Modellbildung
Beispielsammlung

4.Semester ET-Studium

Oktober 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In dieser Ausarbeitung befinden sich sämtliche Rechenwege der Modellbildungsprüfung beginnend ab dem Jahr 2015. Die Angaben zu den hier ausgearbeiteten Prüfungen befinden sich auf der Homepage des ACIN. Sämtlichen verwendeten Formeln befinden sich in der Formelsammlung, welche ebenfalls auf der Homepage des ACIN zu finden ist. Ich hoffe dieses Dokument hilft euch weiter.

2 Prüfungen

2.1 26.06.2015

Beispiel 1

a)

Die generalisierten Koordinaten lauten

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix}$$

Die beiden Ortsvektoren $\mathbf{r}_2$ und $\mathbf{r}_K$ werden direkt aus Angabe abgelesen.

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}L_2 + L_1 \sin\varphi \\ -L1\cos\varphi \end{bmatrix}, \mathbf{r}_K = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}L_2 + L_1 \sin\varphi + l\sin\psi \\ -L_1\cos\varphi - l\cos\psi \end{bmatrix}$$

b)

Den translatorische Geschwindigkeitsvektor erhält man durch die zeitliche Ableitung des entsprechenden Ortsvektors.

$$\dot{\mathbf{r}}_K = \underbrace{L_1\dot{\varphi}\begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{r}}_2} + l\dot{\psi}\begin{bmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{bmatrix}$$

c)

Zwischenrechnungen für die Ermittlung der kinetischen Energie:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_2^T\mathbf{r}_2 &= L_1^2\dot{\varphi}^2\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix} \\ &= L_1^2\dot{\varphi}^2\underbrace{\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)}_{=1} \\ &= L_1^2\dot{\varphi}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_K^T\mathbf{r}_K &= \left(L_1\dot{\varphi}\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \end{bmatrix} + l\dot{\psi}\begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi \end{bmatrix}\right)\left(L_1\dot{\varphi}\begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix} + l\dot{\psi}\begin{bmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{bmatrix}\right) \\ &= L_1^2\dot{\varphi}^2\underbrace{\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)}_{=1} + l^2\dot{\psi}^2\underbrace{\left(\cos^2\psi + \sin^2\psi\right)}_{=1} + 2L_1 l\left(\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\right) \\ &= L_1^2\dot{\varphi}^2 + l^2\dot{\psi}^2 + 2L_1 l\dot{\varphi}\dot{\psi}\left(\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\right) \end{aligned}$$

Nun können die kinetischen Energien des Systems bestimmt werden. Diese lauten hier

$$
\begin{aligned}
T_{tr} &= \frac{1}{2}\left(m_2 + m_M\right) L_1^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_K \left[L_1^2 \dot{\varphi}^2 + l^2 \dot{\psi}^2 + 2 L_1 l \dot{\varphi} \dot{\psi} \left(\sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi\right)\right] \\
T_{rot} &= 2\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} m_1 L_1^2 + m_1 \left(\frac{L_1}{2}\right)^2\right) \dot{\varphi}^2 \\
T &= T_{tr} + T_{rot} \\
&= \frac{1}{2}\left(m_2 + m_M\right) L_1^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_K \left[L_1^2 \dot{\varphi}^2 + l^2 \dot{\psi}^2 + 2 L_1 l \dot{\varphi} \dot{\psi} \left(\sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi\right)\right] \\
&+ 2\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} m_1 L_1^2 + m_1 \left(\frac{L_1}{2}\right)^2\right) \dot{\varphi}^2
\end{aligned}
$$

d)

Nun kann wie folgt die potentielle Energie bestimmt werden. Die potentielle Energie der Ruhelage lautet

$$
\begin{aligned}
V &= 2 m_1 g \frac{L_1}{2}\left(1 - \cos\varphi\right) + \left(m_2 + m_M\right) g L_1 \left(1 - \cos\varphi\right) \\
&+ m_K g \left[L_1 \left(1 - \cos\varphi\right) + l \left(1 - \cos\psi\right)\right] + 2\frac{1}{2} c_1 \varphi^2
\end{aligned}
$$

Hinweis:
Die Ruhelage befindet sich bei $\varphi = 0$, d.h. das Maximum der potentiellen Energie tritt bei $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ und deswegen wird $\cos\varphi$ durch $(1 - \cos\varphi)$ ersetzt.

e)

Um die Bewegungsgleichungen zu bestimmen, benötigt man als erstes aller erstes die Langrange-Funktion die wie folgt lautet

$$
\begin{aligned}
L &= T - V \\
&= \frac{1}{2}\left(m_2 + m_M\right) L_1^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_K \left[L_1^2 \dot{\varphi}^2 + l^2 \dot{\psi}^2 + 2 L_1 l \dot{\varphi} \dot{\psi} \left(\sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi\right)\right] + 2\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} m_1 L_1^2 + m_1 \left(\frac{L_1}{2}\right)^2\right) \dot{\varphi}^2 \\
&- 2 m_1 g \frac{L_1}{2}\left(1 - \cos\varphi\right) - \left(m_2 + m_M\right) g L_1 \left(1 - \cos\varphi\right) - m_K g \left[L_1 \left(1 - \cos\varphi\right) - l \left(1 - \cos\psi\right)\right] - 2\frac{1}{2} c_1 \varphi^2
\end{aligned}
$$

Als nächstes benötigt man die generalisierten Kräfte die hier wie folgt lauten

$$
\mathbf{f}_q = \begin{bmatrix} -2 d_1 \varphi \\ \tau \end{bmatrix}
$$

Nun wertet man den Euler-Lagrange-Formalismus aus, der hier folgendermaßen aussieht

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi}\right) &= -2 d_1 \dot{\varphi} \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \psi}\right) &= \tau
\end{aligned}
$$

partiellen Ableitungen

1. generalisierte Koordinate:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= (m_2 + m_M)\, L_1^2 \dot{\varphi} + m_K \left(L_1^2 \dot{\varphi} + L_1 l \dot{\psi} \left(\sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi \right) \right) + 2 \left(\frac{1}{12} m_1 L_1^2 + m_1 \left(\frac{L_1}{2} \right)^2 \right) \dot{\varphi} \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= (m_2 + m_M)\, L_1^2 \ddot{\varphi} + m_K \left(L_1^2 \ddot{\varphi} + L_1 l \frac{d}{dt} \left(\dot{\psi} \left(\sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi \right) \right) \right) + 2 \left(\frac{1}{12} m_1 L_1^2 + m_1 \left(\frac{L_1}{2} \right)^2 \right) \ddot{\varphi} \\
&= \left(2 \left(\frac{1}{12} m_1 L_1^2 + m_1 \left(\frac{L_1}{2} \right)^2 \right) + (m_2 + m_M + m_K) \right) \ddot{\varphi} + m_K L_1 \frac{d}{dt} \left(\psi \left(\sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi \right) \right) \\
\frac{\partial L}{\partial \varphi} &= m_K L_1 l \dot{\varphi} \dot{\psi} \left(\cos\varphi \sin\psi + \sin\varphi \cos\psi \right) - m_1 g L_1 \sin\varphi - (m_2 + m_M)\, L_1 g - m_K g L_1 \sin\varphi - 2 c_1 \varphi \\
&= m_K L_1 l \dot{\varphi} \dot{\psi} \left(\cos\varphi \sin\psi + \sin\varphi \cos\psi \right) - (m_1 + m_M + m_2 + m_K)\, g L_1 - 2 c_1 \varphi
\end{aligned}
$$

2. generalisierte Koordinate:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} &= m_K l^2 \dot{\psi} + m_K L_1 \dot{\varphi} \left(\sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi \right) \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) &= m_K l^2 \ddot{\psi} + m_K L_1 \frac{d}{dt} \left(\dot{\varphi} \left(\sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi \right) \right) \\
\frac{\partial L}{\partial \psi} &= m_K L_1 l \dot{\varphi} \dot{\psi} \left(\sin\varphi \cos\psi - \cos\varphi \sin\psi \right) - m_K g l \sin\psi
\end{aligned}
$$

Somit lauten die Bewegungsgleichungen

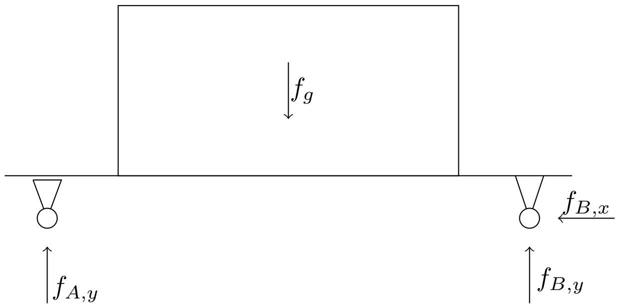
$$
\begin{aligned}
&\left(2 \left(\frac{1}{12} m_1 L_1^2 + m_1 \left(\frac{L_1}{2} \right)^2 \right) + (m_2 + m_M + m_K) \right) \ddot{\varphi} + m_K L_1 \frac{d}{dt} \left(\psi \left(\sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi \right) \right) \\
&\qquad - m_K L_1 l \dot{\varphi} \dot{\psi} \left(\cos\varphi \sin\psi + \sin\varphi \cos\psi \right) + (m_1 + m_M + m_2 + m_K)\, g L_1 + 2 c_1 \varphi = -2 d_1 \dot{\varphi}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&m_K l^2 \ddot{\psi} + m_K L_1 \frac{d}{dt} \left(\dot{\varphi} \left(\sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi \right) \right) \\
&- m_K L_1 l \dot{\varphi} \dot{\psi} \left(\sin\varphi \cos\psi - \cos\varphi \sin\psi \right) + m_K g l \sin\psi = \tau
\end{aligned}
$$

2.2 19.03.2019

Beispiel 1

a)



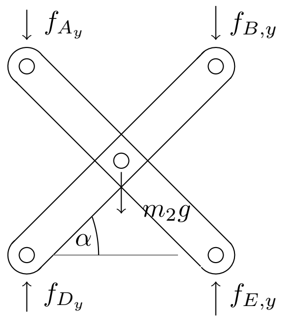
Um die Kräfte in den Lagern zu bestimmten, stellen wir zuerst das Kräftegleichgewicht und die Momenten Gleichung im Punkt B auf.

$$x : 0 = f_{B,x}$$
$$y : 0 = f_A + f_{B,y} - f_g$$
$$M_B : 0 = bf_g - 2L\cos(\alpha)$$

Formt man nun die Momenten Gleichung nach f_A um folgt:

$$f_A = \frac{bf_g}{2L\cos(\alpha)} \qquad f_{B_x} = 0 \qquad f_{B,y} = \left(1 - \frac{b}{2L\cos(\alpha)}\right) f_g$$

b)

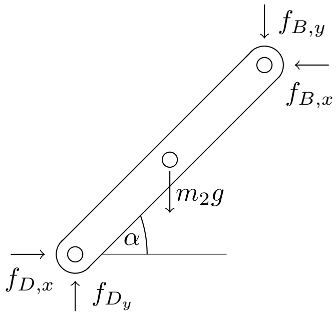


Um die Kräfte in den Punkten D und E zu bestimmen, stellen wir das Kräftegleichgewicht in den Trägern auf, daraus folgt:

$$f_{D,y} = m2g + f_{B,y} \qquad f_{E,y} = m_2 g + f_A$$

c)

Um die Kräfte in den Lagern D und E in horizontaler (x-Richtung) zu bestimmen schneiden wir die Hubstangen getrennt voneinander frei und stellen die Kraftgleichungen und die Momenten Gleichung auf.



$$
\begin{aligned}
x &: 0 = f_{E,x} - f_{D,x} \\
y &: \text{wurde bereits bestimmt} \\
M_D &: 0 = m_2 g \cos(\alpha) + f_{B,x} \sin(\alpha) + f_{B,y} \cos(\alpha)
\end{aligned}
$$

Aus der Momenten Gleichung folgt:

$$
f_{B,x} = \frac{m_2 g - f_{B,y}}{\tan \alpha} = f_{E,x} \qquad F(\alpha) = f_{D,x} = -f_{E,x}
$$

d)

Um die Haftbedingung zu berechnen formt man $F(\alpha) = \mu_H f_{D,y}$ um und setzt für $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ein:

$$
\mu_H \geq \frac{F(\alpha)}{f_{D,y}} = \frac{m_1 + m_2}{m_2 + \frac{m_1 b}{\sqrt{2} L}}
$$

Beispiel 2

a)

Die Oberfläche des Öl's strahlt nicht auf sich selbst, deshalb lautet der Sichtfaktor Matrixeintrag $F_{OO} = 0$, aus der Summationsregel folgt $F_{OH} = 1 - F_{OO} = 1$. Aus dem Reziprozitätsgesetz folgt $F_{HO} = \frac{A_O}{A_H} F_{OH}$. Der Letzte Eintrag lautet wegen der Summationsregel $F_{HH} = 1 - \frac{A_O}{A_H}$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{A_O}{A_H} & 1 - \frac{A_O}{A_H} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \sigma \left(\left(\frac{\varepsilon_H A_H - \varepsilon_H A_O + A_O}{-A_O \varepsilon_H \varepsilon_O + \varepsilon_H A_H + A_O \varepsilon_O} + \frac{(-1+\varepsilon_H) A_O}{-A_O \varepsilon_H \varepsilon_O + \varepsilon_H A_H + A_O \varepsilon_O} \right) \varepsilon_O \, TO^4 + \left(-\frac{(-1+\varepsilon_O) A_H}{-A_O \varepsilon_H \varepsilon_O + \varepsilon_H A_H + A_O \varepsilon_O} - \frac{A_H}{-A_O \varepsilon_H \varepsilon_O + \varepsilon_H A_H + A_O \varepsilon_O} \right) \varepsilon_H \, TH^4 \right) \\ \sigma \left(\left(-\frac{A_O (\varepsilon_H A_H - \varepsilon_H A_O + A_O)}{A_H (-A_O \varepsilon_H \varepsilon_O + \varepsilon_H A_H + A_O \varepsilon_O)} - \frac{{A_O}^2 (-1+\varepsilon_H)}{A_H (-A_O \varepsilon_H \varepsilon_O + \varepsilon_H A_H + A_O \varepsilon_O)} \right) \varepsilon_O \, TO^4 + \left(\frac{A_O (-1+\varepsilon_O)}{-A_O \varepsilon_H \varepsilon_O + \varepsilon_H A_H + A_O \varepsilon_O} + \frac{A_O}{-A_O \varepsilon_H \varepsilon_O + \varepsilon_H A_H + A_O \varepsilon_O} \right) \varepsilon_H \, TH^4 \right) \end{bmatrix}$$

Der Vektor $\dot{\mathbf{q}}$ besteht aus den Einträgen $\dot{q}_O$ und $\dot{q}_H$, wir benötigen aber nur den ersten Eintrag, weil

$\dot{Q}_{rad} = A_O \dot{q}_O$ lautet.

b)

Um die stationäre thermische Energiebilanz zu bestimmen müssen alle Wärmeströme die ein- oder austreten addiert werden.

$$\dot{m}_{LM} c_{p,LM} (T_\infty - T_L) + 0.2 \dot{m}_{LM} c_{p,O} - A_O \alpha_{OL} (T_O - T_\infty) - \dot{Q}_{rad} + P_{el} \eta = 0$$

c)

Die Temperatur T_O lautet nun $\overline{T}_O$ und wird in die Lösung von b eingesetzt. Danach muss die Gleichung nach P_{el} umgeformt werden. Daraus ergibt sich.

$$P_{el} = \frac{1}{\eta} \left(-\dot{m}_{LM} c_{p,LM} (T_\infty - T_L) - 0.2 \dot{m}_{LM} c_{p,O} - A_O \alpha_{OL} (T_O - T_\infty) + \dot{Q}_{rad} \right)$$

d)

Die Anfangsbedienung der Differentialgleichung lautet $T_O(t = 0) = \overline{T}_O$ und die Differentialgleichung erhält man indem man die Fouriersche Wärmeleitgleichung nach dem Volumen integriert. Zu beachten ist das auf der rechten Seite alle ein- und ausfließenden Wärmeströme stehen:

$$\int \rho c_{p,O} \frac{\partial T_O}{\partial t} dV = \int -\alpha_{O,L} (T_O - T_\infty) - \dot{q}_{rad} \, dA$$

$$m_O \, c_{p,O} \frac{\partial T_O}{\partial t} = A_O \alpha_{O,L} (T_O - T_\infty) - \dot{Q}_{rad}$$

2.3 17.05.2019

Beispiel 2

a)

Beispiel 3

a)

Der Vektor vom Ursprung zum Schwerpunkt des Rades kann direkt aus Angabe abgelesen werden und lautet deshalb:

$$\mathbf{r}_r = \begin{bmatrix} p\cos\alpha - r\sin\alpha \\ p\sin\alpha + r\cos\alpha \end{bmatrix}$$

Der translatorische Geschwindigkeitsvektor erhält man durch die Ableitung vom Ortsvektor nach den Freiheitsgraden.

Translatorischer Geschwindigkeitsvektor:

$$\mathbf{v}_r = \dot{\mathbf{r}_r} = \begin{bmatrix} \dot{p}\cos\alpha \\ \dot{p}\sin\alpha \end{bmatrix}$$

Die rotatorische Geschwindigkeit lautet:

$$\omega_r = \frac{\dot{p}}{r}$$

b)

Der Vektor zum Schwerpunkt des Stabes kann ebenfalls aus der Angabe abgelesen werden und lautet deshalb:

$$\mathbf{r}_S = \begin{bmatrix} p\cos\alpha - r\sin\alpha + l_s\sin\varphi \\ p\sin\alpha + r\cos\alpha + l_s\cos\varphi \end{bmatrix}$$

Analog zu a) lautet der translatorische Geschwindigkeitsvektor:

$$\mathbf{v}_S = \dot{\mathbf{r}_S} = \begin{bmatrix} \dot{p}\cos\alpha + l_s\cos\varphi\dot{\varphi} \\ \dot{p}\sin\alpha - l_s\sin\varphi\dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

c)

Als erstes wird die translatorische kinetische Energie des System wie folgt ermittelt:

Vereinfachungen:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_r^T\dot{\mathbf{r}}_r &= \begin{bmatrix} \dot{p}\cos\alpha & \dot{p}\sin\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}\cos\alpha \\ \dot{p}\sin\alpha \end{bmatrix} \\ &= \dot{p}^2\cos^2\alpha + \dot{p}^2\sin^2\alpha \\ &= \dot{p}^2\underbrace{\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right)}_{=1} \\ &= \dot{p}^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{r}}_S^T\dot{\mathbf{r}}_S &= \begin{bmatrix}\dot{p}\cos\alpha + l_s\cos\varphi\dot{\varphi} & \dot{p}\sin\alpha - l_s\sin\varphi\dot{\varphi}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{p}\cos\alpha + l_s\cos\varphi\dot{\varphi}\\ \dot{p}\sin\alpha - l_s\sin\varphi\dot{\varphi}\end{bmatrix}\\
&= \left(\dot{p}\cos\alpha + l_s\cos\varphi\dot{\varphi}\right)^2 + \left(\dot{p}\sin\alpha + l_s\sin\varphi\dot{\varphi}\right)^2\\
&= \dot{p}^2\cos^2\alpha + 2l_s\dot{p}\dot{\varphi}\cos\alpha\cos\varphi + l_s^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + \dot{p}^2\sin^2\alpha - 2l_s\dot{p}\dot{\varphi}\sin\alpha\sin\varphi + l_s^2\sin^2\varphi\dot{\varphi}^2\\
&= \dot{p}^2\underbrace{\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)}_{=1} + 2l_s\dot{p}\dot{\varphi}\underbrace{\left(\cos\varphi\cos\alpha - \sin\varphi\sin\alpha\right)}_{\cos(\varphi+\alpha)} + l_s^2\dot{\varphi}^2\underbrace{\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)}_{=1}\\
&= \dot{p}^2 + 2l_s\dot{p}\dot{\varphi}\cos\left(\varphi+\alpha\right) + l_s^2\dot{\varphi}^2
\end{aligned}
$$

Nun kann man schließlich die translatorische kinetischen Energie des Rades und des Stabes bestimmen.

$$
\begin{aligned}
T_{trans,r} &= \frac{1}{2}m_r\dot{p}^2\\
T_{trans,s} &= \frac{1}{2}m_s\left(\dot{p}^2 + l_s^2\dot{\varphi}^2 + 2l_s\dot{p}\dot{\varphi}\cos\left(\varphi+\alpha\right)\right)
\end{aligned}
$$

Die kinetische Energie besitzt jedoch auch einen rotatorischen Anteil. Dieser lautet für die beiden Teilsysteme:

$$
\begin{aligned}
T_{rot,r} &= \frac{1}{2}\Theta_r\frac{\dot{p}^2}{r^2}\\
T_{rot,s} &= \frac{1}{2}\Theta_s\dot{\varphi}^2
\end{aligned}
$$

Da wir nun sämtliche Teilenergien ermittelt haben, beträgt die gesamte kinetische Energie des vorliegenden Systems:

$$
\begin{aligned}
T &= T_{trans,r} + T_{rot,r} + T_{trans,s} + T_{rot,s}\\
&= \frac{1}{2}m_r\dot{p}^2 + \frac{1}{2}\Theta_r\frac{\dot{p}^2}{r^2} + \frac{1}{2}m_s\left(\dot{p}^2 + l_s^2\dot{\varphi}^2 + 2l_s\dot{p}\dot{\varphi}\cos\left(\varphi+\alpha\right)\right) + \frac{1}{2}\Theta_s\dot{\varphi}^2
\end{aligned}
$$

Als nächstes wird nun die gesamte potentielle Energie des gegebenen System ermittelt. Zuerst berechnet man wieder die Energien der Teilsysteme und addiert dieser zum Schluss wieder zusammen.

$$
\begin{aligned}
V_r &= m_r g\left(p\sin\alpha + r\cos\alpha\right)\\
V_s &= m_s g\left(p\sin\alpha + r\cos\alpha + l_s\cos\varphi\right)\\
V = V_r + V_s &= m_r g\left(p\sin\alpha + r\cos\alpha\right) + m_s g\left(p\sin\alpha + r\cos\alpha + l_s\cos\varphi\right)
\end{aligned}
$$

d)

Um den Vektor der generalisierten Kräfte zu bestimmen benötigt man zuerst den Richtungsvektor zu den Angriffspunkten der extern wirkenden Kräfte, hier f_{ext}.

Angriffspunkt der Kraft:

$$
\mathbf{r}_f = \begin{bmatrix}p\cos\alpha - r\sin\alpha + 2l_s\sin\varphi\\ p\sin\alpha + r\cos\alpha + 2l_s\cos\varphi\end{bmatrix}
$$

Weiters benötigt man auch den Vektor der externen Kräfte.

Kraftvektor:

$$
\mathbf{f}_{ext}^T = f_{ext}\begin{bmatrix}\cos\beta & \sin\beta\end{bmatrix}
$$

Nun werden die partiellen Ableitung nach $\mathbf{q}$ vom Angriffspunkt der Kraft gebildet:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_f}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} 2l_s \cos\varphi \\ -2l_s \sin\varphi \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial \mathbf{r}_f}{\partial p} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}$$

Der Vektor der generalisierten Kräfte wird nun wie folgt ermittelt:

$$\mathbf{f}_q = \mathbf{f}_{ext}^T \frac{\partial \mathbf{r}_f}{\partial \mathbf{q}}$$

generalisierte Kräfte:

$$\begin{aligned} f_{q,\varphi} &= f_{ext} \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2l_s \cos\varphi \\ -2l_s \sin\varphi \end{bmatrix} \\ &= f_{ext} \left(2l_s \cos\beta \cos\varphi - 2l_s \sin\beta \sin\varphi\right) \\ &= f_{f ext} 2l_s \underbrace{\left(\cos\beta \cos\varphi - 2l_s \sin\beta \sin\varphi\right)}_{\cos(\beta+\varphi)} \\ &= f_{ext} 2l_s \cos\left(\beta + \varphi\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{q,p} &= f_{ext} \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} \\ &= f_{ext} \underbrace{\left(\cos\beta \cos\alpha + \sin\beta \sin\alpha\right)}_{\cos(\beta-\alpha)} \\ &= f_{ext} \cos\left(\beta - \alpha\right) \end{aligned}$$

gesamter Vektor:

$$\mathbf{f}_q = f_{ext} \begin{bmatrix} 2l_s \cos\left(\beta + \varphi\right) \\ \cos\left(\beta - \alpha\right) \end{bmatrix}$$

e)

Zum Schluss sollen noch die Bewegungsgleichungen mithilfe des Euler-Lagrange-Formalismus bestimmt werden.

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2} m_r \dot{p}^2 + \frac{1}{2} \Theta_r \frac{\dot{p}^2}{r^2} + \frac{1}{2} m_s \left(\dot{p}^2 + l_s^2 \dot{\varphi}^2 + 2l_s \dot{p}\dot{\varphi} \cos\left(\varphi + \alpha\right)\right) + \frac{1}{2} \Theta_s \dot{\varphi}^2 \\ &- m_r g \left(p \sin\alpha + r \cos\alpha\right) - m_s g \left(p \sin\alpha + r \cos\alpha + l_s \cos\varphi\right) \end{aligned}$$

Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi}\right) &= 2l_s f_{ext} \cos\left(\beta + \varphi\right) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial p}\right) &= f_{ext} \cos\left(\beta - \alpha\right) \end{aligned}$$

Zwischenschritte:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m_s \left(l_s^2 \dot{\varphi} + l_s \dot{p} \cos\left(\varphi + \alpha\right)\right) + \Theta_s \dot{\varphi} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{p}} &= m_r \dot{p} + \frac{\Theta_r}{r^2} \dot{p} + m_s \left(\dot{p} + 2l_s \dot{\varphi} \cos\left(\varphi + \alpha\right)\right) \end{aligned}$$

auftretende Ableitungen:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -m_s l_s \sin\left(\varphi + \alpha\right) \dot{p}\dot{\varphi} + m_s g l_s \sin\varphi \\
\frac{\partial L}{\partial p} &= -g\left(m_s + m_r\right) \sin\alpha \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) &= m_s l_s \cos\left(\varphi + \alpha\right) \ddot{p} + \left(m_s l_s^2 + \Theta_s\right) \ddot{\varphi} - m_s l_s \dot{p} \sin\left(\varphi + \alpha\right) \dot{\varphi} \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}}\right) &= \left(m_r + \frac{\Theta_r}{r^2} + m_s\right) \ddot{p} + m_s l_s \left(\ddot{\varphi} \cos\left(\varphi + \alpha\right) - \dot{\varphi} \sin\left(\varphi + \alpha\right) \dot{\varphi}\right)
\end{aligned}
$$

2.4 12.07.2019

Beispiel 1

a)

Der Richtungsvektor vom Urspung zum Schwerpunkt der Masse m lautet:

$$\mathbf{p}_m = \begin{bmatrix} r\cos(\alpha) + b \\ r\sin(\alpha) - h \end{bmatrix}$$

Mithilfe diesen Vektor kann ebenfalls auch der Geschwindigkeitsvektor bestimmt werden, indem man den Richtungsvektor nach der Zeit ableitet.

$$\dot{\mathbf{p}}_m = \begin{bmatrix} -r\dot{\alpha}\sin(\alpha) + \dot{b} \\ r\dot{\alpha}\cos(\alpha) - \dot{h} \end{bmatrix}$$

b)

Um die kinetischen Energien zu berechnen, müssen zuerst einige Nebenrechnungen durchgeführt werden.
Nebenrechnungen:

$$\dot{\mathbf{p}}_m^T\dot{\mathbf{p}}_m = \begin{bmatrix} -r\dot{\alpha}\sin(\alpha) + \dot{b} & r\dot{\alpha}\cos(\alpha) - \dot{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -r\dot{\alpha}\sin(\alpha) + \dot{b} \\ r\dot{\alpha}\cos(\alpha) - \dot{h} \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$= r^2\dot{\alpha}^2 \underbrace{(\cos\ \alpha + \sin\alpha)}_{=1} - 2r\dot{\alpha}\dot{b}\sin\alpha - 2r\dot{\alpha}\dot{h}\cos\alpha + \dot{b}^2 + \dot{h}^2 \tag{2}$$

$$= r^2\dot{\alpha}^2 - 2r\dot{\alpha}\dot{b}\sin\alpha - 2r\dot{\alpha}\dot{h}\cos\alpha + \dot{b}^2 + \dot{h}^2 \tag{3}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{h}{b}\right) \tag{4}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\dot{h}b - h\dot{b}}{b^2 + h^2} \tag{5}$$

kinetische Energie des Systems:

$$\begin{aligned}
T_{tm} &= \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{p}}_m^T\dot{\mathbf{p}}_m = \frac{1}{2}m\left(r^2\dot{\alpha}^2 - 2r\dot{\alpha}\dot{b}\sin(\alpha) - 2r\dot{\alpha}\dot{h}\cos(\alpha) + \dot{b}^2 + \dot{h}^2\right) \\
T_{rm} &= \frac{1}{2}\Theta_m\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\Theta_m\left(\frac{\dot{h}b - h\dot{b}}{b^2 + h^2}\right)^2 \\
T_{rr} &= \frac{1}{2}\Theta_r\dot{\alpha}^2 \\
T &= T_{tm} + T_{rm} + T_{rr} \\
&= \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{p}}_m^T\dot{\mathbf{p}}_m = \frac{1}{2}m\left(r^2\dot{\alpha}^2 - 2r\dot{\alpha}\dot{b}\sin(\alpha) - 2r\dot{\alpha}\dot{h}\cos(\alpha) + \dot{b}^2 + \dot{h}^2\right) + \frac{1}{2}\Theta_m\left(\frac{\dot{h}b - h\dot{b}}{b^2 + h^2}\right)^2 + \frac{1}{2}\Theta_r\dot{\alpha}^2
\end{aligned}$$

c)

potentielle Energie des Systems:

$$V_m = mg\,(r\sin\alpha - h)$$
$$V_c = \frac{1}{2}c\left(\sqrt{b^2+h^2}s_0\right)^2$$
$$V = V_m + V_c = mg\,(r\sin\alpha - h) + \frac{1}{2}c\left(\sqrt{b^2+h^2}s_0\right)^2$$

d)

viskose Reibkraft

$$\mathbf{f}_V = \mu_V \frac{\dot{h}b - h\dot{b}}{b^2+h^2}\begin{bmatrix} b \\ -h \end{bmatrix}$$

partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{p}}_m}{\partial \alpha} = \begin{bmatrix} -r\sin\alpha \\ r\cos\alpha \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}_m}{\partial b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}_m}{\partial h} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

generalisierte Kräfte:

Multipliziert man die viskose Reibungskraft mit allen partiellen Ableitungen erhält man

$$\mathbf{f}_{q,v} = \mu_V \frac{\dot{h}b - h\dot{b}}{b^2+h^2}\begin{bmatrix} r\sin\alpha b + r\cos\alpha h \\ -b \\ -h \end{bmatrix}$$

Die andere externe Kraft ist

$$\mathbf{f}_x = \begin{bmatrix} f_x \\ 0 \end{bmatrix}$$

Multipliziert mit den partiellen Ableitungen erhält man

$$\mathbf{f}_{q,x} = \begin{bmatrix} -f_x r\sin\alpha \\ f_x \\ 0 \end{bmatrix}$$

Der gesamte Vektor der generalisierten Kräfte beträgt

$$\mathbf{f}_q = \mu_V \frac{\dot{h}b - h\dot{b}}{b^2+h^2}\begin{bmatrix} r\sin\alpha b + r\cos\alpha h \\ -b \\ -h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -f_x r\sin\alpha \\ f_x \\ 0 \end{bmatrix}$$

e)

Verwendet man aus der Formelsammlung im Punkt generalisierte Kräfte die 2.te Formel und passt man diese an den stationären Fall an erhält man

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} mgr\cos\alpha \\ \frac{c\left(\sqrt{b^2+h^2}-s_0\right)}{\sqrt{b^2+h^2}}b \\ \frac{c\left(\sqrt{b^2+h^2}-s_0\right)}{\sqrt{b^2+h^2}}h - mg \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_x r\sin\alpha \\ f_x \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nun wird s_0 mit 0 angenommen und anschließend werden die generalisierten Koordinaten bestimmt.

1.Koordinate:

$$
\begin{aligned}
mgr\cos\alpha &= -f_x r\sin\alpha \\
-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} &= \frac{mg}{f_x} \\
-\tan\alpha &= \frac{mg}{f_x} \\
\alpha &= -\arctan\left(\frac{mg}{f_x}\right)
\end{aligned}
$$

2.Koordinate:

$$
\begin{aligned}
\frac{c\left(\cancel{\sqrt{b^2+h^2}}\right)}{\cancel{\sqrt{b^2+h^2}}} b &= f_x \\
cb &= f_x \\
b &= \frac{f_x}{c}
\end{aligned}
$$

3.Koordinate

$$
\begin{aligned}
\frac{c\left(\cancel{\sqrt{b^2+h^2}}\right)}{\cancel{\sqrt{b^2+h^2}}} h - mg &= 0 \\
ch - mg &= 0 \\
h &= \frac{mg}{c}
\end{aligned}
$$

f)

Die resultierende Reibkraft wird mithilfe der Formel 2.96 aus dem Vorlesungsskript berechnet und lautet hier:

$$\mathbf{f}_F = -c_W A\frac{\rho}{2}|\dot{\mathbf{p}}_m|\dot{\mathbf{p}}_m$$

$$
\begin{aligned}
|\dot{\mathbf{p}}_m| &= \sqrt{\left(-r\dot{\alpha}\sin(\alpha)+\dot{b}\right)^2 + \left(r\dot{\alpha}\cos(\alpha)-\dot{h}\right)^2} \\
&= \sqrt{r^2\dot{\alpha}^2\sin^2\alpha - 2r\dot{\alpha}\dot{b}\sin\alpha + \dot{b}^2 + r^2\dot{\alpha}^2\sin^2\alpha - 2r\dot{\alpha}\dot{h}\cos\alpha + \dot{h}^2} \\
&= \sqrt{r^2\dot{\alpha}^2\underbrace{\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)}_{=1} - 2r\dot{\alpha}\dot{b}\sin\alpha - 2r\dot{\alpha}\dot{h}\sin\alpha + \dot{b}^2 + \dot{h}^2} \\
&= \sqrt{r^2\dot{\alpha}^2 - 2r\dot{\alpha}\dot{b}\sin\alpha - 2r\dot{\alpha}\dot{h}\sin\alpha + \dot{b}^2 + \dot{h}^2}
\end{aligned}
$$

Multipliziert man nun $\mathbf{f}_F$ mit den partiellen Ableitungen aus d) und vereinfacht man so weit wi möglich erhält man

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_{q,F} &= -c_W A \frac{\rho}{2} |\dot{\mathbf{p}}_m| \begin{bmatrix} r\dot{\alpha}\underbrace{\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)}_{=1} - r\dot{b}\sin\alpha - r\dot{h}\cos\alpha \\ -r\dot{\alpha}\sin(\alpha) + \dot{b} \\ -r\dot{\alpha}\cos(\alpha) + \dot{h} \end{bmatrix} \\ &= -c_W A \frac{\rho}{2} |\dot{\mathbf{p}}_m| \begin{bmatrix} r\dot{\alpha} - r\dot{b}\sin\alpha - r\dot{h}\cos\alpha \\ -r\dot{\alpha}\sin(\alpha) + \dot{b} \\ -r\dot{\alpha}\cos(\alpha) + \dot{h} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Beispiel 2

a)

Da es sich hier um ein Problem mit Zylinderkoordinaten hält, verwendet man nun einfach die Wärmeleitgleichung für Zylinderkoordinaten aus Formelsammlung und adaptiert diese entsprechend der Angabe.

Wärmeleitgleichung:

$$0 = \lambda \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{d}{dr} T_i\left(r\right) \right) \right)$$

Die 0 auf der linken Seite beruht darauf, das es sich hier um ein stationäres Problem handelt und die Terme für φ und z fallen ebenfalls weg.

Lösung der DGL:

$$\begin{aligned}
\lambda_i \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} T_i\left(r\right) \right) \right) &= 0 \\
\frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} T_i\left(r\right) \right) &= 0 \\
\int \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} T_i\left(r\right) \right) dr &= \int 0 dr \\
r \frac{d}{dr} T_i\left(r\right) &= C_3 \\
\frac{d}{dr} T_i\left(r\right) &= \frac{C_3}{r} \\
\int \frac{d}{dr} T_i\left(r\right) dr &= \int \frac{C_3}{r} dr \\
T_i\left(r\right) &= C_3 ln\left(r\right) + C_4
\end{aligned}$$

Randbedingungen:

$$\begin{aligned}
T_i\left(2R\right) &= C_3 ln\left(2R\right) + C_4 = T_2 \\
T_i\left(2R\right) &= C_3 ln\left(3R\right) + C_4 = T_3
\end{aligned}$$

Integrationskonstanten:

Ausgehend von dem Gleichungssystem der Randbedingung kann man die Integrationskonstanten sehr leicht bestimmen. Als ersten formt man die 2.te Gleichung auf C_4 um.

$$\begin{aligned}
T_3 &= C_3 ln\left(3R\right) + C_4 \\
C_4 &= T_3 - C_3 ln\left(3R\right)
\end{aligned}$$

Dann wird in Gleichung 1 eingesetzt

$$\begin{aligned}
T_2 &= C_3 ln\left(2R\right) + T_3 - C_3 ln\left(3R\right) \\
T_2 - T_3 &= C_3 \underbrace{\left(ln\left(2R\right) - ln\left(3R\right)\right)}_{ln\left(\frac{2}{3}\right)} \\
C_3 &= \frac{T_2 - T_3}{ln\left(\frac{2}{3}\right)}
\end{aligned}$$

Nun setzt man C_3 in C_4 ein

$$C_4 = T_3 - \frac{T_2 - T_3}{ln\left(\frac{2}{3}\right)} ln\left(3R\right)$$
$$C_4 = \frac{T_3\left(ln\left(2R\right) - ln\left(3R\right)\right)}{ln\left(\frac{2}{3}\right)} - \frac{T_2 - T_3}{ln\left(\frac{2}{3}\right)} ln\left(3R\right)$$
$$C_4 = \frac{T_3 ln\left(2R\right) - T_2 ln\left(3R\right)}{ln\left(\frac{2}{3}\right)}$$

b)

Die Leistungsdichte g wird wie folgt berechnet

$$g = \rho_e |\mathbf{J}|^2 = \rho_e \left(\frac{I}{A}\right)^2$$

mit

$$A = \left(4R^2 - R^2\right)\pi$$

Dies ist die Fläche eine Hohlleiters. Setzt man nun diese in g ein, erhält man

$$g = \rho_e \left(\frac{I}{\left(4R^2 - R^2\right)\pi}\right)^2$$

c)

DGL:

$$\lambda_l \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}T_l\left(r\right)\right)\right) + g = 0$$
$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}T_l\left(r\right)\right) = -\frac{gr}{\lambda_l}$$
$$\int \frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}T_l\left(r\right)\right) dr = \int -\frac{gr}{\lambda_l} dr$$
$$r\frac{d}{dr}T_l\left(r\right) = -\frac{gr^2}{2\lambda_l} + C_1$$
$$\frac{d}{dr}T_l\left(r\right) = -\frac{gr}{2\lambda_l} + \frac{C_1}{r}$$
$$\int \frac{d}{dr}T_l\left(r\right) dr = \int -\frac{gr}{2\lambda_l} + \frac{C_1}{r} dr$$
$$T_l\left(r\right) = -\frac{gr^2}{4\lambda_l} + C_1 \ln\left(r\right) + C_2$$

Randbedingungen

$$T_l\left(R\right) = -\frac{gR^2}{4\lambda_l} + C_1 \ln\left(R\right) + C_2 = T_1$$
$$T_l\left(2R\right) = -\frac{g4R^2}{4\lambda_l} + C_1 \ln\left(2R\right) + C_2 = T_2$$

Integrationskonstanten:

Die beiden Konstanten werden wie in a) bestimmt.

$$-\frac{gR^2}{4\lambda_l} + C_1 \ln(R) + C_2 = T_1$$
$$C_2 = T_1 + \frac{gR^2}{4\lambda_l} - C_1 \ln(R)$$

Diese Gleichung wird nun in die andere eingesetzt und man erhält

$$-\frac{g4R^2}{4\lambda_l} + C_1 \ln(2R) + T_1 + \frac{gR^2}{4\lambda_l} - C_1 \ln(R) = T_2$$
$$\frac{g}{4\lambda_l}\left(R^2 - 4R^2\right) + T_1 - T_2 = C_1 \underbrace{(ln \ln(1) - \ln(2))}_{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$$
$$C_1 = \frac{\frac{g}{4\lambda_l}\left(R^2 - 4R^2\right) + T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Rückeingesetzt erhält man

$$\begin{aligned} C_2 &= T_1 + \frac{gR^2}{4\lambda_l} - \frac{\frac{g}{4\lambda_l}\left(R^2 - 4R^2\right) + T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \ln(R) \\ &= \frac{T_1\left(\ln(R) - \ln(2R)\right)}{ln\left(\frac{1}{2}\right)} + \frac{\frac{gR^2}{4\lambda_l}\left(\ln(R) - \ln(2R)\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \\ &- \frac{\frac{g}{4\lambda_l}\left(R^2\ln(R) - 4R^2\ln(R)\right) + T_1\ln(R) - T_2\ln(R)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{\frac{g}{4\lambda_l}\left(4R^2\ln(R) - R^2\ln(2R)\right) + T_2\ln(R) - T_1\ln(2R)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \end{aligned}$$

d)

Zur eindeutigen Bestimmung der Temperaturen T_1, T_2, T_3 muss einfach nur die Gleichungen für die Wärmeübergänge aufstellen. Diese lauten für

T_2 :

$$\lambda_i \frac{d}{dr} T_i(r)\,|_{r=2R} = \lambda_l \frac{d}{dr} T_l(r)\,|_{r=2R}$$

T_3 :

$$\alpha_0\left(T_\infty - T_3\right) = \lambda_i \frac{d}{dr} T_i(r)\,|_{r=3R}$$

T_1 :

$$\alpha_f\left(T_f - T_1\right) = -\lambda_l \frac{d}{dr} T_l(r)\,|_{r=R}$$

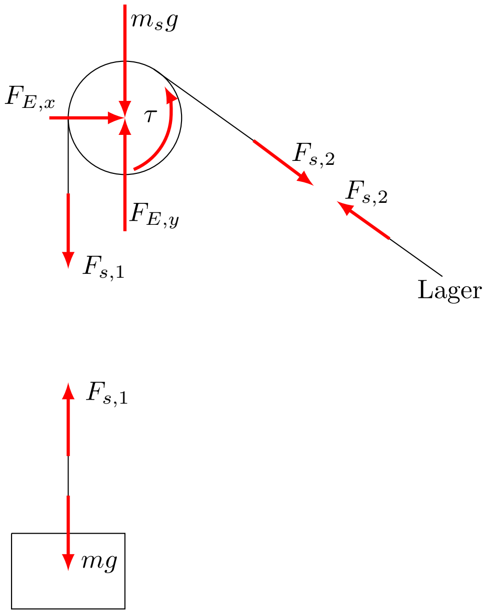
e)

1) Temperatur der Kühlflüssigkeit senken
2) Oberfläche der Isolierung vergrößern (z.B. durch Kühlrippen)
3) Wärmeleitfähigkeit der Isolierung vergrößern

Hinweis:
Die Lösung in diesen Punkt erhält man durch logisch denken.

Beispiel 3

a)



Nun müssen die Gleichgewichtsbedingungen für diesen Schnitt bestimmt werden. Diese lauten hier

$$\sum M_E = 0:$$
$$\tau - F_{s,2} r + F_{s,1} r = 0$$

$$\sum F_x = 0:$$
$$F_{E,x} + F_{s,2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$$
$$F_{E,x} + \frac{F_{s,}}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\sum F_y = 0:$$
$$F_{E,y} - F_{s,1} - F_{s,2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - m_s g = 0$$
$$F_{E,y} - F_{s,1} - \frac{F_{s,2}}{\sqrt{2}} - m_s g = 0$$

Nun werden die Kräfte im Punkt E und die Seilkräfte berechnet.

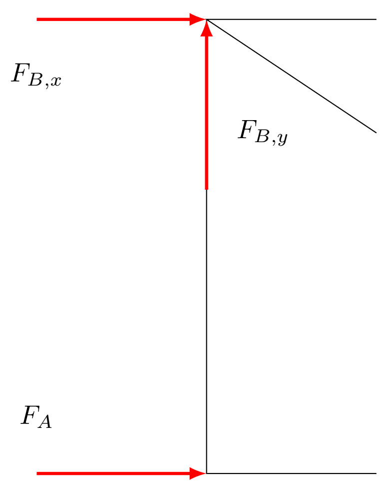
$$F_{s,1} = mg$$

$$\tau - F_{s,2}r + F_{s,1}r = 0$$
$$F_{s,2}r = \tau + mgr$$
$$F_{s,2} = mg + \frac{\tau}{r}$$

$$F_{E,x} + \frac{F_{s,2}}{\sqrt{2}} = 0$$
$$F_{E,x} + \frac{mg}{\sqrt{2}} + \frac{\tau}{r\sqrt{2}} = 0$$
$$F_{E,x} = -\frac{mg}{\sqrt{2}} - \frac{\tau}{r\sqrt{2}}$$

$$F_{E,y} - F_{s,1} - \frac{F_{s,2}}{\sqrt{2}} - m_s g = 0$$
$$F_{E,y} - mg - \frac{mg}{\sqrt{2}} - \frac{\tau}{r\sqrt{2}} - m_s g = 0$$
$$F_{E,y} = mg\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} + \frac{\tau}{r\sqrt{2}} + m_s g$$

b)



Nun werden analog wie in a) die Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt.

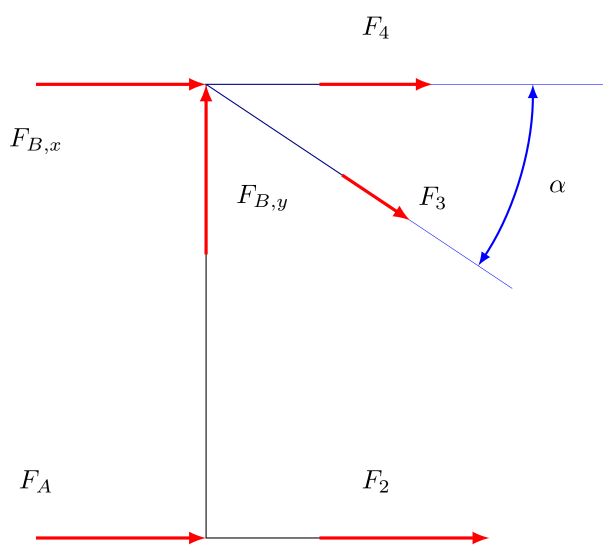
$$\sum M_A = 0 :$$
$$F_{B,x}h + F_{E,y}(a+b) - fa = 0$$
$$F_{B,x} = -F_{E,y}\frac{a+b}{h} + f\frac{a}{h}$$

$$\sum F_x = 0 :$$
$$F_{B,x} + F_A + F_{E,x} = 0$$
$$-F_{E,y}\frac{a+b}{h} + f\frac{a}{h} + F_A + F_{E,x} = 0$$
$$F_A = F_{E,y}\frac{a+b}{h} - f\frac{a}{h} - F_{E,x}$$

$$\sum F_y = 0 :$$
$$F_{B,y} + F_{E,y} - f = 0$$
$$F_{B,y} = f - F_{E,y}$$

ACHTUNG: Die Ergebnisse in der Musterlösung vom ACIN sind nicht korrekt.

c)



Es müssen wieder die Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt werden. Diese lauten hier

$$
\begin{aligned}
&\alpha = \arctan\left(\frac{h}{a}\right) \\
&\sum M_B = 0: \\
&F_A a + F_2 a = 0 \\
&F_2 = -F_A \\
\\
&\sum F_y = 0: \\
&F_{B,y} - F_3 \sin\alpha = 0 \\
&F_3 = \frac{F_{B,y}}{\sin\alpha} \\
\\
&\sum F_x = 0: \\
&F_2 + F_4 + F_3 \cos\alpha + F_{E,x} = 0 \\
&F_4 = -F_2 - F_{B,y}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - F_{E,x} \\
&F_4 = F_A - \frac{F_{B,y}}{\tan\alpha} - F_{E,x}
\end{aligned}
$$

Beispiel 4

a)

Die zu berechnenden Wärmestromdichten können mit der Formel für Konvektion aus der Formelsammlung des ACIN bestimmt werden. Diese lauten

$$\begin{aligned}
\dot{q}_O &= \alpha_O\,(T_M - T_L)\,, & \dot{q}_{L,2} &= \alpha_L\,(T_2 - T_L)\\
\dot{q}_M &= \alpha_M\,(T_M - T_1)\,, & \dot{q}_{L,3} &= \alpha_L\,(T_3 - T_L)\\
\dot{q}_B &= \alpha_B\,(T_4 - T_B)
\end{aligned}$$

Bei den Ausdrücken, wo laut Formel sich eigentlich ein $-$ ergibt, wird das Vorzeichen vertauscht, damit keine negativen Wärmestromdichten mehr vorkommen.

b)

Nun soll die Sichtfaktormatrix $\mathbf{F}$ bestimmt werden.
Bestimmung der einzelnen Einträge von $\mathbf{F}$:

$$F_{11} = F_{44} = 0$$

Wand 1 und 4 strahlen thermisch nicht auf sich selbst. Die anderen Einträge der Hauptdiagonalen können mit der Tabelle auf Seite 5 der Formelsammlung des ACIN ermittelt werden und lauten deswegen

$$F_{22} = F_{33} = 1 - \frac{\sqrt{1^2 + 2^2}}{1+2} = \frac{3-\sqrt{5}}{3}$$

Die restlichen Einträge werden entweder mit der Cross-String-Methode, dem Reziprozitätsgesetz, der Summationsregel oder durch Symmetrie des Aufbaues ermittelt.

$$\begin{aligned}
F_{24} &= F_{34} = \frac{3+\sqrt{5} - \left(1+\sqrt{5}\right)}{2\cdot 3} = \frac{2}{2\cdot 3} = \frac{1}{3}\\
F_{42} &= F_{43} = \frac{A_2}{A_4}F_{24} = \frac{3}{3}\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\\
F_{41} &= 1 - F_{42} - F_{43} - F_{44} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}\\
F_{14} &= \frac{A_4}{A_1}F_{41} = \frac{3}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\\
F_{12} &= F_{13} = \frac{\sqrt{5} + 3 - \left(1-\sqrt{5}\right)}{2\cdot 3} = \frac{2}{2\cdot 3} = \frac{1}{3}\\
F_{21} &= F_{31} = \frac{A_1}{A_2}F_{12} = \frac{3}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\\
F_{23} &= 1 - F_{21} - F_{22} - F_{24} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{3-\sqrt{5}}{3} - \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{5}-2}{3}\\
F_{32} &= \frac{A_2}{A_3}F_{23} = \frac{3}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}-2}{3} = \frac{\sqrt{5}-2}{3}
\end{aligned}$$

Die komplette Sichtfaktormatrix lautet

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{3-\sqrt{5}}{3} & \frac{\sqrt{5}-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{5}-2}{3} & \frac{3-\sqrt{5}}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

c)

Die folgenden Ausdrücke kann man einfach aus der Formelsammlung herauslesen.

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_M \\ -\dot{\mathbf{q}}_{L,2} \\ -\dot{\mathbf{q}}_{L,3} \\ -\dot{\mathbf{q}}_B \end{bmatrix} \qquad \mathbf{T}^4 = \begin{bmatrix} T_1^4 \\ T_2^4 \\ T_3^4 \\ T_4^4 \end{bmatrix} \qquad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = diag\{\varepsilon\} \left(\mathbf{E} - \left(\mathbf{E} - diag\{\varepsilon\} \right)^{-1} \right) \left(\mathbf{E} - \mathbf{F} \right) \sigma \mathbf{T}^4$$

d)

Die Differentialgleichung für den Zeitverlauf von $T_M(t)$ lautet

$$1m^2 \rho c_p \frac{dT_M(t)}{dt} = -1m \underbrace{\alpha_O \left(T_M(t) - T_L(t) \right)}_{\dot{q}_O} - 3m \dot{q}_M \left(T_M(t), T_B(t), T_L(t) \right)$$

Die Unbekannten sind $\dot{q}_O, \dot{q}_M, \dot{q}_{L,2}, \dot{q}_{L,3}, T_1, T_2, T_3, T_4$, die alle durch Umformen der Gleichung von a) und c) berechnet werden können.

e)

Nun kann laut Formelsammlung die Gleichung aus d) diskretisiert werden.

$$t_k = k\Delta t$$

$$1m^2 \rho c_p \frac{T_M(t_{k+1}) - T_M(t_k)}{\Delta t} = -1m\alpha_O \left(T_M(t_k) - T_L(t_k) \right) - 3m\dot{q}_M \left(T_M(t_k), T_B(t_k), T_L(t_k) \right)$$