

Modellbildung  
Beispielsammlung

4.Semester ET-Studium

Oktober 2019

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Einleitung

In dieser Ausarbeitung befinden sich sämtliche Rechenwege der Modellbildungsprüfung beginnend ab dem Jahr 2015. Die Angaben zu den hier ausgearbeiteten Prüfungen befinden sich auf der Homepage des ACIN. Sämtlichen verwendeten Formeln befinden sich in der Formelsammlung, welche ebenfalls auf der Homepage des ACIN zu finden ist. Zeichnungen wurden hier beifügt, sofern dies auch möglich war. Diese Sammlung soll dabei helfen schneller auf den Lösungsweg kommen. Es wird öfters vorkommen das die Lösung hier mit der Lösung aus der Musterlösung des Instituts nicht übereinstimmt. Manche Unterpunkte werden nicht gelöst, da zu diesen keine Musterlösungen existieren. Die Berechnungen wurden größtenteils mit MAPLE berechnet und die nicht so aufwendigen Rechenschritte wurden detailliert in diese Ausarbeitung beschrieben.

## 2 Prüfungen

### 2.1 26.06.2015

#### Beispiel 1

a)

Die generalisierten Koordinaten lauten

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix}$$

Diese beiden sind deswegen die geeigneten generalisierten Koordinaten, weil diese sich mit der Zeit ändern können.

Die beiden Ortsvektoren  $\mathbf{r}_2$  und  $\mathbf{r}_K$  werden direkt aus Angabe abgelesen.

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}L_2 + L_1 \sin \varphi \\ -L_1 \cos \varphi \end{bmatrix}, \mathbf{r}_K = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}L_2 + L_1 \sin \varphi + l \sin \psi \\ -L_1 \cos \varphi - l \cos \psi \end{bmatrix}$$

b)

Den translatorische Geschwindigkeitsvektor erhält man durch die zeitliche Ableitung des entsprechenden Ortsvektors.

$$\dot{\mathbf{r}}_K = \underbrace{L_1 \dot{\varphi} \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}_2} + l \dot{\psi} \begin{bmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{bmatrix}$$

c)

Zwischenrechnungen für die Ermittlung der kinetischen Energie:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_2^T \mathbf{r}_2 &= L_1^2 \dot{\varphi}^2 \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \\ &= L_1^2 \dot{\varphi}^2 \underbrace{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}_{=1} \\ &= L_1^2 \dot{\varphi}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{r}}_K^T \mathbf{r}_K &= \left( L_1 \dot{\varphi} \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \end{bmatrix} + l \dot{\psi} \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \end{bmatrix} \right) \left( L_1 \dot{\varphi} \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} + l \dot{\psi} \begin{bmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{bmatrix} \right) \\
&= L_1^2 \dot{\varphi}^2 \underbrace{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}_{=1} + l^2 \dot{\psi}^2 \underbrace{(\cos^2 \psi + \sin^2 \psi)}_{=1} + 2L_1 l (\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi) \\
&= L_1^2 \dot{\varphi}^2 + l^2 \dot{\psi}^2 + 2L_1 l \dot{\varphi} \dot{\psi} (\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi)
\end{aligned}$$

Nun können die kinetischen Energien des Systems bestimmt werden. Diese lauten hier

$$\begin{aligned}
T_{tr} &= \frac{1}{2} (m_2 + m_M) L_1^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_K \left[ L_1^2 \dot{\varphi}^2 + l^2 \dot{\psi}^2 + 2L_1 l \dot{\varphi} \dot{\psi} (\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi) \right] \\
T_{rot} &= 2 \frac{1}{2} \left( \frac{1}{12} m_1 L_1^2 + m_1 \left( \frac{L_1}{2} \right)^2 \right) \dot{\varphi}^2 \\
T &= T_{tr} + T_{rot} \\
&= \frac{1}{2} (m_2 + m_M) L_1^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_K \left[ L_1^2 \dot{\varphi}^2 + l^2 \dot{\psi}^2 + 2L_1 l \dot{\varphi} \dot{\psi} (\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi) \right] \\
&\quad + 2 \frac{1}{2} \left( \frac{1}{12} m_1 L_1^2 + m_1 \left( \frac{L_1}{2} \right)^2 \right) \dot{\varphi}^2
\end{aligned}$$

d)

Nun kann wie folgt die potentielle Energie bestimmt werden. Die potentielle Energie der Ruhelage lautet

$$\begin{aligned}
V &= 2m_1 g \frac{L_1}{2} (1 - \cos \varphi) + (m_2 + m_M) g L_1 (1 - \cos \varphi) \\
&\quad + m_K g [L_1 (1 - \cos \varphi) + l (1 - \cos \psi)] + 2 \frac{1}{2} c_1 \varphi^2
\end{aligned}$$

*Hinweis:*

Die Ruhelage befindet sich bei  $\varphi = 0$ , d.h. das Maximum der potentiellen Energie tritt bei  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$  und deswegen wird  $\cos \varphi$  durch  $(1 - \cos \varphi)$  ersetzt.

e)

Um die Bewegungsgleichungen zu bestimmen, benötigt man als erstes aller erstes die Langrange-Funktion die wie folgt lautet

$$\begin{aligned}
L &= T - V \\
&= \frac{1}{2} (m_2 + m_M) L_1^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_K \left[ L_1^2 \dot{\varphi}^2 + l^2 \dot{\psi}^2 + 2L_1 l \dot{\varphi} \dot{\psi} (\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi) \right] + 2 \frac{1}{2} \left( \frac{1}{12} m_1 L_1^2 + m_1 \left( \frac{L_1}{2} \right)^2 \right) \dot{\varphi}^2 \\
&\quad - 2m_1 g \frac{L_1}{2} (1 - \cos \varphi) - (m_2 + m_M) g L_1 (1 - \cos \varphi) - m_K g [L_1 (1 - \cos \varphi) + l (1 - \cos \psi)] - 2 \frac{1}{2} c_1 \varphi^2
\end{aligned}$$

Als nächstes benötigt man die generalisierten Kräfte die hier wie folgt lauten

$$\mathbf{f}_q = \begin{bmatrix} -2d_1 \varphi \\ \tau \end{bmatrix}$$

Nun wertet man den Euler-Lagrange-Formalismus aus, der hier folgendermaßen aussieht

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \varphi} \right) &= -2d_1 \dot{\varphi} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \psi} \right) &= \tau\end{aligned}$$

partiellen Ableitungen

1. generalisierte Koordinate:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= (m_2 + m_M) L_1^2 \dot{\varphi} + m_K \left( L_1^2 \dot{\varphi} + L_1 l \dot{\psi} (\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi) \right) + 2 \left( \frac{1}{12} m_1 L_1^2 + m_1 \left( \frac{L_1}{2} \right)^2 \right) \dot{\varphi} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= (m_2 + m_M) L_1^2 \ddot{\varphi} + m_K \left( L_1^2 \ddot{\varphi} + L_1 l \frac{d}{dt} \left( \dot{\psi} (\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi) \right) \right) + 2 \left( \frac{1}{12} m_1 L_1^2 + m_1 \left( \frac{L_1}{2} \right)^2 \right) \ddot{\varphi} \\ &= \left( 2 \left( \frac{1}{12} m_1 L_1^2 + m_1 \left( \frac{L_1}{2} \right)^2 \right) + (m_2 + m_M + m_K) \right) \ddot{\varphi} + m_K L_1 \frac{d}{dt} (\psi (\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi)) \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= m_K L_1 l \dot{\varphi} \dot{\psi} (\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi) - m_1 g L_1 \sin \varphi - (m_2 + m_M) L_1 g - m_K g L_1 \sin \varphi - 2c_1 \varphi \\ &= m_K L_1 l \dot{\varphi} \dot{\psi} (\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi) - (m_1 + m_M + m_2 + m_K) g L_1 - 2c_1 \varphi\end{aligned}$$

2. generalisierte Koordinate:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} &= m_K l^2 \dot{\psi} + m_K L_1 \dot{\varphi} (\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) &= m_K l^2 \ddot{\psi} + m_K L_1 \frac{d}{dt} (\dot{\varphi} (\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi)) \\ \frac{\partial L}{\partial \psi} &= m_K L_1 l \dot{\varphi} \dot{\psi} (\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi) - m_K g l \sin \psi\end{aligned}$$

Somit lauten die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}\left( 2 \left( \frac{1}{12} m_1 L_1^2 + m_1 \left( \frac{L_1}{2} \right)^2 \right) + (m_2 + m_M + m_K) \right) \ddot{\varphi} + m_K L_1 \frac{d}{dt} (\psi (\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi)) \\ - m_K L_1 l \dot{\varphi} \dot{\psi} (\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi) + (m_1 + m_M + m_2 + m_K) g L_1 + 2c_1 \varphi = -2d_1 \dot{\varphi} \\ m_K l^2 \ddot{\psi} + m_K L_1 \frac{d}{dt} (\dot{\varphi} (\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi)) \\ - m_K L_1 l \dot{\varphi} \dot{\psi} (\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi) + m_K g l \sin \psi = \tau\end{aligned}$$

## Beispiel 2

a)

Zuerst soll der Sichtfaktor  $F_{B-D_1}$  berechnet werden. Um diesen zu bestimmen, nimmt man die Formel bezüglich der vierten Anordnung aus der Formelsammlung.

$$F_{B-D_1} = \frac{1}{2L_B} \left( L_B + L_{D_1} - \sqrt{L_B^2 + L_{D_1}^2 - 2L_B L_{D_1} \cos \varphi} \right)$$

Mit der gleichen Formel kann nun auch der Sichtfaktor für Boden-Fenster mit dem Dachstück ermittelt werden.

$$F_{B-D_1F} = \frac{1}{2L_B} \left( L_B + L_{D_1} + L_F - \sqrt{L_B^2 + (L_{D_1} + L_F)^2 - 2L_B (L_{D_1} + L_F) \cos \varphi} \right)$$

Mit der Summationsregel kann nun der Sichtfaktor  $F_{B-F}$  bestimmt werden.

$$F_{B-F} = F_{B-D_1F} - F_{B-D_1}$$

Zum Schluss wendet man noch das Reziprozitätsgesetz an und man erhält damit den gesuchten Sichtfaktor.

$$F_{F-B} = \frac{L_B}{L_F} (F_{B-D_1F} - F_{B-D_1})$$

b)

Allgemein gilt

$$\alpha + \rho + \tau = 1$$

für den Absorptionsgrad  $\alpha$ , den Reflexionsgrad  $\rho$  und den Transmissionsgrad  $\tau$ . Laut Angabe benötigt man den Transmissionsgrad und dieser lautet

$$\tau_F = 1 - \alpha_F - \rho_F$$

Um die eintretende Wärmestromdichte  $G_B$  zu ermitteln, benötigt man zuerst die vom Fenster abgehende Ausstrahlung  $J_F$ . Dies wird über die Komponente von  $G_S$ , welche normal auf das Fenster eintrifft und über den Transmissionsgrad des Fensters bestimmt. Daher lautet  $J_F$ :

$$\begin{aligned} J_F &= \tau_F G_S \cos \varphi \\ &= (1 - \alpha_F - \rho_F) G_S \cos \varphi \end{aligned}$$

Mit dem Sichtfaktor zwischen dem Fenster und dem Boden kann nun  $G_B$  bestimmt werden.

$$\begin{aligned} G_B &= F_{F-B} J_F \\ &= F_{F-B} (1 - \alpha_F - \rho_F) G_S \cos \varphi \end{aligned}$$

c)

Die Wärmeleitgleichung für dieses Problem wird mit

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right) + g(t, r, T)$$

aufgestellt. Hier wurde die Gleichung aus der Formelsammlung schon an das Beispiel angepasst. Oberfläche an der  $\dot{q}_A$  eintritt lautet

$$O_A = 4\pi R^2$$

Wasservolumen:

$$V_W = \frac{4}{3}\pi (R^3 - r^2)$$

$$g(t, r, T) = \frac{O_A}{V_W} \dot{q}_A = \frac{3R^2}{R^3 - r^3} \dot{q}_A$$

Somit lautet hier die Wärmeleitgleichung

$$\rho c_p \frac{\partial}{\partial t} T(\bar{r}, t) = \lambda \left( \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \bar{r}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{r}} T(\bar{r}, t) \right) \right) + \underbrace{\frac{3R^2}{R^3 - r^3} \dot{q}_A}_{:=c}$$

mit den beiden Randbedingungen

$$T(R, t) = T_L$$

$$-\lambda \frac{\partial}{\partial \bar{r}} T(\bar{r}, t)|_{\bar{r}=r} = \frac{\dot{Q}}{4\pi r^2}$$

Dadurch das das stationäre Wärmeprofil benötigt wird fällt die zeitliche Ableitung weg.

$$\lambda \left( \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \bar{r}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{r}} T(\bar{r}, t) \right) \right) + c = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \bar{r}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{r}} T(\bar{r}, t) \right) = -\frac{c}{\lambda} \bar{r}^2$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{r}} T(\bar{r}, t) = -\frac{c}{\lambda} \frac{1}{3} \bar{r} + \frac{C_1}{\bar{r}^2}$$

$$T(\bar{r}, t) = -\frac{c}{\lambda} \frac{1}{6} \bar{r}^2 - \frac{C_1}{\bar{r}} + C_2$$

Ermittlung der Konstanten  $C_1$  und  $C_2$ :

Setzt man die zweite Randbedingung in die Gleichung ein erhält man  $C_1$ .

$$-\cancel{\lambda} \frac{\dot{Q}}{4\pi \cancel{\lambda}} = -\frac{c}{\lambda} \frac{1}{3} r^3 + C_1$$

$$C_1 = \frac{c}{\lambda} \frac{1}{3} r^3 - \frac{\dot{Q}}{4\pi \lambda}$$

Um  $C_2$  zu erhalten muss man die erste Randbedingung und  $C_1$  in die Gleichung einsetzen.

$$T_L = -\frac{c}{\lambda} \frac{1}{6} R^2 - \left( \frac{c}{\lambda} \frac{1}{3} r^3 - \frac{\dot{Q}}{4\pi\lambda} \right) \frac{1}{R} + C_2$$

$$C_2 = \frac{c}{\lambda} \frac{1}{6} R^2 + \left( \frac{c}{\lambda} \frac{1}{3} r^3 - \frac{\dot{Q}}{4\pi\lambda} \right) \frac{1}{R} + T_L$$

Abschließend wird nun  $C_2$  eingesetzt und somit erhält man das stationäre Temperaturprofil des Wassers im Aquarium.

$$T_{stat}(\bar{r}) = \frac{1}{6} \frac{c}{\lambda} (R^2 - \bar{r}^2) + \left( \frac{1}{3} \frac{c}{\lambda} r^3 - \frac{\dot{Q}}{4\pi\lambda} \right) \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{\bar{r}} \right) + T_L$$

Betrachtet man nun dieses Profil mit dem Radius des Heizkörpers erhält man:

$$T_{stat}(r) = \frac{1}{6} \frac{c}{\lambda} (R^2 - r^2) + \left( \frac{1}{3} \frac{c}{\lambda} r^3 - \frac{\dot{Q}}{4\pi\lambda} \right) \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) + T_L$$

### Beispiel 3

a)

Um die Gleichgewichtsbedingungen zu bestimmen, stellt man einfach das Kräftegleichgewicht und die Momentengleichung für die relevanten Teile auf.

Gleichgewichtsbedingungen für Teil 1:

$$\mathbf{e}_x : F_{Ax} + F_{Bx} + F_{Qx} = 0$$

$$\mathbf{e}_y : F_{Ay} - F_{Qy} = 0$$

Für die Momentengleichung wird der Punkt A als Drehpunkt festgelegt.

$$\mathbf{e}_z : (l_1 - a) F_{Qx} - 2a F_{Bx} + (b_2 - b_1) F_{Qy} = 0$$

Gleichgewichtsbedingungen für Teil 2:

$$\mathbf{e}_x : F_{Ax} - F_{Bx} - F_{Cx} - F_{Hx} = 0$$

$$\mathbf{e}_y : F_{Ay} + F_{Cy} - F_{Hy} = 0$$

Für die Momentengleichung wird der Punkt C als Drehpunkt festgelegt.

$$\mathbf{e}_z : a F_{Ax} + a F_{Bx} + l_2 F_{Hx} + b_2 F_{Ay} + b_3 F_{Hy} = 0$$

Gleichgewichtsbedingungen für den Körper:

$$\mathbf{e}_x : F_{Qx} - F_{Qx} = 0$$

$$\mathbf{e}_y : 2F_{Qy} - G = 2F_{Qy} - mg = 0$$



b)

Aus Symmetriegründen ist aus der Angabe ersichtlich das

$$F_{Cy} = 0$$

gilt.

Mit sämtlichen Gleichungen aus Punkt a lassen sich die gesuchten Kräfte bestimmen.

$$aF_{Ax} + aF_{Bx} + l_2F_{Hx} + b_2F_{Ay} + b_3F_{Hy} = 0$$

$$\underbrace{F_{Ax} + F_{Bx}}_{-F_{Qx}} + \frac{l_2}{a}F_{Hx} + \frac{b_3 + b_2}{a}F_{Hy} = 0$$

$$F_{Qx} = \frac{l_2}{a}F_{Hx} + \frac{b_3 + b_2}{a}F_{Hy}$$

$$F_{Qy} = F_{Hy} = \frac{1}{2}mg$$

Um  $F_{Cx}$  zu bestimmen müssen einmal zuerst  $F_{Ax}$  und  $F_{Bx}$  bestimmt werden.

$F_{Bx}$ :

$$(l_1 - a)F_{Qx} - 2aF_{Bx} + (b_2 - b_1)F_{Qy} = 0$$

$$F_{Bx} = \frac{1}{2} \left( \frac{l_1}{a} - 1 \right) F_{Qx} + \frac{1}{2} \frac{b_2 - b_1}{a} F_{Hy}$$

$$F_{Bx} = \frac{1}{2} \left( \frac{l_1 l_2}{a^2} - \frac{l_2}{a} \right) F_{Hx} + \frac{1}{2} \left( \frac{b_3 l_1 + b_2 l_1}{a^2} - \frac{b_3 + b_2}{a} + \frac{b_2 - b_1}{a} \right) F_{Hy}$$

$F_{Ax}$ :

$$aF_{Ax} + aF_{Bx} + l_2F_{Hx} + b_2F_{Ay} + b_3F_{Hy} = 0$$

$$F_{Ax} = -F_{Bx} - \frac{l_2}{a}F_{Hx} - \frac{b_3 + b_2}{a}F_{Hy}$$

$$F_{Ax} = -\frac{l_1 l_2}{a^2}F_{Hx} - \frac{b_3 l_1 + b_2 l_1}{a^2}F_{Hy}$$

$F_{Cx}$ :

$$F_{Ax} - F_{Bx} - F_{Cx} - F_{Hx} = 0$$

$$F_{Cx} = F_{Ax} - F_{Bx} - F_{Hx}$$

Setzt man nun  $F_{Ax}$  und  $F_{Bx}$  ein und vereinfacht man soweit wie möglich erhält man

$$F_{Cx} = - \left( 1 + \frac{l_1 l_2}{a^2} \right) f_{Hx} - \left( \frac{b_2 - b_1}{a} + \frac{b_3 l_1 + b_2 l_1}{a^2} \right) \frac{F_{Hy}}{2}$$

c)

Da es sich hier um eine Haftreibung handelt, lässt sich die Haftkraft in der Form

$$F_H = \mu_H F_N$$

darstellen.

Hier:

$$F_H = \underbrace{2F_{Qy}}_{F_H} = \underbrace{2F_{Qx}}_{F_N} \mu$$

Nun setzt man  $F_{Qx}$  und  $F_{Qy}$  ein und formt auf  $F_{Hx}$  um erhält man

$$\mu > \frac{F_{Qy}}{F_{Qx}}$$
$$F_{Hx} > \frac{mg}{2l_2} \left( \frac{a}{\mu} - b_2 - b_3 \right)$$

#### Beispiel 4

a)

Die Wärmestromdichte  $\dot{q}$  über die Schichtdicke  $d_m$  lautet

$$\dot{q} = \frac{\lambda (T_K - T_O)}{d_m}$$

b)

Hier verwendet man die Formel für die Wärmestromdichte bei Konvektion. Diese lautet

$$\dot{q} = \alpha (T - T_\infty)$$

Auf dieses Beispiel angewandt folgt

$$\dot{q} = \alpha (T_O - T_U)$$

c)

Die Zeichnung kann mit Abbildung 6 in der Angabe verglichen werden. Das erste thermische Widerstandspaar in Abbildung 6 ist die zu zeichnende Schaltung.

Analog zum spezifischen elektrischen Widerstand

$$R_{el} = \frac{1}{\gamma} \frac{l}{A}$$

lässt sich der thermische Widerstand eines Körpers wie folgt bestimmen.

$$R_{th} = \frac{1}{\lambda} \frac{l}{A}$$

Daraus folgt

$$R_M = \frac{d_M}{\lambda A}$$

und

$$R_A = \frac{1}{\alpha A}$$

d)

Aus Abbildung 6 lassen sich sämtliche Gleichungen aufstellen die man benötigt um  $B_0$  zu berechnen. Gleichungen:

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= \dot{Q}_1 + \dot{Q}_2 \\ (R_K + R_S + R_F) \dot{Q}_2 &= T_{OS} - T_U \\ R_A \dot{Q}_1 &= T_{OS} - T_U \\ R_M \dot{Q} + R_A \dot{Q}_1 &= T_K - T_U\end{aligned}$$

Durch Umformen folgt schließlich der Kopplungsfaktor:

$$\begin{aligned}R_A \dot{Q}_1 &= T_{OS} - T_U \\ \dot{Q}_1 &= \frac{T_{OS} - T_U}{R_M} \\ (R_K + R_S + R_F) \dot{Q}_2 &= T_{OS} - T_U \\ \dot{Q}_2 &= \frac{T_{OS} - T_U}{R_K + R_S + R_F} \\ R_M \dot{Q} + R_A \dot{Q}_1 &= T_K - T_U \\ R_M (\dot{Q}_1 + \dot{Q}_2) + R_A \dot{Q}_1 &= T_K - T_U \\ \left( \frac{R_M}{R_A} + \frac{R_M}{R_K + R_S + R_F} \right) (T_{OS} - T_U) &= T_K - T_U \\ B_0 = \frac{T_{OS} - T_U}{T_K - T_U} &= \frac{R_A (R_K + R_S + R_F)}{R_M (R_K + R_S + R_F) + R_A R_M}\end{aligned}$$

## 2.2 02.10.2015

### Beispiel 1

a)

Hier müssen die Differentialgleichung inklusive der Randbedingungen sowohl für die Zylinderwand als auch für den Kunststoff aufgestellt werden. Für die Differentialgleichung wird die Form der Wärmeleitgleichung für Zylinderkoordinaten verwendet. Über die allgemeine Form des Wärmeleitgesetz lassen sich die Randbedingungen herleiten. Da es sich hier um ein Problem handelt, bei denen die Zylinderkoordinaten verwendet werden lautet der Nabla-Operator

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

Hier handelt es sich zusätzlich noch um ein ebenes Problem, welches nur vom Radius  $r$  abhängt, worauf sich der Nabla-Operator vereinfacht.

Zylinderwand:

Wärmeleitgleichung:

$$\rho_z c_{p,z} \dot{T}_z(r, t) = \lambda_z \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} T_z(r, t) \right) \right)$$

Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \dot{q}_{hz} &= \lambda_z \frac{\partial}{\partial r} T_z(r, t)|_{r=r_o} \\ \dot{q}_{zp} &= -\lambda_z \frac{\partial}{\partial r} T_z(r, t)|_{r=r_i} \end{aligned}$$

Anfangsbedingung:

$$T_z(r, 0) = T_\infty$$

Polymer:

Wärmeleitgleichung:

$$\rho_p c_{p,p}(T_p) \dot{T}_p = \lambda_p \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} T_p(r, t) \right) \right)$$

Randbedingung:

$$\dot{q}_{zp} = \lambda_z \frac{\partial}{\partial r} T_p(r, t)|_{r=r_i}$$

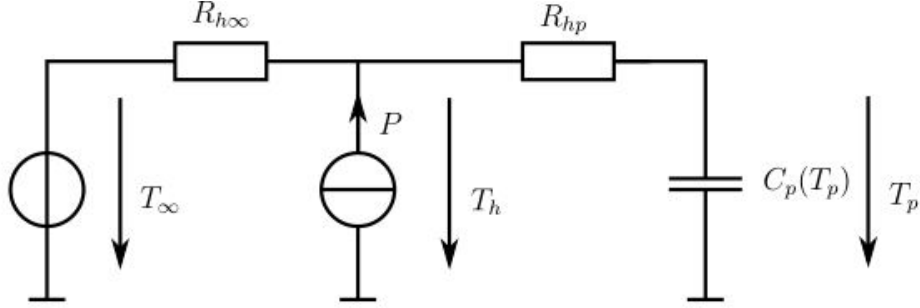
Anfangsbedingung:

$$T_z(r, 0) = T_\infty$$

Wärmestromdichten für Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \dot{q}_{zp} &= \alpha_{zp}(T_z(r_i) - T_p(r_i)) \\ \dot{q}_{hz} &= \alpha_{hz}(T_h - T_z(r_o)) \\ &= \frac{\alpha_{hz}/\alpha_\infty \frac{P}{A} + \alpha_{hz}(T_\infty - T_z(r_o))}{1 + \alpha_{hz}/\alpha_\infty} \end{aligned}$$

b)



Relevanten Größen:

$$R_{h\infty} = \frac{1}{2r_o\pi L\alpha_\infty}$$

$$C_p = r_i^2\pi L\rho_p c_{p,p}(T)$$

und

$$R_{hp} = \frac{1}{2r_o\pi Lk(r_o)}$$

mit

$$k(r) = \frac{1}{r} \frac{1}{\frac{1}{\alpha_{hz}r_o} + \frac{1}{\lambda_z} \log\left(\frac{r_o}{r_i}\right) + \frac{1}{\alpha_{zp}r_i}}$$

$k(r)$  wurde mit der Formel bei einer Wärmeleitung bei mehrschichtigen zylindrischen Wandaufbau aufgestellt.

Einheiten:

$$[R] = KW^{-1}$$

$$[C] = JK^{-1}$$

$$[P] = W$$

$$[T] = K$$

c)

Die Differentialgleichung für die Ersatzschaltung lautet

$$\underbrace{(R_{hp} + R_{h\infty})C_p(T_p)}_{\tau(T_p)} \dot{T}_p = T_\infty + PR_{h\infty} - T_p$$

Dadurch das  $c_{p,p} = const$ , wird die Differentialgleichung zu einer einfachen DGL 1.Ordnung. Löst man diese erhält man die Lösung

$$T_p(t) = T_\infty + PR_{h\infty}(1 - \exp(-t/\tau))$$

## Beispiel 2

a)

Der Anteil durch die freie Konvektion lautet

$$\alpha_1(T_1)(T_1 - T_\infty)$$

Mit der thermischen Strahlung ergibt sich eine Leistung von

$$P = 2r_o L(\alpha_1(T_1)(T_1 - T_\infty) + \dot{q}_1)$$

b)

Dadurch das es sich bei den Oberflächen des Zylinders und des Maschinenbettes um konvexe Flächen handelt sind die Sichtfaktoren  $F_{11}$  und  $F_{22}$  gleich 0. Mit

$$F_{11} + F_{12} + F_{1\infty} = 1$$

und bekannten  $F_{12}$  folgt

$$F_{1\infty} = 1 - F_{12}$$

Aus dem Reziprozitätsgesetz schließt man

$$CF_{21} = 2r_o\pi F_{12}$$
$$F_{21} = \frac{2r_o\pi}{C} F_{12}$$

Verwendet man das gleiche Gesetz noch einmal an kann man daraus schließen das  $F_{\infty 1}$  und  $F_{\infty 2}$  gleich 0 ist, da  $A_\infty \rightarrow \infty$ . Mithilfe der Summationsregel kann man auf den Sichtfaktor  $F_{\infty\infty}$  schlussfolgern, welcher den Wert 1 haben muss.

c)

Nettowärmestromdichte

$$\dot{\mathbf{q}} = (\mathbf{E} - \mathbf{F})(\mathbf{E} - (\mathbf{E} - \text{diag}(\varepsilon))\mathbf{F})^{-1} \text{diag}(\varepsilon)\sigma\mathbf{T}^4$$

mit

$$\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_\infty]^T, \mathbf{T} = [T_1, T_2, T_\infty]^T, \varepsilon = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_\infty]^T$$

der Einheitsmatrix  $\mathbf{E}$  und dadurch das die Halle ein schwarzer Strahler ist, gilt

$$\varepsilon_\infty = 1$$

Die Sichtfaktormatrix lautet

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & F_{12} & F_{1\infty} \\ F_{21} & 0 & F_{2\infty} \\ 0 & 0 & F_{\infty\infty} \end{bmatrix}$$

### Beispiel 3

Zu diesem Beispiel existiert keine Musterlösung mit der man Ergebnisse vergleichen könnte.

### Beispiel 4

a)

Aus der Zeichnung kann man direkt

$$\mathbf{p}_L = \begin{bmatrix} s + l \sin \varphi \\ -l \cos \varphi \end{bmatrix}$$

ablesen. Um  $\dot{\mathbf{p}}_L$  zu bestimmen, muss man  $\mathbf{p}_L$  nach den Freiheitsgraden  $s$  und  $\varphi$  ableiten. Geschwindigkeit der Lastposition

$$\dot{\mathbf{p}}_L = \begin{bmatrix} \dot{s} + l \cos \varphi \dot{\varphi} \\ l \sin \varphi \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

Der Betrag dieses Vektors lautet

$$\|\dot{\mathbf{p}}_L\|^2 = \dot{s}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2\dot{s}l\dot{\varphi} \cos \varphi$$

Die kinetische Energie ergibt sich zu

$$T = \frac{1}{2}m_K \dot{s}^2 + \frac{1}{2}m_L \|\dot{\mathbf{p}}_L\|^2 + \frac{1}{2}\Theta_{zz}\dot{\varphi}^2$$

und die potentielle Energie

$$V = -m_l g l \cos \varphi + V_0$$

mit

$$V_0 = m_L g l$$

zu

$$V = m_L g l (1 - \cos \varphi)$$

b)

Um die Bewegungsgleichungen zu bestimmen wird als erstes die Lagrange-Funktion benötigt welche lautet

$$\begin{aligned} L = T - V &= \frac{1}{2}m_K \dot{s}^2 + \frac{1}{2}m_L \|\dot{\mathbf{p}}_L\|^2 + \frac{1}{2}\Theta_{zz}\dot{\varphi}^2 - m_L g l (1 - \cos \varphi) \\ &= \frac{1}{2}m_K \dot{s}^2 + \frac{1}{2}m_L (\dot{s}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2\dot{s}l\dot{\varphi} \cos \varphi) + \frac{1}{2}\Theta_{zz}\dot{\varphi}^2 - m_L g l (1 - \cos \varphi) \end{aligned}$$

Euler-Lagrange-Formalismus

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{f}_{np}$$

Die separaten Ableitungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -m_L l \sin \varphi (\dot{s} \dot{\varphi} + g) \end{bmatrix} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} &= \begin{bmatrix} (m_K + m_L) \dot{s} + m_L l \dot{\varphi} \cos \varphi \\ (\Theta_{zz} + m_L) \dot{\varphi} + m_L l \dot{s} \cos \varphi \end{bmatrix} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} &= \begin{bmatrix} (m_K + m_L) \ddot{s} + m_L l \ddot{\varphi} \cos \varphi - m_L l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \\ (\Theta_{zz} + m_L) \ddot{\varphi} + m_L l \ddot{s} \cos \varphi - m_L l \dot{s}^2 \sin \varphi \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Die externen Kräfte können direkt aus der Angabe ablesen werden und lauten

$$\mathbf{f}_{np} = \begin{bmatrix} -d_K \dot{s} + F \\ 0 \end{bmatrix}$$

c)

Aus der zweiten Zeile der Bewegungsgleichungen aus Punkt b) erhält man die Bewegungsgleichung der haftenden Laufkatze. Dadurch lautet diese

$$(\Theta_{zz} + m_L) \ddot{\varphi} + m_L l g \sin \varphi = 0$$

d)

Als erstes müssen die externen Kräfte um die Haftkraft  $F_H$  erweitert werden. Daher lauten diese dann

$$\mathbf{f}_{np} = \begin{bmatrix} -d_K \dot{s} + F + F_H \\ 0 \end{bmatrix}$$

Betrachtet man laut Hinweis nur die erste Zeile der Bewegungsgleichungen aus Punkt b) mit  $\dot{s} = \ddot{s} = 0$  erhält man

$$m_L l \ddot{\varphi} \cos \varphi - m_L l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi = F + F_H$$

Formt nun auf  $F_H$  um und ermittelt man den Betrag erhält man

$$|F_H| = |m_L l \ddot{\varphi} \cos \varphi - m_L l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi - F|$$

Bringt man nun schließlich diese Gleichung auf die Form der Haftreibung erhält man schlussendlich die Haftbedingung

$$|F_H| = |m_L l \ddot{\varphi} \cos \varphi - m_L l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi - F| \leq \mu F_N$$

Mit

$$\ddot{\varphi} = -\frac{m_L l g \sin \varphi}{\Theta_{zz} + m_L l^2}$$

aus Punkt c), erhält man die vereinfachte Haftbedingung

$$\left| m_L l \frac{m_L l g \sin \varphi}{\Theta_{zz} + m_L l^2} \cos \varphi - m_L l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi - F \right| \leq \mu F_N$$

$$\left| \frac{g m_L^2 l^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\Theta_{zz} + m_L l^2} + m_L l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + F \right| \leq \mu F_N$$



## 2.3 27.11.2015

### Beispiel 1

a)

Um das Bremsmoment ermitteln zu können benötigt man zu aller erst einmal die Wirkfläche. In diesem Beispiel beträgt diese Fläche

$$A = \int_{R_i}^{R_a} \int_0^{\frac{\pi}{3}} r d\varphi dr = \frac{\pi}{6} (R_a^2 - R_i^2)$$

Das Bremsmoment lässt sich mit

$$M_R = \int_{R_i}^{R_a} \int_0^{\frac{\pi}{3}} r^2 \mu \frac{F_B}{A} d\varphi dr$$

zu

$$\begin{aligned} M_R &= \int_{R_i}^{R_a} \int_0^{\frac{\pi}{3}} r^2 \mu F_B \frac{6}{\pi (R_a^2 - R_i^2)} d\varphi dr = \\ M_R &= \int_{R_i}^{R_a} r^2 \mu F_B \frac{\overset{2}{\cancel{\pi}}}{\cancel{\pi} (R_a^2 - R_i^2) \overset{2}{\cancel{\pi}}} \overset{2}{\cancel{\pi}} dr = \\ M_R &= \mu F_B \frac{2}{3} \frac{R_a^3 - R_i^3}{R_a^2 - R_i^2} \end{aligned}$$

Da zwei Bremsbacken zum Abbremsen verwendet werden lautet das gesamte Bremsmoment

$$M_{ges} = 2M_R = \mu F_B \frac{4}{3} \frac{R_a^3 - R_i^3}{R_a^2 - R_i^2}$$

b)

Die Bewegungsdifferentialgleichung der Schwungscheibe lautet

$$\ddot{\varphi} = -\frac{M_{ges}}{\Theta_{zz}}$$

Das "−" vor dem Bruch kommt daher, dass die  $\dot{\varphi}$  mit der Zeit immer kleiner werden soll, da ja ein Bremsvorgang stattfindet. Die Anfangsbedingungen für dieses Problem lauten

$$\varphi(0) = 0$$

kann aber beliebig gewählt werden, und

$$\omega(0) = \bar{\omega}$$

Als nächstes muss man diese Differenzialgleichung lösen. Dies erreicht man durch 2-maliges Integrieren.

$$\begin{aligned}\omega(t) = \dot{\varphi}(t) &= -\frac{M_{ges}}{\Theta_{zz}}t + \bar{\omega} \\ \varphi(t) &= -\frac{M_{ges}}{\Theta_{zz}}\frac{t^2}{2} + \bar{\omega}t\end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Bremsdauer  $t_B$  zu

$$\begin{aligned}0 &= \bar{\omega} - \frac{M_{ges}}{\Theta_{zz}}t_B \\ \bar{\omega} &= \frac{M_{ges}}{\Theta_{zz}}t_B \\ t_B &= \frac{\Theta_{zz}\bar{\omega}}{M_{ges}}\end{aligned}$$

Um die Bremskraft  $F_B$  zu bestimmen setzt man  $M_{ges}$  ein und formt einfach auf  $F_H$  um und man erhält

$$F_B = \frac{3}{4} \frac{R_a^2 - R_i^2}{R_a^3 - R_i^3} \frac{\Theta_{zz}\bar{\omega}}{t_B\mu}$$

c)

Die Bremsleistung lässt sich mit  $\dot{W}_R = -M_{ges}\omega$  ermitteln. In diesem Fall lautet somit die Bremsleistung

$$\dot{W}_R = \frac{M_{ges}^2}{\Theta_{zz}}t - M_{ges}\bar{\omega}$$

Integriert man nun diese Leistung über die Bremsdauer erhält man die Energie

$$\begin{aligned}E_B &= \int_0^{t_B} \frac{M_{ges}^2}{\Theta_{zz}}t - M_{ges}\bar{\omega} dt = \\ &= \frac{1}{2} \frac{M_{ges}^2}{\Theta_{zz}} \frac{\Theta_{zz}^2 \bar{\omega}^2}{M_{ges}^2} - M_{ges}\bar{\omega} \frac{\Theta_{zz}\bar{\omega}}{M_{ges}} \\ &= -\frac{1}{2} \Theta_{zz}\bar{\omega}\end{aligned}$$

Dies entspricht der im Schwungrad gespeicherten Energie.

d)

Aus dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik ergibt sich die Differenzialgleichung

$$m_B c_B \frac{dT_B(t)}{dt} = \frac{1}{2} \left( M_{ges}\bar{\omega} - \frac{M_{ges}^2}{\Theta_{zz}}t \right)$$

Löst man diese Gleichung durch einfaches Integrieren erhält man

$$T_B(t) = \frac{1}{2m_B c_B} \left( M_{ges}\bar{\omega}t - \frac{1}{2} \frac{M_{ges}^2}{\Theta_{zz}}t^2 \right) + C$$

Setzt man die AB  $T_B(0) = T_{B,0}$  ein erhält man

$$T_B(t) = T_{B,0} + \frac{1}{2m_B c_B} \left( M_{ges} \bar{\omega} t - \frac{1}{2} \frac{M_{ges}^2}{\Theta_{zz}} t^2 \right)$$

Zum Zeitpunkt  $t_B$  ergibt sich nun folgende Temperatur

$$\begin{aligned} T_B(t) &= T_{B,0} + \frac{1}{2m_B c_B} \left( M_{ges} \bar{\omega} t_B - \frac{1}{2} \frac{M_{ges}^2}{\Theta_{zz}} t_B^2 \right) = \\ &= T_{B,0} + \frac{\Theta_{zz} \bar{\omega}^2}{4m_B c_B} = \\ &= T_{B,0} - \frac{1}{m_B c_B} \frac{E_B}{2} \end{aligned}$$

## Beispiel 2

Die Wärmestromdichte  $\dot{q}_{1-\infty}^I$  ohne der Rettungsdecke lässt sich mit der Formel für die Wärmestromdichte bei Konvektion bestimmen. Diese lautet

$$\dot{q}_{1-\infty}^I = \varepsilon_1 \sigma (T_1^4 - T_\infty^4)$$

Um den Wärmestrom zu erhalten muss die Wärmestromdichte einfach mit der betreffenden Fläche multipliziert werden.

$$Q_{1-\infty}^I = \varepsilon_1 A_1 \sigma (T_1^4 - T_\infty^4)$$

Die Sichtfaktormatrix für dieses Wärmeproblem lautet

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$diag(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{bmatrix}$$

Mit der Formel für die Nettowärmestromdichte kann der Wärmestrom zwischen den beiden Körpern bestimmt werden zu

$$Q_{1-2}^{II} = \sigma A_1 \underbrace{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{1 - (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)}}_K (T_1^4 - T_2^4)$$

Der Wärmestrom zwischen Rettungsdecke und Umgebung lautet

$$Q_{2-\infty}^{II} = \varepsilon_2 A_1 \sigma (T_2^4 - T_\infty^4)$$

Da  $Q_{1-2}^{II} = Q_{2-\infty}^{II}$  gilt, kann man  $T_2^4$  bestimmen zu

$$T_2^4 = \frac{K}{K + \varepsilon_2} T_1^4 + \frac{\varepsilon_2}{K + \varepsilon_2} T_\infty^4$$

Setzt man dies nun in  $Q_{1-2}^{II}$  ein erhält man

$$Q_{1-2}^{II} = \sigma A_1 \frac{K \varepsilon_2}{K + \varepsilon_2} (T_1^4 - T_\infty^4)$$

welcher mit  $Q_{1-\infty}^{II}$  gleichzusetzen ist. Nun kann man das Verhältnis zwischen den Wärmeströmen mit und ohne Decke bestimmen und man erhält ein Verhältnis von  $2/5$ . Daraus kann man schließen, dass durch die Decke  $3/5$  weniger Wärme an die Umgebung verloren geht.

### Beispiel 3

a)

Zur Beschreibung der Bewegung des Schlittens reicht ein einziger Freiheitsgrad aus, da sich dieser nur in horizontaler Richtung bewegt. Die geeignete Minimalkoordinate lautet

$$q = \varphi_1(t)$$

b)

Die Kniehebelpresse muss folgende Zwangsbedingung erfüllen.

$$L_1 \sin \varphi_1 - L_2 \sin \varphi_2 = 0$$

Aus dieser kann nun leicht  $\varphi_2$  bestimmen.

$$L_1 \sin \varphi_1 - L_2 \sin \varphi_2 = 0$$

$$L_2 \sin \varphi_2 = L_1 \sin \varphi_1$$

$$\varphi_2 = \arcsin \left( \frac{L_1}{L_2} \sin \varphi_1 \right)$$

c)

Die Ortsvektoren können direkt aus der Angabe abgelesen werden.

$$\mathbf{r}_1 = \frac{L_1}{2} \begin{bmatrix} \cos(q) \\ \sin(q) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_2 = L_1 \begin{bmatrix} \cos(q) \\ \sin(q) \end{bmatrix} + \frac{L_2}{2} \begin{bmatrix} \cos(\varphi_2(q)) \\ -\sin(\varphi_2(q)) \end{bmatrix}$$

d)

Die Schwerpunktschwindigkeiten der Schenkel lauten

$$\mathbf{v}_1 = \frac{L_1}{2} \begin{bmatrix} -\sin(q) \\ \cos(q) \end{bmatrix} \dot{q}$$

$$\mathbf{v}_2 = L_1 \begin{bmatrix} -\sin(q) \\ \cos(q) \end{bmatrix} \dot{q} + \frac{L_2}{2} \begin{bmatrix} -\sin(\varphi_2(q)) \\ -\cos(\varphi_2(q)) \end{bmatrix} \frac{\partial \varphi_2(q)}{\partial q} \dot{q}$$

Die Drehwinkelgeschwindigkeiten lauten

$$\omega_1 = \dot{q}$$

$$\omega_2 = -\frac{\partial \varphi_2(q)}{\partial q} \dot{q}$$

e)

Anfangs müssen einige Zwischenrechnungen durchgeführt werden.

$$\begin{aligned} v_1^2 &= \frac{L_1^2}{4} \dot{q}^2 (\cos^2(q) + \sin^2(q)) \\ &= \frac{L_1^2}{4} \dot{q}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2^2 &= \left( -L_1 \sin(q) \dot{q} - \frac{L_2}{2} \sin(\varphi_2(q)) \frac{\partial \varphi_2(q)}{\partial q} \dot{q} \right)^2 + \left( L_1 \cos(q) \dot{q} - \frac{L_2}{2} \cos(\varphi_2(q)) \frac{\partial \varphi_2(q)}{\partial q} \dot{q} \right)^2 \\ &= L_1^2 \dot{q}^2 \sin^2(q) + L_1 L_2 \dot{q}^2 \sin(q) \sin(\varphi_2(q)) \frac{\partial \varphi_2(q)}{\partial q} + \frac{L_2^2}{4} \dot{q}^2 \left( \frac{\partial \varphi_2(q)}{\partial q} \right)^2 \sin^2(\varphi_2(q)) + \\ &\quad + L_1^2 \dot{q}^2 \cos^2(q) - L_1 L_2 \dot{q}^2 \cos(q) \cos(\varphi_2(q)) \frac{\partial \varphi_2(q)}{\partial q} + \frac{L_2^2}{4} \dot{q}^2 \left( \frac{\partial \varphi_2(q)}{\partial q} \right)^2 \cos^2(\varphi_2(q)) \\ &= L_1^2 \dot{q}^2 + \frac{L_2^2}{4} \dot{q}^2 \left( \frac{\partial \varphi_2(q)}{\partial q} \right)^2 - L_1 L_2 \dot{q}^2 \frac{\partial \varphi_2(q)}{\partial q} (\cos(q) \cos(\varphi_2(q)) - \sin(q) \sin(\varphi_2(q))) \\ &= L_1^2 \dot{q}^2 + \frac{L_2^2}{4} \dot{q}^2 \left( \frac{\partial \varphi_2(q)}{\partial q} \right)^2 - L_1 L_2 \dot{q}^2 \frac{\partial \varphi_2(q)}{\partial q} \cos(q + \varphi_2(q)) \end{aligned}$$

Die kinetische Energie lässt sich mit den Formeln aus der Formelsammlung bestimmen und lautet daher:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} \Theta_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} \Theta_2 \omega_2^2 \\ &= \frac{1}{8} m_1 L_1^2 \dot{q}^2 + \frac{1}{2} m_2 L_1^2 \dot{q}^2 + \frac{1}{8} m_2 L_2^2 \left( \frac{\partial \varphi_2(q)}{\partial q} \right)^2 \dot{q}^2 - \frac{1}{2} m_2 L_1 L_2 \cos(q + \varphi_2(q)) \left( \frac{\partial \varphi_2(q)}{\partial q} \right) \dot{q}^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2} \Theta_1 \dot{q}^2 + \frac{1}{2} \Theta_2 \left( \frac{\partial \varphi_2(q)}{\partial q} \dot{q} \right)^2 \end{aligned}$$

f)

Die potenzielle Energie der Schenkel zufolge der Schwerkraft lautet

$$\begin{aligned} V_q &= \frac{1}{2} m_1 g L_1 \sin(q) + m_2 g L_1 \sin(q) - \frac{1}{2} m_2 g L_2 \sin(\varphi_2(q)) \\ V_F &= \frac{1}{2} c_F \left( L_1 \cos(q) + \frac{1}{2} L_2 \cos(\varphi_2(q)) - x_{F,0} \right)^2 \end{aligned}$$

g)

Angriffspunkte der beiden externen Kräfte:

$$\mathbf{r}_F = L_1 \begin{bmatrix} \cos(q) \\ \sin(q) \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{r}_{F_L} = L_1 \begin{bmatrix} \cos(q) \\ \sin(q) \end{bmatrix} + L_2 \begin{bmatrix} \cos(\varphi_2(q)) \\ -\sin(\varphi_2(q)) \end{bmatrix}$$

Deren Ableitungen nach der generalisierten Koordinate lautet

$$\frac{\partial \mathbf{r}_F}{\partial q} = L_1 \begin{bmatrix} -\sin(q) \\ \cos(q) \end{bmatrix}$$
$$\frac{\partial \mathbf{r}_{F_L}}{\partial q} = L_1 \begin{bmatrix} -\sin(q) \\ \cos(q) \end{bmatrix} + L_2 \begin{bmatrix} -\sin(\varphi_2(q)) \\ -\cos(\varphi_2(q)) \end{bmatrix} \frac{\partial \varphi_2(q)}{\partial q}$$

Die Vektoren der externen Kräfte lauten hier

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ -F \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{F}_L = \begin{bmatrix} -F_L \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mit der Formel für die generalisierten Kräfte aus der Formelsammlung diese folgendermaßen aussehen.

$$f_F = \mathbf{F}^T \frac{\partial \mathbf{r}_F}{\partial q} = -F L_1 \cos(q)$$
$$f_{F_L} = \mathbf{F}_L^T \frac{\partial \mathbf{r}_{F_L}}{\partial q} = F_L \left( L_1 \sin(q) + L_2 \sin(\varphi_2(q)) \frac{\partial \varphi_2(q)}{\partial q} \right)$$

## 2.4 05.02.2016

### Beispiel 1

Bei diesen Beispiel muss man den physikalischen Hintergrund von Seilrollen genau beachten.

a)

Um die kinetische Energie  $T$  zu bestimmen, benötigt man sämtliche im System auftretenden Geschwindigkeiten.

$$\begin{aligned}\omega_{R_1} &= \frac{v}{r_1} \\ v_{R_2} &= v \frac{r_1}{2r_2} \\ \omega_{R_2} &= v \frac{r_1}{2r_2^2}\end{aligned}$$

Somit ergibt sich die kinetische Energie zu

$$T = \frac{m_L v^2}{2} + \frac{\Theta_1 \omega_{R_1}^2}{2} + \frac{\Theta_2 \omega_{R_2}^2}{2} + \frac{m_2 v_{R_2}^2}{2}$$

b)

Die Energie

$$W = F \cdot s$$

die beim Verschieben benötigt wird lautet

$$W = \mu_c m_L g \cos \phi s$$

c)

Zum Zeitpunkt  $t_0$  soll

$$V(t_0) = 0$$

gültig sein. Zum Zeitpunkt  $t_1$  sieht die potentielle Energie folgendermaßen aus

$$V(t_1) = m_L g s \sin \phi - m_2 g \frac{r_1}{2r_2}$$

d)

Die aufzuwendende Arbeit durch die Kraft  $\mathbf{F}$  lautet

$$W = F s \frac{r_1}{2r_2}$$

e)

Aus der Energieerhaltung ergibt sich

$$T(t_0) + V(t_0) + W_F - W = T(t_1) + V(t_1)$$

Bei den Termen mit  $t_0$  müssen für  $v$  und  $\omega$ ,  $v_0$  und  $\omega(t_0)$  und bei  $t_1$ ,  $v_1$  und  $\omega(t_1)$  eingesetzt werden. Schreibt man nun die obige Gleichung komplett aus und formt dieses dann auf die gesuchte Kraft um erhält man

$$F = \frac{2r_2}{sr_1} \left( m_L \frac{v_1^2 - v_0^2}{2} + \Theta_1 \frac{\omega_{R_1}(t_1)^2 - \omega_{R_1}(t_0)^2}{2} + \Theta_2 \frac{\omega_{R_2}(t_1)^2 - \omega_{R_2}(t_0)^2}{2} \right) + \\ + \frac{2r_2}{sr_1} \left( m_2 \frac{v_{R_2}(t_1)^2 - v_{R_2}(t_0)^2}{2} + m_L g s (\sin \phi + \mu_c \cos \phi) - m_2 g s \frac{r_1}{2r_2} \right)$$

## Beispiel 2

a)

Die einzelnen Koordinaten der Position des Stabschwerpunktes können direkt aus der Angabe abgelesen werden und lauten daher

$$x_s = r \cos \alpha + l_s \sin \beta \\ y_s = r \sin \alpha - l_s \cos \beta$$

Dessen Ableitungen lauten

$$\dot{x}_s = -r\dot{\alpha} \sin \alpha + l_s \dot{\beta} \cos \beta \\ \dot{y}_s = r\dot{\alpha} \cos(\alpha) + l_s \dot{\beta} \sin \beta$$

b)

Anfangs werden die beiden abgeleiteten Koordinaten zu einem Vektor zusammengefasst.

$$\mathbf{v}_s = \begin{bmatrix} -r\dot{\alpha} \sin \alpha + l_s \dot{\beta} \cos \beta \\ r\dot{\alpha} \cos(\alpha) + l_s \dot{\beta} \sin \beta \end{bmatrix}$$

Bevor nun aber die kinetische Energie des Systems bestimmt werden kann muss aber vorher noch ein kleine Zwischenrechnung durchgeführt werden.

$$v_s^2 = \mathbf{v}_s^T \mathbf{v}_s \\ = (-r\dot{\alpha} \sin \alpha + l_s \dot{\beta} \cos \beta)^2 + (r\dot{\alpha} \cos(\alpha) + l_s \dot{\beta} \sin \beta)^2 \\ = r^2 \dot{\alpha}^2 \sin^2 \alpha - 2rl_s \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \alpha \cos \beta + l_s^2 \dot{\beta}^2 \cos^2 \beta + \\ + r^2 \dot{\alpha}^2 \cos^2 \alpha + 2rl_s \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos \alpha \sin \beta + l_s^2 \dot{\beta}^2 \sin^2 \beta \\ = r^2 \dot{\alpha}^2 + l_s^2 \dot{\beta}^2 - 2rl_s \dot{\alpha} \dot{\beta} (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) \\ = r^2 \dot{\alpha}^2 + l_s^2 \dot{\beta}^2 - 2rl_s \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin(\alpha - \beta)$$

Die kinetische Energie hier lautet

$$T = \frac{1}{2} m_s v_s^2 + \frac{1}{2} \Theta_T \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \Theta_s \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} m_L (r\dot{\alpha} + \dot{l}_c)^2$$

Der letzte Klammerausdruck setzt sich aus der Rotationsgeschwindigkeit  $r\dot{\alpha}$  und der Translationsgeschwindigkeit  $\dot{l}_c$  zusammen.



c)

Die potentielle Energie setzt sich aus 2 Komponenten zusammen, die Energie bezüglich der Gewichtskraft

$$V_g = m_L g(c - l_c - r\alpha) + m_s g y_s$$

mit der wählbaren Länge  $c$  und der in den Federn gespeicherten Energie

$$V_f = c_1 \frac{(\beta - \alpha)^2}{2} + c_2 \frac{(l_c - l_{c,0})^2}{2}$$

Die Summe der beiden ergibt die gesamte potentielle Energie

$$\begin{aligned} V &= V_g + V_f \\ &= m_L g(c - l_c - r\alpha) + m_s g y_s + c_1 \frac{(\beta - \alpha)^2}{2} + c_2 \frac{(l_c - l_{c,0})^2}{2} \end{aligned}$$

d)

Die einzige externe Kraft ist jene Kraft  $F_e$ , die an der Last angreift. Der Vektor zum Angriffspunkt dieser Kraft lautet

$$\mathbf{p}_f = \begin{bmatrix} -r \\ -r\alpha - l_c - c \end{bmatrix}$$

Dessen Ableitungen nach den gewünschten generalisierten Koordinaten lauten

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{p}_f}{\partial \alpha} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -r \end{bmatrix} \\ \frac{\partial \mathbf{p}_f}{\partial \beta} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial \mathbf{p}_f}{\partial l_c} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Mit dem Vektor

$$\mathbf{F}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ -F_e \end{bmatrix}$$

kann mit der Formel

$$\tau = \mathbf{F}^T \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{q}}$$

die generalisierten Kräfte bestimmt werden. Diese lauten

$$\begin{aligned} \tau_\alpha &= r F_e \\ \tau_\beta &= 0 \\ \tau_{l_c} &= F_e \end{aligned}$$

e)

Die Lagrange-Funktion sieht hier folgendermaßen aus.

$$\begin{aligned}
 L &= T - V \\
 &= \frac{1}{2} m_s v_s^2 + \frac{1}{2} \Theta_T \dot{\alpha} + \frac{1}{2} \Theta_s \dot{\beta} + \frac{1}{2} m_L (r \dot{\alpha} + \dot{l}_c) - \\
 &\quad - m_L g (c - l_c - r \alpha) - m_s g y_s - c_1 \frac{(\beta - \alpha)^2}{2} - c_2 \frac{(l_c - l_{c,0})^2}{2}
 \end{aligned}$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen lauten daher hier

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} &= \tau_\alpha \\
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \beta} &= \tau_\beta \\
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{l}_c} \right) - \frac{\partial L}{\partial l_c} &= \tau_{l_c}
 \end{aligned}$$

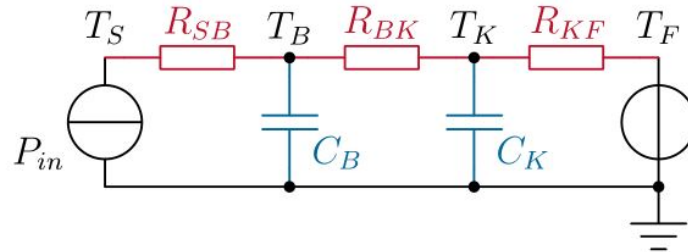
### Beispiel 3

a)

Das physikalische Prinzip, welches die Wärmeübertragung bestimmt heißt erzwungene Konvektion. Hierbei handelt es sich um eine Randbedingung dritter Art, also eine gemischte Randbedingung.

b)

Das RC-Ersatzbild sieht wie folgt aus



Die einzelnen Größen werden zu

$$\begin{aligned}
 P_{in} &= I_a (U_e - U_a) \\
 R_{SB} &= \text{aus dem Datenblatt} \\
 C_B &= m_B c_B \\
 R_{BK} &= \frac{h_p}{\lambda_p A_p} \\
 C_K &= m_K c_K = \rho_K l_K b_k h_K c_K
 \end{aligned}$$

c)

Ausgangspunkt sind die zur Ersatzschaltung zugehörigen Knoten- und Maschengleichungen

$$\begin{aligned} sC_B T_B &= \dot{Q}_{SB} - \dot{Q}_P \\ sC_K T_K &= \dot{Q}_P - \dot{Q}_{KF} \\ R_{KF} \dot{Q}_{KF} &= T_K - T_F \\ \dot{Q}_P R_{BK} &= T_B - T_K \\ \dot{Q}_{SB} R_{SB} &= T_S - T_B \\ \dot{Q}_{SB} &= P_{in} \end{aligned}$$

Löst man dieses Gleichungssystem nach  $\dot{Q}_P$  erhält man

$$\dot{Q}_P = \frac{(C_K R_{KF} s + 1) P_{in} - C_B T_F s}{(C_B C_K R_{BK} R_{KF} s^2 + (C_B R_{BK} + C_B R_{KF} + C_K R_{KF}) + 1)}$$

Im stationären Fall gilt

$$\dot{Q}_P = P_{in}$$

d)

Aus der stationären Lösung aus Punkt c) folgt

$$P_{in} = \frac{T_S - T_F}{R_{SB} + R_{BK} + R_{KF}}$$

somit darf der gefragte Widerstand nicht den Wert

$$R_{KF,max} \leq \frac{T_{S,max} - T_F}{P_{in}} - R_{SB} - R_{BK}$$

nicht überschreiten, damit die Temperatur  $T_{S,max}$  stationär nicht überschreitet.

## 2.5 11.03.2016

### Beispiel 1

a)

Bei diesem Messversuch treten Haftreibung

$$f_H = \mu_H mg$$

trockene Gleitreibung

$$f_C = \mu_C mg \operatorname{sign} \dot{x}$$

und viskose Reibung

$$f_r = \mu_V \Delta v$$

auf. Im folgenden werden diese drei Fälle unterschieden

$$f_e = \begin{cases} f_H & \text{für } \dot{x} = 0 \\ f_C + f_r & \text{sonst} \end{cases}$$

b)

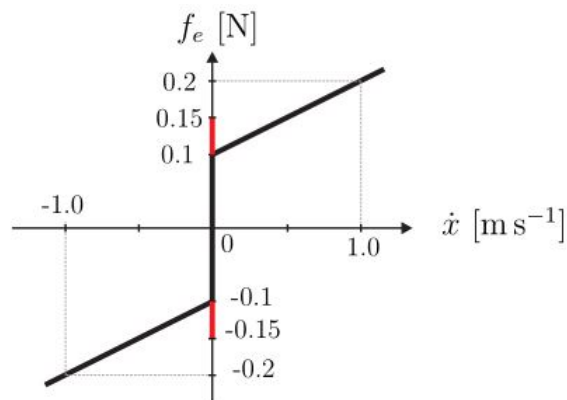
Reibparameter:

$$\mu_H = \frac{f_H}{mg} = \frac{0.1 \text{ N}}{1 \text{ kgms}^{-2}} = 0.1$$

$$\mu_C = \frac{f_C}{mg} = \frac{0.1 \text{ N}}{1 \text{ kgms}^{-2}} = 0.1$$

$$\mu_V = \frac{f_r}{\Delta v} = \frac{0.1 \text{ N}}{1 \text{ ms}^{-1}} = 0.1 \text{ Nsm}^{-1}$$

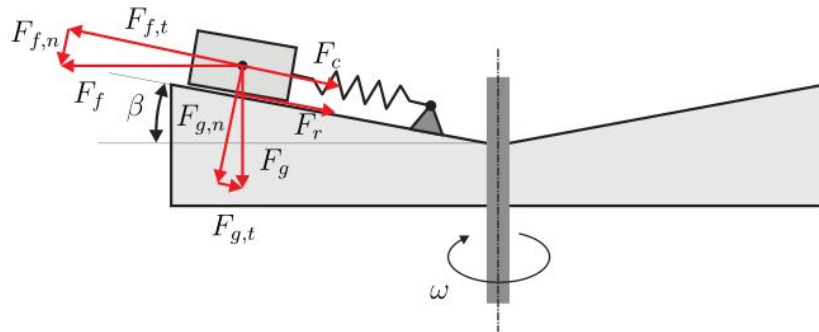
c)



## Beispiel 2

a)

Skizze der auftretenden Kräfte



Hier treten die Fliehkraft

$$F_f = m(x_m + l) \cos \beta \omega^2$$

die Gewichtskraft

$$F_g = mg$$

die Federkraft

$$F_c = c(x_m - x_0)$$

und die Reibkraft (Haftreibung)

$$F_r = (F_{g,n} + F_{f,n})\mu_H$$

auf. Die einzelnen Terme der Reibkraft werden im nächsten Punkt genauer erklärt.

b)

Die einzelnen Komponenten der auftretenden Kräfte lauten

$$F_{f,t} = m(x_m + l) \cos \beta \omega^2$$

$$F_{f,n} = m(x_m + l) \cos \beta \sin \beta \omega^2$$

$$F_{g,t} = mg \sin \beta$$

$$F_{g,n} = mg \cos \beta$$

c)

Die beiden Haftbedingungen lauten

$$F_{f,t} - F_{g,t} - F_c > \mu_H(F_{g,n} + F_{f,n}) \rightarrow \text{Bewegung nach außen}$$

$$F_{f,t} - F_{g,t} - F_c < -\mu_H(F_{g,n} + F_{f,n}) \rightarrow \text{Bewegung nach innen}$$

d)

Die kritische Winkelgeschwindigkeit kann aus der ersten Haftbedingung wie folgt ermittelt werden.

$$\begin{aligned}
F_{f,t} - F_{g,t} - F_c &> \mu_H(F_{g,n} + F_{f,n}) \\
m(x_m + l) \cos \beta \omega^2 - mg \sin \beta - c(x_m - x_0) &> \mu_H(mg \cos \beta + m(x_m + l \cos \beta \sin \beta \omega^2)) \\
\omega^2 &> \frac{mg \sin \beta + c(x_m - x_0) + \mu_H mg \cos \beta}{m(x_m + l) \cos \beta - \mu_H m(x_m + l) \cos \beta \sin \beta} \\
\omega &> \sqrt{\frac{mg \sin \beta + c(x_m - x_0) + \mu_H mg \cos \beta}{m(x_m + l) \cos \beta - \mu_H m(x_m + l) \cos \beta \sin \beta}} \\
\omega &< -\sqrt{\frac{mg \sin \beta + c(x_m - x_0) + \mu_H mg \cos \beta}{m(x_m + l) \cos \beta - \mu_H m(x_m + l) \cos \beta \sin \beta}}
\end{aligned}$$

### Beispiel 3

a)

Die hier geeigneten generalisierten Koordinaten sind

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ s \end{bmatrix}$$

b)

Die kinetische Energie dieses Systems lautet

$$T = \frac{1}{2} m_s \dot{s}^2 + \frac{1}{2} \Theta_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} \Theta_2 \dot{\varphi}_2^2$$

c)

Die potentielle Energie dieses Systems lautet

$$V = \frac{1}{2} c_1 (s - r \varphi_1)^2 + \frac{1}{2} c_2 (r \varphi_2 - s)^2 + \frac{1}{2} c_3 r^2 (\varphi_1 - \varphi_2)^2$$

d)

Um den Euler-Lagrange-Formalismus anwenden zu können benötigt man sowohl die Lagrange-Funktion  $L$  und die generalisierten Kräfte.

Lagrange-Funktion

$$L = T - V = \frac{1}{2} m_s \dot{s}^2 + \frac{1}{2} \Theta_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} \Theta_2 \dot{\varphi}_2^2 - \frac{1}{2} c_1 (s - r \varphi_1)^2 - \frac{1}{2} c_2 (r \varphi_2 - s)^2 - \frac{1}{2} c_3 r^2 (\varphi_1 - \varphi_2)^2$$

Die generalisierten Kräfte können direkt aus der Angabe abgelesen werden.

$$f_{np} = \begin{bmatrix} M_1 \\ 0 \\ -\mu_V \dot{s} \end{bmatrix}$$

Euler-Lagrange-Formalismus:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} \right) &= M_1 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} \right) &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial s} \right) &= -\mu_V \dot{s}\end{aligned}$$

Einzelne Ableitungen nach  $\mathbf{q}$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} &= c_1 r (s - r \varphi_1) - c_3 r^2 (\varphi_1 - \varphi_2) \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} &= -c_2 r (r \varphi_2 - s) + c_3 r^2 (\varphi_1 - \varphi_2) \\ \frac{\partial L}{\partial s} &= -c_1 (s - r \varphi_1) + c_2 (r \varphi_2 - s)\end{aligned}$$

Einzelne Ableitungen nach  $\dot{\mathbf{q}}$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} &= \Theta_1 \dot{\varphi}_1 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} &= \Theta_1 \dot{\varphi}_2 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} &= m_s \dot{s}\end{aligned}$$

Deren zeitliche Ableitungen:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) &= \Theta_1 \ddot{\varphi}_1 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) &= \Theta_1 \ddot{\varphi}_2 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} \right) &= m_s \ddot{s}\end{aligned}$$

Der Euler-Lagrange-Formalismus lautet ausgeschrieben

$$\begin{aligned}\Theta_1 \ddot{\varphi}_1 - c_1 r (s - r \varphi_1) + c_3 r^2 (\varphi_1 - \varphi_2) &= M_1 \\ \Theta_1 \ddot{\varphi}_2 + c_2 r (r \varphi_2 - s) - c_3 r^2 (\varphi_1 - \varphi_2) &= 0 \\ m_s \ddot{s} + c_1 (s - r \varphi_1) - c_2 (r \varphi_2 - s) &= -\mu_V \dot{s}\end{aligned}$$

Somit lauten die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi}_1 &= \frac{1}{\Theta_1}(M_1 + c_1 r(s - r\varphi_1) - c_3 r^2(\varphi_1 - \varphi_2)) \\ \ddot{\varphi}_2 &= \frac{1}{\Theta_2}(-c_2(r\varphi_2 - s) + c_3 r^2(\varphi_1 - \varphi_2)) \\ \ddot{s} &= \frac{1}{m_s}(-c_1(s - r\varphi_1) + c_2(r\varphi_2 - s) - \mu_V \dot{s})\end{aligned}$$

e)

Die Feder 1 ist parallel zu Federn 2 und 3, die Serie zu sehen sind. Daraus folgt eine Gesamtsteifigkeit von

$$c = c_1 + \frac{c_2 c_3}{c_2 + c_3}$$

Hier muss nur beachtet werden wie sich Federn verhalten wenn sie in Serie oder parallel verbaut sind.

f)

Die Bewegungsgleichungen des vereinfachten Systems können anhand der Gleichungen aus Punkt d) leicht bestimmt werden.

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi}_1 &= \frac{1}{\Theta_1}(M_1 + cr(s - r\varphi_1)) \\ \ddot{s} &= \frac{1}{m_s}(-c(s - r\varphi_1) - \mu_V \dot{s})\end{aligned}$$

#### Beispiel 4

a)

Da es sich hier um eine Problemstellung handelt die nur vom Radius  $r$  abhängt sieht  $\Delta$  folgendermaßen aus

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

Für den stationären Fall (keine zeitlichen Ableitungen) folgt für die Wärmeleitgleichung

$$\frac{\partial^2 T_R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_R}{\partial r} = 0$$

b)

Durch die gegebene Substitution erhält man die Gleichung

$$f' + \frac{f}{r} = 0$$

Setzt man nun für  $f$  die gegebene Funktion erhält man

$$-\frac{c_0}{r^2} + \frac{c_0}{r^2} = 0$$

Daraus kann man schließen, dass die gegebene Funktion die Wärmeleitgleichung dieses Problems löst, was zu zeigen war.



c)

Ausgehend von der Differentialgleichung

$$\frac{dT_R}{dr} = \frac{c_0}{r}$$

erhält man die Lösung dieser wie folgt

$$\begin{aligned}dT_R &= \frac{c_0}{r} dr \\T_R &= c_0 \ln(r) + c_1\end{aligned}$$

d)

Mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned}T_i &= c_0 \ln(r_i) + c_1 \\T_a &= c_0 \ln(r_a) + c_1\end{aligned}$$

folgen die Konstanten

$$\begin{aligned}T_i - c_0 \ln(r_i) &= T_a - c_0 \ln(r_a) \\T_i - T_a &= c_0 (\ln(r_i) - \ln(r_a)) \\c_0 &= \frac{T_i - T_a}{\ln(\frac{r_i}{r_a})}\end{aligned}$$

und

$$c_1 = T_i - \frac{T_i - T_a}{\ln(\frac{r_i}{r_a})} \ln(r_i)$$

Mit diesen folgt die Gleichung

$$\begin{aligned}T_R(r) &= \frac{T_i - T_a}{\ln(\frac{r_i}{r_a})} \ln(r) + T_i - \frac{T_i - T_a}{\ln(\frac{r_i}{r_a})} \ln(r_i) \\&= T_i + \frac{T_i - T_a}{\ln(\frac{r_i}{r_a})} \ln\left(\frac{r}{r_i}\right)\end{aligned}$$

f)

Die Wärmestromdichten lauten

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \alpha_i (T_D - T_i) \\\dot{q}_a &= \alpha_a (T_a - T_L)\end{aligned}$$

Über die Fläche A integriert erhalten wir die Wärmeströme

$$\begin{aligned}\dot{Q}_i &= \alpha_i A_i (T_D - T_i) \\\dot{Q}_a &= \alpha_a A_a (T_a - T_L)\end{aligned}$$

Der letzte auftretende Wärmestrom lautet

$$\dot{Q}_\lambda = -\lambda A(r) \frac{dT_r}{dr} = -\lambda 2\pi r L \frac{T_i - T_a}{\ln(\frac{r_i}{r_a})} \frac{1}{r} = -2\pi \lambda L \frac{T_i - T_a}{\ln(\frac{r_i}{r_a})}$$

Diese drei Wärmeströme stehen zueinander mit folgender Beziehung

$$\dot{Q}_i = \dot{Q}_a = \dot{Q}_\lambda$$

## 2.6 13.05.2016

### Beispiel 1

a)

Der Schwingenwinkel lässt sich folgendermaßen bestimmen

$$\tan \varphi_S = \frac{r_K \cos \varphi_K}{h_K + r_K \sin \varphi_K}$$

$$\varphi_S = \arctan \left( \frac{r_K \cos \varphi_K}{h_K + r_K \sin \varphi_K} \right)$$

Dessen Ableitung lautet

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_S &= \frac{1}{\left( \frac{r_K \cos \varphi_K}{h_K + r_K \sin \varphi_K} \right)^2 + 1} \frac{-r_K \sin \varphi_K (h_K + r_K \sin \varphi_K) - r_K \cos \varphi_K (r_K \cos \varphi_K)}{h_K^2 + 2h_K r_K \sin \varphi_K + r_K^2 \sin^2 \varphi_K} \dot{\varphi}_K \\ &= \frac{1}{\frac{r_K^2 \cos^2 \varphi_K}{h_K^2 + 2h_K r_K \sin \varphi_K + r_K^2 \sin^2 \varphi_K} + 1} \frac{-r_K \sin \varphi_K (h_K + r_K \sin \varphi_K) - r_K \cos \varphi_K (r_K \cos \varphi_K)}{h_K^2 + 2h_K r_K \sin \varphi_K + r_K^2 \sin^2 \varphi_K} \dot{\varphi}_K \\ &= \frac{1}{\frac{r_K^2 \cos^2 \varphi_K + h_K^2 + 2h_K r_K \sin \varphi_K + r_K^2 \sin^2 \varphi_K}{h_K^2 + 2h_K r_K \sin \varphi_K + r_K^2 \sin^2 \varphi_K}} \frac{-r_K \sin \varphi_K (h_K + r_K \sin \varphi_K) - r_K \cos \varphi_K (r_K \cos \varphi_K)}{h_K^2 + 2h_K r_K \sin \varphi_K + r_K^2 \sin^2 \varphi_K} \dot{\varphi}_K \\ &= \frac{h_K^2 + 2h_K r_K \sin \varphi_K + r_K^2 \sin^2 \varphi_K}{r_K^2 \cos^2 \varphi_K + h_K^2 + 2h_K r_K \sin \varphi_K + r_K^2 \sin^2 \varphi_K} \frac{-r_K \sin \varphi_K (h_K + r_K \sin \varphi_K) - r_K \cos \varphi_K (r_K \cos \varphi_K)}{h_K^2 + 2h_K r_K \sin \varphi_K + r_K^2 \sin^2 \varphi_K} \dot{\varphi}_K \\ &= \frac{-r_K \sin \varphi_K (h_K + r_K \sin \varphi_K) - r_K \cos \varphi_K (r_K \cos \varphi_K)}{r_K^2 \cos^2 \varphi_K + h_K^2 + 2h_K r_K \sin \varphi_K + r_K^2 \sin^2 \varphi_K} \dot{\varphi}_K \\ &= -\frac{r_K^2 + r_K h_K \sin \varphi_K}{r_K^2 + 2 \sin \varphi_K r_K h_K + h_K^2} \dot{\varphi}_K \\ &= -\frac{r_K (r_K + h_K \sin \varphi_K)}{r_K^2 + 2 \sin \varphi_K r_K h_K + h_K^2} \dot{\varphi}_K \end{aligned}$$

b)

Die Länge der Feder beträgt

$$l_F = h_s \tan \varphi_S + 2l_{F0}$$

Der Tangens ist aus der Geometrie der Angabe ersichtlich.

c)

Den Schwerpunktpunktsvektor kann man hier direkt aus der Angabe ablesen

$$\mathbf{r}_S = l_S \begin{bmatrix} \sin \varphi_S \\ \cos \varphi_S \end{bmatrix},$$

und der zugehörige Geschwindigkeitsvektor lautet

$$\mathbf{v}_S = l_s \begin{bmatrix} \cos \varphi_S \\ -\sin \varphi_S \end{bmatrix} \dot{\varphi}_S$$

d)

Die beiden kinetischen Energie lauten

$$\begin{aligned} T_K &= \frac{1}{2} I_K \dot{\varphi}_K^2 \\ T_S &= \frac{1}{2} I_S \dot{\varphi}_S^2 + \frac{1}{2} m_S l_S^2 \dot{\varphi}_S^2 \\ &= \frac{1}{2} (m_S + l_S^2) \dot{\varphi}_S^2 \end{aligned}$$

e)

Die beiden potentiellen Energien lauten

$$\begin{aligned} V_S &= l_S m_s g \cos \varphi_S \\ V_F &= \frac{1}{2} k_F (l_F - l_{F0}) \\ &= \frac{1}{2} k_F (h_s \tan \varphi_S + l_{F0}) \end{aligned}$$

f)

Die generalisierte Kraft kann direkt aus der Angabe hergeleitet werden

$$Q = M_K$$

g)

Die Lagrange-Funktion lautet hier

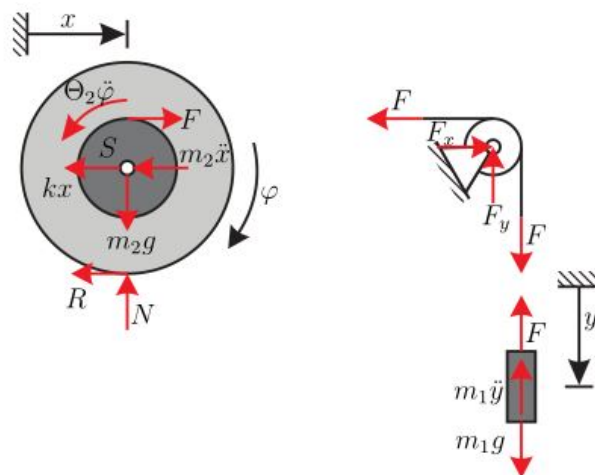
$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2} \left( I_K + (I_S + m_S l_S^2) \left( \frac{r_K (r_K + h_K \sin \varphi_K)}{r_K^2 + 2 \sin \varphi_K r_K h_K + h_K^2} \right)^2 \right) \dot{\varphi}_K^2 \\ &\quad - l_S m_s g \cos \left( \arctan \left( \frac{r_K \cos \varphi_K}{h_K + r_K \sin \varphi_K} \right) \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} k_F \left( h_s \frac{r_K \cos \varphi_K}{h_K + r_K \sin \varphi_K} + l_{F0} \right) \end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichung lässt sich mit folgender Formel bestimmen

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_K} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_K} = Q$$

## Beispiel 2

a)



b)

Kräftegleichgewicht der Trommel in der y-Richtung:

$$N - m_2 g = 0$$

c)

Impuls- und Drehimpulsbilanz der Trommel:

$$F - R - kx - m_2 \ddot{x} = 0$$

$$r_i F + r_a R - \Theta_2 \ddot{\varphi} = 0$$

d)

Impulsbilanz des Blockes in y-Richtung:

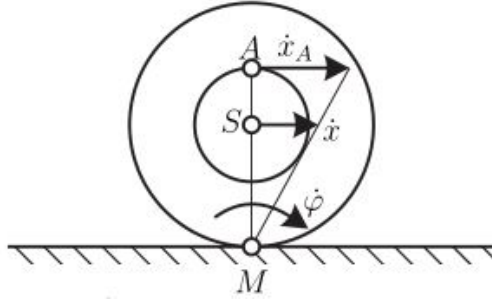
$$m_1 g - F - m_1 \ddot{y} = 0$$

e)

Da Geschwindigkeit im Punkt M gleich 0 ist, gilt folgender Zusammenhang für den Schwerpunkt S

$$\dot{x} = r_a \dot{\varphi}$$

$$\ddot{x} = r_a \ddot{\varphi}$$



f)

Zusammenhang:

$$\begin{aligned}\dot{y} &= (r_i + r_a)\dot{\varphi} \\ \ddot{y} &= (r_i + r_a)\ddot{\varphi}\end{aligned}$$

Dieser Zusammenhang ist aber nur dann gültig, wenn das Seil nicht ausgedehnt ist, da in diesem Fall  $\dot{y} = \dot{x}_A$  gilt.

g)

Aus der Impulsbilanz der Trommel folgt

$$F = m_2\ddot{x} + R + kx$$

Setzt man dies in die Drehimpulsbilanz ein und formt diese nach R um, erhält man

$$R = \frac{-m_2r_i\ddot{x} + \Theta_2\ddot{x} - kxr_i}{r_i + r_a}$$

Rückeingesetzt ergibt das

$$F = m_2\ddot{x} + \frac{-m_2r_i\ddot{x} + \Theta_2\ddot{x} - kxr_i}{r_i + r_a} + kx$$

Setzt man nun alle bekannten Größen in die Impulsbilanz des Blockes ein, erhält man schließlich

$$m_1g - m_2\ddot{x} - \frac{-m_2r_i\ddot{x} + \Theta_2\ddot{x} - kxr_i}{r_i + r_a} - kx - m_1(r_i + r_a)\ddot{\varphi} = 0$$

Formt man nun diese Gleichung auf  $\ddot{\varphi}$  um, ergibt sich

$$\ddot{\varphi} = \frac{-m_2\ddot{x}r_a + m_1g(r_i + r_a) - kxr_a}{m_1(r_i + r_a)^2 + \Theta_2}$$

Dies in  $\ddot{x}$  eingesetzt, folgt

$$\ddot{x} = \frac{-m_2\ddot{x}r_a^2 + m_1gr_a(r_i + r_a) - kxr_a^2}{m_1(r_i + r_a)^2 + \Theta_2}$$

Somit folgt die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} \left( 1 + \frac{m_2 r_a^2}{m_1 (r_i + r_a)^2 + \Theta_2} \right) = \frac{m_1 g r_a (r_i + r_a) - k x r_a^2}{m_1 (r_i + r_a)^2 + \Theta_2}$$

$$\ddot{x} \left( \frac{m_1 (r_i + r_a)^2 + \Theta_2 + m_2 r_a^2}{m_1 (r_i + r_a)^2 + \Theta_2} \right) = \frac{m_1 g r_a (r_i + r_a) - k x r_a^2}{m_1 (r_i + r_a)^2 + \Theta_2}$$

zu

$$\ddot{x} = \frac{m_1 (r_i + r_a) g r_a - k x r_a^2}{m_1 (r_i + r_a)^2 + m_2 r_a^2 + \Theta_2}$$

### Beispiel 3

a)

Die Wärmeleitgleichungen für das Kabel und die Isolation können mithilfe der Wärmeleitgleichung für Zylinderkoordinaten aus der Formelsammlung aufgestellt werden und daher lauten diese

$$\rho_l c_l \frac{\partial T_l(r, t)}{\partial t} = \lambda_l \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_l(r, t)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_l(r, t)}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T_l(r, t)}{\partial z^2} \right) + g$$

$$\rho_i c_i \frac{\partial T_i(r, t)}{\partial t} = \lambda_i \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_i(r, t)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_i(r, t)}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T_i(r, t)}{\partial z^2} \right)$$

Da es sich um ein unendlich langes Kabel handelt, kann die Abhängigkeit der z-Koordinate vernachlässigt werden. Außerdem kann aufgrund der Kabelsymmetrie die Abhängigkeit von  $\varphi$  entfallen.

An der Stelle  $r = 0$  muss

$$\left. \frac{\partial T_l}{\partial r} \right|_{r=0} = 0$$

Die Lösung der Wärmeleitgleichung muss 2-mal stetig differenzierbar sein, daher gilt an der Kontaktstelle  $r_i = r_l$

$$T_l(r, t) = T_i(r, t)$$

Mittels Konvektion tauscht das Kabel samt Isolation Wärme mit der Umgebung aus und somit muss an der Stelle  $r = r_i$

$$-\lambda_i \left. \frac{\partial T_i(r, t)}{\partial r} \right|_{r=r_i} = -\dot{q}^a(t)$$

Die Gleichung wurde mithilfe des Wärmeleitgesetzes aus der Formelsammlung aufgestellt.

b)

Im stationären Fall verschwindet die zeitlichen Ableitungen, daher erhalten wir die Wärmeleitgleichungen

$$0 = \lambda_i \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_l(r, t)}{\partial r} \right) \right) + g$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_i(r, t)}{\partial r} \right)$$

Nun folgt die Überprüfung ob die beiden bekannten Temperaturprofile die stationären Gleichungen erfüllen.

$T_l(r)$ :

$$0 = \lambda_i \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_l(r, t)}{\partial r} \right) \right) + g$$

$$0 = \lambda_i \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{-2gr^2}{4\lambda_l} \right) \right) + g$$

$$0 = \cancel{\lambda_i} \left( \frac{1}{\cancel{r}} \frac{-g\cancel{r}}{\cancel{\lambda_l}} \right) + g$$

$$0 = -g + g = 0$$

$T_i(r)$ :

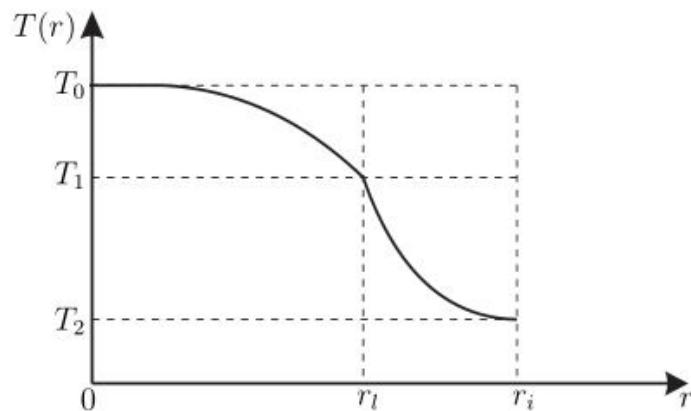
$$0 = \frac{\partial}{\partial r} \left( \cancel{r} (T_1 - T_2) \frac{\cancel{r_i}}{\cancel{r} \ln(r_l/r_i)} \frac{1}{\cancel{r_i}} \right)$$

$$0 = 0$$

Somit ist bewiesen, dass die beiden gegebenen Temperaturprofile die stationären Wärmeleitgleichungen erfüllen.

c)

Der Temperaturverlauf sieht wie folgt aus



Unter Berücksichtigung aller Randbedingungen folgt

$$T_0 = T_1 + \frac{gr_l^2}{4\lambda_l}$$

d)

Die volumetrische Wärmequelle lautet

$$g = w_l \left( \frac{I}{r_l^2 \pi} \right)^2$$

Die eingebrachte Energie lautet

$$\dot{W} = gr_l^2 \pi L = \frac{w_l L}{r_l^2 \pi} I^2$$

e)

Die beiden Gesetzmäßigkeiten sind das Reziprozitätsgesetz

$$A_i F_{ij} = A_j F_{ji}$$

und der Summationsregel

$$1 = \sum_{j=1}^N F_{ij} \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

Bei konvexen Körpern ist der Sichtfaktor  $F_{ii}$  immer gleich 0.

f)

Die gesuchte Wärmestromdichte wird mithilfe der Nettowärmestromdichte

$$\dot{\mathbf{q}}_s = (\mathbf{E} - \mathbf{F})(\mathbf{E} - (\mathbf{E} - \text{diag}\{\varepsilon\})\mathbf{F})^{-1} \text{diag}\{\varepsilon\} \sigma \mathbf{T}^4$$

mit den Vektoren  $\mathbf{q}_s = [\dot{q}_s^a, \dot{q}_s^w]^T$ ,  $\mathbf{T} = [T_2, T_W]^T$  und  $\varepsilon = [\varepsilon_i, \varepsilon_w]^T$  und der Einheitsmatrix

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bestimmung der Sichtfaktoren:

$$\begin{aligned} F_{ii} &= 0 \\ F_{iw} &= 1 \\ r_i \pi &= (a_w + b_w) F_{wi} \\ F_{wi} &= \frac{r_i \pi}{a_w + b_w} \\ F_{ww} &= 1 - \frac{r_i \pi}{a_w + b_w} \end{aligned}$$

Damit lautet die Sichtfaktormatrix

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{r_i \pi}{a_w + b_w} & 1 - \frac{r_i \pi}{a_w + b_w} \end{bmatrix}$$

g)

Die konvektive Wärmestromdichte  $\dot{q}_k^a$  lautet

$$\begin{aligned} \dot{q}_k^a &= -\alpha(T_2 - T_\infty) \\ &= \alpha(T_\infty - T_2) \end{aligned}$$

Somit folgt für den gesamten Wärmestrom  $\dot{Q}^a$  an der Stelle  $r = r_i$

$$\dot{Q}^a = 2r_i \pi L (\dot{q}_k^a + \dot{q}_s^a)$$

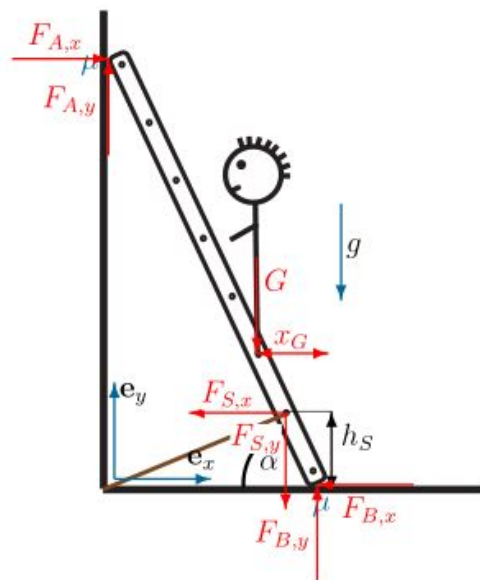


2.7 08.07.2016

### Beispiel 1

a)

Wirkende Kräfte



b)

Kräftegleichgewicht:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x : F_{A,x} - F_{B,x} &= 0 \\ \mathbf{e}_y : F_{A,y} + F_{B,y} - G &= 0 \quad , G = mg \end{aligned}$$

Momentengleichgewicht im Fußende der Leiter:

$$x_G G - L \cos \alpha F_{A,y} - L \sin \alpha F_{A,x} = 0$$

c)

Die beiden Haftbedingungen lauten

$$\begin{aligned} F_{A,y} &\leq \mu F_{A,x} \\ F_{B,x} &\leq \mu F_{B,y} \end{aligned}$$

Setzt man diese in die Gleichungen des Kräftegleichgewichts ein erhält man die Teilkräfte. Anfangs müssen aber noch einige Zwischenrechnungen durchgeführt werden.

$$\begin{aligned}
 F_{A,y} &= \mu F_{A,x} & F_{B,x} &= \mu F_{B,y} \\
 F_{A,x} &= F_{B,x} \\
 F_{A,y} &= G - F_{B,y} \\
 \mu F_{A,x} &= G - F_{B,y} \\
 \mu^2 F_{B,y} &= G - F_{B,y} \\
 (\mu^2 + 1) F_{B,y} &= G \\
 F_{B,y} &= \frac{1}{\mu^2 + 1} G \\
 F_{B,x} = F_{A,x} &= \frac{\mu}{\mu^2 + 1} G \\
 F_{A,y} &= \frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} G
 \end{aligned}$$

i)

Damit man die Leiter nicht wegrutscht muss

$$\begin{aligned}
 x_G G - L \cos \alpha \frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} G - L \sin \alpha \frac{\mu}{\mu^2 + 1} G &\leq 0 \\
 x_G &\leq L \frac{\mu}{\mu^2 + 1} (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)
 \end{aligned}$$

ii)

Folgende Bedingung gilt für den Steigungswinkel

$$\tan \alpha \geq \frac{1}{\mu}$$

Daraus folgen folgende Grenzen für den Steigungswinkel

$$\frac{\pi}{2} \geq \alpha \geq \arctan \left( \frac{1}{\mu} \right)$$

Aus der Angabe ist ersichtlich dass der Steigungswinkel maximal  $\frac{\pi}{2}$  sein kann.

d)

Adaptiertes Kräftegleichgewicht:

$$\begin{aligned}
 F_{A,x} - \mu F_{B,y} - \cos \beta F_S &= 0 \\
 \mu F_{A,x} + F_{B,y} - \sin \beta F_S &= G \\
 5 - (L \mu \cos \alpha + L \sin \alpha) F_{A,x} + \left( \frac{\sin \beta}{\tan \beta} + \cos \beta \right) h_S F_S &= -L \cos \alpha G
 \end{aligned}$$

Durch Umformen folgt die Seilkraft

$$F_S = G \frac{L \tan \alpha \cos \alpha (\mu^2 + 1)}{((a - h_S(\mu^2 + 1)) \cos \beta + a \mu \sin \alpha) \tan \alpha - \sin \beta h_S(\mu^2 + 1)}$$

mit

$$a = L(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$$

## Beispiel 2

a)

Der Winkel  $\varphi$  und die Position des Zylinder  $s_Z$  sind durch ein Rollbewegung miteinander verknüpft. Diese beiden stehen durch

$$\dot{s}_Z - \dot{s}_W = -R\dot{\varphi}$$

mit den gegebenen generalisierten Koordinaten in Verbindung.

b)

Schwerpunktsvektoren:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_W &= s_W \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{bmatrix} \\ \mathbf{r}_Z &= s_Z \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{bmatrix} + \left( \frac{h_W}{2} + R \right) \begin{bmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix} \end{aligned}$$

c)

Um die kinetische Energie des Gesamtsystemes bestimmen zu können benötigt man zuerst einmal die entsprechenden Geschwindigkeiten.

$$\begin{aligned} T_W &= \frac{1}{2} m_W \dot{s}_W^2 \\ T_Z &= \frac{1}{2} m_Z \dot{s}_Z^2 + \frac{1}{2} \Theta_{zz} \dot{\varphi}^2 \\ &= \frac{1}{2} m_Z \dot{s}_Z^2 + \frac{1}{2} \frac{\Theta_{zz}}{R^2} (\dot{s}_W - \dot{s}_Z)^2 \end{aligned}$$

Für  $\varphi$  wurde die Bedingung aus Punkt a) verwendet.

d)

Die potentiellen Energien von Wagen und Zylinder lauten

$$\begin{aligned} V_W &= -m_W g \sin \alpha s_W \\ V_Z &= -m_Z g \sin \alpha s_Z \end{aligned}$$

e)

Die potentiellen Energien der Federn lauten

$$V_{f1} = \frac{1}{2}c(l_{f1} - l_0)^2 = \frac{1}{2}c\left(s_W - \frac{l_W}{2} - l_0\right)^2$$

$$V_{f2} = \frac{1}{2}c(l_{f2} - l_0)^2 = \frac{1}{2}c\left(L - s_W - \frac{l_W}{2} - l_0\right)^2$$

f)

Zuerst wird einmal die Lagrange-Funktion bestimmt.

$$\begin{aligned} L = T - V &= T_W + T_Z - V_W - V_Z - V_{f1} - V_{f2} \\ &= \frac{1}{2}m_W\dot{s}_W^2 + \frac{1}{2}m_Z\dot{s}_Z^2 + \frac{1}{2}\frac{\Theta_{zz}}{R^2}(\dot{s}_W - \dot{s}_Z)^2 + m_Wg\sin\alpha s_W + m_Zg\sin\alpha s_Z - \\ &\quad - \frac{1}{2}c\left(s_W - \frac{l_W}{2} - l_0\right)^2 - \frac{1}{2}c\left(L - s_W - \frac{l_W}{2} - l_0\right)^2 \end{aligned}$$

Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_W}\right) - \frac{\partial L}{\partial s_W} &= 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_Z}\right) - \frac{\partial L}{\partial s_Z} &= 0 \end{aligned}$$

Einzelne Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial s_W} &= m_Wg\sin\alpha - c\left(s_W - \frac{l_W}{2} - l_0\right) + c\left(L - s_W - \frac{l_W}{2} - l_0\right) \\ &= m_Wg\sin\alpha - c(2s_W - L) \\ \frac{\partial L}{\partial s_Z} &= m_Zg\sin\alpha \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{s}_W} &= m_W\dot{s}_W + \frac{\Theta_{zz}}{R^2}(\dot{s}_W - \dot{s}_Z) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_W}\right) &= m_W\ddot{s}_W + \frac{\Theta_{zz}}{R^2}(\ddot{s}_W - \ddot{s}_Z) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{s}_Z} &= m_Z\dot{s}_Z - \frac{\Theta_{zz}}{R^2}(\dot{s}_W - \dot{s}_Z) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_Z}\right) &= m_Z\ddot{s}_Z - \frac{\Theta_{zz}}{R^2}(\ddot{s}_W - \ddot{s}_Z) \end{aligned}$$

Somit lauten die ausgewerteten Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m_W\ddot{s}_W + \frac{\Theta_{zz}}{R^2}(\ddot{s}_W - \ddot{s}_Z) - m_Wg\sin\alpha + c(2s_W - L) &= 0 \\ m_Z\ddot{s}_Z - \frac{\Theta_{zz}}{R^2}(\ddot{s}_W - \ddot{s}_Z) - m_Zg\sin\alpha &= 0 \end{aligned}$$

Bewegungsgleichungen für die entsprechenden Bereiche

$$m_W \ddot{s}_W + \frac{\Theta_{zz}}{R^2} (\ddot{s}_W - \ddot{s}_Z) = m_W g \sin \alpha - c(2s_W - L)$$

$$m_Z \ddot{s}_Z - \frac{\Theta_{zz}}{R^2} (\ddot{s}_W - \ddot{s}_Z) = m_Z g \sin \alpha$$

Bereich der ersten Gleichung

$$\frac{l_W}{2} \leq s_W \leq L - \frac{l_W}{2}$$

Bereich der zweiten Gleichung

$$s_W - \frac{l_W}{2} + R \leq s_Z \leq s_W + \frac{l_W}{2} - R$$

### Beispiel 3

a)

Aufgrund der ebenen Oberflächen strahlen die drei Schienen nicht auf sich selbst ab daher kann man daraus für die Sichtfaktoren

$$F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0$$

schließen. Aufgrund der Symmetrie kann man außerdem

$$F_{12} = F_{13} = F_{21} = F_{31} = \overline{F}$$

sagen. Aufgrund der gegebenen Anordnung folgt

$$F_{23} = F_{32} = 0$$

Die übrigen Faktoren werden mithilfe der Summationsregel bestimmt. Diese lauten daher

$$F_{1\infty} = 1 - 2\overline{F}$$

$$F_{2\infty} = 1 - \overline{F}$$

$$F_{3\infty} = 1 - \overline{F}$$

Damit lautet die Sichtfaktormatrix

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & \overline{F} & \overline{F} & 1 - 2\overline{F} \\ \overline{F} & 0 & 0 & 1 - \overline{F} \\ \overline{F} & 0 & 0 & 1 - \overline{F} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

Geometrische Zusammenhänge

$$\sin(\Theta_{2,0}) = \frac{L - x}{\sqrt{a^2 + (L - x)^2}}$$

$$\sin(\Theta_{2,1}) = \frac{2L - x}{\sqrt{a^2 + (2L - x)^2}}$$

Nun kann man den Sichtfaktor exakt bestimmen durch

$$\begin{aligned}
F_{21} &= \frac{1}{2L} \int_0^L \sin(\Theta_{2,1}) - \sin(\Theta_{2,0}) dx \\
&= \frac{1}{2L} \int_0^L \frac{2L-x}{\sqrt{a^2 + (2L-x)^2}} - \frac{L-x}{\sqrt{a^2 + (L-x)^2}} \\
&= \frac{1}{2L} \left( \int_0^L \frac{2L-x}{\sqrt{a^2 + (2L-x)^2}} dx - \int_0^L \frac{L-x}{\sqrt{a^2 + (L-x)^2}} dx \right)
\end{aligned}$$

Mit der Substitution für das erste Integral

$$\begin{aligned}
\sigma &= a^2 + (2L-x)^2 \\
d\sigma &= -2(2L-x)dx \\
dx &= -\frac{d\sigma}{2(2L-x)}
\end{aligned}$$

und für das zweite Integral

$$\begin{aligned}
\sigma &= a^2 + (L-x)^2 \\
d\sigma &= -2(L-x)dx \\
dx &= -\frac{d\sigma}{2(L-x)}
\end{aligned}$$

Nun folgt

$$\begin{aligned}
F_{21} &= \frac{1}{4L} \left( \int_{a^2+L^2}^{a^2+4L^2} \sigma^{-\frac{1}{2}} d\sigma - \int_{a^2}^{a^2+L^2} \sigma^{-\frac{1}{2}} d\sigma \right) \\
&= \frac{1}{2L} \left( \sqrt{a^2 + 4L^2} + a - 2\sqrt{a^2 + L^2} \right)
\end{aligned}$$

c)

Aufgrund der Symmetrie folgt

$$A_4 = A_2 + A_3$$

woraus man

$$\frac{1}{2}A_4 = A_2 = A_3$$

schließen kann. Da die Schienen 2 und 3 zu einem Körper zusammengefasst werden, folgt für den Sichtfaktor des zusammengefassten Körper zur Schiene 1

$$F_{41} = \overline{F}$$

Mit dem Reziprozitätsgesetz folgt

$$F_{14} = 2\overline{F}$$

Damit lautet die Sichtfaktormatrix

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 2\overline{F} \\ \overline{F} & 0 \end{bmatrix}$$

d)

Die Wärmeleitgleichung hier lautet

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} T_S(z) = 0$$

Die Randbedingungen für dieses Wärmeleitproblem lauten

$$\begin{aligned} -\lambda \frac{\partial}{\partial z} T_S(0) &= \dot{q}_4 \\ T_S(b) &= T_\infty \end{aligned}$$

Lösungsweg der Wärmeleitgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} T_S(z) &= 0 \\ dT_S(z) &= C_1 dz \\ T_S(z) &= C_1 z + C_2 \end{aligned}$$

Setzt man nun beide Randbedingungen ein folgt für die Konstanten

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{\dot{q}_4}{\lambda} \\ C_2 &= T_\infty + \frac{\dot{q}_4}{\lambda} b \end{aligned}$$

Nun lautet die vollständige Lösung der Wärmeleitgleichung

$$T_S(z) = T_\infty + \frac{\dot{q}_4}{\lambda} (b - z)$$

e)

Im stationären Fall müssen sich die Leistungen zu Null bilanzieren. Aus der längenbezogenen Leistungsbilanz für die Schiene 1

$$\int_0^L \dot{q}_1 dx = \int_0^L \int_0^c \rho_1 \left( \frac{I}{cL} \right)^2 dx dz$$

folgt schließlich der Wärmestrom

$$\dot{q}_1 = \frac{\rho_1}{cL^2} I^2$$

Da die Oberflächentemperatur  $T_4$  der Schienen 2 und 3 der stationären Lösung am Rand entsprechen muss lautet das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{q}_1(T_1, T_4) - \frac{\rho_1}{cL^2} I^2 &= 0 \\ T_4 - T_\infty - \frac{\dot{q}_4(T_1, T_4)}{\lambda} b &= 0 \end{aligned}$$

Alternativ kann auch die eine Randbedingung aus Punkt d) angepasst werden. Diese lautet damit

$$-\lambda \frac{\partial}{\partial z} T_S(0) = \dot{q}_4(T_1, T_4)$$

## 2.8 23.09.2016

### Beispiel 1

a)

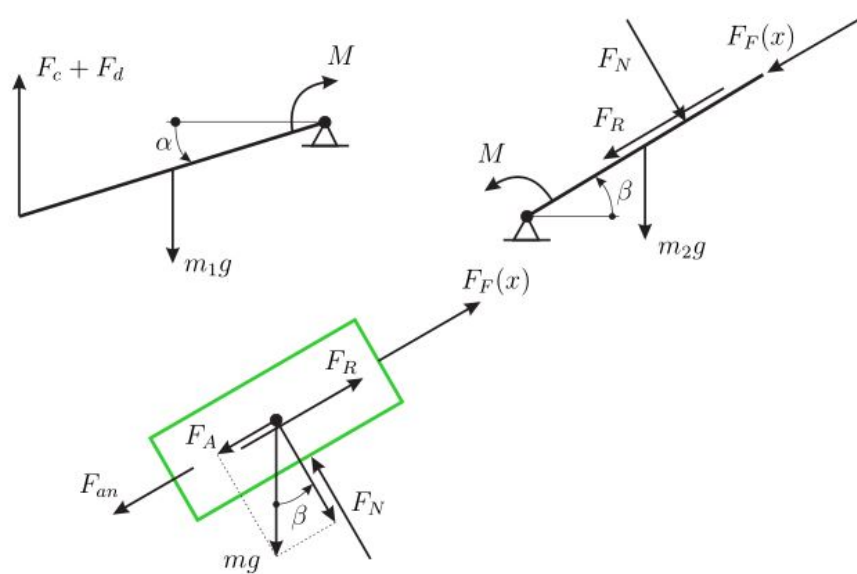
Mit den Freiheitsgraden

$$\mathbf{q} = [\alpha, \beta, x]^T$$

wird das angegebene System vollständig beschrieben.

b)

Freigeschnittene Körper inklusive aller wirkenden Kräfte:



Desweiteren gilt:

$$\begin{aligned} F_c &= cl_1 \sin(\alpha) \\ F_d &= dl_1 \dot{\alpha} \cos(\alpha) \\ M &= c_D(\alpha - \beta) \\ F_N &= mg \cos(\beta) \\ F_A &= mg \sin(\beta) \end{aligned}$$

Aufgrund der Rotation des Stabes 2 wirkt auch eine Fliehkraft auf die Masse  $m$ . Diese lautet

$$F_{Flieh} = m(l_2 - x)\dot{\beta}^2$$

c)

Mit der Form der Haftreibung aus der Formelsammlung folgt die Haftbedingung

$$|F_{an} + F_A - F_F(x)| = |F_{an} + mg \sin(\beta) - F_F(x)| \leq mg \cos(\beta) \mu_H$$



d)

Die angegebenen Trägheitsmomente bezieht sich jeweils auf die Schwerpunkte der Stäbe. Da sich der Drehpunkt aber am Ende der Stäbe befindet muss man hier den Satz von Steiner anwenden.

$$J_1 = J_{S,1} + m_1 \frac{l_1^2}{4}$$
$$J_2 = J_{S,2} + m_2 \frac{l_2^2}{4}$$

Durch Anwendung des Impuls- und Drallsatz folgen die Bewegungsgleichungen

$$J_1 \ddot{\alpha} = m_1 g \frac{l_1}{2} \cos(\beta) - c_D(\alpha - \beta) - (cl_1 \sin(\alpha) + dl_1 \dot{\alpha} \cos(\alpha)) l_1 \cos(\alpha)$$
$$J_2 \ddot{\beta} = c_D(\alpha - \beta) - m_2 g \frac{l_2}{2} \cos(\beta) - mg(l_2 - x) \cos(\beta)$$
$$m\ddot{x} = F_{an} - F_F(x) - \mu_V \dot{x} + mg \sin(\beta)$$

Diese Gleichungen können unmittelbar aus den freigeschnittenen Körpern aus Punkt b) abgelesen werden.

e)

Für sehr kleine Winkel können die Näherungen

$$\sin(\alpha) = \alpha, \sin(\beta) = \beta$$

verwendet werden. Daraus kann man

$$\cos(\alpha) = 1, \cos(\beta) = 1$$

schließen.

f)

Nein es ist nicht möglich, weil in dieser Ruhelage die Feder keine Kraft und die Drehfeder kein Moment ausübt. Dadurch können aber nicht die durch die Gewichtskräfte entstehenden Momente ausgeglichen werden können.

## Beispiel 2

a)

spezifische Wärmekapazität  $c_P$  in  $J/(kgK)$   
Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  in  $W/(mK)$

b)

entsprechende Randbedingungen:

$$\begin{aligned}x = 0 : T(0, t) &= T_0 \\x = L : \partial T(L, t) / \partial x &= 0 \quad (\text{adiabate Randbedingung zweiter Art})\end{aligned}$$

c)

Die gesuchte Wärmestromdichte kann mittels der Formel für die Wärmestromdichte an der Kontaktfläche zweier Festkörper bestimmt werden.

$$\dot{q}_w(T) = \alpha(T_w - T(x, t))$$

d)

i)

Der geeignete Zustandsvektor lautet hier

$$\mathbf{T}(t) = [T_1(t), T_2(t), T_3(t)]^T$$

ii)

Die Form für die Rückwärtsdifferenz und zentrale Differenz kann aus der Formelsammlung entnommen werden. Daher lauten die Rückwärtsdifferenzen

$$\begin{aligned}\frac{\partial T(\Delta x, t)}{\partial x} &= \frac{T_1 - T_0}{\Delta x} \\ \frac{\partial T(i\Delta x, t)}{\partial x} &= \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta x} \quad \text{für } i = 2, 3\end{aligned}$$

und die zentralen Differenzen

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 T(i\Delta x, t)}{\partial x^2} &= \frac{(T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}))}{\Delta x^2} \quad \text{für } i = 1, 2 \\ \frac{\partial^2 T(L, t)}{\partial x^2} &= \frac{2T_2 - 2T_3}{\Delta x^2}\end{aligned}$$

iii)

Ersetzt man nun die bisherigen Erkenntnis in die Gleichung aus der Angabe ein erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned}\rho c_P \dot{T}_1(t) + \rho c_P \frac{1}{\Delta x} (T_1 - T_0) &= \lambda \frac{1}{\Delta x^2} (T_0 - 2T_1 + T_2) + \frac{4}{d_h} \alpha (T_w - T_1(t)) \\ \rho c_P \dot{T}_2(t) + \rho c_P \frac{1}{\Delta x} (T_2 - T_1) &= \lambda \frac{1}{\Delta x^2} (T_1 - 2T_2 + T_3) + \frac{4}{d_h} \alpha (T_w - T_2(t)) \\ \rho c_P \dot{T}_3(t) + \rho c_P \frac{1}{\Delta x} (T_3 - T_2) &= \lambda \frac{1}{\Delta x^2} (2T_2 - 2T_3) + \frac{4}{d_h} \alpha (T_w - T_3(t))\end{aligned}$$

Vergleicht man nun diese drei Gleichungen mit der Form aus der Angabe erhält man die Matrizen

$$\mathbf{K} = \frac{1}{\Delta x} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

und die Vektoren

$$\mathbf{b}_v = \frac{T_0}{\Delta x} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_\lambda = \frac{T_0}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{q}}_w(\mathbf{T}) = \alpha (T_w \mathbf{1} - \mathbf{T})$$

e)

Durch lösen der Differentialgleichung (1) aus der Angabe erhält man unter Beachtung der Stationarität und den Randbedingungen die folgende Lösung

$$T(x) = (T_0 - T_w) \exp\left(-\frac{4\alpha}{\rho c_P v d_h} x\right) + T_w$$

### Beispiel 3

a)

Man kann das System noch mit dem Vektor  $\mathbf{q} = [x_W, x_{1L}, y_{1L}]^T$  beschrieben werden. Die letzten beiden Koordinaten sind die Koordinaten des Lastschwerpunktes bezogen auf das Inertialsystem. Ein weiteres Beispiel wäre  $\mathbf{q} = [x_w, \alpha, l]^T$ , wobei  $l$  die abgewinkelte Seillänge ist. b)

Die erforderlichen Ortsvektoren sind jene die vom Ursprung des Inertialsystem zu den Schwerpunkten der einzelnen Teile zeigen.

$$\mathbf{r}_W = \begin{bmatrix} x_W \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{r}_L = \begin{bmatrix} x_W - d_0 - d_1 + x_L - (l_0 + r_T \varphi) \sin(\alpha) \\ -y_L - (l_0 + r_T \varphi) \cos(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}$$

c)

Die relevanten Geschwindigkeitsvektoren und Winkelgeschwindigkeitsvektor lauten

$$\dot{\mathbf{r}}_W = \begin{bmatrix} \dot{x}_W \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\dot{\mathbf{r}}_L = \begin{bmatrix} \dot{x}_W - r_T \dot{\varphi} \sin(\alpha) - (l_0 + r_T \varphi) \cos(\alpha) \dot{\alpha} \\ -r_T \dot{\varphi} \cos(\alpha) + (l_0 + r_T \varphi) \sin(\alpha) \dot{\alpha} \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\omega_T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

Die kinetische Energien der einzelnen Teile lauten

$$T_W = \frac{1}{2} m_W \dot{x}_W^2$$
$$T_T = \frac{1}{2} J_T \dot{\varphi}^2$$
$$T_L = \frac{1}{2} m_L ((\dot{x}_W - r_T \dot{\varphi} \sin(\alpha) - (l_0 + r_T \varphi) \cos(\alpha) \dot{\alpha})^2 \\ + (-r_T \dot{\varphi} \cos(\alpha) + (l_0 + r_T \varphi) \sin(\alpha) \dot{\alpha})^2)$$

Die gesamte kinetische Energie des Systems lautet

$$T_{ges} = T_W + T_T + T_L$$

d)

Die potentiellen Einzelenergien lauten

$$\begin{aligned}V_W &= 0 \\V_L &= -m_L g(y_L + (l_0 + r_T \varphi) \cos(\alpha))\end{aligned}$$

Die potentielle Energie des Wagens ist 0, weil sich der Wagen immer in derselben Ebene befindet. Die gesamte potentielle Energie des Systems lautet

$$V_{ges} = V_L$$

e)

Der Vektor der generalisierten Kräfte kann unmittelbar aus Angabe bestimmt werden, da jede externe Kraft bzw. Moment unmittelbar auf der entsprechenden generalisierten Koordinate wirkt. Der Vektor lautet daher

$$\tau = \begin{bmatrix} F_{an} - F_R \\ 0 \\ M_T \end{bmatrix}$$

f)

Die Lagrange-Funktion lautet

$$L = T_{ges} - V_{ges}$$

und damit die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \tau$$

## 2.9 18.11.2016

### Beispiel 1

a)

Die gesuchte Zwangsbedingung kann hier unmittelbar aus der Angabe abgelesen werden. Mithilfe der Annahme  $f(\Theta, \psi) = 0$  folgt die Zwangsbedingung

$$f(\Theta, \psi) = L \sin(\Theta) - L \sin(\Theta_0) - r \cos(\psi) = 0$$

b)

Die beiden gesuchten Ortsvektoren zu den Schwerpunkten der beiden Massen lauten

$$\mathbf{r}_M = \begin{bmatrix} l \cos(\Theta) - h \sin(\phi) \\ 0 \\ -l \sin(\Theta) - h \cos(\psi) \end{bmatrix}$$

und

$$\mathbf{r}_m = \begin{bmatrix} -L \cos(\Theta) - r \sin(\psi) \\ 0 \\ L \sin(\Theta) - r \cos(\psi) \end{bmatrix}$$

b)

Die gesuchten Geschwindigkeitsvektoren erhält man wie sonst, durch die zeitliche Ableitung der entsprechenden Ortsvektoren. Daher lauten dieses nun hier

$$\mathbf{v}_M = \begin{bmatrix} -l \sin(\Theta) \dot{\Theta} - h \cos(\phi) \dot{\phi} \\ 0 \\ -l \cos(\Theta) \dot{\Theta} + h \sin(\phi) \dot{\phi} \end{bmatrix}$$

Die Geschwindigkeit der kleinen Masse  $m$  muss in den Vektor

$$\mathbf{v}_{m,1} = \begin{bmatrix} L \sin(\Theta) \dot{\Theta} - r \cos(\psi) \dot{\psi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

und in den Vektor

$$\mathbf{v}_{m,2} = \begin{bmatrix} L \sin(\Theta) \dot{\Theta} - r \cos(\psi) \dot{\psi} \\ 0 \\ L \cos(\Theta) \dot{\Theta} + r \sin(\psi) \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

aufgeteilt werden. Der erste Vektor kann sich nur in der x-Richtung ausbreiten, da sich die Masse  $m$  zu dieser Zeit in der Rille befindet. Sobald die kleinen Masse aber diese verlässt, beschreibt nun der zweite Vektor die Geschwindigkeit der Masse  $m$ .

d)

Bevor die kinetischen Energien bestimmt werden können, müssen zuerst wieder einmal Nebenrechnungen durchgeführt werden.

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_M^T \mathbf{v}_M &= (-l \sin(\Theta) \dot{\Theta} - h \cos(\phi) \dot{\phi})^2 + (-l \cos(\Theta) \dot{\Theta} + h \sin(\phi) \dot{\phi})^2 \\
&= l^2 \dot{\Theta}^2 \sin^2(\Theta) + 2lh \dot{\Theta} \dot{\phi} \sin(\Theta) \cos(\phi) + h^2 \dot{\phi}^2 \cos^2(\phi) + l^2 \dot{\Theta}^2 \cos^2(\Theta) - 2lh \dot{\Theta} \dot{\phi} \cos(\Theta) \sin(\phi) + h^2 \dot{\phi}^2 \sin^2(\phi) \\
&= l^2 \dot{\Theta}^2 (\sin^2(\Theta) + \cos^2(\Theta)) + h^2 \dot{\phi}^2 (\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)) + 2lh \dot{\Theta} \dot{\phi} (\sin(\Theta) \cos(\phi) - \cos(\Theta) \sin(\phi)) \\
&= l^2 \dot{\Theta}^2 + h^2 \dot{\phi}^2 + 2lh \dot{\Theta} \dot{\phi} \sin(\Theta - \phi) \\
\mathbf{v}_{m,1}^T \mathbf{v}_{m,1} &= (L \sin(\Theta) \dot{\Theta} - r \cos(\psi) \dot{\psi})^2 \\
\mathbf{v}_{m,2}^T \mathbf{v}_{m,2} &= (L \sin(\Theta) \dot{\Theta} - r \cos(\psi) \dot{\psi})^2 + (L \cos(\Theta) \dot{\Theta} + r \sin(\psi) \dot{\psi})^2 \\
&= L^2 \dot{\Theta}^2 \sin^2(\Theta) - 2Lr \dot{\Theta} \dot{\psi} \sin(\Theta) \cos(\psi) + r^2 \dot{\psi}^2 \cos^2(\psi) + L^2 \dot{\Theta}^2 \cos^2(\Theta) + 2Lr \dot{\Theta} \dot{\psi} \cos(\Theta) \sin(\psi) + r^2 \dot{\psi}^2 \sin^2(\psi) \\
&= L^2 \dot{\Theta}^2 (\sin^2(\Theta) + \cos^2(\Theta)) + r^2 \dot{\psi}^2 (\cos^2(\psi) + \sin^2(\psi)) - 2Lr \dot{\Theta} \dot{\psi} (\sin(\Theta) \cos(\psi) - \cos(\Theta) \sin(\psi)) \\
&= L^2 \dot{\Theta}^2 + r^2 \dot{\psi}^2 - 2Lr \dot{\Theta} \dot{\psi} \sin(\Theta - \psi)
\end{aligned}$$

Da man die einzelnen Trägheitsmomente vernachlässigbar sind, muss man daher nur die translatorischen kinetischen Energien des Gesamtsystems bestimmen.

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{2} M (l^2 \dot{\Theta}^2 + h^2 \dot{\phi}^2 + 2lh \dot{\Theta} \dot{\phi} \sin(\Theta - \phi)) + \frac{1}{2} m (L \sin(\Theta) \dot{\Theta} - r \cos(\psi) \dot{\psi})^2 \\
T_2 &= \frac{1}{2} M (l^2 \dot{\Theta}^2 + h^2 \dot{\phi}^2 + 2lh \dot{\Theta} \dot{\phi} \sin(\Theta - \phi)) + \frac{1}{2} m (L^2 \dot{\Theta}^2 + r^2 \dot{\psi}^2 - 2Lr \dot{\Theta} \dot{\psi} \sin(\Theta - \psi))
\end{aligned}$$

e)

Die potentiellen Teilenergien des Gesamtsystems lauten

$$\begin{aligned}
V_M &= Mg(-l \sin(\Theta) - h \cos(\phi)) \\
V_m &= mg(L \sin(\Theta) - r \cos(\psi))
\end{aligned}$$

Daraus folgen die potentiellen Energien der beiden Phasen.

$$\begin{aligned}
V_1 &= V_M \\
V_2 &= V_M + V_m
\end{aligned}$$

## Beispiel 2

a)

Ersatzfederelement:

$$\tilde{c} = \frac{c_3 c_4}{c_3 + c_4}$$

Ersatzdämpferelement:

$$\tilde{d} = d_3 + d_4$$

entspannte Länge der Ersatzfeder:

$$\tilde{s}_0 = s_{03} + s_{04}$$

b)

Wendet man den Impulserhaltungssatz auf beide Massen an, erhält man

$$m_1 \ddot{s}_1 = -m_1 g - c_1(s_1 - s_{01}) - d\dot{s}_1 + c_2(s_2 - s_1 - s_{02}) + d_2(\dot{s}_2 - \dot{s}_1)$$

und

$$m_2 \ddot{s}_2 = -m_2 g - c_2(s_2 - s_1 - s_{02}) - d_2(\dot{s}_2 - \dot{s}_1) - \tilde{c}(s_2 - \tilde{s}_0) - \tilde{d}\dot{s}_2 - f_L$$

c)

Zuerst müssen die gerade ermittelten Differentialgleichungen so umgeformt werden, dass diese die gesuchte Form besitzen. Die gesuchte Form lautet

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{k} + \mathbf{b}f_L$$

umgeformte Gleichungen:

$$m_1 \ddot{s}_1 + (d_1 + d_2)\dot{s}_1 - d_2\dot{s}_2 + (c_1 + c_2)s_1 - c_2s_2 = -m_1g + c_1s_{01} - c_2s_{02}$$

$$m_2 \ddot{s}_2 - d_2s_1 + (\tilde{d} + d_2)\dot{s}_2 - c_2s_1 + (c_2 + \tilde{c})s_2 = -m_2g + \tilde{c}\tilde{s}_0 + c_2s_{02} - f_L$$

Hieraus folgt das System

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{q}} + \underbrace{\begin{bmatrix} d_1 + d_2 & -d_2 \\ -d_2 & \tilde{d} + d_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \dot{\mathbf{q}} + \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & \tilde{c} + c_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{q} = \underbrace{\begin{bmatrix} -m_1g + c_1s_{01} - c_2s_{02} \\ -m_2g + \tilde{c}\tilde{s}_0 + c_2s_{02} \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} f_L$$

d)

Im stationären Fall fallen aus den obigen System die zeitlichen Ableitungen weg und die Position der von  $m_2$  beträgt nun  $h$ . Daraus folgt nun das System

$$\underbrace{\begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & \tilde{c} + c_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \begin{bmatrix} s_1 \\ h \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -m_1g + c_1s_{01} - c_2s_{02} \\ -m_2g + \tilde{c}\tilde{s}_0 + c_2s_{02} \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} f_L$$

mit dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (c_1 + c_2)s_1 - c_2h &= k_1 \\ -c_2s_1 + (\tilde{c} + c_2)h &= k_2 - f_L \end{aligned}$$



Formt man nun beide Gleichungen um, erhält man schließlich die gesuchten Größen  $f_L$  und  $s_1$ .  
Erste Gleichung:

$$s_1 = \frac{k_1 + c_2 h}{c_1 + c_2}$$

Zweite Gleichung:

$$f_L = k_2 + c_2 s_1 - (\tilde{c} + c_2)h$$

Nun wird noch  $s_1$  eingesetzt und schließlich erhält man dadurch

$$f_L = k_2 + \frac{c_2(k_1 + c_2 h)}{c_1 + c_2} - (\tilde{c} + c_2)h$$

e)

Aufgrund von Abbildung 3 in der Angabe ergibt sich folgende Form der Geschwindigkeit  $v(t)$ :

$$v(t) = \begin{cases} \frac{v_{max} t}{t_1} & \text{für } 0 \leq t \leq t_1 \\ v_{max} & \text{für } t_1 \leq t \leq t_2 \\ \underbrace{\frac{-v_{max} t}{t_3 - t_2} + \left( \frac{v_{max} t_2}{t_3 - t_2} \right)}_n + v_{max} & \text{für } t_2 \leq t \leq t_3 \end{cases}$$

Durch Integration dieser Funktion erhält man schließlich die gesuchten Verlauf des Weges  $l(t)$ . Dieser lautet

$$l(t) = \begin{cases} \frac{v_{max} t^2}{2t_1} & \text{für } 0 \leq t \leq t_1 \\ \underbrace{\frac{v_{max} t_1}{2}}_{l(t_1)} + v_{max}(t - t_1) & \text{für } t_1 \leq t \leq t_2 \\ \underbrace{\frac{v_{max} t_1}{2} + v_{max}(t_2 - t_1)}_{l(t_2)} + \frac{-v_{max}(t^2 - t_2^2)}{2(t_3 - t_2)} + n(t - t_2) & \text{für } t_2 \leq t \leq t_3 \end{cases}$$

Setzt man nun  $n$  ein und vereinfacht man dann schließlich so weit wie möglich erhält man mit der Nebenrechnung

$$\begin{aligned} & \frac{-v_{max}(t^2 - t_2^2)}{2(t_3 - t_2)} + \left( \frac{v_{max} t_2}{t_3 - t_2} + v_{max} \right) (t - t_2) \\ & \frac{-v_{max}(t^2 - t_2^2)}{2(t_3 - t_2)} + \frac{v_{max}(t t_2 - t_2^2)}{t_3 - t_2} + v_{max}(t - t_2) \\ & \frac{-v_{max} t^2 + v_{max} t_2^2}{3(t_3 - t_2)} + \frac{2v_{max} t t_2 - 2v_{max} t_2^2}{3(t_3 - t_2)} + v_{max}(t - t_2) \\ & - \frac{v_{max}(t^2 - 2t t_2 + t_2^2)}{3(t_3 - t_2)} + v_{max}(t - t_2) \\ & - \frac{v_{max}(t - t_2)^2}{3(t - t_2)} + v_{max}(t - t_2) \end{aligned}$$

schließlich

$$l(t) = \begin{cases} \frac{v_{max}t^2}{2t_1} & \text{für } 0 \leq t \leq t_1 \\ \underbrace{\frac{v_{max}t_1}{2}}_{l(t_1)} + v_{max}(t - t_1) & \text{für } t_1 \leq t \leq t_2 \\ \underbrace{\frac{v_{max}t_1}{2} + v_{max}(t_2 - t_1)}_{l(t_2)} - \frac{v_{max}(t-t_2)^2}{2(t_3-t_2)} + v_{max}(t - t_2) & \text{für } t_2 \leq t \leq t_3 \end{cases}$$

f)

Hier muss man einfach den Ausdruck

$$df_L = q(\xi)d\xi$$

integrieren und man erhält die gesuchte Kraft  $f_L$ .

$$\begin{aligned} f_L(l(t)) &= \int_0^l q(\xi)d\xi = \int_0^l (1 + \cos(\xi))d\xi = (\xi + \sin(\xi))\big|_0^{l=l(t)} \\ &= l(t) + \sin(l(t)) \end{aligned}$$

### Beispiel 3

a)

Da sich hier um konvexe Flächen handelt lauten die jeweiligen Sichtfaktoren auf sich selbst

$$F_{aa} = 0$$

$$F_{bb} = 0$$

$$F_{xx} = 0$$

b)

Hier lauten die gesuchten Sichtfaktoren

$$F_{a1} = 1$$

$$F_{1a} = \frac{l_a}{l_1}$$

Der zweite Sichtfaktor wurde mithilfe des Reziprozitätsgesetz bestimmt.

c)

Aus der Summationregel folgen die drei Gleichungen

$$1 = F_{ab} + F_{ax}$$

$$1 = F_{ba} + F_{bx}$$

$$1 = F_{xa} + F_{xb}$$

d)

Nun kann das Gleichungssystem aufgestellt werden und dieses lautet

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{l_a}{l_b} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{l_a}{l_x} & \frac{l_b}{l_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{ab} \\ F_{ax} \\ F_{bx} \end{bmatrix}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} 1 &= F_{ab} + F_{ax} \\ 1 &= F_{ab} \frac{l_a}{l_b} + F_{bx} \\ 1 &= F_{ax} \frac{l_a}{l_x} + F_{bx} \frac{l_b}{l_x} \\ F_{bx} &= \left( 1 - F_{ax} \frac{l_a}{l_x} \right) \frac{l_x}{l_b} \\ &= \frac{l_x}{l_b} - F_{ax} \frac{l_a}{l_b} \end{aligned}$$

Durch einsetzen in die zweite Gleichung folgt

$$\begin{aligned} 1 &= F_{ab} \frac{l_a}{l_b} + \frac{l_x}{l_b} - F_{ax} \frac{l_a}{l_b} \\ F_{ax} &= \left( F_{ab} \frac{l_a}{l_b} + \frac{l_x}{l_b} - 1 \right) \frac{l_b}{l_a} \\ &= F_{ab} + \frac{l_x}{l_a} - \frac{l_b}{l_a} \end{aligned}$$

Jetzt muss man noch in die erste Gleichung einsetzen und daraus folgt

$$\begin{aligned} 1 &= F_{ab} + F_{ab} + \frac{l_x}{l_a} - \frac{l_b}{l_a} \\ 2F_{ab} &= 1 - \frac{l_x}{l_a} + \frac{l_b}{l_a} \\ 2F_{ab} &= \frac{l_a + l_b - l_x}{l_a} \\ F_{ab} &= \frac{l_a + l_b - l_x}{2l_a} \end{aligned}$$

e)

Der Sichtfaktor  $F_{ac}$  kann auch mit der Cross-String-Methode bestimmt und lautet daher

$$F_{ac} = \frac{l_x + l_y - l_b - l_d}{2l_a}$$

Der Lösungsweg von  $F_{ad}$  ist analog zum dem in Punkt d und daher lautet der Sichtfaktor

$$F_{ad} = \frac{l_a + l_d - l_y}{2l_a}$$

f)

Der Lösungsweg in der Musterlösung scheint nicht korrekt zu sein. Daher wurde keine Berechnung durchgeführt die man mit dieser hätte vergleichen können.

## 2.10 03.02.2017

### Beispiel 1

a)

Die Differentialgleichung kann einfach durch die Energieerhaltung aufgestellt werden und lautet daher

$$\rho c_p b^2 h \frac{d}{dt} T_s = P - Q$$

Der linke Teil der Gleichung entspricht der gespeicherten Energie im Satelliten und der rechte Teil entspricht dem Teil der den Satelliten erwärmt und dem Teil den der Satellit durch Wärmestrahlung an die Umgebung abgibt.

b)

Sowie der Satellit und der Planet strahlen nicht aus sich selbst. Deswegen lauten daher die entsprechenden Sichtfaktoren

$$F_{SS} = F_{PP} = 0$$

Da schon der Faktor  $F_{SP}$  bekannt ist kann mittels der Summationsregel der letzte Sichtfaktor ausgehend vom Satelliten bestimmt werden. Dieser lautet

$$F_{S\infty} = 1 - F_{SP}$$

Mithilfe des Reziprozitätsgesetz und der Summationsregel können schließlich alle anderen notwendigen Sichtfaktoren bestimmt werden.

$$F_{PS} = \frac{A_S}{A_P} F_{SP}$$
$$F_{P\infty} = 1 - F_{PS} = 1 - \frac{A_S}{A_P} F_{SP}$$

Da die Fläche der Umgebung mit  $\infty$  angenommen wird lauten zwei Sichtfaktoren folgendermaßen

$$F_{\infty S} = F_{\infty P} = 0$$

Mit der Summationsregel lautet schließlich der letzte Sichtfaktor

$$F_{\infty\infty} = 1$$

Die Sichtfaktormatrix lautet daher

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & F_{SP} & 1 - F_{SP} \\ \frac{A_S}{A_P} F_{SP} & 0 & 1 - \frac{A_S}{A_P} F_{SP} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c)

Der Nettowärmestrom kann direkt aus der Angabe abgelesen werden und lautet

$$Q'_o = \sigma a_1 (T_S^4 - T_\infty^4)$$

d)

Aufgrund des Aufbaues von Abbildung 1b folgt

$$F_{11} = F_{33} = 0 \quad F_{32} = 1$$

Über das Reziprozitätsgesetz folgt

$$F_{22} = 1 - \frac{a_3}{a_2}$$

Außerdem folgt aufgrund des Aufbaues

$$F_{12} = F_{21} = 0$$

und

$$F_{1\infty} = 1 \quad F_{2\infty} = 1 - F_{22} = \frac{a_3}{a_2}$$

Aus der Gleichung

$$\dot{\mathbf{q}} = \sigma(\mathbf{E} - \mathbf{F})\mathbf{T}^4$$

die beiden gesuchten Nettowärmestromdichten bestimmt werden. Durch Aufsummieren sämtlicher Wärmeströme des Satelliten lautet dieser

$$Q'_k = \sigma a_1 (T_S^4 - T_\infty^4)$$

e)

Das Ergebnis  $Q'_o = Q'_k$  zeigt, dass sich der abgegebene Wärmestrom des Satelliten nicht durch eine Kühlnut ändert.

## Beispiel 2

a)

Die beiden gesuchten Vektoren lauten

$$\mathbf{s}_m = \begin{bmatrix} l \sin(\alpha) \cos(\varphi) \\ l \sin(\alpha) \sin(\varphi) \\ L - l \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L - 2b \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

b)

Durch Ableiten nach der Zeit erhält man den gesuchten Geschwindigkeitsvektor und dieser lautet

$$\mathbf{v}_m = l \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \cos(\alpha) \cos(\varphi) - \dot{\varphi} \sin(\alpha) \sin(\varphi) \\ \dot{\alpha} \cos(\alpha) \sin(\varphi) + \dot{\varphi} \sin(\alpha) \cos(\varphi) \\ \dot{\alpha} \sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

c)

Die potentielle Energie des Systems lautet

$$V = 2mg(L - l \cos(\alpha))$$

Der Ansatz für die kinetische Energie lautet

$$T = 2 \frac{1}{2} m \mathbf{v}_m^T \mathbf{v}_m = m \mathbf{v}_m^T \mathbf{v}_m$$

d)

Anfangs muss die Lagrange-Funktion bestimmt werden. Diese lautet hier

$$L = T - V = ml^2 (\dot{\alpha}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2(\alpha)) - 2mg(L - l \cos(\alpha))$$

Die Form des Euler-Lagrange-Formalismus kann der Formelsammlung entnommen werden. Die notwendigen Ableitung lauten

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = 2ml^2 \dot{\varphi}^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) - 2mgl \sin(\alpha)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} = 2ml^2 \dot{\alpha}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2ml^2 \dot{\varphi} \sin^2(\alpha)$$

und

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} = 2ml^2 \ddot{\alpha}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2ml^2 \ddot{\varphi} + 4ml^2 \dot{\varphi} \sin(\alpha) \cos(\alpha) \dot{\alpha}$$

Die beiden Euler-Lagrange-Gleichungen lauten

$$2ml^2 \ddot{\alpha} - 2ml^2 \dot{\varphi}^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) + 2mgl \sin(\alpha) = 0$$

$$2ml^2 \ddot{\varphi} + 4ml^2 \dot{\varphi} \sin(\alpha) \cos(\alpha) \dot{\alpha} = \tau$$

Vereinfacht man diese beiden Gleichungen soweit wie möglich erhält man die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{\alpha} = \frac{\sin(\alpha)(l\dot{\varphi}^2 \cos(\alpha) - g)}{l}$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{\tau - 4ml^2 \dot{\alpha} \dot{\varphi} \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{2ml^2 \sin^2(\alpha)}$$

e)

Im stationären Fall mit konstanter Winkelgeschwindigkeit existieren die Bedingungen

$$\dot{\alpha} = \ddot{\alpha} = \ddot{\varphi} = 0$$

Aus der ersten Bewegungsgleichung kann man auf die Gleichung

$$0 = \frac{\sin(\alpha)(l\dot{\varphi}^2 \cos(\alpha) - g)}{l}$$

schließen und daraus folgt

$$\alpha \in \left\{ 0, \arccos\left(\frac{g}{l\dot{\varphi}^2}\right) \right\}$$

f)

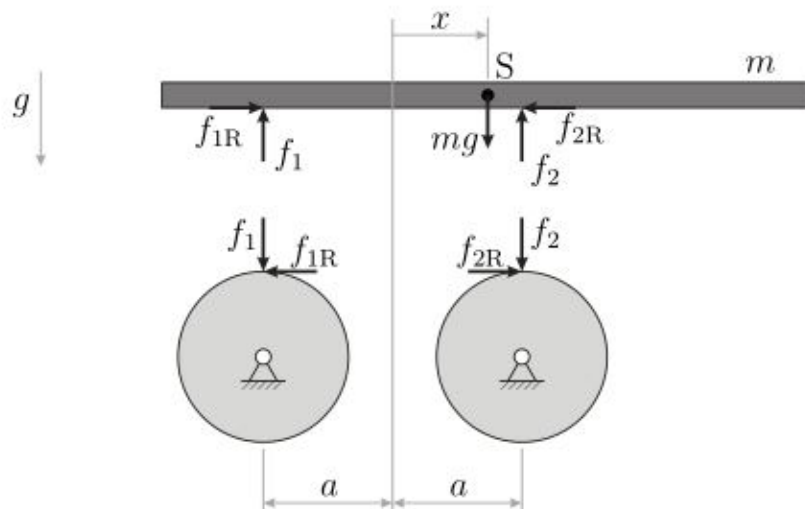
Die gesuchte Funktion kann einfach durch die z-Komponente des zweiten Vektors aus Punkt a) bestimmt werden und lautet deswegen

$$h(\varphi) = L - \frac{2bg}{l\dot{\varphi}^2}$$

### Beispiel 3

a)

freigeschnittenes Brett:



Aufgrund der großen Winkelgeschwindigkeit gilt für die trockene Haftreibung immer  $\text{sign}(\dot{x}) = 1$  und daraus kann man

$$\begin{aligned} f_{1R} &= \mu_1 f_1 \\ f_{2R} &= \mu_2 f_2 \end{aligned}$$

b)

Die Kräfte- und Momentenbilanz für den Balken lautet

$$\begin{aligned}f_1 + f_2 - mg &= 0 \\ -(a+x)f_1 + (a-x)f_2 &= 0\end{aligned}$$

Aus der ersten der beiden Gleichungen folgt

$$f_1 = mg - f_2$$

Nun wird die zweite Gleichung auf  $f_2$  umgeformt.

$$f_2 = \frac{(a+x)f_1}{a-x}$$

Setzt man nun diese Gleichung in die erste ein folgt

$$\begin{aligned}f_1 &= mg - \frac{(a+x)f_1}{a-x} \\ f_1(a-x) &= mg(a-x) - (a+x)f_1 \\ 2af_1 &= mg(a-x) \\ f_1 &= \frac{mg(a-x)}{2a}\end{aligned}$$

Somit folgt für die andere Normalkraft

$$f_2 = \frac{mg(a+x)}{2a}$$

c)

Impulserhaltungssatz

$$m\ddot{x} = \mu_1 f_1 - \mu_2 f_2$$

d)

Zuerst setzt man  $f_1$  und  $f_2$  ein. Dadurch erhält man die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= \mu \frac{mg(a-x)}{2a} - \mu \frac{mg(a+x)}{2a} \\ \ddot{x} &= \mu \frac{g}{2a} (-2x) \\ \ddot{x} + \frac{\mu g}{a} x &= 0\end{aligned}$$

Setzt man nun den gegebenen Ansatz in diese Gleichung ein erhält man

$$\underbrace{\left(-\omega^2 + \frac{\mu g}{a}\right)}_{\stackrel{!}{=0}} (A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)) = 0$$

Dies führt zur Schwingungskreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu g}{a}}$$



e)

Mit den Anfangsbedingungen  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$  entsteht keine Bewegung beim Brett.

f)

Mit  $\mu_1 \neq \mu_2$  entstehen auch bei  $x(0) = 0$  unterschiedlich große Reibkräfte, welche zu einer resultierenden Kraft für eine Bewegung in x-Richtung führt. Es folgt eine harmonische Schwingung um einen Punkt  $x \neq 0$  da mit  $\mu_1 \neq \mu_2$  die Symmetrie aufgehoben wird.

## 2.11 31.03.2017

### Beispiel 1

a)

i)

Die Masse des Aufbaues lautet

$$m_a = (l + l_1)bh\rho$$

Um den gesuchten Vektor zu ermitteln, müssen zuerst die Schwerpunktsvektoren der Einzelvolumina bestimmt werden. Anschließend kann dann der gesuchte Vektor bestimmt werden und dieser lautet

$$\mathbf{s}_a = \frac{1}{l + l_1} \begin{bmatrix} bl_1 \\ \frac{l^2}{2} + ll_1 - \frac{l_1^2}{2} \end{bmatrix}$$

ii)

Sämtliche Formel die zur Berechnung benötigt werden stehen in der Formelsammlung. Durch die korrekte Anwendung dieser Formel ergeben sich für die Trägheitsmomente der separaten Volumina

$$\Theta_{\bar{y}\bar{y},Q1}^{(S)} = h\rho \frac{b^3l + bl^3}{12} \quad (1)$$

$$\Theta_{\bar{y}\bar{y},Q2}^S = h\rho \frac{b^3l_1 + bl_1^3}{12} \quad (2)$$

Mithilfe des Satz von Steiner kann nun das gesuchte Massenträgheitsmoment bestimmt werden.

$$\Theta_{\bar{y}\bar{y},a} = \Theta_{\bar{y}\bar{y},Q1} + m_{Q1}(\mathbf{s}_{Q1} - \mathbf{s}_a)^T(\mathbf{s}_{Q1} - \mathbf{s}_a) + \Theta_{\bar{y}\bar{y},Q2} + m_{Q2}(\mathbf{s}_{Q2} - \mathbf{s}_a)^T(\mathbf{s}_{Q2} - \mathbf{s}_a)$$

mit den Massen

$$m_{Q1} = lbh\rho \quad m_{Q2} = l_1bh\rho$$

und den Vektoren

$$\mathbf{s}_{Q1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{l}{2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_{Q2} = \begin{bmatrix} b \\ l - \frac{l_1}{2} \end{bmatrix}$$

b)

Der Schwerpunktsvektor des Rades lautet

$$\mathbf{r}_r = \begin{bmatrix} \alpha R \\ 0 \end{bmatrix}$$

und der des Aufbaues lautet

$$\mathbf{r}_a = \begin{bmatrix} \alpha R + s_{ax} \cos(\beta) + s_{az} \sin(\beta) \\ -s_{ax} \sin(\beta) + s_{az} \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

Die jeweiligen Geschwindigkeitsvektoren lauten

$$\mathbf{v}_r = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} R \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_a = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} R + \dot{\beta}(-s_{ax} \sin(\beta) + s_{az} \cos(\beta)) \\ \dot{\beta}(-s_{ax} \cos(\beta) - s_{az} \sin(\beta)) \end{bmatrix}$$

c)

Die beiden gewünschten Energien lauten hier

$$V = mgs_{az} \cos(\beta)$$

Um die kinetische Energie zu bestimmen müssen zuerst wieder einmal Nebenrechnungen durchgeführt werden.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_r^T \mathbf{v}_r &= \dot{\alpha}^2 R^2 \\ \mathbf{v}_a^T \mathbf{v}_a &= (\dot{\alpha} R + \dot{\beta}(-s_{ax} \sin(\beta) + s_{az} \cos(\beta)))^2 + (\dot{\beta}(-s_{ax} \cos(\beta) - s_{az} \sin(\beta)))^2 \\ &= \dot{\alpha}^2 R^2 + \dot{\beta}^2 s_{az}^2 + 2\dot{\alpha} R \dot{\beta} s_{az} \cos(\beta) \end{aligned}$$

Die kinetische Energie lautet

$$T = \frac{1}{2} m_a \left( \dot{\alpha}^2 R^2 + \dot{\beta}^2 s_{az}^2 + 2\dot{\alpha} R \dot{\beta} s_{az} \cos(\beta) \right) + \frac{1}{2} m_r \dot{\alpha}^2 R^2 + \frac{1}{2} \Theta_{yy,a} \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} \Theta_{yy,r} \dot{\alpha}^2$$

d)

Der Vektor für die generalisierten Kräfte kann unmittelbar aus der Angabe ermittelt werden und lautet daher

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \tau_a + FR \\ Fl \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

e)

Für den Euler-Lagrange-Formalismus müssen erst einmal die nötigen Ableitungen durchgeführt werden. Für diese wiederum wird die Lagrange-Funktion benötigt und diese lautet hier

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2} m_a \left( \dot{\alpha}^2 R^2 + \dot{\beta}^2 s_{az}^2 + 2\dot{\alpha} R \dot{\beta} s_{az} \cos(\beta) \right) + \frac{1}{2} m_r \dot{\alpha}^2 R^2 + \frac{1}{2} \Theta_{yy,a} \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} \Theta_{yy,r} \dot{\alpha}^2 - mgs_{az} \cos(\beta) \end{aligned}$$

Die nötigen Ableitungen lauten

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \alpha} &= 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \beta} &= -m_a \dot{\alpha} R \dot{\beta} s_{az} \sin(\beta) + m g s_{az} \sin(\beta) \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} &= m_a \dot{R}^2 + m_a R \dot{\beta} s_{az} \cos(\beta) + m_r \dot{\alpha} R^2 + \Theta_{yy,r} \dot{\alpha} \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} &= m_a \dot{\beta} s_{az}^2 + m_a \dot{\alpha} R s_{az} \cos(\beta) + \Theta_{yy,a} \dot{\beta}
\end{aligned}$$

Die notwendigen Zeitableitungen lauten

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} &= m_a \ddot{\alpha} R^2 + m_a R \ddot{\beta} s_{az} \cos(\beta) - m_a R \dot{\beta}^2 s_{az} \sin(\beta) + m_r \ddot{\alpha} R^2 + \Theta_{yy,r} \ddot{\alpha} \\
&= (\Theta_{yy,r} + (m_a + m_r) R^2) \ddot{\alpha} + (\cos(\beta) \ddot{\beta} - \sin(\beta) \dot{\beta}^2) m_a R s_{az} \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} &= m_a \ddot{\beta} s_{az}^2 + m_a \ddot{\alpha} R s_{az} \cos(\beta) - m_a \dot{\alpha} \dot{\beta} R s_{az} \sin(\beta) + \Theta_{yy,a} \ddot{\beta} \\
&= (\Theta_{yy,a} + m_a s_{az}^2) \ddot{\beta} + \cos(\beta) \ddot{\alpha} m_a R s_{az} - m_a \dot{\alpha} R \dot{\beta} s_{az} \sin(\beta)
\end{aligned}$$

Die Form der Euler-Lagrange-Gleichung sind in der Formelsammlung ersichtlich und diese lauten daher

$$\begin{bmatrix} (\Theta_{yy,r} + (m_a + m_r) R^2) \ddot{\alpha} + (\cos(\beta) \ddot{\beta} - \sin(\beta) \dot{\beta}^2) m_a R s_{az} \\ (\Theta_{yy,a} + m_a s_{az}^2) \ddot{\beta} + \cos(\beta) \ddot{\alpha} m_a R s_{az} - m g s_{az} \sin(\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_a + F R \\ F l \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

f)

Mit den angegebenen Bedingungen folgt aus den Bewegungsgleichungen

$$\begin{bmatrix} \tau_a + F R \\ F l \cos(\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g m_a s_{az} \sin(\beta) \end{bmatrix}$$

Hieraus folgt für das gesuchte Moment

$$\tau_a = -F R$$

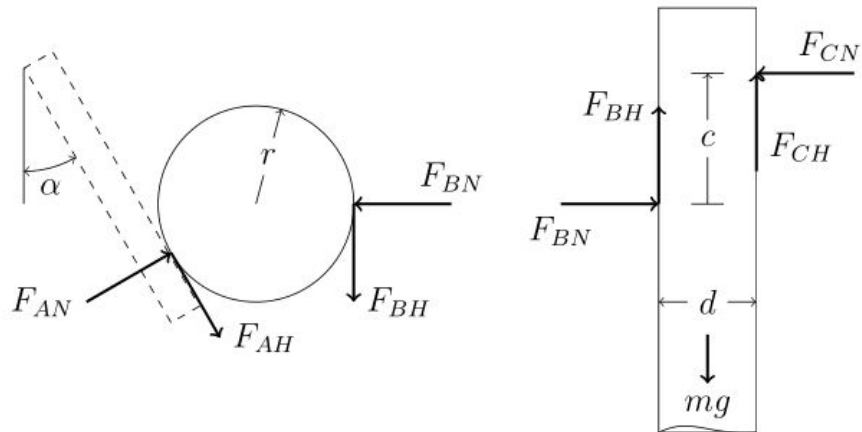
und den gesuchten Winkel

$$\begin{aligned}
F l \cos(\beta) &= -g m_a s_{az} \sin(\beta) \\
-\tan(\beta) &= \frac{F l}{s_{az} m_a g} \\
\beta &= -\arctan\left(\frac{F l}{s_{az} m_a g} 1\right)
\end{aligned}$$

## Beispiel 2

a)

Freigeschnittene Platte und Walze:



b)

Durch Aufstellen der Kräfte- und Momentenbilanz und mit der Formel für die trockene Haftreibung

$$f_C = \mu_C f_N \text{sign}(\dot{x}) \quad \text{mit } \text{sign}(\dot{x}) = 1$$

folgt der Reibungskoeffizient

$$\mu_W \geq \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}$$

c)

Durch Aufstellen der Kräfte- und Momentenbilanz kann die gesuchte Höhe bestimmt werden, die die beiden Momente der Kräfte  $F_{CN}$  und  $F_{BN}$  ausgleicht. Die Höhe beträgt

$$c = \frac{d \sin(\alpha)}{2(1 + \cos(\alpha))}$$

d)

Da die beiden Reibungskoeffizienten nicht vom Gewicht der Platte abhängen, kann die Kraft (bis zur plastischen Verformung) theoretisch unendlich groß sein.

### Beispiel 3

a)

Die gesuchte Verlustwärmestromdichte wird aus der Formelsammlung entnommen lautet

$$\dot{q} = k(T_i - T_a)$$

mit dem Vorfaktor (aus der Formelsammlung)

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_i} + \frac{\delta_w + \delta_p}{\lambda_w} + \frac{1}{\alpha_a}}$$

b)

Dadurch das ein unveränderter Wärmeverlust gefordert ist folgt

$$\dot{q} = \dot{q}_{neu}$$

Wegen der Dirichlet'schen Randbedingung zufolge der integrierten Wandheizung folgt

$$\dot{q}_{neu} = k_{neu}(T_p - T_a)$$

und dadurch

$$k(T_i - T_a) = k_{neu}(T_p - T_a)$$

mit

$$k_{neu} = \frac{1}{\frac{\delta_d}{\lambda_d} + \frac{\delta_w}{\lambda_w} + \frac{1}{\alpha_a}}$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt schließlich

$$\delta_d = \lambda_d \left( \frac{T_h - T_a}{k(T_i - T_a)} - \frac{\delta_w}{\lambda_w} - \frac{1}{\alpha_a} \right)$$

c)

Der Temperaturverlauf lautet

$$T(x) = \begin{cases} T_h & \text{für } 0 \leq x \leq \delta_p \\ T_h - \dot{q} \frac{x - \delta_p}{\lambda_d} & \text{für } \delta_p \leq x \leq \delta_p + \delta_d \\ T_h - \dot{q} \left( \frac{\delta_d}{\lambda_d} + \frac{x - \delta_p - \delta_d}{\lambda_w} \right) & \text{für } \delta_p + \delta_d \leq x \leq \delta_p + \delta_d + \delta_w \end{cases}$$

d)

Durch Zusammenfassen der Konturen b und w folgt aus der Summationsregel

$$F_{h,d} = 1 - F_{h,b+w} - F - h, h$$

Da die Kontur h eine ebene Wand ist, gilt  $F_{h,h} = 0$ . Der andere Sichtfaktor kann mittels der Tabelle aus der Formelsammlung ermittelt werden und somit folgt

$$F_{h,d} = 1 - \frac{1}{2l_H} \left( l_H + \sqrt{l_b^2 + l_w^2} - \sqrt{l_b^2 + (l_w - l_h)^2} \right)$$

e)

Da es sich bei der Kontur b ebenfalls um eine ebene Wand handelt gilt  $F_{b,b} = 0$ . Mit der Summationsregel und dem Reziprozitätsgesetz folgt für die restlichen Sichtfaktoren

$$\begin{aligned} F_{b,h} &= \frac{l_h}{l_b} F_{b,u} \\ F_{u,h} &= \frac{l_h}{l_1 + l_2 + l_w} F_{h,u} \\ F_{u,b} &= \frac{l_b}{l_1 + l_2 + l_w} F_{b,u} \\ F_{u,u} &= 1 - \frac{1}{l_1 + l_2 + l_w} (l_b F_{b,u} + l_h F_{h,u}) \end{aligned}$$

f)

Die gesuchte Gleichung lautet

$$\varepsilon(\mathbf{E} - \mathbf{F}(1 - \varepsilon))^{-1}(\mathbf{E} - \mathbf{F})\sigma \begin{bmatrix} T_h^4 \\ T_u^4 \\ T_b^4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{q}_h \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_2(T - h - T_a) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

mit

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & F_{h,u} & F_{h,b} \\ F_{u,h} & F_{u,u} & F_{u,b} \\ F_{b,h} & F_{b,u} & 0 \end{bmatrix}, \quad k_2 = \frac{1}{\frac{\delta_w}{\lambda_w} + \frac{\delta_d}{\lambda_d} + \frac{1}{\alpha_a}}$$

Der genaue Rechenweg ist im Vorlesungsskript aus dem Jahr 2019 nachzulesen.

## 2.12 19.05.2017

### Beispiel 1

a)

Die geeigneten generalisierten Koordinaten für dieses Beispiel sind

$$\mathbf{q} = [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3]^T$$

Die Ortsvektoren zu den 3 Schwerpunkten lauten

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} + \frac{l_1}{6} \begin{bmatrix} \cos(\varphi_1) \\ \sin(\varphi_1) \end{bmatrix} \\ \mathbf{r}_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} + \frac{2l_1}{3} \begin{bmatrix} \cos(\varphi_1) \\ \sin(\varphi_1) \end{bmatrix} + \frac{l_2}{2} \begin{bmatrix} \cos(\varphi_2) \\ \sin(\varphi_2) \end{bmatrix} \\ \mathbf{r}_3 &= \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} + \frac{l_1}{3} \begin{bmatrix} -\cos(\varphi_1) \\ -\sin(\varphi_1) \end{bmatrix} + \frac{l_3}{2} \begin{bmatrix} -\cos(\varphi_3) \\ -\sin(\varphi_3) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

b)

Die entsprechenden Geschwindigkeitsvektoren lauten

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}_1 &= \frac{l_1}{6} \begin{bmatrix} -\sin(\varphi_1) \\ \cos(\varphi_1) \end{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\mathbf{r}}_2 &= \frac{2l_1}{3} \begin{bmatrix} -\sin(\varphi_1) \\ \cos(\varphi_1) \end{bmatrix} \dot{\varphi}_1 + \frac{l_2}{2} \begin{bmatrix} -\sin(\varphi_2) \\ \cos(\varphi_2) \end{bmatrix} \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\mathbf{r}}_3 &= \frac{l_1}{3} \begin{bmatrix} \sin(\varphi_1) \\ -\cos(\varphi_1) \end{bmatrix} \dot{\varphi}_1 + \frac{l_3}{2} \begin{bmatrix} \sin(\varphi_3) \\ -\cos(\varphi_3) \end{bmatrix} \dot{\varphi}_3\end{aligned}$$

Und deren Betragbeträge lauten

$$\begin{aligned}\|\dot{\mathbf{r}}_1\|_2^2 &= \left(\frac{l_1}{6}\right)^2 (\sin^2(\varphi_1) + \cos^2(\varphi_1)) \dot{\varphi}_1^2 \\ &= \left(\frac{l_1}{6}\right)^2 \dot{\varphi}_1^2 \\ \|\dot{\mathbf{r}}_2\|_2^2 &= \left(-\frac{2l_1}{3} \sin(\varphi_1) \dot{\varphi}_1 - \frac{l_2}{2} \sin(\varphi_2) \dot{\varphi}_2\right)^2 + \left(\frac{2l_1}{3} \cos(\varphi_1) \dot{\varphi}_1 + \frac{l_2}{2} \cos(\varphi_2) \dot{\varphi}_2\right)^2 \\ &= \left(\frac{2l_1}{3}\right)^2 \dot{\varphi}_1^2 \sin^2(\varphi_1) + \frac{2}{3} l_1 l_2 \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 \dot{\varphi}_2^2 \sin^2(\varphi_2) \\ &\quad + \left(\frac{2l_1}{3}\right)^2 \dot{\varphi}_1^2 \cos^2(\varphi_1) + \frac{2}{3} l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2) + \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 \dot{\varphi}_2^2 \cos^2(\varphi_2) \\ &= \left(\frac{2l_1}{3}\right)^2 \dot{\varphi}_1^2 (\sin^2(\varphi_1) + \cos^2(\varphi_1)) + \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 \dot{\varphi}_2^2 (\sin^2(\varphi_2) + \cos^2(\varphi_2)) \\ &\quad + \frac{2}{3} l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 (\cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2)) \\ &= \left(\frac{2l_1}{3}\right)^2 \dot{\varphi}_1^2 + \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 \dot{\varphi}_2^2 + \frac{2}{3} l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2\end{aligned}$$

analog dazu :

$$\|\dot{\mathbf{r}}_3\|_2^2 = \left(\frac{l_1}{3}\right)^2 \dot{\varphi}_1^2 + \left(\frac{l_3}{2}\right)^2 \dot{\varphi}_3^2 + \frac{1}{3} l_1 l_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_3$$

c)

Nun soll die gesamte kinetische Energie des Systems bestimmt werden. Diese setzt sich aus der translatorischen Energie

$$T_{trans} = \frac{1}{2} \|\dot{\mathbf{r}}_1\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\dot{\mathbf{r}}_2\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\dot{\mathbf{r}}_3\|_2^2$$

und der rotatorischen Energie

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \Theta_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} \Theta_2 \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} \Theta_3 \dot{\varphi}_3^2$$

zusammen.

Somit lautet die gesamte kinetische Energie des Systems

$$\begin{aligned}
T &= T_{trans} + T_{rot} \\
&= \frac{1}{2} \left( m_1 \left( \frac{l_1}{6} \right)^2 + m_2 \left( \frac{2l_1}{3} \right)^2 + m_3 \left( \frac{l_1}{3} \right)^2 + \Theta_1 \right) \dot{\varphi}_1^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \left( m_2 \left( \frac{l_2}{2} \right)^2 + \Theta_2 \right) \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} \left( m_3 \left( \frac{l_3}{2} \right)^2 + \Theta_3 \right) \dot{\varphi}_3^2 \\
&\quad + \frac{1}{3} m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + \frac{1}{6} m_3 l_1 l_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_3
\end{aligned}$$

d)

Die potentielle Energie dieses Systems lautet

$$\begin{aligned}
V &= m_1 g \left( h + \frac{l_1}{6} \sin(\varphi_1) \right) + m_2 g \left( h + \frac{2l_1}{3} \sin(\varphi_1) + \frac{l_2}{2} \sin(\varphi_2) \right) \\
&\quad + m_3 g \left( h - \frac{l_1}{3} \sin(\varphi_3) - \frac{l_3}{2} \sin(\varphi_3) \right)
\end{aligned}$$

e)

Die allgemeiner Form lautet die Lagrange-Funktion

$$L = T - V$$

und der Euler-Lagrange-Formalismus

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} = f_{q,i}, \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

f)

Bevor man den Vektor für die generalisierten Kräfte bestimmen kann, benötigt man zuerst den Ortsvektor zum Angriffspunkt und dieser lautet

$$\mathbf{r}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} + \frac{2l_1}{3} \begin{bmatrix} \cos(\varphi_1) \\ \sin(\varphi_1) \end{bmatrix} + l_2 \begin{bmatrix} \cos(\varphi_2) \\ \sin(\varphi_2) \end{bmatrix}$$

Die partiellen Ableitungen nach generalisierten Koordinaten dieses Vektors lauten

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial \varphi_1} &= \frac{2l_1}{3} \begin{bmatrix} -\sin(\varphi_1) \\ \cos(\varphi_1) \end{bmatrix} \\
\frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial \varphi_2} &= l_2 \begin{bmatrix} -\sin(\varphi_2) \\ \cos(\varphi_2) \end{bmatrix} \\
\frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial \varphi_3} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Mit der dem Vektor  $\mathbf{f}_e$  aus der Angabe und der Rechenvorschrift aus der Angabe lautet der gesuchte Vektor

$$\mathbf{f}_q = \begin{bmatrix} \frac{2l_1}{3} \sin(\varphi_1) \\ l_2 \sin(\varphi_2) \\ 0 \end{bmatrix} f_{e,x}$$



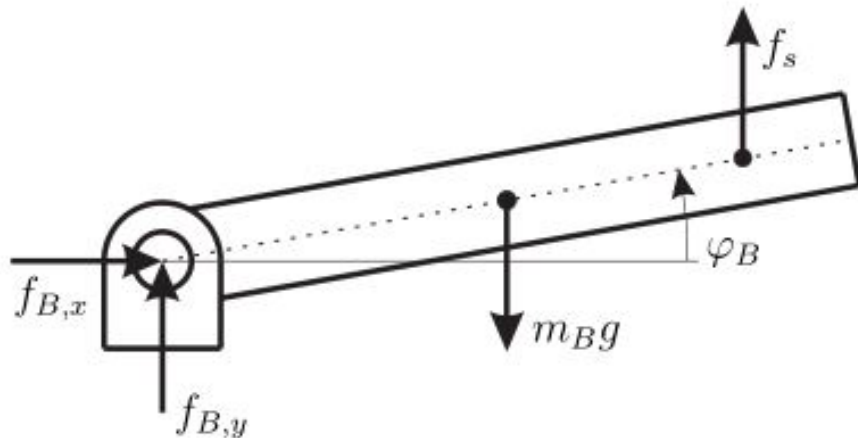
## Beispiel 2

a)

Die Anzahl der Freiheitsgrade, die dieses System komplett beschreiben lautet 1, weil es hier nur eine Größe existiert die sich durch eine Bewegung des Systems ändert.

b)

Freigeschnittene Brücke:



Das gesuchte Kräftegleichgewicht lautet

$$\mathbf{e}_x : f_{B,x} = 0$$

$$\mathbf{e}_y : f_{B,y} - m_B g + f_s = 0$$

und das Momentengleichgewicht lautet

$$\mathbf{e}_z : -m_B g l_B \cos(\varphi_B) + f_s l_s \cos(\varphi_B) = 0$$

Um die Seilkraft zu bestimmen muss nur das Momentengleichgewicht in Betracht gezogen werden.

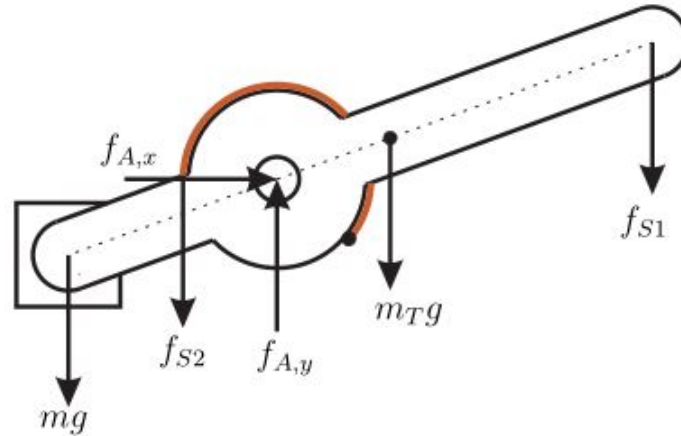
$$-m_B g l_B \cos(\varphi_B) + f_s l_s \cos(\varphi_B) = 0$$

$$f_s l_s \cos(\varphi_B) = m_B g l_B \cos(\varphi_B)$$

$$f_s = m_B g \frac{l_B}{l_s}$$

c)

Freigeschnittener Träger:



Hier lautet das Kräftegleichgewicht

$$\mathbf{e}_x : f_{A,x} = 0$$

$$\mathbf{e}_y : -mg - f_{S2} + f_{A,y} - m_T g - f_{S1} = 0$$

und das Momentengleichgewicht

$$\mathbf{e}_z : mgl_m \cos(\varphi_B) + f_{S2}R - m_T gl_T \cos(\varphi_B) - f_{S1}l_s \cos(\varphi_B) = 0$$

Um wieder die fehlende Seilkraft zu bestimmen muss wieder nur das Momentengleichgewicht betrachtet werden. Daher lautet diese

$$mgl_m \cos(\varphi_B) + f_{S2}R - m_T gl_T \cos(\varphi_B) - f_{S1}l_s \cos(\varphi_B) = 0$$

$$mgl_m \cos(\varphi_B) + f_{S2}R - m_T gl_T \cos(\varphi_B) - m_B gl_B \cos(\varphi_B) = 0$$

$$f_{S2} = \frac{m_B gl_B + m_T gl_T - mgl_m}{R} \cos(\varphi_B)$$

d)

Um die gesuchte Masse zu bestimmen, muss man beachten das die Kraft  $f$  gleich der Kraft  $f_{S2}$  sein, d.h. man muss die beiden gleichsetzen. Daraus folgt

$$\frac{m_B gl_B + m_T gl_T - mgl_m}{R} \cos(\varphi_B) = 0$$

$$m_B gl_B + m_T gl_T - mgl_m = 0$$

$$m = \frac{m_B l_B + m_T l_T}{l_m}$$

e)

Die Formel zur Berechnung des Massenträgheitsmoment kann der Formelsammlung entnommen werden.

$$\begin{aligned}
 \Theta_B &= \int_V r^2 dm = \rho \int_V r^2 dV \\
 &= \rho b \int_0^l \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} (y^2 + z^2) dz dy \\
 &= \rho b \int_0^l \left( y^2 z + \frac{z^3}{3} \right) \Big|_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} dy \\
 &= \rho b \int_0^l \left( y^2 \frac{d}{2} + \frac{d^3}{16} + y^2 \frac{d}{2} + \frac{d^3}{24} \right) dy \\
 &= \rho b \int_0^l \left( y^2 d + \frac{d^3}{12} \right) dy \\
 &= \rho b \left( \frac{y^3}{3} d + \frac{d^3}{12} y \right) \Big|_0^l \\
 &= \rho b \left( \frac{l^3}{3} d + \frac{d^3}{12} l \right)
 \end{aligned}$$

Mit  $m_B = \rho l b d$  folgt

$$\Theta_B = m_B \left( \frac{l^2}{3} + \frac{d^2}{12} \right)$$

f)

Wenn nun das Seil 1 reißt wird die Brücke fallen. Da sich hier dann um eine Drehbewegung handelt besitzt die kinetische Energie der Brücke nur einen rotatorischen Anteil und lautet somit

$$T = \frac{1}{2} \Theta_B \dot{\varphi}_B^2$$

Die potentielle Energie zum Zeitpunkt  $t = 0$  lautet

$$V = m_B g l_B \sin(\varphi_0)$$

Da die Energieerhaltung erfüllt sein muss folgt für die gesuchte Winkelgeschwindigkeit

$$\begin{aligned}
 T + V &= 0 \\
 \frac{1}{2} \Theta_B \dot{\varphi}_B^2 + m_B g l_B \sin(\varphi_0) &= 0 \\
 \dot{\varphi}_B &= -\sqrt{\frac{2 m_B g l_B}{\Theta_B} \sin(\varphi_0)}
 \end{aligned}$$

### Beispiel 3

a)

Die richtige Formel für die Konvektion kann aus der Formelsammlung entnommen werden. Daher lautet die gesuchte Wärmestromdichte

$$\dot{q}_{aw}(x, t) = \alpha_{aw} (T_a(x, t) - T_w(x, t))$$

b)

Die gesuchte Wärmestromdichten können mittels des Wärmeleitgesetzes bestimmt werden und lauten somit

$$\begin{aligned}\dot{q}_a &= -\lambda \frac{\partial}{\partial x} T_a(x, t) \\ \dot{q}_w &= -\lambda \frac{\partial}{\partial x} T_w(x, t)\end{aligned}$$

c)

Mithilfe des Hinweises aus der Angabe und der Wärmeleitgleichung für kartesische Koordinaten lautet die gesuchte Differentialgleichung

$$\rho_a c_a \frac{\partial}{\partial t} T_a(x, t) = \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} T_a(x, t) + \frac{\alpha_a}{d_a} \dot{q}_s - \frac{\alpha_{aw}}{d_w} (T_a(x, t) - T_w(x, t))$$

Der zweite und der dritte Term auf der rechten Seite der Gleichung sind der zufließende und abfließende Wärmestrom aus dem Kontrollvolumen.

d)

Analog zu Punkt c) lautet die Differentialgleichung hier

$$\begin{aligned}\underbrace{\rho_w c_w \frac{\partial}{\partial t} T_w(x, t) = \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} T_w(x, t) - \rho_w c_w v_w \frac{\partial}{\partial x} T_w(x, t)}_{\text{Wärmeleitgleichung}} + \frac{\alpha_{aw}}{d_w} (T_a(x, t) - T_w(x, t)) \\ \rho_w c_w \left( \frac{\partial}{\partial t} T_w(x, t) + v_w \frac{\partial}{\partial x} T_w(x, t) \right) = \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} T_w(x, t) + \frac{\alpha_{aw}}{d_w} (T_a(x, t) - T_w(x, t))\end{aligned}$$

e)

Für das gesamte System werden hier 4 Randbedingungen benötigt. Nämlich 2 pro Differentialgleichung.

f)

Die Randbedingungen dieses Systems lauten

$$\begin{aligned}\dot{q}_a(0, t) &= \dot{q}_a(L, t) = 0 \\ T_w(0, t) &= T_w^{in}(t) \\ \dot{q}_w(L, t) &= 0\end{aligned}$$

## 2.13 14.07.2017

### Beispiel 1

a)

Um den gesuchten Abstand zu ermitteln, muss man die Formel

$$\mathbf{r}_S = \frac{\sum_{j=1}^N \mathbf{r}_{Sj} m_j}{\sum_{j=1}^N m_j}$$

betrachten. Unter Beachtung dieser Form folgt nun schließlich für den gesuchten Abstand

$$l_{AM} = \frac{m_A l_A - m_M l_M}{m_{AM}}$$

mit  $m_{AM} = m_A + m_M$ . Dies hat nur eine Ähnlichkeit mit der obigen Formel, da anstatt von Abstandsvektoren nur die tatsächlichen Abstände verwendet wurden. Das dazugehörige Massenträgheitsmoment kann schließlich mit dem Satz von Steiner ermittelt werden und lautet somit

$$\Theta_{AM,zz} = \Theta_{A,zz} + m_A(l_A - l_{AM})^2 + \Theta_{M,zz} + m_M(l_{AM} + l_M)^2$$

b)

Die geeigneten generalisierten Koordinaten lauten hier

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} x \\ \varphi_A \end{bmatrix}$$

und somit lautet der Ortsvektor der Ersatzmasse

$$\mathbf{r}_{AM} = l_{AM} \begin{bmatrix} -\sin(\varphi_A) \\ \cos(\varphi_A) \end{bmatrix}$$

und der Ortsvektor des Schlittens

$$\mathbf{r}_S = x \begin{bmatrix} -\sin(\varphi_A) \\ \cos(\varphi_A) \end{bmatrix}$$

c)

Nun müssen man für die Geschwindigkeitsvektoren die Ortsvektoren nach den generalisierten Koordinaten ableiten. Damit erhalten wir

$$\dot{\mathbf{r}}_{AM} = l_{AM} \begin{bmatrix} -\cos(\varphi_A) \\ -\sin(\varphi_A) \end{bmatrix} \dot{\varphi}_A$$

$$\dot{\mathbf{r}}_S = x \begin{bmatrix} -\cos(\varphi_A) \\ -\sin(\varphi_A) \end{bmatrix} \dot{\varphi}_A + \dot{x} \begin{bmatrix} -\sin(\varphi_A) \\ \cos(\varphi_A) \end{bmatrix}$$

Deren Betragsquadrate lauten

$$\begin{aligned}\|\dot{\mathbf{r}}_{AM}\|_2^2 &= l_{AM}^2 (\sin^2(\varphi_A) + \cos^2(\varphi_A)) \dot{\varphi}_A^2 \\ &= l_{AM}^2 \dot{\varphi}_A^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\dot{\mathbf{r}}_S\|_2^2 &= x^2 (\sin^2(\varphi_A) + \cos^2(\varphi_A)) \dot{\varphi}_A^2 + \dot{x}^2 (\sin^2(\varphi_A) + \cos^2(\varphi_A)) \\ &= x^2 \dot{\varphi}_A^2 + \dot{x}^2\end{aligned}$$

d)

Die kinetische Energie des gesamten Systems lautet

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} m_{AM} \|\dot{\mathbf{r}}_{AM}\|_2^2 + \frac{1}{2} m_S \|\dot{\mathbf{r}}_S\|_2^2 + \frac{1}{2} (\Theta_{AM,zz} + \Theta_{S,zz}) \dot{\varphi}_A^2 \\ &= \frac{1}{2} m_{AM} l_{AM}^2 \dot{\varphi}_A^2 + \frac{1}{2} m_S (x^2 \dot{\varphi}_A^2 + \dot{x}^2) + \frac{1}{2} (\Theta_{AM,zz} + \Theta_{S,zz}) \dot{\varphi}_A^2\end{aligned}$$

$$V = 0$$

e)

Die Lagrange-Funktion lautet in allgemeiner Form

$$L = T - V$$

und die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = f_{d,i} + f_{q,i}, \quad i \in \{1, 2\}$$

f)

Bevor nun die einzelnen bestimmt werden können, muss die Lagrange-Funktion konkret ausgewertet. Diese lautet daher

$$L = \frac{1}{2} m_{AM} l_{AM}^2 \dot{\varphi}_A^2 + \frac{1}{2} m_S (x^2 \dot{\varphi}_A^2 + \dot{x}^2) + \frac{1}{2} (\Theta_{AM,zz} + \Theta_{S,zz}) \dot{\varphi}_A^2$$

Die Ableitungen lautet

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m_S \dot{x} \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_A} &= m_{AM} l_{AM}^2 \dot{\varphi}_A + m_S l_S^2 \dot{\varphi}_A + (\Theta_{AM,zz} + \Theta_{S,zz}) \dot{\varphi}_A \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m_S \ddot{x} \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_A} &= m_{AM} l_{AM}^2 \ddot{\varphi}_A + m_S x^2 \ddot{\varphi}_A + 2m_S x \dot{\varphi}_A \dot{x} + (\Theta_{AM,zz} + \Theta_{S,zz}) \ddot{\varphi}_A \\
\frac{\partial L}{\partial x} &= m_S x \dot{\varphi}_A^2 \\
\frac{\partial L}{\partial \varphi_A} &= 0
\end{aligned}$$

g)

Der Vektor für die generalisierten dissipativen Kräfte lautet

$$\mathbf{f}_d = \begin{bmatrix} -d_s \dot{x} \\ -d_A \dot{\varphi}_A \end{bmatrix}$$

h)

Die Formel zur Bestimmung der generalisierten Kräfte kann der Formelsammlung entnehmen. Der benötigte Ortsvektor ist der des Schlittens. Die benötigte Ableitung für die generalisierte Kraft lautet

$$\frac{\partial \mathbf{r}_S}{\partial x} = \begin{bmatrix} -\sin(\varphi_A) \\ \cos(\varphi_A) \end{bmatrix}$$

Der Vektor der externen Kraft lautet

$$\mathbf{f}_S = F_S \begin{bmatrix} \sin(\varphi_A) \\ -\cos(\varphi_A) \end{bmatrix}$$

Der Vektor der Momente bezogen auf die generalisierten Koordinaten lautet

$$\mathbf{m}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ M_A \end{bmatrix}$$

Somit lautet der Vektor der generalisierten Kräfte

$$\mathbf{f}_q^T = \mathbf{f}_S^T \frac{\partial \mathbf{r}_S}{\partial x} + \mathbf{m}_A^T = \begin{bmatrix} -F_S & M_A \end{bmatrix}^T$$

i)

Die Euler-Lagrange-Gleichungen lauten

$$m_S \ddot{x} - m_S x \dot{\varphi}_A^2 = -d_S \dot{x} - F_S$$

$$m_{AM} l_{AM}^2 \ddot{\varphi}_A + m_S x^2 \ddot{\varphi}_A + 2m_S x \dot{\varphi}_A \dot{x} + (\Theta_{AM,zz} + \Theta_{S,zz}) \ddot{\varphi}_A = -d_A \dot{\varphi}_A + M_A$$

Vereinfacht man diese Gleichungen erhält man die Bewegungsgleichungen und diese lauten

$$\ddot{x} = \frac{m_S x \dot{\varphi}_A^2 - d_S \dot{x} - F_S}{m_S}$$

$$\ddot{\varphi}_A = \frac{-2m_S x \dot{\varphi}_A \dot{x} - d_A \dot{\varphi}_A + M_A}{m_{AM} l_{AM}^2 + m_S x^2 + (\Theta_{AM,zz} + \Theta_{S,zz})}$$

j)

Aus der ersten Bewegungsgleichung folgt im stationären Fall

$$0 = \frac{m_S x_0 \omega_A^2 - F_S}{m_S}$$

$$x_0 = \frac{F_S}{m_S \omega_A^2}$$

und aus der zweiten

$$0 = \frac{-d_A \omega_A + M_{A,0}}{m_{AM} l_{AM}^2 + m_S x^2 + (\Theta_{AM,zz} + \Theta_{S,zz})}$$

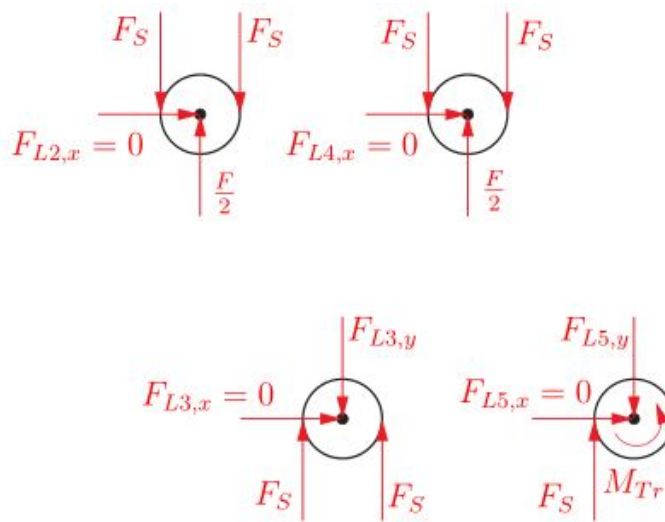
$$M_{A,0} = d_A \omega_A^2$$



## Beispiel 2

a)

Freigeschnittene Objekte:



Die benötigten Gleichgewichtsgleichungen lauten hier für die erste Umlenkrolle

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_x : F_{L2,x} &= 0 \\ \mathbf{e}_y : -2F_S + \frac{F}{2} &= 0\end{aligned}$$

für die zweite Umlenktrummel

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_x : F_{L3,x} &= 0 \\ \mathbf{e}_y : 2F_S - F_{L3,y} &= 0\end{aligned}$$

für die dritte Umlenkrolle

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_x : F_{L4,x} &= 0 \\ \mathbf{e}_y : -2F_S + \frac{F}{2} &= 0\end{aligned}$$

und für die Trommel

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_x : F_{L5,x} &= 0 \\ \mathbf{e}_y : F_S - F_{L5,y} &= 0 \\ \mathbf{e}_z : M_{TR} - F_S \frac{d}{2} &= 0\end{aligned}$$

b)

Um die benötigten Lagerkräfte zu bestimmen muss man nur die Gleichgewichtsgleichungen beachten und entsprechend umformen. Für die Seilkraft folgt aus zweiten Gleichung der ersten Rolle

$$F_S = \frac{F}{4}$$

Daher lauten die Kräfte für das Lager 1 (durch freischneiden von Lager 1)

$$\begin{aligned} F_{L1,x} &= 0 \\ F_{L2,y} &= F_S = \frac{F}{4} \end{aligned}$$

für das Lager 3

$$\begin{aligned} F_{L3,x} &= 0 \\ F_{L3,y} &= 2F_S = \frac{F}{2} \end{aligned}$$

und für das Lager 5

$$\begin{aligned} F_{L5,x} &= 0 \\ F_{L5,y} &= F_S = \frac{F}{4} \end{aligned}$$

c)

Das Trommelmoment lautet

$$M_{TR} = \frac{Fd}{8}$$

Mit dem Übersetzungsverhältnis aus der Angabe folgt schließlich für das Haltemoment

$$M_M = \frac{Fd}{8i}$$

### Beispiel 3

a)

Die Leistungsbilanz für das elektronische Bauteil lautet

$$-\dot{q}_s + g_0 h - \dot{q}_b = 0$$

und daraus folgt

$$\dot{q}_s = g_0 h - \dot{q}_b$$

b)

Mit der Formel

$$\dot{q} = \alpha(T - T_\infty)$$

folgt für die Oberflächentemperatur

$$T_s = T_\infty + \frac{\dot{q}_s}{\alpha}$$

c)

Um die Differentialgleichung bestimmen zu können muss man die Wärmeleitgleichung für die kartesischen Koordinaten hernehmen. Da sich die Wärme nur in z-Richtung ausbreitet muss auch nur dieser Term der Formel verwendet werden.

$$\lambda \frac{d^2 T}{dz^2} + g_0 = 0$$

Mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dz}(0) &= \frac{\dot{q}_b}{\lambda} \\ T(h) &= T_s \end{aligned}$$

d)

Für den Temperaturverlauf im Bauteil muss jetzt die Differentialgleichung gelöst werden.

$$\begin{aligned} \lambda \frac{d^2 T}{dz^2} + g_0 &= 0 \\ \frac{d^2 T}{dz^2} &= -\frac{g_0}{\lambda} \\ \frac{dT}{dz} &= -\frac{g_0}{\lambda} z + C_1 \\ T(z) &= -\frac{g_0}{\lambda} \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2 \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Randbedingungen folgt für die Konstanten

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dz} &= 0 + C_1 = \frac{\dot{q}_b}{\lambda} \\ C_1 &= \frac{\dot{q}_b}{\lambda} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} T_s &= -\frac{g_0}{\lambda} \frac{h^2}{2} + \frac{\dot{q}_b}{\lambda} h + C_2 \\ C_2 &= T_s + \frac{g_0}{\lambda} \frac{h^2}{2} - \frac{\dot{q}_b}{\lambda} h \end{aligned}$$

Jetzt noch die Konstanten einsetzen und man erhält schließlich

$$\begin{aligned} T(z) &= -\frac{g_0}{\lambda} \frac{z^2}{2} + \frac{\dot{q}_b}{\lambda} z + T_s + \frac{g_0}{\lambda} \frac{h^2}{2} - \frac{\dot{q}_b}{\lambda} h \\ &= T_s \frac{1}{2} \frac{\dot{q}_b}{\lambda} (h^2 - z^2) + \frac{\dot{q}_b}{\lambda} (z - h) \end{aligned}$$

e)

Die maximale Position lautet

$$z_{max} = \frac{\dot{q}_b}{g_0}$$

Für die maximale Temperatur existiert leider keine Lösung zum vergleichen.

#### Beispiel 4

a)

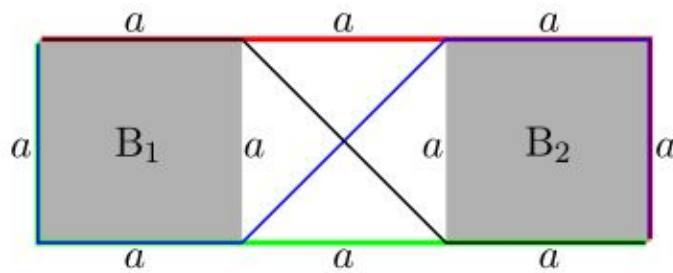
Da sich bei B1 um eine konvexe Fläche handelt lautet der entsprechende Sichtfaktor

$$F_{11} = 0$$

Da B2 die Sicht von B1 auf B3 blockiert gilt

$$F_{13} = 0$$

Der Sichtfaktor zwischen B1 und B2 wird mit der Cross-String-Methode bestimmt. Dieser lautet nun



$$F_{12} = \frac{(2a + \sqrt{2}a) + (4a + \sqrt{2}a) - 4a - 4a}{8a} = \frac{2\sqrt{2}a - 2a}{8a} = \frac{\sqrt{2} - 1}{4}$$

Aufgrund der Geometrie gilt

$$F_{32} = F_{12} = \frac{\sqrt{2} - 1}{4}$$

b)

Mit der Summationsregel folgt

$$F_{14} = 1 - F_{12} = \frac{5 - \sqrt{2}}{4}$$

Außerdem gilt durch diese Regel noch

$$F_{24} = 1 - F_{21} - F_{22} - F_{23}$$

Da es sich bei B2 wieder um eine konvexe Fläche handelt muss wieder

$$F_{22} = 0$$

gelten. Außerdem kann man aus dem Reziprozitätsgesetz

$$\begin{aligned} F_{21} &= F_{12} \\ F_{23} &= F_{32} = F_{12} \end{aligned}$$

schließen. Dadurch gilt für den gesuchten Faktor

$$F_{24} = 1 - 2F_{12} = \frac{6 - 2\sqrt{2}}{4}$$

Wegen der Geometrie des Problems gilt

$$F_{34} = F_{14} = \frac{5 - \sqrt{2}}{4}$$

c)

Mit dem Reziprozitätsgesetz und der Summationsregel für die benötigten Sichtfaktoren

$$\begin{aligned} F_{41} &= \frac{A_1}{A_4} F_{14} = \frac{1}{6} \frac{5 - \sqrt{2}}{4} \\ F_{42} &= \frac{A_2}{A_4} F_{24} = \frac{1}{6} \frac{6 - \sqrt{2}}{4} \\ F_{43} &= F_{41} = \frac{1}{6} \frac{5 - \sqrt{2}}{4} \\ F_{44} &= 1 - 2F_{41} - F_{42} = \frac{1}{6}(2 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

d)

B1 und B3 erwärmen sich schneller als B2, da die Sichtfaktoren folgendes Verhalten ausweisen.

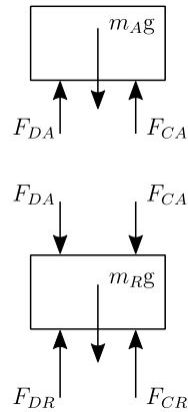
$$F_{41} = F_{43} > F_{42}$$

## 2.14 29.09.2017

### Beispiel 1

a)

Freigeschnittene Massen:



Die Berechnungsvorschriften lauten

$$F_{CA} = c_a(x_R - x_A)F_{DA} = d_A(v_{RA})(\dot{x}_R - \dot{x}_A)$$

$$F_{CR} = c_R(x_U - x_R)F_{DR} = d_R(\dot{x}_U - \dot{x}_R)$$

b)

Die Bewegungsgleichungen der Massen kann mithilfe der Impulserhaltung aufgestellt werden und lauten für den Aufbau

$$m_A\ddot{x}_A = F_{CA} + F_{DA} - m_Ag$$

und für das Rad

$$m_R\ddot{x}_R = F_{CR} + F_{DR} - F_{CA} - F_{DA} - m_Rg$$

c)

Im stationären Fall lauten die beiden Bewegungsgleichungen

$$0 = F_{CA} - m_Ag$$

$$0 = F_{CR} - F_{CA} - m_Rg$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$F_{CA} = m_Ag$$

Nun setzt man dies in die zweite Bewegungsgleichung ein. Das führt dann auf

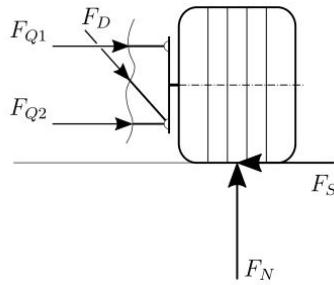
$$\begin{aligned} 0 &= F_{CR} - m_A g - m_R g \\ 0 &= -c_R x_R - m_A g - m_R g \\ x_R &= -\frac{(m_A + m_R)g}{c_R} \end{aligned}$$

Daraus folgt für die andere Auslenkung

$$\begin{aligned} F_{CA} &= m_A g = c_a (x_R - x_A) \\ m_A g &= -c_a \left( \frac{(m_A + m_R)g}{c_R} + x_A \right) \\ -\frac{m_A g}{c_a} &= \frac{(m_A + m_R)g}{c_R} + x_A \\ x_A &= -\frac{(m_A + m_R)g}{c_R} - \frac{m_A g}{c_a} \end{aligned}$$

d)

Freigeschnittene Radaufhängung:



e)

Der Drehpunkt für die Momentengleichung ist der Schnittpunkt der Stäbe Q2 und D. Die Gleichgewichtsbedingungen für die Radaufhängung lautet daher

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x : F_{Q1} + F_{Q2} - F_S + F_D \cos(\alpha) &= 0 \\ \mathbf{e}_y : -F_D \sin(\alpha) + F_N &= 0 \\ \mathbf{e}_z : -F_{Q1}b - F_S a + F_N d &= 0 \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen können nun die gesuchten Stabkräfte bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
 F_D &= \frac{F_N}{\sin(\alpha)} \\
 F_{Q1} &= \frac{F_N d - F_S a}{b} = \frac{\frac{F_N}{\sin(\alpha)} d - F_S a}{b} \\
 0 &= \frac{\frac{F_N}{\sin(\alpha)} d - F_S a}{b} + F_{Q2} - F_S + \frac{F_N}{\sin(\alpha)} \cos(\alpha) \\
 F_{Q2} &= F_S \left(1 + \frac{a}{b}\right) - F_N \left(\cot(\alpha) + \frac{d}{b}\right)
 \end{aligned}$$

## Beispiel 2

a)

Dieses System wird durch einen Freiheitsgrad komplett beschrieben, z.B. der Kurbelwinkel  $\alpha$ .

b)

Als geeigneter Freiheitsgrad wurde der Winkel  $\alpha$  gewählt. Es gilt die Zwangsbeziehung

$$R_1 \sin(\alpha) = R_2 \sin(\beta)$$

Dadurch lautet der Winkel  $\beta$

$$\beta = \arcsin\left(\frac{R_1}{R_2} \sin(\alpha)\right)$$

c)

Die Ortsvektoren zu den Körperschwerpunkten lauten für die Kurbelwelle

$$\mathbf{r}_{S1} = \begin{bmatrix} e \cos(\alpha) \\ e \sin(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}$$

die Pleuelstange

$$\mathbf{r}_{S2} = \begin{bmatrix} R_1 \cos(\alpha) + \frac{R_2}{2} \cos(\beta(\alpha)) \\ \frac{R_2}{2} \sin(\beta(\alpha)) \end{bmatrix}$$

und der für den Kolben

$$\mathbf{r}_K = \begin{bmatrix} R_1 \cos(\alpha) + R_2 \cos(\beta(\alpha)) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Die Geschwindigkeiten lauten für die Kurbelwelle

$$\mathbf{v}_{S1} = \begin{bmatrix} -e \sin(\alpha) \dot{\alpha} \\ e \cos(\alpha) \dot{\alpha} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \omega_{S1} = \dot{\alpha}$$

die Pleuelstange

$$\mathbf{v}_{S2} = \begin{bmatrix} -R_1 \sin(\alpha) \dot{\alpha} - \frac{R_2}{2} \sin(\beta) \frac{d\beta}{d\alpha} \dot{\alpha} \\ \frac{R_2}{2} \cos(\beta) \frac{d\beta}{d\alpha} \dot{\alpha} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \omega_{S2} = \frac{d\beta}{d\alpha} \dot{\alpha}$$

und für den Kolben

$$\mathbf{v}_K = \begin{bmatrix} -R_1 \sin(\alpha) \dot{\alpha} - R_2 \sin(\beta) \frac{d\beta}{d\alpha} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \omega_K = 0$$

e)

Die kinetischen Teilenergien lauten hier

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \left( \Theta_1 \dot{\alpha}^2 + \Theta_2 \left( \frac{d\beta}{d\alpha} \dot{\alpha} \right)^2 \right)$$

und

$$T_{trans} = \frac{1}{2} (m_1 \mathbf{v}_{S1}^T \mathbf{v}_{S1} + m_2 \mathbf{v}_{S2}^T \mathbf{v}_{S2} + m_K \mathbf{v}_K^T \mathbf{v}_K)$$

Daher ergibt sich für die gesamte kinetische Energie

$$T = T_{rot} + T_{trans}$$

f)

Der Ortsvektor zum Angriffspunkt der externen Kraft lautet

$$\mathbf{r}_{F_p} = \begin{bmatrix} R_1 \cos(\alpha) + R_2 \cos(\beta(\alpha)) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Der Vektor der externen Kraft lautet

$$\mathbf{f}_{F_p} = \begin{bmatrix} -F_p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die notwendige Ableitung lautet

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{F_p}}{\partial \alpha} = \begin{bmatrix} -R_1 \sin(\alpha) \dot{\alpha} - R_2 \sin(\beta) \frac{d\beta}{d\alpha} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mit der Berechnungsvorschrift für den gesuchten Vektor aus der Formelsammlung, ergibt sich für diesen

$$Q = F_p \left( R_1 \sin(\alpha) + R_2 \sin(\beta) \frac{d\beta}{d\alpha} \right)$$

### Beispiel 3

a)

Die Formel für den konvektiven Wärmeübergang wird der Formelsammlung entnommen und somit lauten die gesuchten Wärmestromdichten

$$\begin{aligned}\dot{q}_{BG} &= \alpha(T_B - T_G(t)) \\ \dot{q}_{MG} &= \alpha(T_M - T_G(t)) \\ \dot{q}_{DG} &= \alpha(T_D - T_G(t))\end{aligned}$$

Die SI-Einheit von  $\alpha$  lautet

$$[\alpha] = \frac{W}{m^2 K}$$

b)

Die Sichtfaktormatrix muss die Form

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{B-B} & F_{B-M} & F_{B-D} \\ F_{M-B} & F_{M-M} & F_{M-D} \\ F_{D-B} & F_{D-M} & F_{D-D} \end{bmatrix}$$

besitzen. Die einzelnen Sichtfaktor werden mit der Summationsregel und dem Reziprozitätsgesetz bestimmt. Außerdem muss man auch noch beachten, ob es sich bei manchen Flächen um konvexe Flächen handelt, da sich dann die entsprechenden Sichtfaktoren einfach aufstellen lassen. Unter Beachtung all dieser Bedingungen lauten hier sämtliche Sichtfaktoren

$$\begin{aligned}F_{B-B} &= F_{D-D} = 0 & F_{M-D} &= \frac{A_D}{A_M}(1 - F) \\ F_{B-D} &= F_{D-B} = F & F_{M-B} &= \frac{A_B}{A_M}(1 - F) \\ F_{B-M} &= F_{M-B} = 1 - F & F_{M-M} &= 1 - 2\frac{A_B}{A_M}(1 - F)\end{aligned}$$

c)

Unter Beachtung der Formel für die Nettowärmestromdichte aus der Formelsammlung erhält man für die gesuchten Größen

$$\dot{\mathbf{q}}_r = \begin{bmatrix} \dot{q}_{r,B} \\ \dot{q}_{r,M} \\ \dot{q}_{r,D} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^4 = \begin{bmatrix} T_B^4 \\ T_M^4 \\ T_D^4 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_B \\ \varepsilon_M \\ \varepsilon_D \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \text{diag}(\varepsilon)(\mathbf{E} - \mathbf{F}(\mathbf{E} - \text{diag}(\varepsilon)))^{-1}(\mathbf{E} - \mathbf{F})\sigma$$

d)

Für die Differentialgleichung wird anhand der Energieerhaltung aufgestellt und lautet dadurch

$$\rho V c_p \frac{d}{dt} T_B(t) = L - \alpha A_B (T_B - T_G) - A_B \dot{q}_{r,B}$$

#### Beispiel 4

a)

Mithilfe der Bedingungen aus der Angabe folgen für die Randbedingungen

$$T(0) = T_0$$
$$\left. \frac{d}{dx} T(x) \right|_{x=L} = 0 \quad \dots \text{adiabate Randbedingung}$$

b)

Unter Beachtung der Hinweise und des infinitesimalen Kontrollvolumen folgt für die einzelnen Wärmeströme

$$\dot{Q}(x) = -\lambda \pi \frac{D^2}{4} \frac{d}{dx} T(x)$$
$$\dot{Q}(x+dx) = \dot{Q}(x) - \lambda \pi \frac{D^2}{4} \frac{d^2}{dx^2} T(x) dx$$
$$d\dot{Q}_M = \alpha \pi D (T(x) - T_\infty) dx$$

Somit folgt schließlich für die Differentialgleichung

$$\dot{Q}_x - \dot{Q}(x+dx) - d\dot{Q}_M = 0$$
$$\Rightarrow \frac{d^2}{dx^2} T(x) - \frac{4\alpha}{\lambda D} (T(x) - T_\infty) = 0$$

c)

Verwendet man die geforderte Diskretisierung lautet die gegebene Differentialgleichung

$$\frac{T(x - \Delta x) - 2T(x) + T(x + \Delta x)}{\Delta x^2} + a_1 T(x) + a_2 = 0$$

Unter Einhaltung der gegebenen Form aus der Angabe und den Randbedingungen aus Punkt a) lauten die gesuchten Größen

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \frac{1}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} T_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_1 = a_1$$

## 2.15 01.12.2017

### Beispiel 1

a)

Die beiden gezeigten Federn sind parallel zu betrachten, daher kann man für die gesuchten Größen schließen

$$\begin{aligned}f_1 &= c_1(s - s_{01}) \\f_2 &= c_2(s - s_{02}) \\c_g &= c_1 + c_2 \\s_{0_g} &= \frac{c_1 s_{01} + c_2 s_{02}}{c_g}\end{aligned}$$

b)

Mithilfe des Impulserhaltungssatz aus der Formelsammlung kann man auf die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{s} = -c_g(s - s_{0_g}) + f_e$$

schließen.

c)

Im stationären Fall gilt  $\ddot{s} = 0$ . Daraus folgt

$$\begin{aligned}0 &= -c_g(s - s_{0_g}) + F \\s &= \frac{F + c_g s_{0_g}}{c_g}\end{aligned}$$

d)

Die zweite Ableitung nach der Zeit für den gegebenen Ansatz lautet

$$\ddot{x} = -x_0 \omega_0^2 \cos(\omega_0 t)$$

Durch gezieltes Einsetzen in die vereinfachte Bewegungsgleichung, kann man schließlich auf die gesuchte Eigenfrequenz schließen.

$$\begin{aligned}-m x_0 \omega_0^2 \cos(\omega_0 t) &= -c_g x_0 \cos(\omega_0 t) \\m \omega_0^2 &= c_g \\\omega_0 &= \sqrt{\frac{c_g}{m}}\end{aligned}$$

## Beispiel 2

a)

Im Allgemeinen besitzt ein Körper im freien Raum 3 Freiheitsgrade. Dieses System besteht nun aus 2 Körper, besitzt aber noch zusätzlich 4 Zwangsbedingungen. Somit besitzt dieses System exakt  $2 \cdot 3 - 4 = 2$  Freiheitsgrade.

b)

Für die generalisierten Koordinaten

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} h \\ \varphi \end{bmatrix}$$

Die Ortsvektoren zu den Schwerpunkten lauten

$$\mathbf{r}_1 = (L - h) \begin{bmatrix} -\cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{bmatrix}$$

Die dazugehörigen Geschwindigkeitsvektoren lauten

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \begin{bmatrix} (L - h)\dot{\varphi} \sin(\varphi) + \dot{h} \cos(\varphi) \\ (L - h)\dot{\varphi} \cos(\varphi) - \dot{h} \sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{h} \end{bmatrix}$$

Die kinetische Energie lautet

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^T \dot{\mathbf{r}}_1 + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_2^T \dot{\mathbf{r}}_2$$

Die Potentielle Energie lautet

$$V = -m_2 g h$$

Damit gilt für die Lagrange-Funktion

$$L = T - V = \frac{1}{2} m_1 \left( (L - h)^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{h}^2 \right) + \frac{1}{2} m_2 \dot{h}^2 + m_2 g h$$

Analog dazu für die generalisierten Koordinaten

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} r \\ \varphi \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_1 = r \begin{bmatrix} -\cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L-r \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \begin{bmatrix} r\dot{\varphi}\sin(\varphi) - \dot{r}\cos(\varphi) \\ r\dot{\varphi}\cos(\varphi) + \dot{r}\sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{r}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{r} \end{bmatrix}$$

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^T\dot{\mathbf{r}}_1 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^T\dot{\mathbf{r}}_2$$

$$V = -m_2g(L-r)$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1(r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2) + \frac{1}{2}m_2\dot{r}^2 + m_2g(L-r)$$

c)

Für die generalisierten Koordinaten

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} h \\ \varphi \end{bmatrix}$$

Zuerst muss der Vektor der generalisierten Kräfte bestimmt werden. Der Vektor der externen Kraft lautet

$$\mathbf{f}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_e \end{bmatrix}$$

Die dafür nötigen Ableitungen lauten

$$\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial h} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Damit lautet der Vektor der generalisierten Kräfte

$$\mathbf{f}_q = \begin{bmatrix} f_e \\ 0 \end{bmatrix}$$

Um den Euler-Lagrange-Formalismus durchzuführen werden zuerst ein paar Ableitungen benötigt. Diese lauten hier

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial h} &= -m_1(L-h)\dot{\varphi}^2 + m_2g \\
\frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{h}} &= m_1\dot{h} + m_2\dot{h} = \dot{h}(m_1 + m_2) \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m_1(L-h)^2\dot{\varphi} \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{h}} &= \ddot{h}(m_1 + m_2) \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= -2m_1(L-h)\dot{h}\dot{\varphi} + m_1(L-h)^2\ddot{\varphi}
\end{aligned}$$

Die erste Bewegungsgleichung lautet

$$\begin{aligned}
\ddot{h}(m_1 + m_2) + m_1(L-h)\dot{\varphi}^2 - m_2g &= f_e \\
\ddot{h} &= \frac{f_e + m_2g - m_1(L-h)\dot{\varphi}^2}{m_1 + m_2}
\end{aligned}$$

Die zweite Bewegungsgleichung lautet

$$\begin{aligned}
-2m_1(L-h)\dot{h}\dot{\varphi} + m_1(L-h)^2\ddot{\varphi} &= 0 \\
(L-h)\ddot{\varphi} &= 2\dot{h}\dot{\varphi} \\
\ddot{\varphi} &= \frac{2\dot{h}\dot{\varphi}}{(L-h)}
\end{aligned}$$

Analog für die generalisierten Koordinaten

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} r \\ \varphi \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_e \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_q = \begin{bmatrix} -f_e \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial r} &= m_1 r \dot{\varphi}^2 - m_2 g, & \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m_1 \dot{r} + m_2 \dot{r} = \dot{r}(m_1 + m_2), & \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m_1 r^2 \dot{\varphi} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= \ddot{r}(m_1 + m_2), & \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= 2m_1 r \dot{r} \dot{\varphi} + m_1 r^2 \ddot{\varphi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{r}(m_1 + m_2) - m_1 r \dot{\varphi}^2 + m_2 g &= -f_e \\ \ddot{r} &= \frac{-f_e - m_2 g + m_1 r \dot{\varphi}^2}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2m_1 r \dot{r} \dot{\varphi} + m_1 r^2 \ddot{\varphi} &= 0 \\ r \ddot{\varphi} &= -2\dot{r} \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} &= -\frac{2\dot{\varphi} \dot{r}}{r} \end{aligned}$$

d)

Da nun  $h = z_2 = \text{konst}$  muss auch  $r = \text{konst}$  gelten. Daraus kann man schließen, dass deren zeitliche Ableitungen verschwinden. Unter diesen Umständen besitzt dieses System nur noch einen Freiheitsgrad, den Winkel  $\varphi$ . Aus der zweiten Bewegungsgleichung folgt das auch  $\dot{\varphi} = 0$  gelten muss. Somit bewegt sich  $m_1$  mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit auf einer Kreisbahn. Der Mittelpunkt dieser Kreisbewegung hängt ausschließlich von den Anfangsbedingungen ab.



### Beispiel 3

a)

Die benötigte Formel kann aus der Formelsammlung entnommen werden. Die gesuchte Größe lautet somit

$$\dot{q}^\circ = (T_l - T_\infty) \frac{2\pi}{\underbrace{\frac{1}{r_i \alpha_i} + \frac{1}{\lambda_{isol} \ln \frac{r_O}{r_i}} + \frac{1}{r_O \alpha_O}}_{:=k^\circ}}$$

b)

Da die gegebenen Leitungsparameter homogen verteilt sind gilt

$$\int_V \rho_l c_{p,l} \frac{dT_l}{dt} dV = r_i^2 \pi \rho_l c_{p,l} L \frac{dT_l}{dt}$$

Die zugeführte elektrische Leistung lautet

$$P_{el} = I^2 R' L$$

und der Wärmestrom lautet

$$\dot{Q} = -\dot{q}^\circ L$$

Durch Einsetzen in den gegebenen Energieerhaltungssatz erhält man die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} r_i^2 \pi \rho_l c_{p,l} L \frac{dT_l}{dt} &= -\dot{q}^\circ L + I^2 R' L \\ \frac{dT_l}{dt} &= \frac{-\dot{q}^\circ + I^2 R'}{r_i^2 \pi \rho_l c_{p,l}} \end{aligned}$$

c)

Im stationären Fall fällt die zeitliche Ableitung fällt, somit ergibt sich für gesuchte Temperatur

$$\begin{aligned} 0 &= -(T_l - T_\infty) k^\circ + I^2 R' \\ T_l &= T_\infty + \frac{I^2 R'}{k^\circ} \end{aligned}$$

#### Beispiel 4

a)

Die Wärmestromdichte aufgrund der freien Konvektion lautet

$$\dot{q}_2 = -\alpha(T_2 - T_\infty)$$

Der Wärmestrom der durch das Gasgemisch hervorgeht lautet

$$\dot{q}_2 = \frac{1}{d_1\pi} \dot{q}_G^\circ$$

Somit ergibt sich für die gesuchte Temperatur

$$\begin{aligned} -\alpha(T_2 - T_\infty) &= \frac{1}{d_2\pi} \dot{q}_G^\circ \\ T_2 &= \frac{1}{d_1\pi\alpha} \dot{q}_G^\circ + T_\infty \end{aligned}$$

b)

Die Sichtfaktoren lauten für dieses System

$$\begin{aligned} F_{11} &= 0 \quad A_1 \text{ ist konvex} \\ F_{12} &= 1 - F_{11} = 1 \\ F_{21} &= \frac{A_1}{A_2} F_{12} = \frac{d_1}{d_2} = D \\ F_{22} &= 1 - F_{21} = 1 - D \end{aligned}$$

Damit lautet die Sichtfaktormatrix

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ D & 1 - D \end{bmatrix}$$

c)

Mit der Formel für die Nettowärmestromdichte aus der Formelsammlung ergibt sich der Zusammenhang

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \frac{\sigma\varepsilon_2}{\varepsilon_2(1-D)+1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -D & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^4 \\ T_2^4 \end{bmatrix}$$

d)

Relativ analog zu Punkt a) ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= k(T_1^4 - T_2^4), \text{ mit } k = \frac{\sigma\varepsilon_2}{\varepsilon_2(1-D)+1} \\ \dot{q}_1 &= \frac{1}{d_1\pi} \dot{q}^\circ \\ T_1 &= \left( \frac{1}{kd_1\pi} \dot{q}^\circ + T_2^4 \right)^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

## 2.16 02.02.2018

### Beispiel 1

a)

Das Drehmoment, welches von den Antriebskräfte im Rotorzentrum der einzelnen Rotorblätter erzeugt wird lautet

$$\tau_{R,a} = 3F_{R,a}l_R$$

Im stationären muss die Beziehung

$$\tau_{R,a} = \tau_G + \tau_v$$

erfüllt sein. Der Einsetzen des gegebenen geschwindigkeitsabhängigen Reibmoments folgt

$$\omega^* = \frac{F_{R,a}l_R - \tau_G}{\mu_v}$$

b)

Durch den Impulserhaltungssatz folgen die beiden Gleichungen

$$m_1\ddot{x} = -F_{S1} \cos(\varphi)$$

$$m_1\ddot{y} = -F_{S1} \sin(\varphi)$$

Da sich die Masse auf einer Kreisbahn bewegt gilt

$$x = l_R \cos(\varphi)$$

$$y = l_R \sin(\varphi)$$

Die zweifachen zeitlichen Ableitung dieser Größen lauten

$$\ddot{x} = -l_R\omega^2 \cos(\varphi)$$

$$\ddot{y} = -l_R\omega^2 \sin(\varphi)$$

Durch Einsetzen in Impulserhaltungssatz folgt schließlich

$$F_{S1} = m_1l_R\omega^2$$

Analog lauten die Kräfte der anderen Rotorblätter

$$F_{S2} = m_2l_R\omega^2$$

$$F_{S3} = m_3l_R\omega^2$$

c)

Da die drei Rotorblätter zueinander um den Faktor  $\frac{2\pi}{3}$  verdreht sind, lautet die resultierende Kraft

$$\mathbf{F}_C = \begin{bmatrix} F_{S1} \cos(\varphi) + F_{S2} \cos(\varphi + \frac{2\pi}{3}) + F_{S3} \cos(\varphi - \frac{2\pi}{3}) \\ F_{S1} \sin(\varphi) + F_{S2} \sin(\varphi + \frac{2\pi}{3}) + F_{S3} \sin(\varphi - \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix}$$

i)

in diesem Fall folgt

$$\mathbf{F}_C = \begin{bmatrix} ml_R \omega^2 (\cos(\varphi) + \cos(\varphi + \frac{2\pi}{3}) + \cos(\varphi - \frac{2\pi}{3})) \\ ml_R \omega^2 (\sin(\varphi) + \sin(\varphi + \frac{2\pi}{3}) + \sin(\varphi - \frac{2\pi}{3})) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die Klammerausdrücke müssen 0 werden, was durch die entsprechenden Summensätze gezeigt werden kann.

ii)

Hier lautet die resultierende Kraft

$$\mathbf{F}_C = \begin{bmatrix} ml_R \omega^2 (1.1 \cos(\varphi) + \cos(\varphi + \frac{2\pi}{3}) + \cos(\varphi - \frac{2\pi}{3})) \\ ml_R \omega^2 (1.1 \sin(\varphi) + \sin(\varphi + \frac{2\pi}{3}) + \sin(\varphi - \frac{2\pi}{3})) \end{bmatrix}$$

Die vereinfachten Klammerausdrücke können wieder mit den entsprechenden Summensätzen bestimmt werden und lauten daher

$$\begin{aligned} & \left( 1.1 \cos(\varphi) + \cos(\varphi + \frac{2\pi}{3}) + \cos(\varphi - \frac{2\pi}{3}) \right) = \\ & 0.1 \cos(\varphi) + \underbrace{\left( \cos(\varphi) + \cos(\varphi + \frac{2\pi}{3}) + \cos(\varphi - \frac{2\pi}{3}) \right)}_{=0} \\ & \left( 1.1 \sin(\varphi) + \sin(\varphi + \frac{2\pi}{3}) + \sin(\varphi - \frac{2\pi}{3}) \right) = \\ & 0.1 \sin(\varphi) + \underbrace{\left( \sin(\varphi) + \sin(\varphi + \frac{2\pi}{3}) + \sin(\varphi - \frac{2\pi}{3}) \right)}_{=0} \end{aligned}$$

Somit lautet schließlich die resultierende Kraft

$$\mathbf{F}_C = 0.1 ml_R \omega^2 \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{bmatrix}$$

d)

Im Angriffspunkt gilt

$$\begin{aligned} F_{R,w}^A &= 2F_{R,w} \\ F_{C,y}^A &= 2F_{C,y} \\ F_{C,z}^A &= F_{C,z} \end{aligned}$$

Die Kräftebilanz im Angriffspunkt lautet

$$\begin{aligned} \text{gleiche } \mathbf{e}_x : 2F_{R,w} &= (F_{A1} + F_{A2} \cos(\frac{\pi}{4})) \cos(\frac{\pi}{4}) \\ \mathbf{e}_y : 2F_{C,y} &= (-F_{A1} + F_{A2}) \cos(\frac{\pi}{4}) \sin(\frac{\pi}{4}) \\ \mathbf{e}_z : F_M &= (F_{A1} + F_{A2}) \sin(\frac{\pi}{4}) - F_{C,z} \end{aligned}$$

Durch lösen dieses Gleichungssystem (3 Unbekannte, 3 Gleichungen) erhält man

$$\begin{aligned}F_{A1} &= 2F_{R,w} - 2F_{C,y} \\F_{A2} &= 2F_{R,w} + 2F_{C,y} \\F_M &= 2\sqrt{2}F_{R,w} - F_{C,z}\end{aligned}$$

e)

Mit der Gleichung aus der Angabe folgt

$$F_{S,i} := c_f(l_{R,i} - l_{R0}) = m_i l_{R,i} \omega^2$$

Um die gesuchte Größe zu ermitteln muss man die obige Gleichung einfach umformen und man erhält

$$l_{R,i} = \frac{c_f l_{R0}}{c_f - m_i \omega^2}$$

**2.17    16.03.2018**

**2.18    18.05.2018**

**2.19    13.07.2018**

**2.20    28.09.2018**

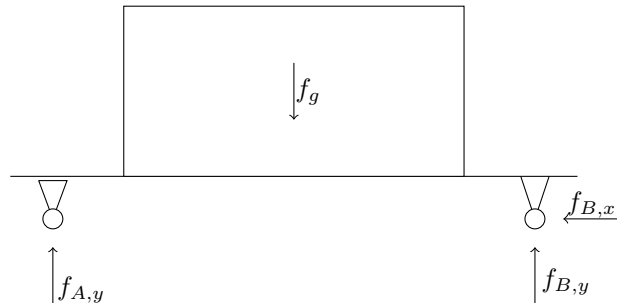
**2.21    30.11.2018**

**2.22    01.02.2019**

## 2.23 15.03.2019

### Beispiel 1

a)



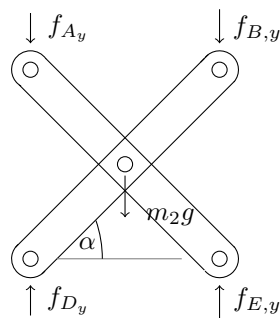
Um die Kräfte in den Lagern zu bestimmen, stellen wir zuerst das Kräftegleichgewicht und die Momenten Gleichung im Punkt B auf.

$$\begin{aligned} x : 0 &= f_{B,x} \\ y : 0 &= f_A + f_{B,y} - f_g \\ M_B : 0 &= b f_g - 2L \cos(\alpha) \end{aligned}$$

Formt man nun die Momenten Gleichung nach  $f_A$  um folgt:

$$f_A = \frac{b f_g}{2L \cos(\alpha)} \quad f_{B,x} = 0 \quad f_{B,y} = \left(1 - \frac{b}{2L \cos(\alpha)}\right) f_g$$

b)

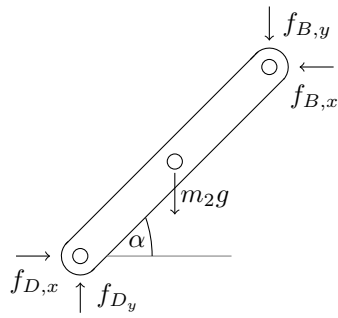


Um die Kräfte in den Punkten D und E zu bestimmen, stellen wir das Kräftegleichgewicht in den Trägern auf, daraus folgt:

$$f_{D,y} = m_2 g + f_{B,y} \quad f_{E,y} = m_2 g + f_A$$

c)

Um die Kräfte in den Lagern D und E in horizontaler (x-Richtung) zu bestimmen schneiden wir die Hubstangen getrennt voneinander frei und stellen die Kraftgleichungen und die Momenten Gleichung auf.



$$x : 0 = f_{E,x} - f_{D,x}$$

$y$  : wurde bereits bestimmt

$$M_D : 0 = m_2 g \cos(\alpha) + f_{B,x} \sin(\alpha) + f_{B,y} \cos(\alpha)$$

Aus der Momenten Gleichung folgt:

$$f_{B,x} = \frac{m_2 g - f_{B,y}}{\tan \alpha} = f_{E,x} \quad F(\alpha) = f_{D,x} = -f_{E,x}$$

d)

Um die Haftbedingung zu berechnen formt man  $F(\alpha) = \mu_H f_{D,y}$  um und setzt für  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  ein:

$$\mu_H \geq \frac{F(\alpha)}{f_{D,y}} = \frac{m_1 + m_2}{m_2 + \frac{m_1 b}{\sqrt{2}L}}$$

## Beispiel 2

a)

Die Oberfläche des Öl's strahlt nicht auf sich selbst, deshalb lautet der Sichtfaktor Matrixeintrag  $F_{OO} = 0$ , aus der Summationsregel folgt  $F_{OH} = 1 - F_{OO} = 1$ . Aus dem Reziprozitätsgesetz folgt  $F_{HO} = \frac{A_O}{A_H} F_{OH}$ . Der Letzte Eintrag lautet wegen der Summationsregel  $F_{HH} = 1 - \frac{A_O}{A_H}$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{A_O}{A_H} & 1 - \frac{A_O}{A_H} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \sigma \left( \left( \frac{\varepsilon_H A_H - \varepsilon_H A_O + A_O}{-A_O \varepsilon_H \varepsilon_O + \varepsilon_H A_H + A_O \varepsilon_O} + \frac{(-1+\varepsilon_H)A_O}{-A_O \varepsilon_H \varepsilon_O + \varepsilon_H A_H + A_O \varepsilon_O} \right) \varepsilon_O T_O^4 + \left( -\frac{(-1+\varepsilon_O)A_H}{-A_O \varepsilon_H \varepsilon_O + \varepsilon_H A_H + A_O \varepsilon_O} - \frac{A_H}{-A_O \varepsilon_H \varepsilon_O + \varepsilon_H A_H + A_O \varepsilon_O} \right) \varepsilon_H T_H^4 \right) \\ \sigma \left( \left( -\frac{A_O (\varepsilon_H A_H - \varepsilon_H A_O + A_O)}{A_H (-A_O \varepsilon_H \varepsilon_O + \varepsilon_H A_H + A_O \varepsilon_O)} - \frac{A_O^2 (-1+\varepsilon_H)}{A_H (-A_O \varepsilon_H \varepsilon_O + \varepsilon_H A_H + A_O \varepsilon_O)} \right) \varepsilon_O T_O^4 + \left( \frac{A_O (-1+\varepsilon_O)}{-A_O \varepsilon_H \varepsilon_O + \varepsilon_H A_H + A_O \varepsilon_O} + \frac{A_O}{-A_O \varepsilon_H \varepsilon_O + \varepsilon_H A_H + A_O \varepsilon_O} \right) \varepsilon_H T_H^4 \right) \end{bmatrix}$$

Um diesen Vektor zu ermitteln, wird einfach der Formalismus der Nettowärmestromdichte genutzt.

Der Vektor  $\dot{\mathbf{q}}$  besteht aus den Einträgen  $\dot{q}_O$  und  $\dot{q}_H$ , wir benötigen aber nur den ersten Eintrag, weil  $\dot{Q}_{rad} = A_O \dot{q}_O$  lautet.

b)

Um die stationäre thermische Energiebilanz zu bestimmen müssen alle Wärmeströme die ein- oder aus- treten addiert werden.

$$\dot{m}_{LM} c_{p,LM} (T_\infty - T_L) + 0.2 \dot{m}_{LM} c_{p,O} - A_O \alpha_{OL} (T_O - T_\infty) - \dot{Q}_{rad} + P_{el} \eta = 0$$

c)

Die Temperatur  $T_O$  lautet nun  $\bar{T}_O$  und wird in die Lösung von b eingesetzt. Danach muss die Gleichung nach  $P_{el}$  umgeformt werden. Daraus ergibt sich.

$$P_{el} = \frac{1}{\eta} \left( -\dot{m}_{LM} c_{p,LM} (T_\infty - T_L) - 0.2 \dot{m}_{LM} c_{p,O} - A_O \alpha_{OL} (T_O - T_\infty) + \dot{Q}_{rad} \right)$$

d)

Die Anfangsbedingung der Differentialgleichung lautet  $T_O(t=0) = \bar{T}_O$  und die Differentialgleichung erhält man indem man die Fouriersche Wärmeleitgleichung nach dem Volumen integriert. Zu beachten ist das auf der rechten Seite alle ein- und ausfließenden Wärmeströme stehen:

$$\int \rho c_{p,O} \frac{\partial T_O}{\partial t} dV = \int -\alpha_{O,L} (T_O - T_\infty) - \dot{q}_{rad} dA$$

$$m_O c_{p,O} \frac{\partial T_O}{\partial t} = A_O \alpha_{O,L} (T_O - T_\infty) - \dot{Q}_{rad}$$

$$T_O(t=0) = \bar{T}_O$$



## 2.24 17.05.2019

### Beispiel 3

a)

Der Vektor vom Ursprung zum Schwerpunkt des Rades kann direkt aus Angabe abgelesen werden und lautet deshalb:

$$\mathbf{r}_r = \begin{bmatrix} p \cos \alpha - r \sin \alpha \\ p \sin \alpha + r \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Der translatorische Geschwindigkeitsvektor erhält man durch die Ableitung vom Ortsvektor nach den Freiheitsgraden.

Translatorischer Geschwindigkeitsvektor:

$$\mathbf{v}_r = \dot{\mathbf{r}}_r = \begin{bmatrix} \dot{p} \cos \alpha \\ \dot{p} \sin \alpha \end{bmatrix}$$

Die rotatorische Geschwindigkeit lautet:

$$\omega_r = \frac{\dot{p}}{r}$$

b)

Der Vektor zum Schwerpunkt des Stabes kann ebenfalls aus der Angabe abgelesen werden und lautet deshalb:

$$\mathbf{r}_S = \begin{bmatrix} p \cos \alpha - r \sin \alpha + l_s \sin \varphi \\ p \sin \alpha + r \cos \alpha + l_s \cos \varphi \end{bmatrix}$$

Analog zu a) lautet der translatorische Geschwindigkeitsvektor:

$$\mathbf{v}_S = \dot{\mathbf{r}}_S = \begin{bmatrix} \dot{p} \cos \alpha + l_s \cos \varphi \dot{\varphi} \\ \dot{p} \sin \alpha - l_s \sin \varphi \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

c)

Als erstes wird die translatorische kinetische Energie des System wie folgt ermittelt:

Vereinfachungen:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_r^T \dot{\mathbf{r}}_r &= [\dot{p} \cos \alpha \quad \dot{p} \sin \alpha] \begin{bmatrix} \dot{p} \cos \alpha \\ \dot{p} \sin \alpha \end{bmatrix} \\ &= \dot{p}^2 \cos^2 \alpha + \dot{p}^2 \sin^2 \alpha \\ &= \dot{p}^2 \underbrace{(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)}_{=1} \\ &= \dot{p}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{r}}_S^T \dot{\mathbf{r}}_S &= \begin{bmatrix} \dot{p} \cos \alpha + l_s \cos \varphi \dot{\varphi} & \dot{p} \sin \alpha - l_s \sin \varphi \dot{\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \cos \alpha + l_s \cos \varphi \dot{\varphi} \\ \dot{p} \sin \alpha - l_s \sin \varphi \dot{\varphi} \end{bmatrix} \\
&= (\dot{p} \cos \alpha + l_s \cos \varphi \dot{\varphi})^2 + (\dot{p} \sin \alpha - l_s \sin \varphi \dot{\varphi})^2 \\
&= \dot{p}^2 \cos^2 \alpha + 2l_s \dot{p} \dot{\varphi} \cos \alpha \cos \varphi + l_s^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi + \dot{p}^2 \sin^2 \alpha - 2l_s \dot{p} \dot{\varphi} \sin \alpha \sin \varphi + l_s^2 \sin^2 \varphi \dot{\varphi}^2 \\
&= \dot{p}^2 \underbrace{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}_{=1} + 2l_s \dot{p} \dot{\varphi} \underbrace{(\cos \varphi \cos \alpha - \sin \varphi \sin \alpha)}_{\cos(\varphi+\alpha)} + l_s^2 \dot{\varphi}^2 \underbrace{(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)}_{=1} \\
&= \dot{p}^2 + 2l_s \dot{p} \dot{\varphi} \cos(\varphi + \alpha) + l_s^2 \dot{\varphi}^2
\end{aligned}$$

Nun kann man schließlich die translatorische kinetischen Energie des Rades und des Stabes bestimmen.

$$\begin{aligned}
T_{trans,r} &= \frac{1}{2} m_r \dot{p}^2 \\
T_{trans,s} &= \frac{1}{2} m_s (\dot{p}^2 + l_s^2 \dot{\varphi}^2 + 2l_s \dot{p} \dot{\varphi} \cos(\varphi + \alpha))
\end{aligned}$$

Die kinetische Energie besitzt jedoch auch einen rotatorischen Anteil. Dieser lautet für die beiden Teilsysteme:

$$\begin{aligned}
T_{rot,r} &= \frac{1}{2} \Theta_r \frac{\dot{p}^2}{r^2} \\
T_{rot,s} &= \frac{1}{2} \Theta_s \dot{\varphi}^2
\end{aligned}$$

Da wir nun sämtliche Teilenergien ermittelt haben, beträgt die gesamte kinetische Energie des vorliegenden Systems:

$$\begin{aligned}
T &= T_{trans,r} + T_{rot,r} + T_{trans,s} + T_{rot,s} \\
&= \frac{1}{2} m_r \dot{p}^2 + \frac{1}{2} \Theta_r \frac{\dot{p}^2}{r^2} + \frac{1}{2} m_s (\dot{p}^2 + l_s^2 \dot{\varphi}^2 + 2l_s \dot{p} \dot{\varphi} \cos(\varphi + \alpha)) + \frac{1}{2} \Theta_s \dot{\varphi}^2
\end{aligned}$$

Als nächstes wird nun die gesamte potentielle Energie des gegebenen System ermittelt. Zuerst berechnet man wieder die Energien der Teilsysteme und addiert dieser zum Schluss wieder zusammen.

$$\begin{aligned}
V_r &= m_r g (p \sin \alpha + r \cos \alpha) \\
V_s &= m_s g (p \sin \alpha + r \cos \alpha + l_s \cos \varphi) \\
V &= V_r + V_s = m_r g (p \sin \alpha + r \cos \alpha) + m_s g (p \sin \alpha + r \cos \alpha + l_s \cos \varphi)
\end{aligned}$$

d)

Um den Vektor der generalisierten Kräfte zu bestimmen benötigt man zuerst den Richtungsvektor zu den Angriffspunkten der extern wirkenden Kräfte, hier  $f_{ext}$ .

Angriffspunkt der Kraft:

$$\mathbf{r}_f = \begin{bmatrix} p \cos \alpha - r \sin \alpha + 2l_s \sin \varphi \\ p \sin \alpha + r \cos \alpha + 2l_s \cos \varphi \end{bmatrix}$$

Weiters benötigt man auch den Vektor der externen Kräfte.

Kraftvektor:

$$\mathbf{f}_{ext}^T = f_{ext} \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \end{bmatrix}$$

Nun werden die partiellen Ableitung nach  $\mathbf{q}$  vom Angriffspunkt der Kraft gebildet:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_f}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} 2l_s \cos \varphi \\ -2l_s \sin \varphi \end{bmatrix} \quad \frac{\partial \mathbf{r}_f}{\partial p} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}$$

Der Vektor der generalisierten Kräfte wird nun wie folgt ermittelt:

$$\mathbf{f}_q = \mathbf{f}_{ext}^T \frac{\partial \mathbf{r}_f}{\partial \mathbf{q}}$$

generalisierte Kräfte:

$$\begin{aligned} f_{q,\varphi} &= f_{ext} \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2l_s \cos \varphi \\ -2l_s \sin \varphi \end{bmatrix} \\ &= f_{ext} (2l_s \cos \beta \cos \varphi - 2l_s \sin \beta \sin \varphi) \\ &= f_{ext} 2l_s \underbrace{(\cos \beta \cos \varphi - \sin \beta \sin \varphi)}_{\cos(\beta+\varphi)} \\ &= f_{ext} 2l_s \cos(\beta + \varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{q,p} &= f_{ext} \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \\ &= f_{ext} \underbrace{(\cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha)}_{\cos(\beta-\alpha)} \\ &= f_{ext} \cos(\beta - \alpha) \end{aligned}$$

gesamter Vektor:

$$\mathbf{f}_q = f_{ext} \begin{bmatrix} 2l_s \cos(\beta + \varphi) \\ \cos(\beta - \alpha) \end{bmatrix}$$

e)

Zum Schluss sollen noch die Bewegungsgleichungen mithilfe des Euler-Lagrange-Formalismus bestimmt werden.

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2} m_r \dot{p}^2 + \frac{1}{2} \Theta_r \frac{\dot{p}^2}{r^2} + \frac{1}{2} m_s (\dot{p}^2 + l_s^2 \dot{\varphi}^2 + 2l_s \dot{p} \dot{\varphi} \cos(\varphi + \alpha)) + \frac{1}{2} \Theta_s \dot{\varphi}^2 \\ &\quad - m_r g (p \sin \alpha + r \cos \alpha) - m_s g (p \sin \alpha + r \cos \alpha + l_s \cos \varphi) \end{aligned}$$

Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \varphi} \right) &= 2l_s f_{ext} \cos(\beta + \varphi) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{p}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial p} \right) &= f_{ext} \cos(\beta - \alpha) \end{aligned}$$

Zwischenschritte:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m_s (l_s^2 \dot{\varphi} + l_s \dot{p} \cos(\varphi + \alpha)) + \Theta_s \dot{\varphi} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{p}} &= m_r \dot{p} + \frac{\Theta_r}{r^2} \dot{p} + m_s (\dot{p} + 2l_s \dot{\varphi} \cos(\varphi + \alpha)) \end{aligned}$$

auftretende Ableitungen:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m_s l_s \sin(\varphi + \alpha) \dot{p} \dot{\varphi} + m_s g l_s \sin \varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial p} = -g(m_s + m_r) \sin \alpha$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = m_s l_s \cos(\varphi + \alpha) \ddot{p} + (m_s l_s^2 + \Theta_s) \ddot{\varphi} - m_s l_s \dot{p} \sin(\varphi + \alpha) \dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{p}} \right) = \left( m_r + \frac{\Theta_r}{r^2} + m_s \right) \ddot{p} + m_s l_s (\ddot{\varphi} \cos(\varphi + \alpha) - \dot{\varphi} \sin(\varphi + \alpha) \dot{\varphi})$$

## 2.25 12.07.2019

### Beispiel 1

a)

Der Richtungsvektor vom Ursprung zum Schwerpunkt der Masse  $m$  lautet:

$$\mathbf{p}_m = \begin{bmatrix} r \cos(\alpha) + b \\ r \sin(\alpha) - h \end{bmatrix}$$

Mithilfe diesen Vektor kann ebenfalls auch der Geschwindigkeitsvektor bestimmt werden, indem man den Richtungsvektor nach der Zeit ableitet.

$$\dot{\mathbf{p}}_m = \begin{bmatrix} -r\dot{\alpha} \sin(\alpha) + \dot{b} \\ r\dot{\alpha} \cos(\alpha) - \dot{h} \end{bmatrix}$$

b)

Um die kinetischen Energien zu berechnen, müssen zuerst einige Nebenrechnungen durchgeführt werden.

Nebenrechnungen:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_m^T \dot{\mathbf{p}}_m &= [-r\dot{\alpha} \sin(\alpha) + \dot{b} \quad r\dot{\alpha} \cos(\alpha) - \dot{h}] \begin{bmatrix} -r\dot{\alpha} \sin(\alpha) + \dot{b} \\ r\dot{\alpha} \cos(\alpha) - \dot{h} \end{bmatrix} \\ &= r^2 \dot{\alpha}^2 \underbrace{(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)}_{=1} - 2r\dot{\alpha}\dot{b} \sin \alpha - 2r\dot{\alpha}\dot{h} \cos \alpha + \dot{b}^2 + \dot{h}^2 \\ &= r^2 \dot{\alpha}^2 - 2r\dot{\alpha}\dot{b} \sin \alpha - 2r\dot{\alpha}\dot{h} \cos \alpha + \dot{b}^2 + \dot{h}^2 \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{h}{b}\right) \\ \dot{\varphi} &= \frac{\dot{h}b - h\dot{b}}{b^2 + h^2} \end{aligned}$$

kinetische Energie des Systems:

$$\begin{aligned} T_{tm} &= \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{p}}_m^T \dot{\mathbf{p}}_m = \frac{1}{2} m \left( r^2 \dot{\alpha}^2 - 2r\dot{\alpha}\dot{b} \sin(\alpha) - 2r\dot{\alpha}\dot{h} \cos(\alpha) + \dot{b}^2 + \dot{h}^2 \right) \\ T_{rm} &= \frac{1}{2} \Theta_m \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} \Theta_m \left( \frac{\dot{h}b - h\dot{b}}{b^2 + h^2} \right)^2 \\ T_{rr} &= \frac{1}{2} \Theta_r \dot{\alpha}^2 \\ T &= T_{tm} + T_{rm} + T_{rr} \\ &= \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{p}}_m^T \dot{\mathbf{p}}_m = \frac{1}{2} m \left( r^2 \dot{\alpha}^2 - 2r\dot{\alpha}\dot{b} \sin(\alpha) - 2r\dot{\alpha}\dot{h} \cos(\alpha) + \dot{b}^2 + \dot{h}^2 \right) + \frac{1}{2} \Theta_m \left( \frac{\dot{h}b - h\dot{b}}{b^2 + h^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \Theta_r \dot{\alpha}^2 \end{aligned}$$

c)

potentielle Energie des Systems:

$$\begin{aligned} V_m &= mg(r \sin \alpha - h) \\ V_c &= \frac{1}{2}c \left( \sqrt{b^2 + h^2} s_0 \right)^2 \\ V &= V_m + V_c = mg(r \sin \alpha - h) + \frac{1}{2}c \left( \sqrt{b^2 + h^2} s_0 \right)^2 \end{aligned}$$

d)

Die viskose Reibkraft muss in der Form  $f_r = \mu_V \Delta v$  beschrieben werden. In diesen Beispiel ist  $\Delta v = \dot{\varphi} \mathbf{r}$ .  $\mathbf{r}$  ist der Vektor vom Angriffspunkt der Feder zum Schwerpunkt der Masse.

$$\mathbf{f}_V = \mu_V \underbrace{\frac{\dot{h}b - h\dot{b}}{b^2 + h^2}}_{\dot{\varphi}} \underbrace{\begin{bmatrix} b \\ -h \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}}$$

partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{p}}_m}{\partial \alpha} = \begin{bmatrix} -r \sin \alpha \\ r \cos \alpha \end{bmatrix} \quad \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}_m}{\partial b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}_m}{\partial h} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

generalisierte Kräfte:

Multipliziert man die viskose Reibungskraft mit allen partiellen Ableitungen erhält man

$$\mathbf{f}_{q,v} = \mu_V \frac{\dot{h}b - h\dot{b}}{b^2 + h^2} \begin{bmatrix} r \sin \alpha b + r \cos \alpha h \\ -b \\ -h \end{bmatrix}$$

Die andere externe Kraft ist

$$\mathbf{f}_x = \begin{bmatrix} f_x \\ 0 \end{bmatrix}$$

Multipliziert mit den partiellen Ableitungen erhält man

$$\mathbf{f}_{q,x} = \begin{bmatrix} -f_x r \sin \alpha \\ f_x \\ 0 \end{bmatrix}$$

Der gesamte Vektor der generalisierten Kräfte beträgt

$$\mathbf{f}_q = \mu_V \frac{\dot{h}b - h\dot{b}}{b^2 + h^2} \begin{bmatrix} r \sin \alpha b + r \cos \alpha h \\ -b \\ -h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -f_x r \sin \alpha \\ f_x \\ 0 \end{bmatrix}$$

e)

Verwendet man aus der Formelsammlung im Punkt generalisierte Kräfte die 2.te Formel und passt man diese an den stationären Fall an erhält man

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{mgr \cos \alpha}{\frac{c(\sqrt{b^2 + h^2} - s_0)}{\sqrt{b^2 + h^2}} b} \\ \frac{c(\sqrt{b^2 + h^2} - s_0)}{\sqrt{b^2 + h^2}} h - mg \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_x r \sin \alpha \\ f_x \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nun wird  $s_0$  mit 0 angenommen und anschließend werden die generalisierten Koordinaten bestimmt.

1. Koordinate:

$$\begin{aligned} mgr \cos \alpha &= -f_x r \sin \alpha \\ -\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} &= \frac{mg}{f_x} \\ -\tan \alpha &= \frac{mg}{f_x} \\ \alpha &= -\arctan \left( \frac{mg}{f_x} \right) \end{aligned}$$

2. Koordinate:

$$\begin{aligned} \frac{c(\sqrt{b^2 + h^2})}{\sqrt{b^2 + h^2}} b &= f_x \\ cb &= f_x \\ b &= \frac{f_x}{c} \end{aligned}$$

3. Koordinate

$$\begin{aligned} \frac{c(\sqrt{b^2 + h^2})}{\sqrt{b^2 + h^2}} h - mg &= 0 \\ ch - mg &= 0 \\ h &= \frac{mg}{c} \end{aligned}$$

f)

Die resultierende Reibkraft wird mithilfe der Formel 2.96 aus dem Vorlesungsskript berechnet und lautet hier:

$$\mathbf{f}_F = -c_W A \frac{\rho}{2} |\dot{\mathbf{p}}_m| \dot{\mathbf{p}}_m$$

$$\begin{aligned} |\dot{\mathbf{p}}_m| &= \sqrt{\left(-r\dot{\alpha} \sin(\alpha) + \dot{b}\right)^2 + \left(r\dot{\alpha} \cos(\alpha) - \dot{h}\right)^2} \\ &= \sqrt{r^2\dot{\alpha}^2 \sin^2 \alpha - 2r\dot{\alpha}\dot{b} \sin \alpha + \dot{b}^2 + r^2\dot{\alpha}^2 \cos^2 \alpha - 2r\dot{\alpha}\dot{h} \cos \alpha + \dot{h}^2} \\ &= \sqrt{r^2\dot{\alpha}^2 \underbrace{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}_{=1} - 2r\dot{\alpha}\dot{b} \sin \alpha - 2r\dot{\alpha}\dot{h} \cos \alpha + \dot{b}^2 + \dot{h}^2} \\ &= \sqrt{r^2\dot{\alpha}^2 - 2r\dot{\alpha}\dot{b} \sin \alpha - 2r\dot{\alpha}\dot{h} \cos \alpha + \dot{b}^2 + \dot{h}^2} \end{aligned}$$

Multipliziert man nun  $\mathbf{f}_F$  mit den partiellen Ableitungen aus d) und vereinfacht man so weit wie möglich

erhält man

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_{q,F} &= -c_W A \frac{\rho}{2} |\dot{\mathbf{p}}_m| \begin{bmatrix} r\dot{\alpha} \underbrace{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}_{=1} - r\dot{b} \sin \alpha - r\dot{h} \cos \alpha \\ -r\dot{\alpha} \sin(\alpha) + \dot{b} \\ -r\dot{\alpha} \cos(\alpha) + \dot{h} \end{bmatrix} \\
 &= -c_W A \frac{\rho}{2} |\dot{\mathbf{p}}_m| \begin{bmatrix} r\dot{\alpha} - r\dot{b} \sin \alpha - r\dot{h} \cos \alpha \\ -r\dot{\alpha} \sin(\alpha) + \dot{b} \\ -r\dot{\alpha} \cos(\alpha) + \dot{h} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$



## Beispiel 2

a)

Da es sich hier um ein Problem mit Zylinderkoordinaten handelt, verwendet man nun einfach die Wärmeleitgleichung für Zylinderkoordinaten aus Formelsammlung und adaptiert diese entsprechend der Angabe.

Wärmeleitgleichung:

$$0 = \lambda \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} T_i(r) \right) \right)$$

Die 0 auf der linken Seite beruht darauf, dass es sich hier um ein stationäres Problem handelt und die Terme für  $\varphi$  und  $z$  fallen ebenfalls weg.

Lösung der DGL:

$$\begin{aligned} \lambda_i \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} T_i(r) \right) \right) &= 0 \\ \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} T_i(r) \right) &= 0 \\ \int \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} T_i(r) \right) dr &= \int 0 dr \\ r \frac{d}{dr} T_i(r) &= C_3 \\ \frac{d}{dr} T_i(r) &= \frac{C_3}{r} \\ \int \frac{d}{dr} T_i(r) dr &= \int \frac{C_3}{r} dr \\ T_i(r) &= C_3 \ln(r) + C_4 \end{aligned}$$

Randbedingungen:

$$\begin{aligned} T_i(2R) &= C_3 \ln(2R) + C_4 = T_2 \\ T_i(3R) &= C_3 \ln(3R) + C_4 = T_3 \end{aligned}$$

Integrationskonstanten:

Ausgehend von dem Gleichungssystem der Randbedingung kann man die Integrationskonstanten sehr leicht bestimmen. Als ersten formt man die 2.te Gleichung auf  $C_4$  um.

$$\begin{aligned} T_3 &= C_3 \ln(3R) + C_4 \\ C_4 &= T_3 - C_3 \ln(3R) \end{aligned}$$

Dann wird in Gleichung 1 eingesetzt

$$\begin{aligned} T_2 &= C_3 \ln(2R) + T_3 - C_3 \ln(3R) \\ T_2 - T_3 &= C_3 \underbrace{(\ln(2R) - \ln(3R))}_{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \\ C_3 &= \frac{T_2 - T_3}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \end{aligned}$$

Nun setzt man  $C_3$  in  $C_4$  ein

$$C_4 = T_3 - \frac{T_2 - T_3}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \ln(3R)$$

$$C_4 = \frac{T_3 (\ln(2R) - \ln(3R))}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} - \frac{T_2 - T_3}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \ln(3R)$$

$$C_4 = \frac{T_3 \ln(2R) - T_2 \ln(3R)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$$

b)

Die Leistungsdichte  $g$  wird wie folgt berechnet

$$g = \rho_e |\mathbf{J}|^2 = \rho_e \left( \frac{I}{A} \right)^2$$

mit

$$A = (4R^2 - R^2) \pi$$

Dies ist die Fläche eines Hohlleiters. Setzt man nun diese in  $g$  ein, erhält man

$$g = \rho_e \left( \frac{I}{(4R^2 - R^2) \pi} \right)^2$$

c)

DGL (Wärmeleitgleichung):

$$\lambda_l \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} T_l(r) \right) \right) + g = 0$$

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} T_l(r) \right) = -\frac{gr}{\lambda_l}$$

$$\int \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} T_l(r) \right) dr = \int -\frac{gr}{\lambda_l} dr$$

$$r \frac{d}{dr} T_l(r) = -\frac{gr^2}{2\lambda_l} + C_1$$

$$\frac{d}{dr} T_l(r) = -\frac{gr}{2\lambda_l} + \frac{C_1}{r}$$

$$\int \frac{d}{dr} T_l(r) dr = \int -\frac{gr}{2\lambda_l} + \frac{C_1}{r} dr$$

$$T_l(r) = -\frac{gr^2}{4\lambda_l} + C_1 \ln(r) + C_2$$

Randbedingungen

$$T_l(R) = -\frac{gR^2}{4\lambda_l} + C_1 \ln(R) + C_2 = T_1$$

$$T_l(2R) = -\frac{g4R^2}{4\lambda_l} + C_1 \ln(2R) + C_2 = T_2$$

Integrationskonstanten:

Die beiden Konstanten werden wie in a) bestimmt.

$$-\frac{gR^2}{4\lambda_l} + C_1 \ln(R) + C_2 = T_1$$

$$C_2 = T_1 + \frac{gR^2}{4\lambda_l} - C_1 \ln(R)$$

Diese Gleichung wird nun in die andere eingesetzt und man erhält

$$-\frac{g4R^2}{4\lambda_l} + C_1 \ln(2R) + T_1 + \frac{gR^2}{4\lambda_l} - C_1 \ln(R) = T_2$$

$$\frac{g}{4\lambda_l} (R^2 - 4R^2) + T_1 - T_2 = C_1 \underbrace{(\ln \ln(1) - \ln(2))}_{\ln(\frac{1}{2})}$$

$$C_1 = \frac{\frac{g}{4\lambda_l} (R^2 - 4R^2) + T_1 - T_2}{\ln(\frac{1}{2})}$$

Rückeingesetzt erhält man

$$C_2 = T_1 + \frac{gR^2}{4\lambda_l} - \frac{\frac{g}{4\lambda_l} (R^2 - 4R^2) + T_1 - T_2}{\ln(\frac{1}{2})} \ln(R)$$

$$= \frac{T_1 (\ln(R) - \ln(2R))}{\ln(\frac{1}{2})} + \frac{\frac{gR^2}{4\lambda_l} (\ln(R) - \ln(2R))}{\ln(\frac{1}{2})}$$

$$- \frac{\frac{g}{4\lambda_l} (R^2 \ln(R) - 4R^2 \ln(R)) + T_1 \ln(R) - T_2 \ln(R)}{\ln(\frac{1}{2})}$$

$$= \frac{\frac{g}{4\lambda_l} (4R^2 \ln(R) - R^2 \ln(2R)) + T_2 \ln(R) - T_1 \ln(2R)}{\ln(\frac{1}{2})}$$

d)

Zur eindeutigen Bestimmung der Temperaturen  $T_1, T_2, T_3$  muss einfach nur die Gleichungen für die Wärmeübergänge aufstellen. Diese lauten für

$T_2$  :

$$\lambda_i \frac{d}{dr} T_i(r) \big|_{r=2R} = \lambda_l \frac{d}{dr} T_l(r) \big|_{r=2R}$$

$T_3$  :

$$\alpha_0 (T_\infty - T_3) = \lambda_i \frac{d}{dr} T_i(r) \big|_{r=3R}$$

$T_1$  :

$$\alpha_f (T_f - T_1) = -\lambda_l \frac{d}{dr} T_l(r) \big|_{r=R}$$

e)

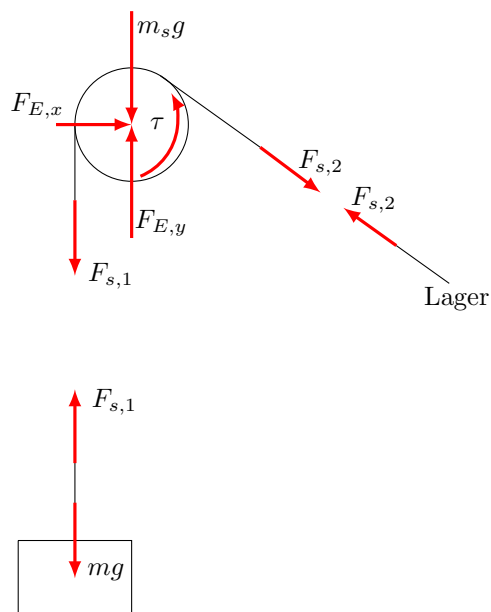
- 1) Temperatur der Kühlflüssigkeit senken
- 2) Oberfläche der Isolierung vergrößern (z.B. durch Kühlrippen)
- 3) Wärmeleitfähigkeit der Isolierung vergrößern

*Hinweis:*

*Die Lösung in diesen Punkt erhält man durch logisch denken.*

### Beispiel 3

a)



Nun müssen die Gleichgewichtsbedingungen für diesen Schnitt bestimmt werden. Diese lauten hier

$$\sum M_E = 0 : \\ \tau - F_{s,2}r + F_{s,1}r = 0$$

$$\sum F_x = 0 : \\ F_{E,x} + F_{s,2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ F_{E,x} + \frac{F_{s,2}}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\sum F_y = 0 : \\ F_{E,y} - F_{s,1} - F_{s,2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - m_s g = 0 \\ F_{E,y} - F_{s,1} - \frac{F_{s,2}}{\sqrt{2}} - m_s g = 0$$

Nun werden die Kräfte im Punkt E und die Seilkräfte berechnet.

$$F_{s,1} = mg$$

$$\tau - F_{s,2}r + F_{s,1}r = 0$$

$$F_{s,2}r = \tau + mgr$$

$$F_{s,2} = mg + \frac{\tau}{r}$$

$$F_{E,x} + \frac{F_{s,2}}{\sqrt{2}} = 0$$

$$F_{E,x} + \frac{mg}{\sqrt{2}} + \frac{\tau}{r\sqrt{2}} = 0$$

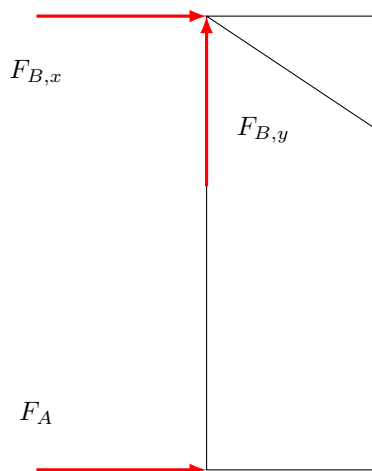
$$F_{E,x} = -\frac{mg}{\sqrt{2}} - \frac{\tau}{r\sqrt{2}}$$

$$F_{E,y} - F_{s,1} - \frac{F_{s,2}}{\sqrt{2}} - m_s g = 0$$

$$F_{E,y} - mg - \frac{mg}{\sqrt{2}} - \frac{\tau}{r\sqrt{2}} - m_s g = 0$$

$$F_{E,y} = mg \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} + \frac{\tau}{r\sqrt{2}} + m_s g$$

b)



Nun werden analog wie in a) die Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt.

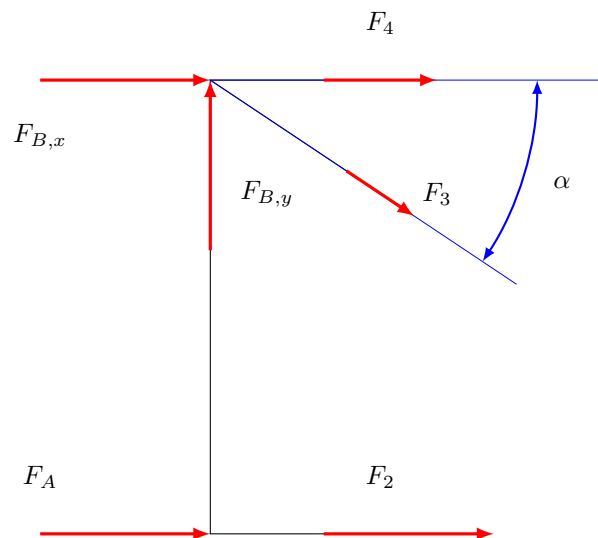
$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0 : \\ F_{B,x}h + F_{E,y}(a+b) - fa &= 0 \\ F_{B,x} &= -F_{E,y}\frac{a+b}{h} + f\frac{a}{h}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 : \\ F_{B,x} + F_A + F_{E,x} &= 0 \\ -F_{E,y}\frac{a+b}{h} + f\frac{a}{h} + F_A + F_{E,x} &= 0 \\ F_A &= F_{E,y}\frac{a+b}{h} - f\frac{a}{h} - F_{E,x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 : \\ F_{B,y} + F_{E,y} - f &= 0 \\ F_{B,y} &= f - F_{E,y}\end{aligned}$$

**ACHTUNG:** Die Ergebnisse in der Musterlösung vom ACIN sind nicht korrekt.

c)



Es müssen wieder die Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt werden. Diese lauten hier

$$\alpha = \arctan\left(\frac{h}{a}\right)$$

$$\sum M_B = 0 :$$

$$F_A a + F_2 a = 0$$

$$F_2 = -F_A$$

$$\sum F_y = 0 :$$

$$F_{B,y} - F_3 \sin \alpha = 0$$

$$F_3 = \frac{F_{B,y}}{\sin \alpha}$$

$$\sum F_x = 0 :$$

$$F_2 + F_4 + F_3 \cos \alpha + F_{E,x} = 0$$

$$F_4 = -F_2 - F_{B,y} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - F_{E,x}$$

$$F_4 = F_A - \frac{F_{B,y}}{\tan \alpha} - F_{E,x}$$



#### Beispiel 4

a)

Die zu berechnenden Wärmestromdichten können mit der Formel für Konvektion aus der Formelsammlung des ACIN bestimmt werden. Diese lauten

$$\begin{aligned}\dot{q}_O &= \alpha_O (T_M - T_L), & \dot{q}_{L,2} &= \alpha_L (T_2 - T_L) \\ \dot{q}_M &= \alpha_M (T_M - T_1), & \dot{q}_{L,3} &= \alpha_L (T_3 - T_L) \\ \dot{q}_B &= \alpha_B (T_4 - T_B)\end{aligned}$$

Bei den Ausdrücken, wo laut Formel sich eigentlich ein  $-$  ergibt, wird das Vorzeichen vertauscht, damit keine negativen Wärmestromdichten mehr vorkommen.

b)

Nun soll die Sichtfaktormatrix  $\mathbf{F}$  bestimmt werden.

Bestimmung der einzelnen Einträge von  $\mathbf{F}$ :

$$F_{11} = F_{44} = 0$$

Wand 1 und 4 strahlen thermisch nicht auf sich selbst. Die anderen Einträge der Hauptdiagonalen können mit der Tabelle auf Seite 5 der Formelsammlung des ACIN ermittelt werden und lauten deswegen

$$F_{22} = F_{33} = 1 - \frac{\sqrt{1^2 + 2^2}}{1 + 2} = \frac{3 - \sqrt{5}}{3}$$

Die restlichen Einträge werden entweder mit der Cross-String-Methode, dem Reziprozitätsgesetz, der Summationsregel oder durch Symmetrie des Aufbaues ermittelt.

$$\begin{aligned}F_{24} = F_{34} &= \frac{3 + \sqrt{5} - (1 + \sqrt{5})}{2 \cdot 3} = \frac{2}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3} \\ F_{42} = F_{43} &= \frac{A_2}{A_4} F_{24} = \frac{3}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \\ F_{41} &= 1 - F_{42} - F_{43} - F_{44} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3} \\ F_{14} &= \frac{A_4}{A_1} F_{41} = \frac{3}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \\ F_{12} = F_{13} &= \frac{\sqrt{5} + 3 - (1 - \sqrt{5})}{2 \cdot 3} = \frac{2}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3} \\ F_{21} = F_{31} &= \frac{A_1}{A_2} F_{12} = \frac{3}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \\ F_{23} &= 1 - F_{21} - F_{22} - F_{24} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{3 - \sqrt{5}}{3} - \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{5} - 2}{3} \\ F_{32} &= \frac{A_2}{A_3} F_{23} = \frac{3}{3} \cdot \frac{\sqrt{5} - 2}{3} = \frac{\sqrt{5} - 2}{3}\end{aligned}$$

Die komplette Sichtfaktormatrix lautet

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{3-\sqrt{5}}{3} & \frac{\sqrt{5}-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{5}-2}{3} & \frac{3-\sqrt{5}}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

c)

Die folgenden Ausdrücke kann man einfach aus der Formelsammlung herauslesen.

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_M \\ -\dot{\mathbf{q}}_{L,2} \\ -\dot{\mathbf{q}}_{L,3} \\ -\dot{\mathbf{q}}_B \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}^4 = \begin{bmatrix} T_1^4 \\ T_2^4 \\ T_3^4 \\ T_4^4 \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \text{diag}\{\varepsilon\} \left( \mathbf{E} - (\mathbf{E} - \text{diag}\{\varepsilon\})^{-1} \right) (\mathbf{E} - \mathbf{F}) \sigma \mathbf{T}^4$$

d)

Die Differentialgleichung für den Zeitverlauf von  $T_M(t)$  lautet

$$1m^2 \rho c_p \frac{dT_M(t)}{dt} = -1m \underbrace{\alpha_O (T_M(t) - T_L(t))}_{\dot{q}_O} - 3m \dot{q}_M (T_M(t), T_B(t), T_L(t))$$

Die Unbekannten sind  $\dot{q}_O, \dot{q}_M, \dot{q}_{L,2}, \dot{q}_{L,3}, T_1, T_2, T_3, T_4$ , die alle durch Umformen der Gleichung von a) und c) berechnet werden können.

e)

Nun kann laut Formelsammlung die Gleichung aus d) diskretisiert werden.

$$t_k = k \Delta t$$

$$1m^2 \rho c_p \frac{T_M(t_{k+1}) - T_M(t_k)}{\Delta t} = -1m \alpha_O (T_M(t_k) - T_L(t_k)) - 3m \dot{q}_M (T_M(t_k), T_B(t_k), T_L(t_k))$$

2.26 27.09.2019

2.27 08.11.2019

2.28 07.02.2020