cos(\varphi + \alpha) \ddot{p} + (m_s l_s^2 + \Theta_s) \ddot{\varphi} - m_s l_s \dot{p} \sin(\varphi + \alpha) \dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}} \right) = \left(m_r + \frac{\Theta_r}{r^2} + m_s \right) \ddot{p} + m_s l_s (\ddot{\varphi} \cos(\varphi + \alpha) - \dot{\varphi} \sin(\varphi + \alpha) \dot{\varphi})$$

2.4 12.07.2019

Beispiel 1

a)

Der Richtungsvektor vom Ursprung zum Schwerpunkt der Masse m lautet:

$$\mathbf{p}_m = \begin{bmatrix} r \cos(\alpha) + b \\ r \sin(\alpha) - h \end{bmatrix}$$

Mithilfe diesen Vektor kann ebenfalls auch der Geschwindigkeitsvektor bestimmt werden, indem man den Richtungsvektor nach der Zeit ableitet.

$$\dot{\mathbf{p}}_m = \begin{bmatrix} -r\dot{\alpha} \sin(\alpha) + \dot{b} \\ r\dot{\alpha} \cos(\alpha) - \dot{h} \end{bmatrix}$$

b)

Um die kinetischen Energien zu berechnen, müssen zuerst einige Nebenrechnungen durchgeführt werden.

Nebenrechnungen:

$$\dot{\mathbf{p}}_m^T \dot{\mathbf{p}}_m = [-r\dot{\alpha} \sin(\alpha) + \dot{b} \quad r\dot{\alpha} \cos(\alpha) - \dot{h}] \begin{bmatrix} -r\dot{\alpha} \sin(\alpha) + \dot{b} \\ r\dot{\alpha} \cos(\alpha) - \dot{h} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$= r^2 \dot{\alpha}^2 \underbrace{(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)}_{=1} - 2r\dot{\alpha}\dot{b} \sin \alpha - 2r\dot{\alpha}\dot{h} \cos \alpha + \dot{b}^2 + \dot{h}^2 \quad (2)$$

$$= r^2 \dot{\alpha}^2 - 2r\dot{\alpha}\dot{b} \sin \alpha - 2r\dot{\alpha}\dot{h} \cos \alpha + \dot{b}^2 + \dot{h}^2 \quad (3)$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{h}{b}\right) \quad (4)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\dot{h}b - h\dot{b}}{b^2 + h^2} \quad (5)$$

kinetische Energie des Systems:

$$T_{tm} = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{p}}_m^T \dot{\mathbf{p}}_m = \frac{1}{2} m \left(r^2 \dot{\alpha}^2 - 2r\dot{\alpha}\dot{b} \sin(\alpha) - 2r\dot{\alpha}\dot{h} \cos(\alpha) + \dot{b}^2 + \dot{h}^2 \right)$$

$$T_{rm} = \frac{1}{2} \Theta_m \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} \Theta_m \left(\frac{\dot{h}b - h\dot{b}}{b^2 + h^2} \right)^2$$

$$T_{rr} = \frac{1}{2} \Theta_r \dot{\alpha}^2$$

$$T = T_{tm} + T_{rm} + T_{rr}$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{p}}_m^T \dot{\mathbf{p}}_m = \frac{1}{2} m \left(r^2 \dot{\alpha}^2 - 2r\dot{\alpha}\dot{b} \sin(\alpha) - 2r\dot{\alpha}\dot{h} \cos(\alpha) + \dot{b}^2 + \dot{h}^2 \right) + \frac{1}{2} \Theta_m \left(\frac{\dot{h}b - h\dot{b}}{b^2 + h^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \Theta_r \dot{\alpha}^2$$

c)

potentielle Energie des Systems:

$$\begin{aligned} V_m &= mg(r \sin \alpha - h) \\ V_c &= \frac{1}{2} c \left(\sqrt{b^2 + h^2} s_0 \right)^2 \\ V &= V_m + V_c = mg(r \sin \alpha - h) + \frac{1}{2} c \left(\sqrt{b^2 + h^2} s_0 \right)^2 \end{aligned}$$

d)

viskose Reibkraft

$$\mathbf{f}_V = \mu_V \frac{\dot{h}b - h\dot{b}}{b^2 + h^2} \begin{bmatrix} b \\ -h \end{bmatrix}$$

partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{p}}_m}{\partial \alpha} = \begin{bmatrix} -r \sin \alpha \\ r \cos \alpha \end{bmatrix} \quad \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}_m}{\partial b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}_m}{\partial h} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

generalisierte Kräfte:

Multipliziert man die viskose Reibungskraft mit allen partiellen Ableitungen erhält man

$$\mathbf{f}_{q,v} = \mu_V \frac{\dot{h}b - h\dot{b}}{b^2 + h^2} \begin{bmatrix} r \sin \alpha b + r \cos \alpha h \\ -b \\ -h \end{bmatrix}$$

Die andere externe Kraft ist

$$\mathbf{f}_x = \begin{bmatrix} f_x \\ 0 \end{bmatrix}$$

Multipliziert mit den partiellen Ableitungen erhält man

$$\mathbf{f}_{q,x} = \begin{bmatrix} -f_x r \sin \alpha \\ f_x \\ 0 \end{bmatrix}$$

Der gesamte Vektor der generalisierten Kräfte beträgt

$$\mathbf{f}_q = \mu_V \frac{\dot{h}b - h\dot{b}}{b^2 + h^2} \begin{bmatrix} r \sin \alpha b + r \cos \alpha h \\ -b \\ -h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -f_x r \sin \alpha \\ f_x \\ 0 \end{bmatrix}$$

e)

Verwendet man aus der Formelsammlung im Punkt generalisierte Kräfte die 2.te Formel und passt man diese an den stationären Fall an erhält man

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{mgr \cos \alpha}{\frac{c(\sqrt{b^2 + h^2} - s_0)}{\sqrt{b^2 + h^2}} b} \\ \frac{c(\sqrt{b^2 + h^2} - s_0)}{\sqrt{b^2 + h^2}} h - mg \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_x r \sin \alpha \\ f_x \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nun wird s_0 mit 0 angenommen und anschließend werden die generalisierten Koordinaten bestimmt.

1. Koordinate:

$$\begin{aligned} mgr \cos \alpha &= -f_x r \sin \alpha \\ -\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} &= \frac{mg}{f_x} \\ -\tan \alpha &= \frac{mg}{f_x} \\ \alpha &= -\arctan\left(\frac{mg}{f_x}\right) \end{aligned}$$

2. Koordinate:

$$\begin{aligned} \frac{c(\sqrt{b^2 + h^2})}{\sqrt{b^2 + h^2}} b &= f_x \\ cb &= f_x \\ b &= \frac{f_x}{c} \end{aligned}$$

3. Koordinate

$$\begin{aligned} \frac{c(\sqrt{b^2 + h^2})}{\sqrt{b^2 + h^2}} h - mg &= 0 \\ ch - mg &= 0 \\ h &= \frac{mg}{c} \end{aligned}$$

f)

Die resultierende Reibkraft wird mithilfe der Formel 2.96 aus dem Vorlesungsskript berechnet und lautet hier:

$$\mathbf{f}_F = -c_W A \frac{\rho}{2} |\dot{\mathbf{p}}_m| \dot{\mathbf{p}}_m$$

$$\begin{aligned} |\dot{\mathbf{p}}_m| &= \sqrt{\left(-r\dot{\alpha} \sin(\alpha) + \dot{b}\right)^2 + \left(r\dot{\alpha} \cos(\alpha) - \dot{h}\right)^2} \\ &= \sqrt{r^2\dot{\alpha}^2 \sin^2 \alpha - 2r\dot{\alpha}\dot{b} \sin \alpha + \dot{b}^2 + r^2\dot{\alpha}^2 \cos^2 \alpha - 2r\dot{\alpha}\dot{h} \cos \alpha + \dot{h}^2} \\ &= \sqrt{r^2\dot{\alpha}^2 \underbrace{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}_{=1} - 2r\dot{\alpha}\dot{b} \sin \alpha - 2r\dot{\alpha}\dot{h} \cos \alpha + \dot{b}^2 + \dot{h}^2} \\ &= \sqrt{r^2\dot{\alpha}^2 - 2r\dot{\alpha}\dot{b} \sin \alpha - 2r\dot{\alpha}\dot{h} \cos \alpha + \dot{b}^2 + \dot{h}^2} \end{aligned}$$

Multipliziert man nun \mathbf{f}_F mit den partiellen Ableitungen aus d) und vereinfacht man so weit wie möglich

erhält man

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_{q,F} &= -c_W A \frac{\rho}{2} |\dot{\mathbf{p}}_m| \begin{bmatrix} r\dot{\alpha} \underbrace{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}_{=1} - r\dot{b} \sin \alpha - r\dot{h} \cos \alpha \\ -r\dot{\alpha} \sin(\alpha) + \dot{b} \\ -r\dot{\alpha} \cos(\alpha) + \dot{h} \end{bmatrix} \\
&= -c_W A \frac{\rho}{2} |\dot{\mathbf{p}}_m| \begin{bmatrix} r\dot{\alpha} - r\dot{b} \sin \alpha - r\dot{h} \cos \alpha \\ -r\dot{\alpha} \sin(\alpha) + \dot{b} \\ -r\dot{\alpha} \cos(\alpha) + \dot{h} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Beispiel 2

a)

Da es sich hier um ein Problem mit Zylinderkoordinaten handelt, verwendet man nun einfach die Wärmeleitgleichung für Zylinderkoordinaten aus Formelsammlung und adaptiert diese entsprechend der Angabe.

Wärmeleitgleichung:

$$0 = \lambda \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} T_i(r) \right) \right)$$

Die 0 auf der linken Seite beruht darauf, dass es sich hier um ein stationäres Problem handelt und die Terme für φ und z fallen ebenfalls weg.

Lösung der DGL:

$$\begin{aligned} \lambda_i \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} T_i(r) \right) \right) &= 0 \\ \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} T_i(r) \right) &= 0 \\ \int \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} T_i(r) \right) dr &= \int 0 dr \\ r \frac{d}{dr} T_i(r) &= C_3 \\ \frac{d}{dr} T_i(r) &= \frac{C_3}{r} \\ \int \frac{d}{dr} T_i(r) dr &= \int \frac{C_3}{r} dr \\ T_i(r) &= C_3 \ln(r) + C_4 \end{aligned}$$

Randbedingungen:

$$\begin{aligned} T_i(2R) &= C_3 \ln(2R) + C_4 = T_2 \\ T_i(3R) &= C_3 \ln(3R) + C_4 = T_3 \end{aligned}$$

Integrationskonstanten:

Ausgehend von dem Gleichungssystem der Randbedingung kann man die Integrationskonstanten sehr leicht bestimmen. Als ersten formt man die 2.te Gleichung auf C_4 um.

$$\begin{aligned} T_3 &= C_3 \ln(3R) + C_4 \\ C_4 &= T_3 - C_3 \ln(3R) \end{aligned}$$

Dann wird in Gleichung 1 eingesetzt

$$\begin{aligned} T_2 &= C_3 \ln(2R) + T_3 - C_3 \ln(3R) \\ T_2 - T_3 &= C_3 \underbrace{(\ln(2R) - \ln(3R))}_{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \\ C_3 &= \frac{T_2 - T_3}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \end{aligned}$$

Nun setzt man C_3 in C_4 ein

$$C_4 = T_3 - \frac{T_2 - T_3}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \ln(3R)$$

$$C_4 = \frac{T_3 (\ln(2R) - \ln(3R))}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} - \frac{T_2 - T_3}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \ln(3R)$$

$$C_4 = \frac{T_3 \ln(2R) - T_2 \ln(3R)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$$

b)

Die Leistungsdichte g wird wie folgt berechnet

$$g = \rho_e |\mathbf{J}|^2 = \rho_e \left(\frac{I}{A} \right)^2$$

mit

$$A = (4R^2 - R^2) \pi$$

Dies ist die Fläche eines Hohlleiters. Setzt man nun diese in g ein, erhält man

$$g = \rho_e \left(\frac{I}{(4R^2 - R^2) \pi} \right)^2$$

c)

DGL:

$$\lambda_l \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} T_l(r) \right) \right) + g = 0$$

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} T_l(r) \right) = -\frac{gr}{\lambda_l}$$

$$\int \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} T_l(r) \right) dr = \int -\frac{gr}{\lambda_l} dr$$

$$r \frac{d}{dr} T_l(r) = -\frac{gr^2}{2\lambda_l} + C_1$$

$$\frac{d}{dr} T_l(r) = -\frac{gr}{2\lambda_l} + \frac{C_1}{r}$$

$$\int \frac{d}{dr} T_l(r) dr = \int -\frac{gr}{2\lambda_l} + \frac{C_1}{r} dr$$

$$T_l(r) = -\frac{gr^2}{4\lambda_l} + C_1 \ln(r) + C_2$$

Randbedingungen

$$T_l(R) = -\frac{gR^2}{4\lambda_l} + C_1 \ln(R) + C_2 = T_1$$

$$T_l(2R) = -\frac{g4R^2}{4\lambda_l} + C_1 \ln(2R) + C_2 = T_2$$