Beispielsammlung zu

Signale und Systeme 1
LVA Nr. 387.083

Ausgabe WS 2018, Version 7.3

Technische Universität Wien
Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik
Institut für Photonik

Andrius Baltuška, Markus Kitzler-Zeiler, Thomas Müller, Karl Unterrainer

14.1.2019

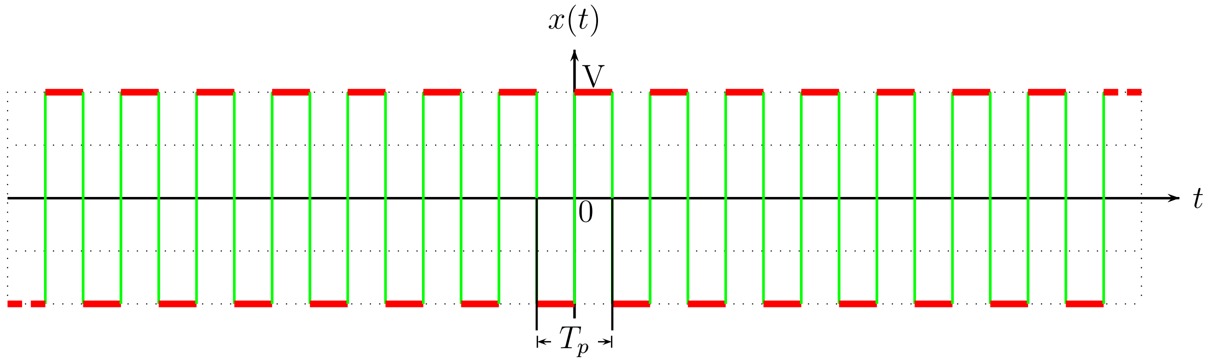
Inhalt

Fehler und Verbesserungsvorschläge bitte an sigsys1@tuwien.ac.at senden.

A Aufgaben zum Themenkreis Signale

Aufgabe 1

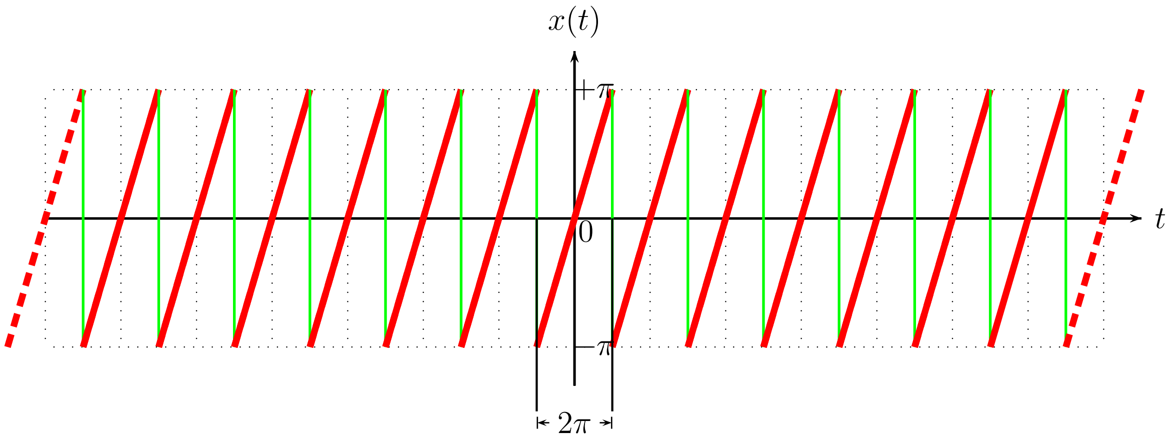
Gegeben sei das folgende periodische Signal:



Stellen Sie das Signal als reelle Fourier-Reihe dar.

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Fourier-Reihe der Sägezahnfunktion:

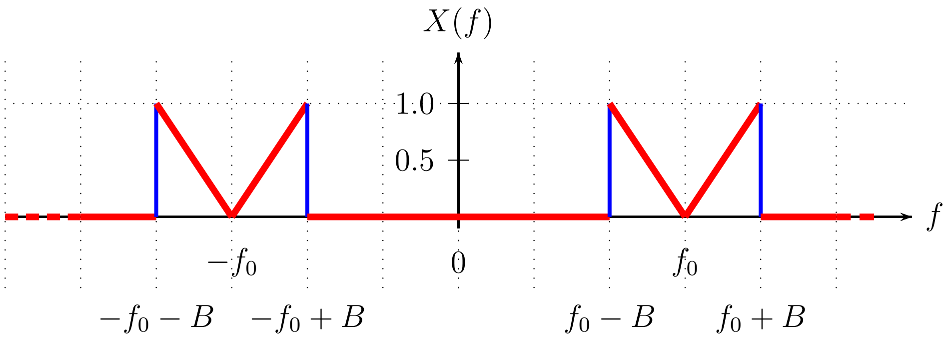


Aufgabe 3

Gegeben ist eine reelle Fourier-Reihe mit Koeffizienten $a_0,\ a_n,\ b_n$ mit $n = 1, 2, 3, \ldots$. Wie lauten die Koeffizienten $X_0,\ X_n$ und X_{-n} der zugehörigen komplexen Fourier-Reihe?

Aufgabe 4

Gegeben sei ein Signal $x(t)$ mit folgendem Spektrum $X(f)$:



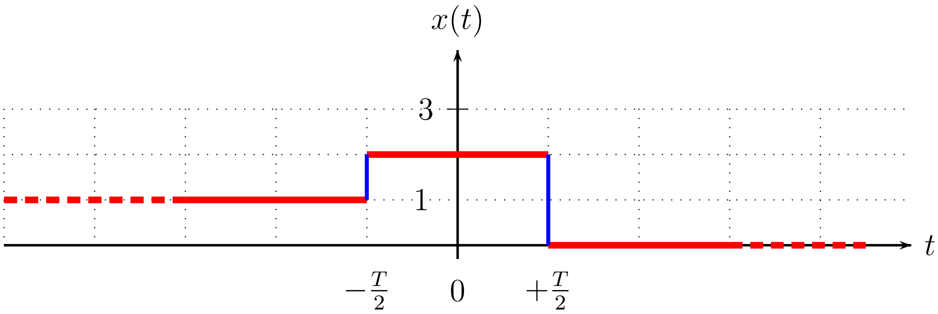
Das Signal $x(t)$ wird mit $\cos(2\pi f_0 t)$ moduliert:

$$y(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$$

Zeichnen Sie $Y(f)$.

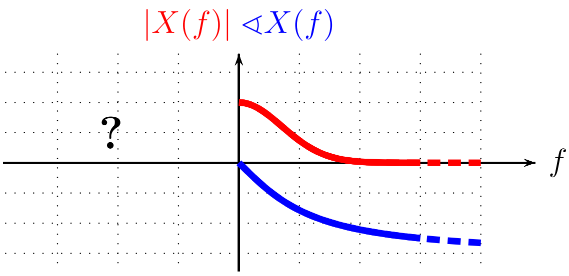
Aufgabe 5

Wie lautet die Fourier-Transformierte des folgenden Signals?



Aufgabe 6

Ergänzen Sie folgendes Spektrum eines reellen Signals $x(t)$:

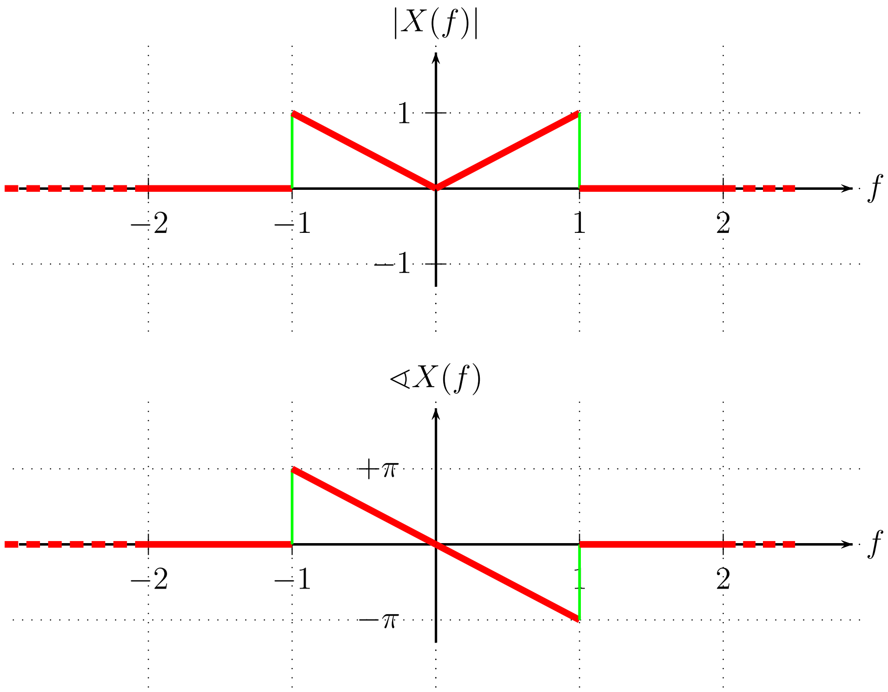


Aufgabe 7

Wie lautet das analytische Signal $x^{+}(t)$ zu $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$? (Hilbert Transformation)

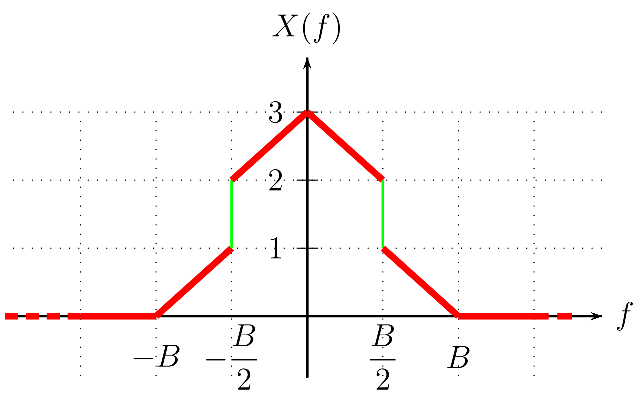
Aufgabe 8

Berechnen Sie die Zeitfunktion zu folgendem Spektrum:



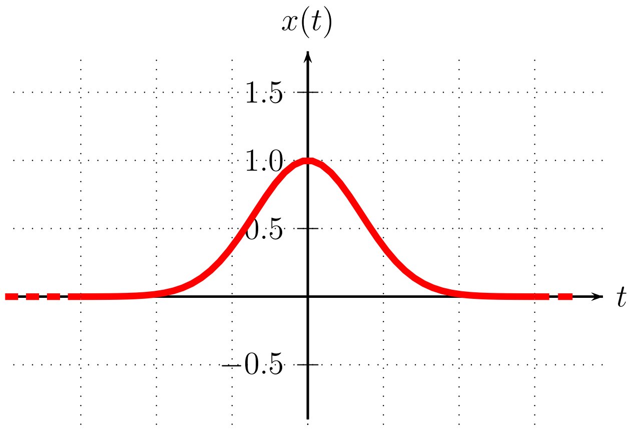
Aufgabe 9

Berechnen Sie die inverse Fourier-Transformation zu folgendem Spektrum:



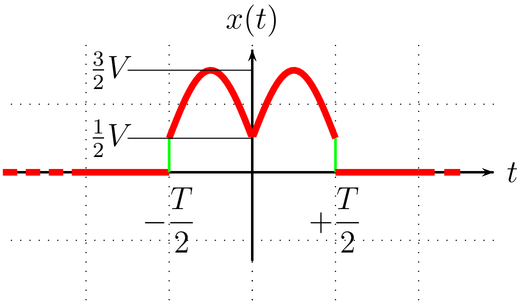
Aufgabe 10

Berechnen Sie das Zeit-Bandbreite-Produkt für einen Gauss-Impuls $x(t) = e^{-a^2t^2}$.



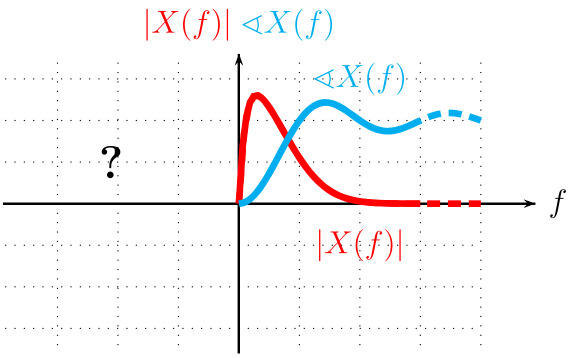
Aufgabe 11

Bestimmen Sie den Verlauf der 1. Ableitung des Signals $x(t) = V \cdot \mathrm{rect}_T \cdot \left[|\sin(\omega_0 t)| + \frac{1}{2}\right]$:



Aufgabe 12

Ergänzen Sie folgendes Spektrum eines reellen Signals $x(t)$:



Aufgabe 13

Skizzieren Sie die Autokorrelationsfunktion des Signals $x(t) = \dfrac{1}{2}\left[\delta\left(t - \dfrac{1}{2}\right) - \delta\left(t + \dfrac{1}{2}\right)\right]$.

Aufgabe 14

Wie lautet die Schwebungskreisfrequenz der bi-harmonischen Schwingung $y(t) = 2 \cdot \cos(4\pi f_0 t + \phi_1) + 3 \cdot \sin(6\pi f_0 t + \phi_2)$?

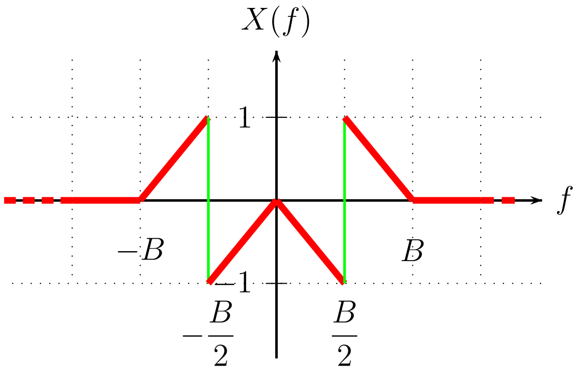
Aufgabe 15

Eine reellwertige Fourier-Reihe ist durch folgende Koeffizienten beschrieben: $a_0 = 1$, $a_n =$

$\frac{(-1)^n}{n}$ und $b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Bestimmen Sie die Koeffizienten X_0, $X_{\pm n}$ der entsprechenden komplexen Fourier-Reihe.

Aufgabe 16

Berechnen Sie die inverse Fourier-Transformation zu folgendem Spektrum:



Aufgabe 17

Berechnen Sie die Hilbert-Transformierte der Dirac-Funktion $\delta(t)$.

Aufgabe 18

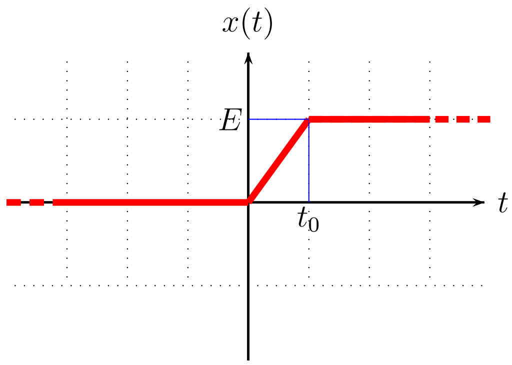
Wie lautet die Fourier-Transformierte von $x(t) = \cos(t) \cdot \mathrm{rect}\frac{t}{2\pi}$?

Aufgabe 19

Berechnen Sie die Zeitfunktion zu $X(s) = \dfrac{s}{s+2}$.

Aufgabe 20

Berechnen Sie die Laplace-Transformierte der folgenden Zeitfunktion:

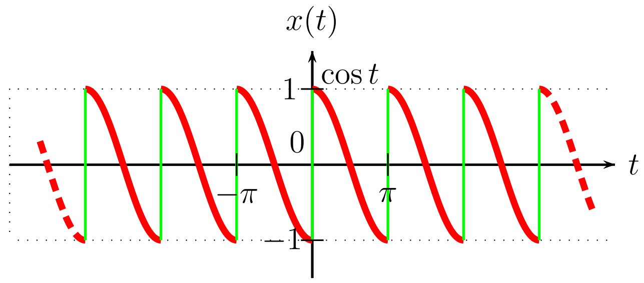


Aufgabe 21

Eine reellwertige Fourier-Reihe ist durch folgende Koeffizienten beschrieben $a_0 = 1$, $a_n = \dfrac{1}{1+n^2}$ und $b_n = \dfrac{n}{1+n^2}$ mit $n \geq 1$. Bestimmen Sie die Koeffizienten X_0, $X_{\pm n}$ der entsprechenden komplexen Fourier-Reihe.

Aufgabe 22

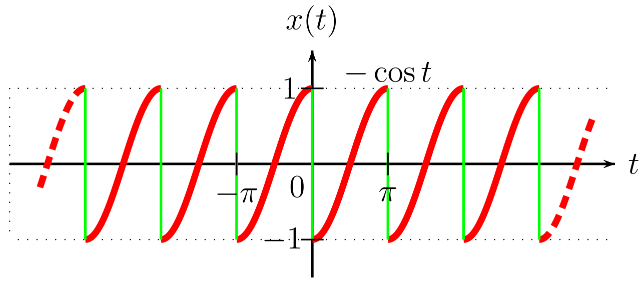
Gegeben ist das folgende periodische Zeitsignal:



Wie lautet der Koeffizient b_1 der reellen Fourier-Reihe?

Aufgabe 23

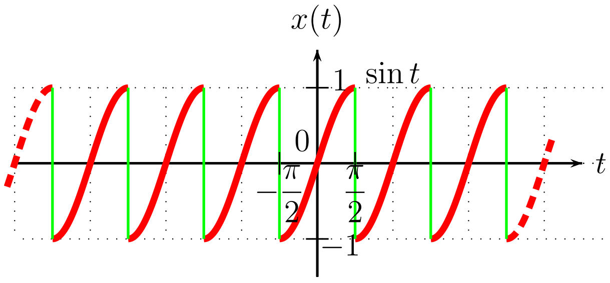
Gegeben ist das folgende periodische Zeitsignal:



Wie lautet der Koeffizient b_1 der reellen Fourier-Reihe?

Aufgabe 24

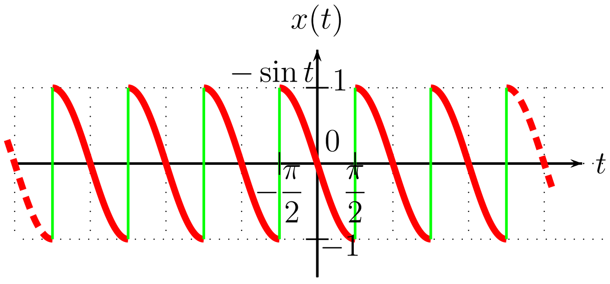
Gegeben ist das folgende periodische Zeitsignal:



Wie lautet der Koeffizient b_1 der reellen Fourier-Reihe?

Aufgabe 25

Gegeben ist das folgende periodische Zeitsignal:



Wie lautet der Koeffizient b_1 der reellen Fourier-Reihe?

Aufgabe 26

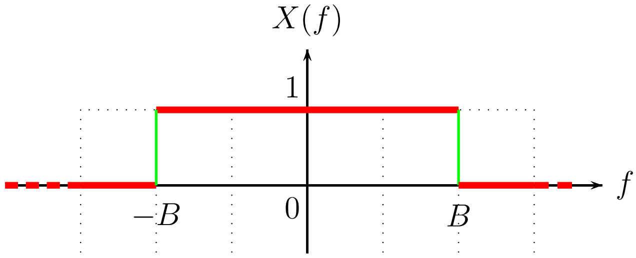
Berechnen Sie die inverse Laplace-Transformierte von $X(s) = \dfrac{s+6}{s^2+4}$.

Aufgabe 27

Wie ist das Konvergenzgebiet der einseitigen Laplace-Transformation in Aufgabe 26 definiert?

Aufgabe 28

Berechnen Sie das analytische Signal $x^+(t)$ zu $x(t)$ mit folgendem Spektrum:



Aufgabe 29

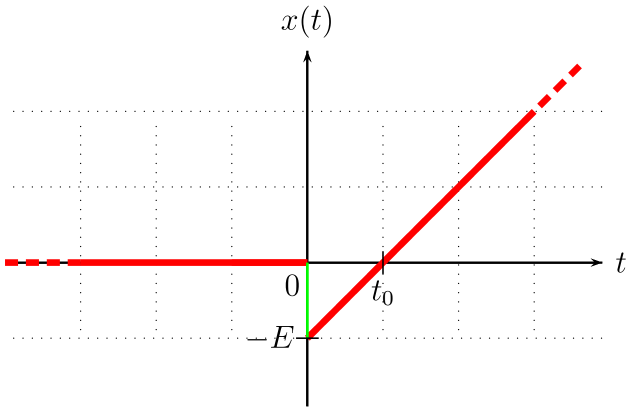
Berechnen Sie die Fourier-Transformierte von $x(t) = \Lambda(\alpha t) \cdot e^{j\beta t}$ mit $\alpha, \beta > 0, \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 30

Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion des periodischen Leistungssignals $x(t) = \sin(t)$.

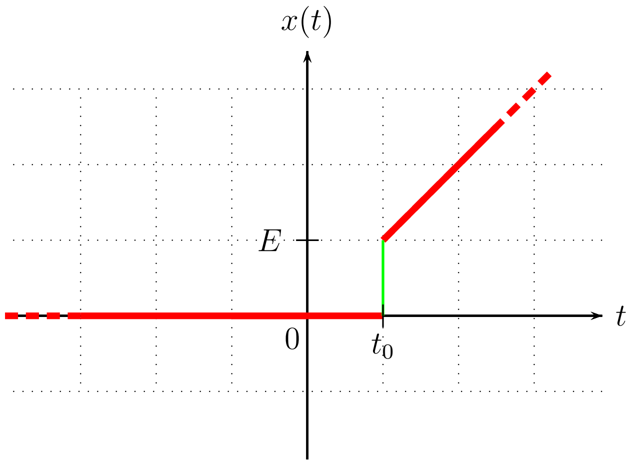
Aufgabe 31

Berechnen Sie die Laplace Transformation der folgenden Zeitfunktion:



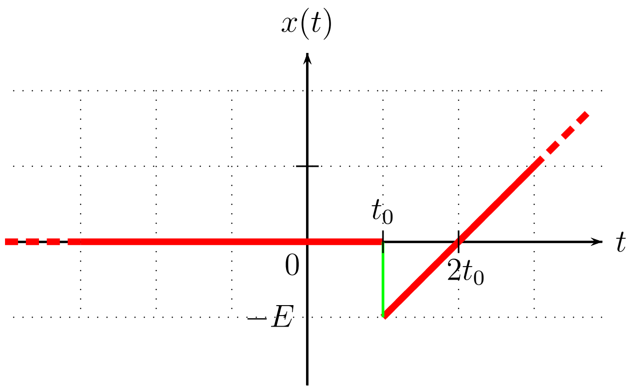
Aufgabe 32

Berechnen Sie die Laplace Transformation der folgenden Zeitfunktion:



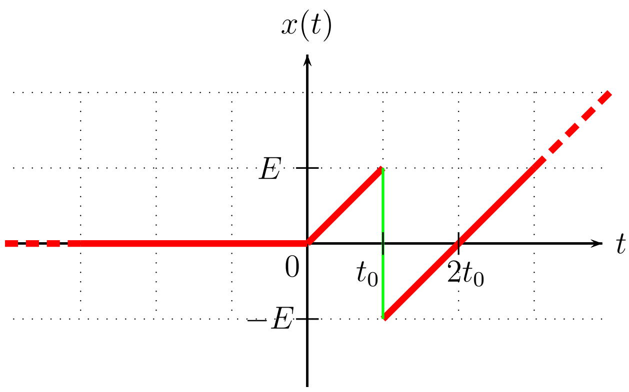
Aufgabe 33

Berechnen Sie die Laplace Transformation der folgenden Zeitfunktion:



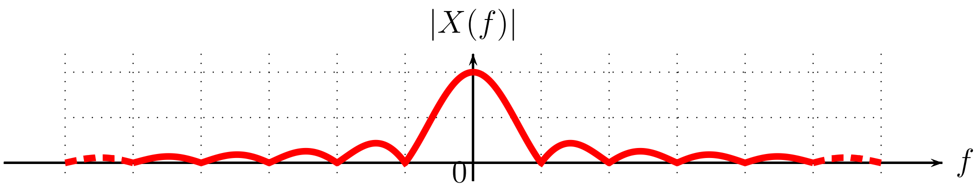
Aufgabe 34

Berechnen Sie die Laplace Transformation der folgenden Zeitfunktion:



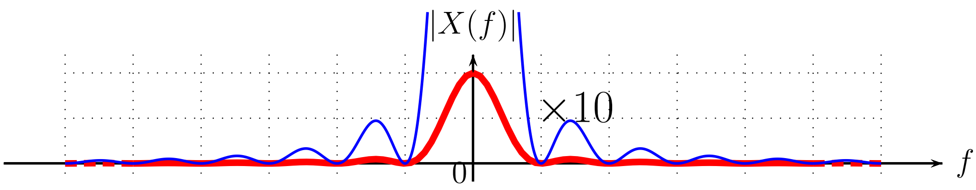
Aufgabe 35

Welcher Phasenverlauf entspricht dem im Bild gezeigten Betragsverlauf der Fourier-Transformierten des $\mathrm{rect}(t)$-Impulses?



Aufgabe 36

Welcher Phasenverlauf entspricht dem im Bild gezeigten Betragsverlauf der Fourier-Transformierten des $\Lambda(t)$-Impulses?

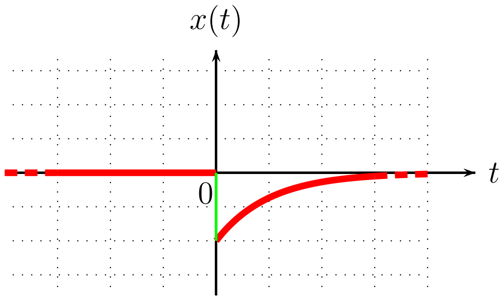


Aufgabe 37

Welcher Phasenverlauf entspricht der Fourier-Transformierten des negativen Lambda-Impulses, d.h. $-\Lambda(t)$?

Aufgabe 38

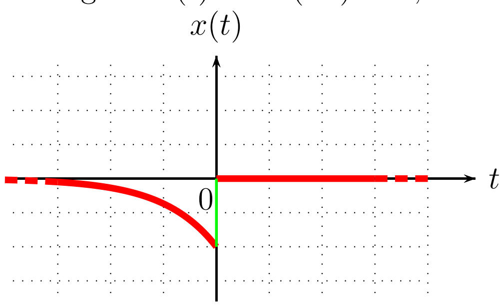
Gegeben ist das im Bild gezeigte Zeitsignal: $x(t) = -\varepsilon(t) \cdot e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$.



Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion dieses Signals.

Aufgabe 39

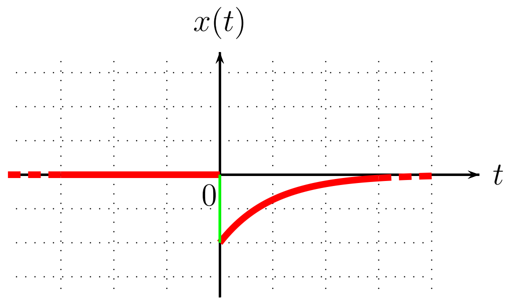
Gegeben ist das im Bild gezeigte Zeitsignal: $x(t) = -\varepsilon(-t) \cdot e^{\alpha t}$, $\alpha > 0$.



Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion dieses Signals.

Aufgabe 40

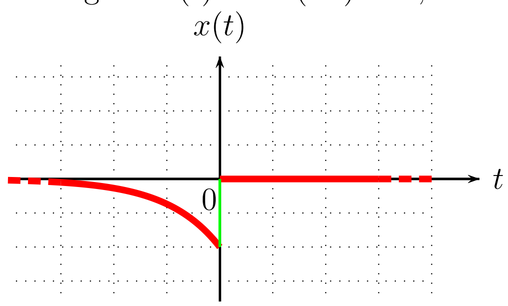
Gegeben ist das im Bild gezeigte Zeitsignal: $x(t) = -\varepsilon(t) \cdot e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$.



Berechnen Sie Selbst-Faltung dieses Signals.

Aufgabe 41

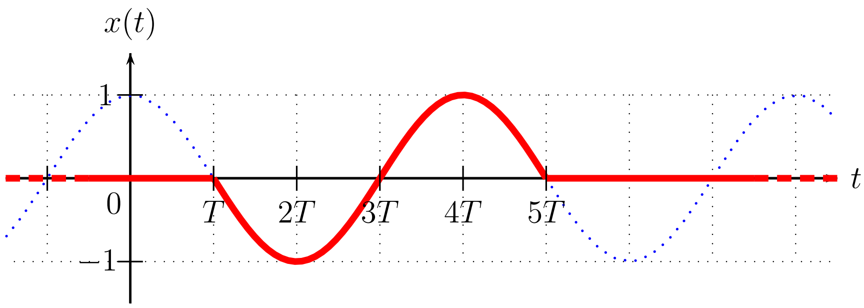
Gegeben ist das im Bild gezeigte Zeitsignal: $x(t) = -\varepsilon(-t) \cdot e^{\alpha t}$, $\alpha > 0$.



Berechnen Sie die Selbst-Faltung dieses Signals.

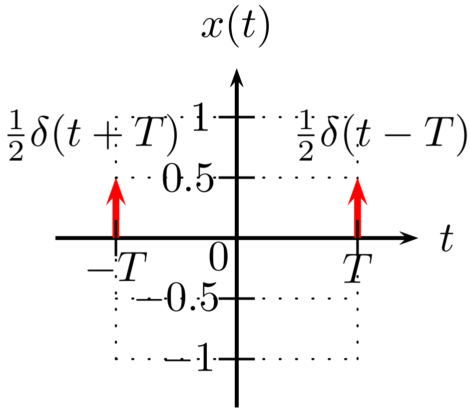
Aufgabe 42

Wie lautet die Laplace-Transformierte der skizzierten Funktion $x(t)$ bestehender aus einer Periode einer harmonischen Oszillation?



Aufgabe 43

Welcher Betrags- und Phasenverlauf entspricht der Fourier-Transformierten der skizzierten reellwertigen Funktion $x(t)$?



Aufgabe 44

Gesucht sind die Koeffizienten X_n der komplexen Fourier-Reihe von

$$x(t) = \sin^2(t).$$

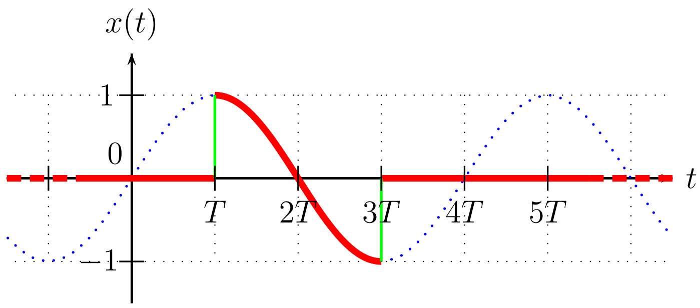
Aufgabe 45

Bestimmen Sie das Konvergenzgebiet der Laplace-Transformierten von

$$x(t) = \cosh(t) \cdot \varepsilon(t).$$

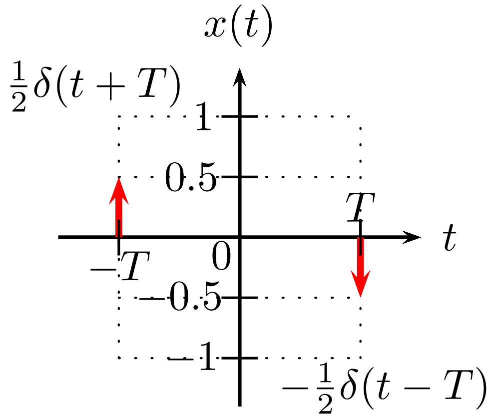
Aufgabe 46

Wie lautet die Laplace-Transformierte der skizzierten Funktion $x(t)$ bestehend aus einer halben Periode einer harmonischen Oszillation?



Aufgabe 47

Welcher Betrags- und Phasenvelauf entspricht der Fourier-Transformierten der skizzierten reellwertigen Funktion $x(t)$?



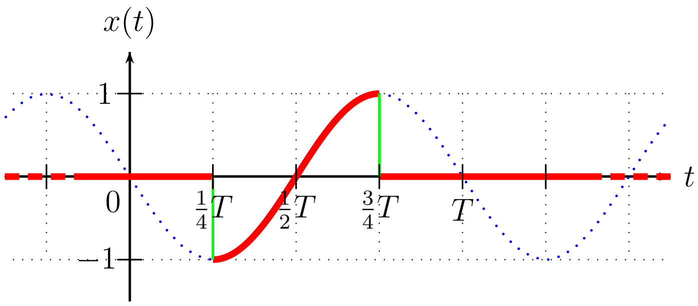
Aufgabe 48

Gesucht sind die Koeffizienten X_n der komplexen Fourier-Reihe von

$$x(t) = \cos^2(t).$$

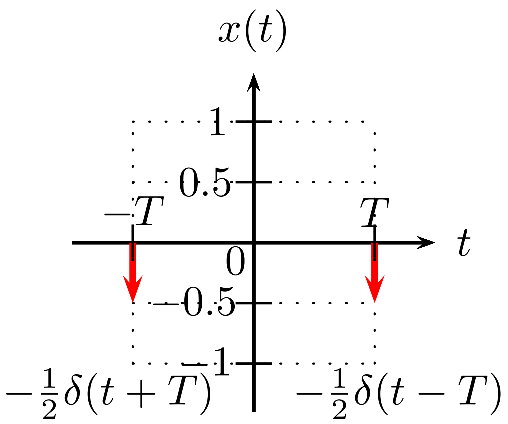
Aufgabe 49

Wie lautet die Laplace-Transformierte der skizzierten Funktion $x(t)$ bestehender aus einer halben Periode einer harmonischen Oszillation?



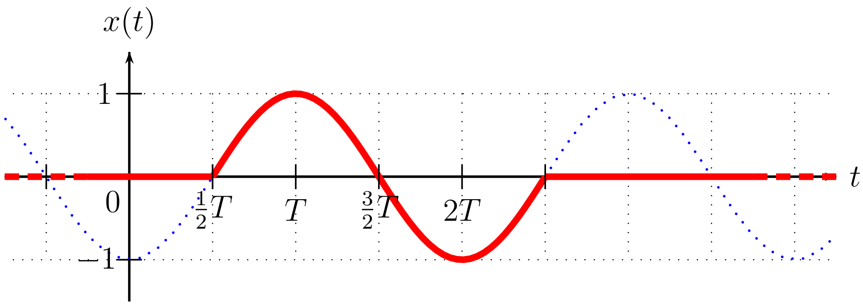
Aufgabe 50

Welcher Betrags- und Phasenverlauf entspricht der Fourier-Transformierten der skizzierten reellwertigen Funktion $x(t)$?



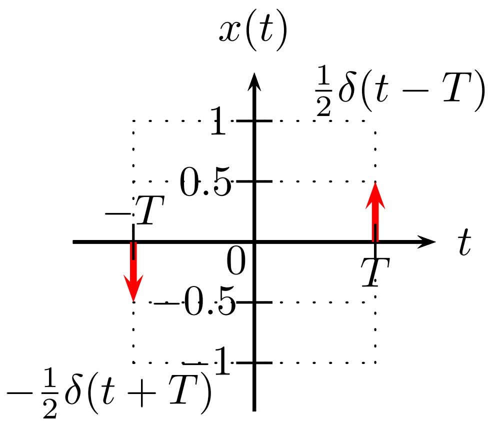
Aufgabe 51

Wie lautet die Laplace-Transformierte der skizzierten Funktion $x(t)$ bestehender aus einer Periode einer harmonischen Oszillation?



Aufgabe 52

Welcher Betrags- und Phasenverlauf entspricht der Fourier-Transformierten der skizzierten reellwertigen Funktion $x(t)$?



Aufgabe 53

Bestimmen Sie das Konvergenzgebiet der Laplace-Transformierten von

$$x(t) = \sinh(t) \cdot \varepsilon(t).$$

A.1 Aufgaben von Klausur 1, WS 2018

Aufgabe 54

Neu in Version 4.0 Berechnen Sie die Laplace-Transformierte von $x(t) = t \cdot \sinh(t) \cdot \varepsilon(t)$.

Aufgabe 55

Neu in Version 4.0 Berechnen Sie die Energie des Signals $x(t) = A \cdot \mathrm{si}(\pi B t) \cdot \sin(2\pi f_0 t)$ mit $A,\ B,\ f_0 \in \mathbb{R}$.

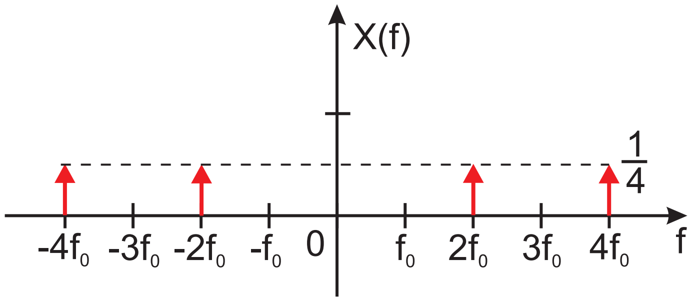
Aufgabe 56

$\boxed{\textbf{Neu in Version 4.0}}$ Bestimmen Sie das Konvergenzgebiet der zweiseitigen Laplacetransformierten von:

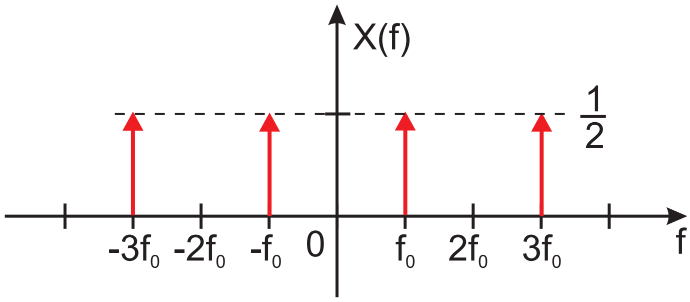
$$x(t) = \begin{cases} 2e^{2t} & t < 0 \\ 4e^{-t} & t \geq 0 \end{cases}$$

Aufgabe 57

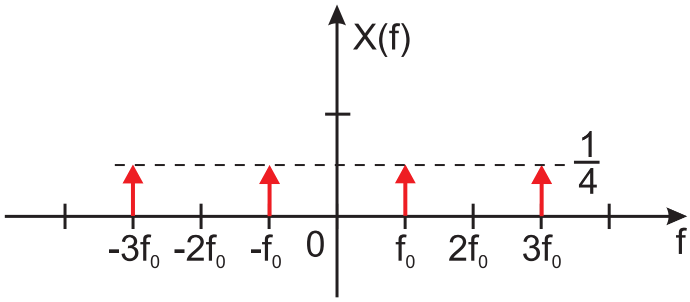
$\boxed{\textbf{Neu in Version 4.0}}$ Welche der folgenden Abbildungen zeigt das Spektrum des Signals $x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \cdot \cos(6\pi f_0 t)$:



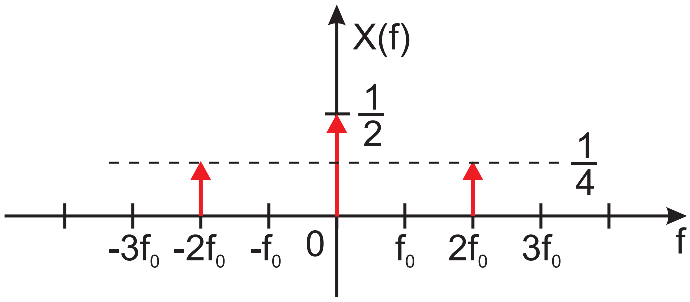
A.



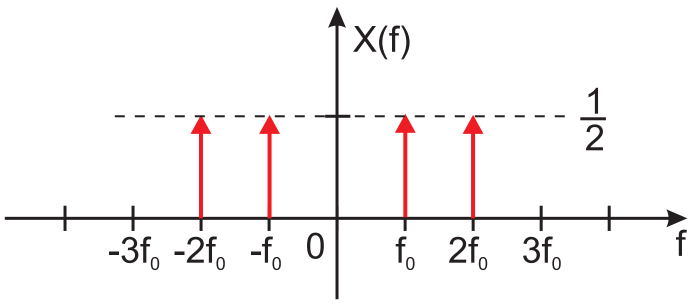
B.



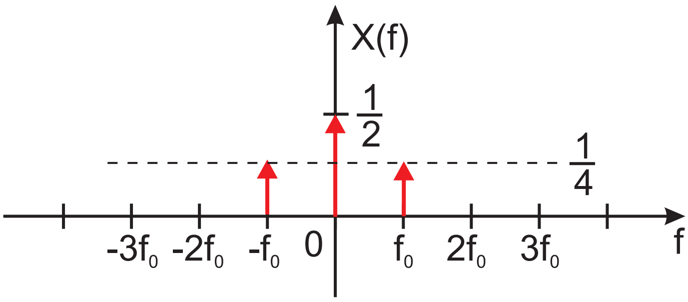
C.



D.



E.

F. 

Aufgabe 58

Neu in Version 4.0 Gegeben sei die **zweiseitige** Laplace-Transformierte $X(s) = \frac{(s-5)}{(s+1)(s-2)}$ im Konvergenzgebiet $-1 < Re\{s\} < 2$. Wie lautet die zugehörige Zeitfunktion? (Empfohlener Rechenweg: Anwendung des Residuensatzes; beachten Sie die Umlaufrichtung der Hilfskurve.)

Aufgabe 59

Neu in Version 4.0 Gesucht sind die Koeffizienten X_n der komplexen Fourier-Reihe von $x(t) = \cos^3(t)$.

Aufgabe 60

Neu in Version 4.0 Bestimmen Sie die Schwebungsfrequenz zweier Signale $y_1(t)$ und $y_2(t)$:

$y_1(t) = \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{8}\right)$

$y_2(t) = \sin^2\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$

Aufgabe 61

Neu in Version 4.0 Bestimmen Sie die Autokorrelationsfunktion des folgenden Zeitsignals:

$x(t) = \cos(\omega t) - \sin(2\omega t)$

Aufgabe 62

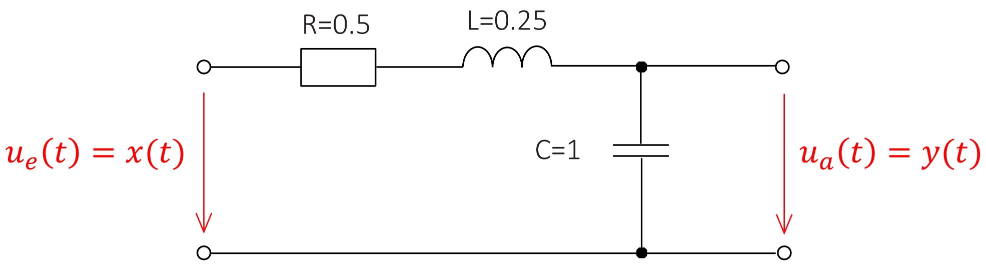
Neu in Version 4.0 Finden Sie die Fouriertransformierte $Y(j\omega)$ folgender Zeitfunktion:

$y(t) = \begin{cases} \sin(\omega_0 t) & |t| < \frac{a}{2} \\ 0 & |t| \geq \frac{a}{2} \end{cases}$ mit $a > 0$.

B Aufgaben zum Themenkreis Systeme

Aufgabe 63

Bestimmen Sie für das skizzierte LTI-System die Systemdifferentialgleichung für $y(t)$ und daraus die Spannungsübertragungsfunktion $H(s) = \dfrac{Y(s)}{X(s)}$.



Aufgabe 64

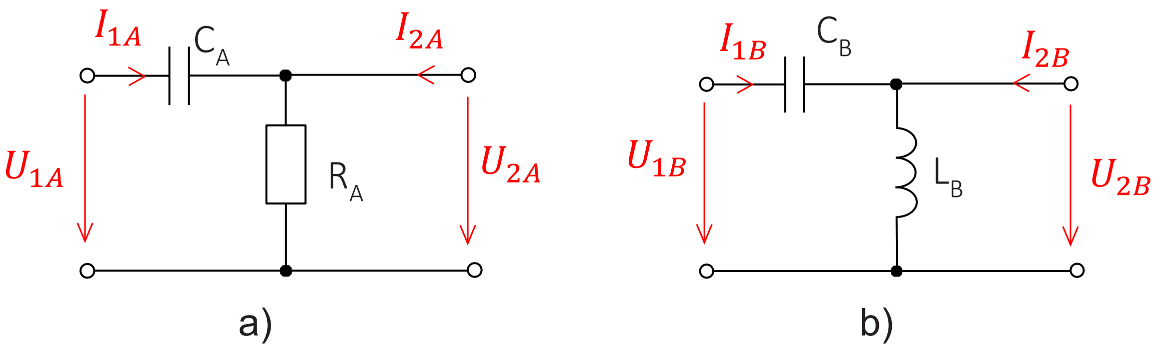
Bestimmen Sie für das System mit der Übertragungsfunktion $H(s) = \dfrac{5s+3}{2s^3 + as^2 + 3s + 3}$ den Wertebereich des Parameters a damit das System stabil ist.

Aufgabe 65

Bestimmen Sie mit Hilfe des Routh-Verfahrens, ob das System mit der Übertragungsfunktion $H(s) = \dfrac{s^2 + 2s + 8}{s^5 + 3s^4 + s^3 + 5s^2 + 2s + 7}$ stabil ist. Wie lautet der zweite Entwicklungs-Koeffizient der Kettenbruchentwicklung? Ist das System stabil?

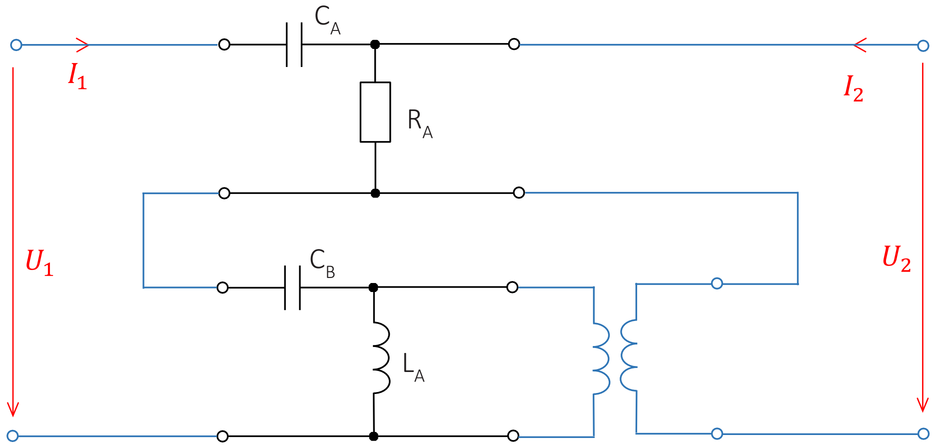
Aufgabe 66

Geben seien zwei Zweitore A und B (siehe Zeichnung). Bestimmen Sie die Impedanzmatrizen der Einzel-Systeme.



Aufgabe 67

Die beiden Zweitore aus Aufgabe 66 werden unter Verwendung eines idealen Übertragers miteinander in Serie verschalten (siehe nachfolgende Skizze).



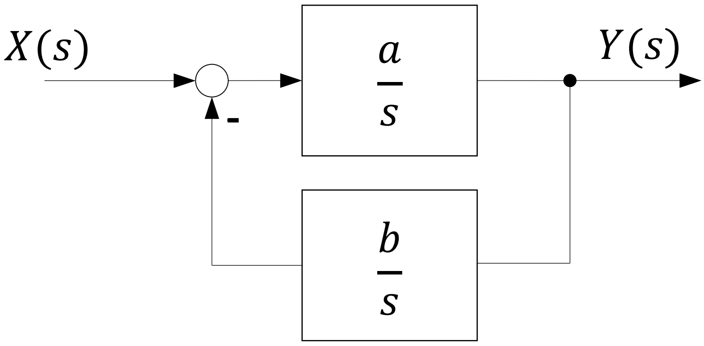
Das kombinierte System wird anschließend am Ausgang (Tor Nummer 2) kurzgeschlossen (d.h. $U_2 = 0$). Ermitteln Sie für diesen Fall die Übertragungsfunktion $H(s) = Z_1(s) = \frac{U_1(s)}{I_1(s)}$.

Aufgabe 68

Realisieren Sie für die Übertragungsfunktion $H(s) = \frac{4s^2+7s+2}{4s^2+6s+1/2}$ durch geeignete Verschaltung von Widerständen, Kondensatoren und Induktivitäten die Impedanzform eines Zweipols in Kettenbruchschaltung. Welches Element müssen Sie für Z_3 verwenden und welchen Wert hat dieses?

Aufgabe 69

Zwei Integrator-Glieder werden wie folgt miteinander kombiniert:



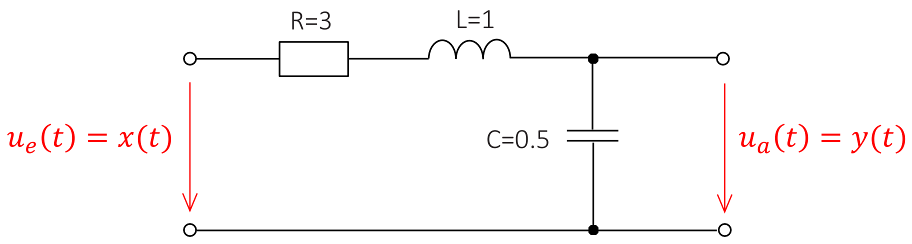
Berechnen und skizzieren Sie $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$ für $a = 1$, $b = 2$ wenn an den Eingang ein Einheitssprung $x(t) = \varepsilon(t)$ gelegt wird.

Aufgabe 70

Bestimmen Sie für das skizzierte LTI-System mit der Übertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

(vgl. Aufgabe 63) den Wert von $y(t=2)$ für ein Eingangssignal
$x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \cdot \varepsilon(t)$ mit $T = 4$, wenn $R = 3$, $L = 1$, $C = \frac{1}{2}$.

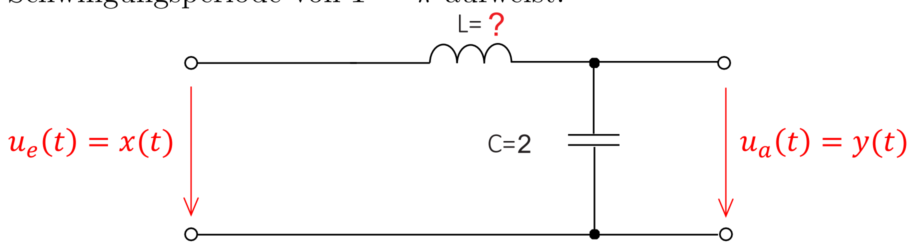


Aufgabe 71

Bestimmen Sie für das System mit der Übertragungsfunktion $H(s) = \frac{as}{2s^2+s+3}$ den Wert von a so, dass das Ausgangssignal $y(t)$ des Systems für ein Eingangssignal $x(t) = 3\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\varepsilon(t)$ für $t \gg 30$ eine Amplitude von 1 aufweist.

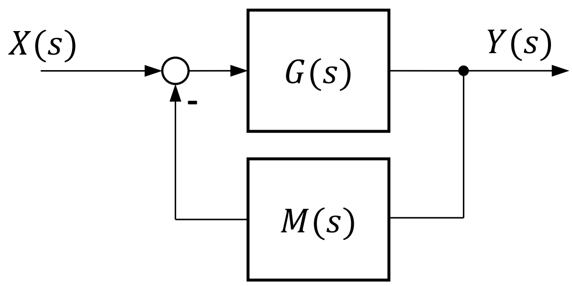
Aufgabe 72

Bestimmen Sie für das skizzierte LTI-System (das System von Aufgabe 63 für $R = 0$) für $C = 2$ den Wert von L so, dass $y(t)$ nach einer Anregung durch einen Dirac-Impuls eine Schwingungsperiode von $T = \pi$ aufweist.



Aufgabe 73

Gegeben sei das folgende dynamische System mit $G(s) = \frac{s}{s^2+3s+2}$ und $M(s) = \frac{as}{s^2+s+2}$. Für welchen Wertebereich des Parameters a ist das Gesamtsystem mit der Übertragungsfunktion $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ stabil?

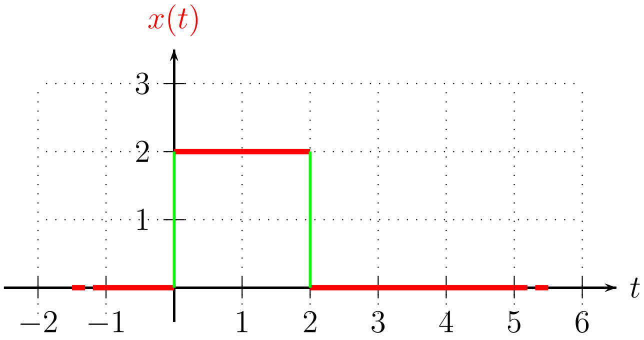


Aufgabe 74

Ein LTI System antwortet auf einen Einheitssprung am Eingang mit folgendem Signalverlauf am Ausgang: $y(t) = 3(1-e^{-2t})\cdot\varepsilon(t)$. Wie lautet das Ausgangssignal im eingeschwungenen Zustand (für sehr große Werte von t), wenn an den Eingang eine Sinusschwingung $x(t) = 1.5\sin(2t)\cdot\varepsilon(t)$ gelegt wird?

Aufgabe 75

Ein PT2-System habe Pole bei -1 und -2. Wenn man an den Eingang eine Sinusschwingung mit Amplitude 3 und Kreisfrequenz 2 anlegt, hat die Amplitude am Ausgang (nach Abklingen aller Einschwingvorgänge) einen Wert von $\frac{\sqrt{10}}{2}$. Welchen Wert hat das Ausgangssignal des PT2-Systems zum Zeitpunkt $t = 2$, wenn an den Eingang folgendes Signal gelegt wird?

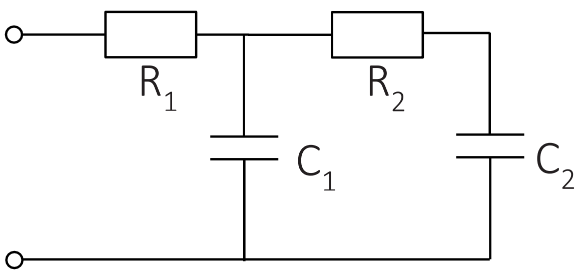


Aufgabe 76

Ein Zweitor mit der Kettenmatrix $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{sC} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ werde am Ausgang mit einer Impedanz $Z = R$ abgeschlossen. Wie lautet der Spannungsverlauf $u(t)$ an $Z = R$ nach einem Einheitssprung am Eingang?

Aufgabe 77

Wie lautet die Impedanzfunktion des skizzierten Zweipols, wenn $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, $C_1 = 3$, $C_2 = 4$?



Aufgabe 78

Wie sieht das Pol-Nullstellen-Diagramm des LTI-Systems mit der Stoßantwort $h(t) = (2te^{-3t} - 1) \cdot \varepsilon(t)$ aus? [Pole: Kreuze, Nullstellen: Kreise]

Aufgabe 79

Für welchen Wertebereich von a ist das LTI-System mit der angegebenen Systemdifferentialgleichung stabil?

$$\left(5\frac{d^4}{dt^4} + 2\frac{d^3}{dt^3} + a\frac{d^2}{dt^2} + 3\frac{d}{dt} + 2\right) y(t) = \left(3\frac{d^2}{dt^2} + 2\right) x(t)$$

Aufgabe 80

Eine Regelstrecke besteht aus zwei identischen, stabilen, seriell miteinander verknüpften LTI-Systemen vom Typ PT1. Zur Charakterisierung des Zeitverhaltens der Strecke wird an Eingang des ersten Systems ein Dirac-Stoß gelegt. Dabei wird beobachtet, dass das Ausgangssignal am zweiten System, $h(t)$, ein Maximum bei $t_{max} = \frac{1}{2}$ zeigt. Zur Bestimmung der Verstärkung der Strecke wird danach eine Sinusschwingung mit Kreisfrequenz $\omega = 2$ und Amplitude $x_0 = 4$ gelegt. Nach Abklingen aller Einschwingvorgänge wird am Ausgang des zweiten Systems eine Amplitude von $y_0 = 2$ gemessen. Wie lautet die Übertragungsfunktion des einzelnen PT1-Gliedes?

Aufgabe 81

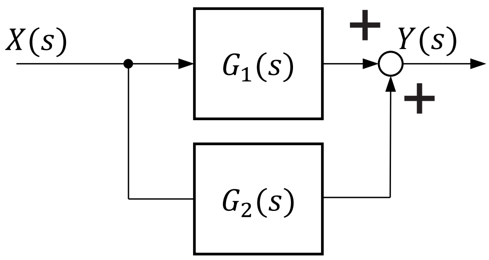
Gegeben sei das System mit der Übertragungsfunktion $H(s) = \dfrac{12s^2 + 11s + 1}{4s^2 + 3s}$. Realisieren Sie für diese durch geeignete Verschaltung von Widerständen, Kondensatoren und/oder Induktivitäten die <u>Impedanzform</u> eines Zweipols in Kettenbruchschaltung.

Aufgabe 82

Gegeben sei das System mit der Übertragungsfunktion $H(s) = \dfrac{12s^2 + 11s + 1}{4s^2 + 3s}$. Realisieren Sie für diese durch geeignete Verschaltung von Widerständen, Kondensatoren und/oder Induktivitäten die <u>Admittanzform</u> eines Zweipols in Kettenbruchschaltung.

Aufgabe 83

Zwei LTI-Systeme werden miteinander laut untenstehender Skizze verknüpft. Wie lautet das Ausgangssignal $y(t) ∘\!\!-\!\!\bullet\, Y(s)$, wenn an den Eingang ein Einheitssprung $x(t) = \varepsilon(t)$ gelegt wird, und die Übertragungsfunktionen der beiden Systeme $G_1(s) = \dfrac{3}{s+1}$ und $G_2(s) = \dfrac{2}{s+2}$ sind?



Aufgabe 84

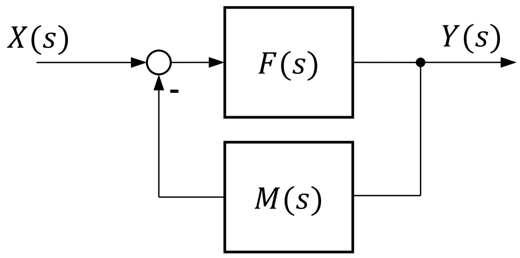
Gegeben sei ein Zweitor mit der Impedanzmatrix $Z = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}s + 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Das Zweitor wird am Ausgang kurzgeschlossen und an den Eingang wird eine Spannung $u_1(t) = \dfrac{3}{2}\sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \varepsilon(t)$ gelegt. Danach wird, nach Abwarten aller Einschwingvorgänge, der Eingangsstromverlauf gemessen. Wie lautet dieser (Betrag und Phase)?

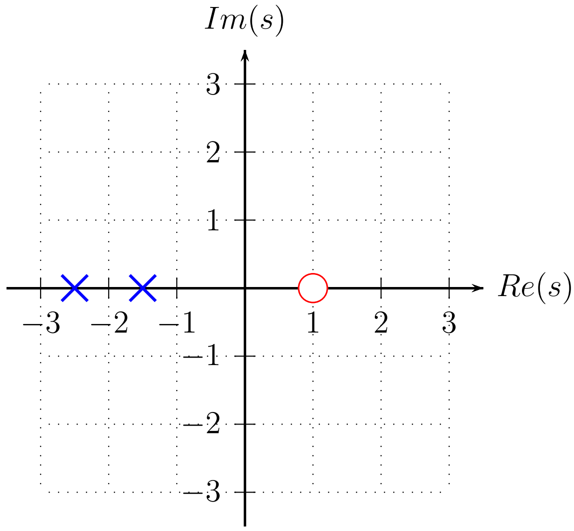
Aufgabe 85

Gegeben sei der skizzierte Regelkreis mit der Übertragungsfunktion $F(s) = R(s) \cdot G(s) = \frac{K}{s+2}$ (bestehend aus Regler $R(s)$ und Strecke $G(s)$) und der Übertragungsfunktion $M(s) = \frac{1}{s+4}$ des Messgliedes. In welchem maximalen Werte-Bereich kann die Verstärkung K des Reglers gewählt werden, sodass die Führungsübertragungsfunktion $H_{\text{Führ}}(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ stabil ist und das Ausgangssignal $y(t) ∘\!\!-\!\!\bullet\, Y(s)$ nach einem Dirac-Impuls am Eingang keinen oszillatorischen Anteil enthält (also nur aus abklingenden Exponentialfunktionen besteht)?

Aufgabe 86

Gegeben sei folgendes Pol-Nullstellen-Diagramm (Pole: Kreuze, Nullstellen: Kreise). Wie lautet die Impulsantwort des zugehörigen Systems?



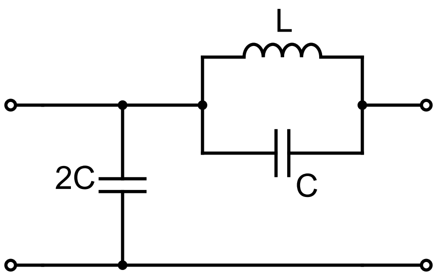


Aufgabe 87

Realisieren Sie durch geeignete Verschaltung von Widerständen, Kondensatoren und Induktivitäten für die Übertragungsfunktion $H(s) = \dfrac{12s^2 + 10s + \frac{1}{2}}{12s^2 + s}$ die Impedanzform eines Zweipols in Partialbruchschaltung.

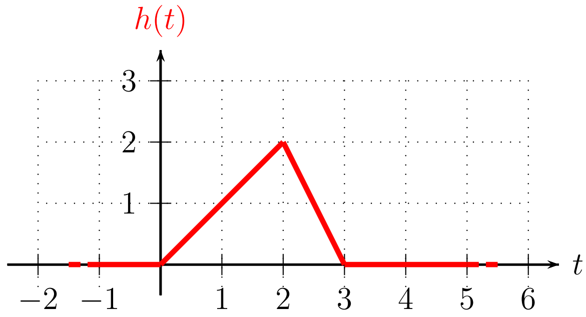
Aufgabe 88

Wie lautet die Kettenmatrix des skizzierten Zweitors?



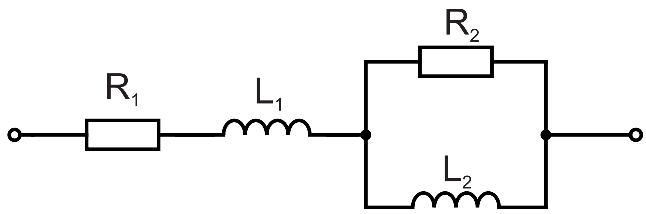
Aufgabe 89

Angenommen, es gäbe ein LTI-System, dessen Impulsantwort $h(t)$ den unten skizzierten Verlauf hätte. Welchen Verlauf hätte dann das Ausgangssignal $y(t)$ des Systems für $3 < t < 4$, wenn an den Eingang ein Signal $x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{4}\right) \cdot \varepsilon(t)$ gelegt wird?



Aufgabe 90

Wandeln Sie die folgende Impedanzform eines Zweipoles in Partialbruchschaltung in seine entsprechende Admittanzform um ($R_1 = 1$, $R_2 = 2$, $L_1 = 3$, $L_2 = 4$).

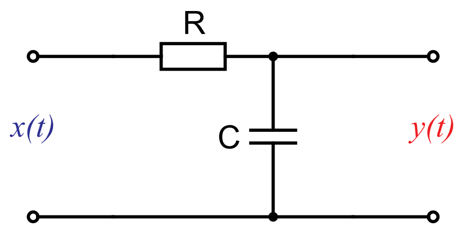


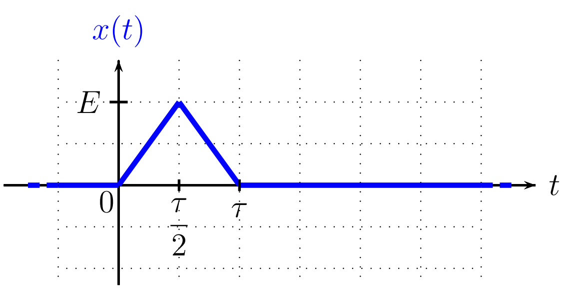
Aufgabe 91

Wie sieht das Pol-Nullstellen-Diagramm des LTI-Systems mit der Stoßantwort $h(t) = \frac{2}{3}\left[te^{-2t} - e^{-3t}\right] \cdot \varepsilon(t)$ aus? [Pole: Kreuze, Nullstellen: Kreise]

Aufgabe 92

Wie schaut das Spannungssignal $y(t)$ am Ausgang des im Bild skizzierten LTI Systems für das gezeigte nichtperiodische Dreieck-Signal $x(t)$ aus, wenn $RC \ll \tau$, $RC \approx \tau$ bzw. $RC \gg \tau$ ist?





Aufgabe 93

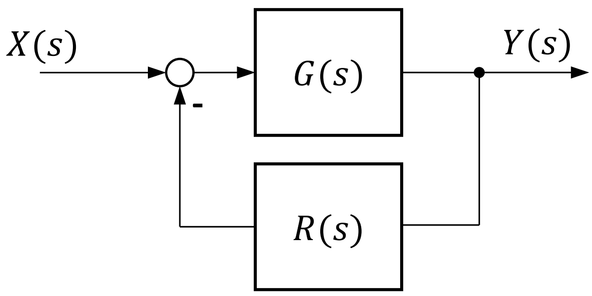
Gegeben sei ein System mit folgender Übertragungsfunktion:

$$H(s) = \frac{(1+2s)e^{-2s}}{s^2}$$

Berechnen Sie die zugehörige Stoßantwort.

Aufgabe 94

Eine stabile Regelstrecke mit PT2-Verhalten soll durch eine Rückkopplungsschaltung laut untenstehender Skizze mit einem Hilfsregler $R(s) = F$ (reines Proportionalglied) charakterisiert werden. Dazu wird die Antwort des Gesamtsystems $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$ auf einen Dirac-Stoß am Eingang $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \delta(t)$ aufgezeichnet. Sie lautet $y(t) = Ae^{-Bt} \cdot \sin(Ct) \cdot \varepsilon(t)$. Wie lautet die Übertragungsfunktion $G(s)$ der Regelstrecke wenn $F = 2$, $A = 2$, $B = 3$, $C = 2$?



Aufgabe 95

An den Eingang eines stabilen PT1-Systems werde ein Signal $x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \arctan\varphi) \cdot \varepsilon(t)$ gelegt. Nach Abklingen aller Einschwingvorgänge wird am Ausgang ein Signal mit Amplitude B und einer Phase $\arctan C$ gemessen, d.h. $y(t) = B \cdot \cos(\omega t + \arctan C)$. Wie lautet die Sprungantwort des PT1-Systems?

$A = 2$, $B = 1$, $\omega = 2$, $\arctan\varphi = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$, $\arctan C = \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$.

Anmerkung: $\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-x\cdot y}\right)$, für $x \cdot y < 1$.

Aufgabe 96

An einem umkehrbaren (reziproken) Zweitor werden bei einer bestimmten Frequenz ω folgende Impedanzen gemessen:

Bei Leerlauf am Ausgang: $\frac{U_1}{I_1} = A_r + jA_i$,

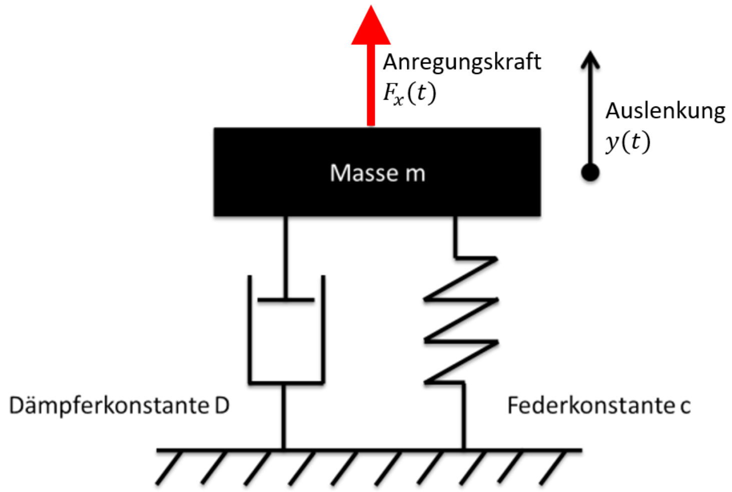
Bei Leerlauf am Eingang: $\frac{U_2}{I_2} = B_r + jB_i$,

Bei Kurzschluss am Ausgang: $\frac{U_1}{I_1} = C_r + jC_i$.

Wie lautet die komplexe Amplitude der Ausgangsspannung u_2, wenn für Leerlauf am Ausgang am Eingang ein sinusförmiger Stromverlauf mit einer Frequenz ω und einer komplexen Amplitude von $i_1 = i_0 e^{j\varphi}$ eingeprägt wird und folgende Werte gelten $A = 5 + \frac{j}{\sqrt{2}}$, $B = 2 - j2$, $C = 5 + j\frac{2}{\sqrt{2}}$, $i_1 = 5 \cdot e^{j\frac{5\pi}{8}}$?

Aufgabe 97

Neu in Version 5.0 Wie lautet die Systemdifferentialgleichung des skizzierten Feder-Masse Systems mit Dämpfung, wenn die Auslenkung der Masse die Ausgangsgröße $y(t)$ und die Anregungskraft $F_x(t)$ die Eingangsgröße ist? Normieren Sie die Systemdifferentialgleichung, sodass der Koeffizient bei der höchsten Ordnung 1 wird.

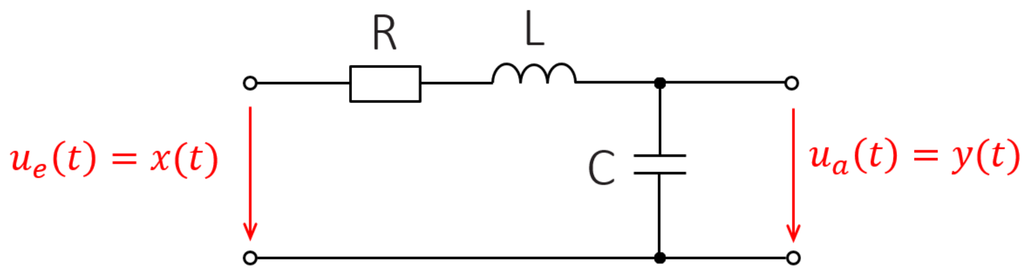


Aufgabe 98

Neu in Version 5.0 Diskutieren Sie das dynamische Verhalten des gedämpften Feder-Masse-Systems aus Aufgabe 97 für verschiedene Werte der normierten Dämpfung $0 < d < \infty$.

Aufgabe 99

Neu in Version 5.0 Wie lautet die normierte Übertragungsfunktion der als Serienschwingkreis bezeichneten skizzierten RLC-Schaltung?



Aufgabe 100

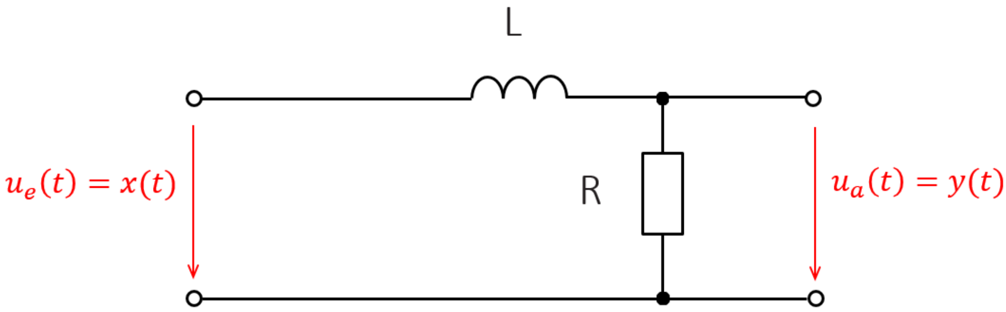
Neu in Version 5.0 Wie lautet die Stoßantwort des PT2-Gliedes aus Aufgabe 99 für $0 < d < 1$?

Aufgabe 101

Neu in Version 5.0 Wie lautet die Sprungantwort des PT2-Gliedes aus Aufgabe 99 für $0 < d < 1$?

Aufgabe 102

Neu in Version 5.0 Wie lautet die Systemdifferentialgleichung der skizzierten RL-Schaltung?



Aufgabe 103

Neu in Version 5.0 Wie lautet die Sprungantwort der RL-Schaltung aus Aufgabe 102?

Aufgabe 104

Neu in Version 5.0 Berechnen und skizzieren Sie den Spannungsverlauf $u_a(t)$ der RL-Schaltung aus Aufgabe 102 im eingeschwungenen Zustand, wenn am Eingang eine periodische Rechteckschwingung mit der Periodendauer T anliegt und für den Verlauf einer Periode Folgendes gilt:

$$u_e(t) = \begin{cases} U_0 & t < aT \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

mit $0 < a < 1$.

Wie verändert sich der Mittelwert von $u_a(t)$ bei Variation von a im Bereich $0 < a < 1$, wenn die Zeitkonstante des Systems $\tau \gg T$?

Aufgabe 105

Neu in Version 6.0 Berechnen Sie für den normierten Schwingkreis aus Aufgabe 99 allgemein das Ausgangssignal $y(t)$ im eingeschwungenen Zustand, wenn an den Eingang ein Signal $x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ gelegt wird. Wie hängt das Ausgangssignal von der Frequenz ω des Eingangssignals und der Dämpfung d des Systems ab?

Aufgabe 106

Neu in Version 7.0 Gegeben sei ein PT2 System mit der Übertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{K}{s^2 + 2d\omega_0 \cdot s + \omega_0^2}.$$

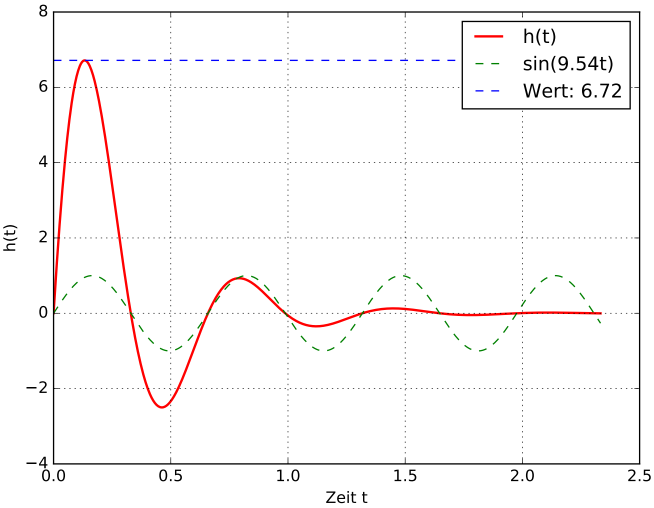
Bestimmen Sie allgemein den Zeitpunkt t_{max}, an dem die Stoßantwort ihren Maximalwert annimmt.

Aufgabe 107

Neu in Version 7.0 Bestimmen Sie allgemein den Maximalwert der Stoßantwort eines PT2-Systems.

Aufgabe 108

Neu in Version 7.0 Zur Charakterisierung eines PT2-Systems wird seine Stoßantwort gemessen. Diese besitzt, wie im folgenden Bild dargestellt, ein Maximum bei 6.72 und eine Schwingungsfrequenz von 9.54. Mit Hilfe einer separaten Messung wurde die Dämpfung zu $d = 0.3$ bestimmt.



Wie lautet die Übertragungsfunktion des Systems?

Aufgabe 109

Neu in Version 7.0 Zur Bestimmung der Parameter einer Regelstrecke wird die Stoßantwort gemessen. Diese lässt sich als $h_{Mess}(t) = Ae^{-Bt}\sin(Ct)$ mit $A = 10.482$, $B = 3$, $C = 9.54$ angeben. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion der Regelstrecke.

C Aufgaben zum Themenkreis Frequenzbereich und Zustandsraum

Aufgabe 110

Gegeben ist folgende Übertragungsfunktion. Bestimmen sie die Eckfrequenzen und dort die Gruppenlaufzeit t_g bei der unteren Eckfrequenz f_1 und bei der oberen Eckfrequenz f_2.

$$H(s) = \frac{9.9s}{s^2 + 9.9s + 1}$$

Aufgabe 111

Bestimmen sie das Bode-Diagramm folgender Übertragungsfunktion für $RC = \frac{1}{22\pi}$, $\frac{L}{R} = \frac{11}{20\pi}$. Wie ist der Verlauf des Betragsfrequenzganges?

$$H(s) = \frac{1}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1}.$$

Aufgabe 112

Bestimmen sie den Phasengang der gegebenen Übertragungsfunktion für $RC = \frac{1}{22\pi}$, $\frac{L}{R} = \frac{11}{20\pi}$. Bestimmen sie zuerst die Zahl der Pole. Und geben sie dann den Phasenbeitrag für das jeweilige Frequenzinterval.

$$H(s) = \frac{1}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1}.$$

Aufgabe 113

Erstellen sie ein Zustandsmodell mit Phasenvariabalen. Überlegen sie sich zuerst die Koeffizienten a_n und b_n und erstellen dann die Matrizen A, B, C, D.

$y'' + 3y' + 2y = 3x'' + 6x' + 4x.$

Aufgabe 114

Berechnen sie Nullstellen, Pole, Betragsfrequenzgang und Phasenverlauf von

$$H(s) = \frac{1}{1 + 5s}.$$

Aufgabe 115

Berechnen sie Nullstellen, Pole, Betragsfrequenzgang und Phasenverlauf von

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}.$$

Aufgabe 116

Berechnen sie Betragsfrequenzgang und Phasenverlauf eines Hochpasses

$$H(s) = \frac{5s}{10+s}.$$

Aufgabe 117

Berechnen sie Nullstellen, Pole, Phasengang und Gruppenlaufzeit von

$$H(s) = \frac{8s}{s^2+8s+1}.$$

Aufgabe 118

Skizzieren sie das Bodediagramm (Betrag und Phase) folgender Übertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{4s}{\frac{s^2}{15}+\frac{16}{15}s+1}.$$

Aufgabe 119

Skizzieren sie die Ortskurve der Impedanz der Serienschaltung aus einem Widerstand R und einer Induktivität L.

Aufgabe 120

Berechnen Sie Betragsfrequenzgang, Phasenverlauf und Gruppenlaufzeit von

$$H(s) = \frac{1-Ts}{1+Ts}.$$

Um welches System handelt es sich?

Aufgabe 121

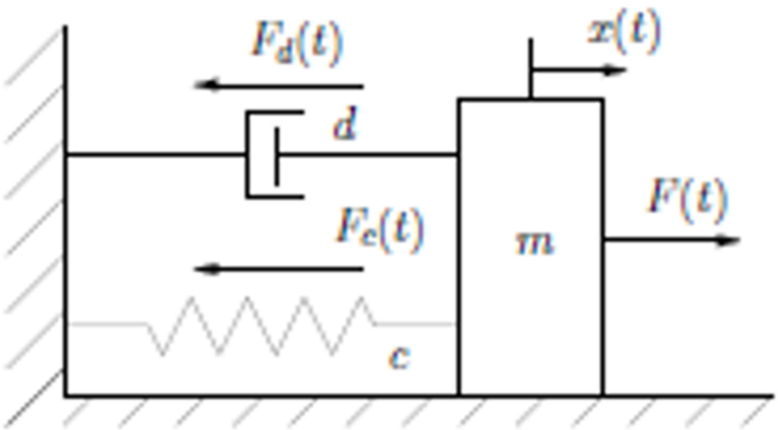
Filter: Konstruieren sie eine Bandsperre ($f_u = 0.01$, $f_o = 100$) ausgehend von einem Tiefpass.

Aufgabe 122

Filter: Annahme ist ein idealer Rechteckfilter $G(j2\pi f) = \mathrm{Rect}(f/f_G)$. Berechnen sie die Stoßantwort als Fourier-Rücktransformierte. Was lernen wir daraus?

Aufgabe 123

Aufstellen der Zustandsgleichung eines Feder-Masse-Dämpfer-Systems laut nachfolgender Skizze:



Aufgabe 124

Erstellen Sie ein Zustandsmodell mit Phasenvariablen. Überlegen Sie sich zuerst die Koeffizienten a_n und b_n und erstellen Sie dann die Matrizen A,B,C,D.

$$y'' + 2y' = 4x'' + 5x' - 2x$$

Aufgabe 125

Gegeben sei die Übertragungsfunktion $H(s) = \dfrac{1 - Ts}{1 + Ts}$.

Berechnen Sie den Betragsfrequenzgang $|H(j2\pi f)|$ und den Phasenverlauf $\varphi(2\pi f)$.

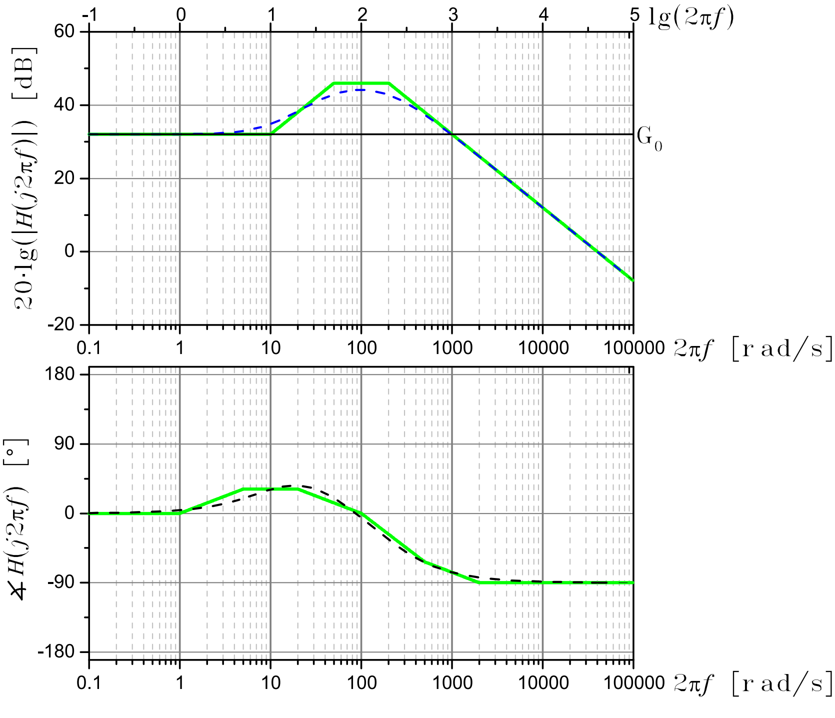
Aufgabe 126

Welches der folgenden Diagramme enspricht dem asymptotischen Bode-Diagramm für den Betragsfrequenzgang und Phasengang folgender Übertragungsfunktion?

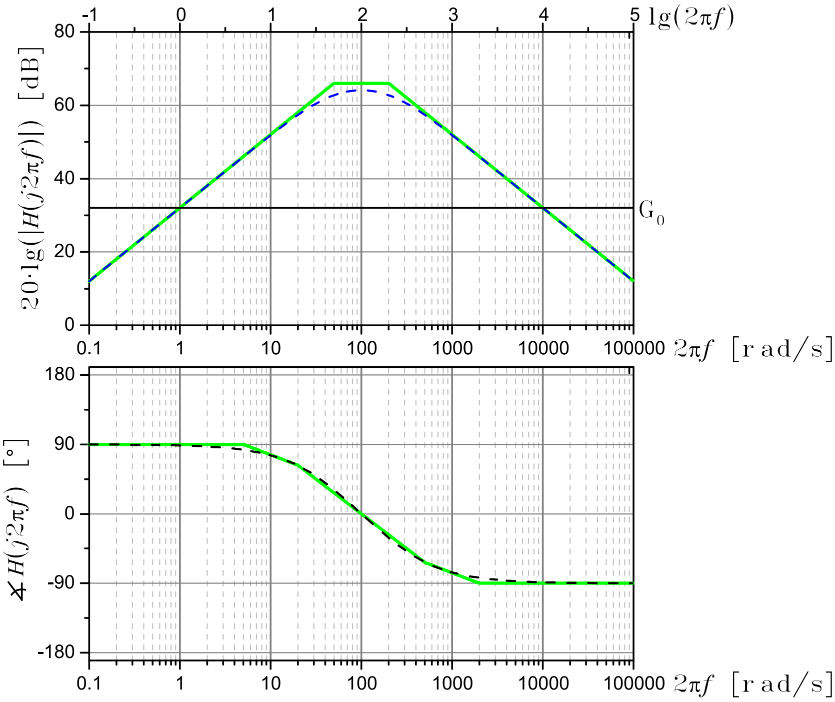
$$H(s) = 40000 \cdot \frac{(10 + s)}{(50 + s)(200 + s)} = 40 \cdot \frac{1 + \frac{s}{10}}{(1 + \frac{s}{50})(1 + \frac{s}{200})}$$

Die strichlierte Linie zeigt den exakten Verlauf, die durchgezogene Linie entspricht der asymptotischen Konstruktion. Beachten Sie, dass $G_0 = 20 \cdot \lg(40) \approx 32dB$.

Antwortmöglichkeiten:

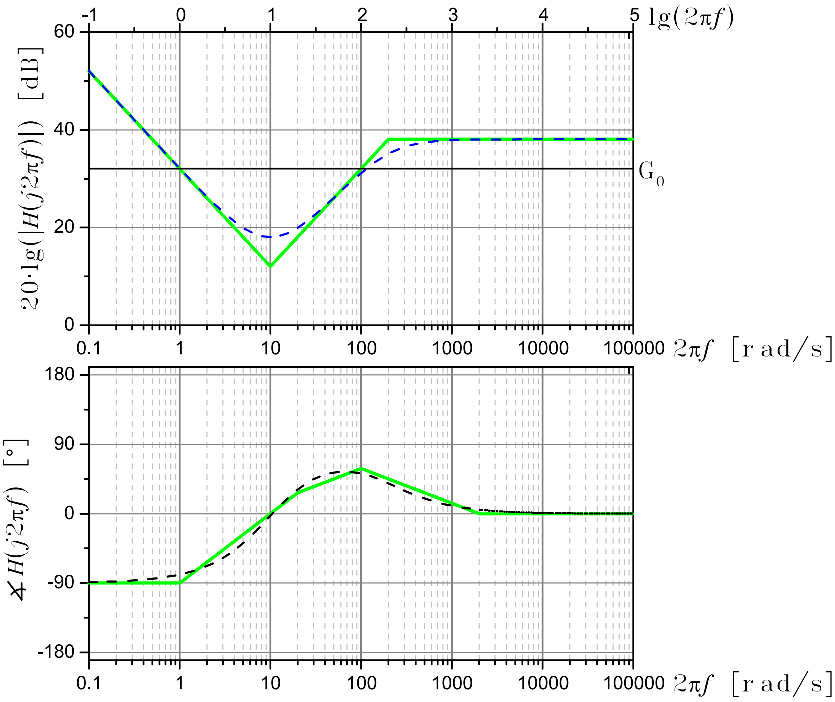


A.



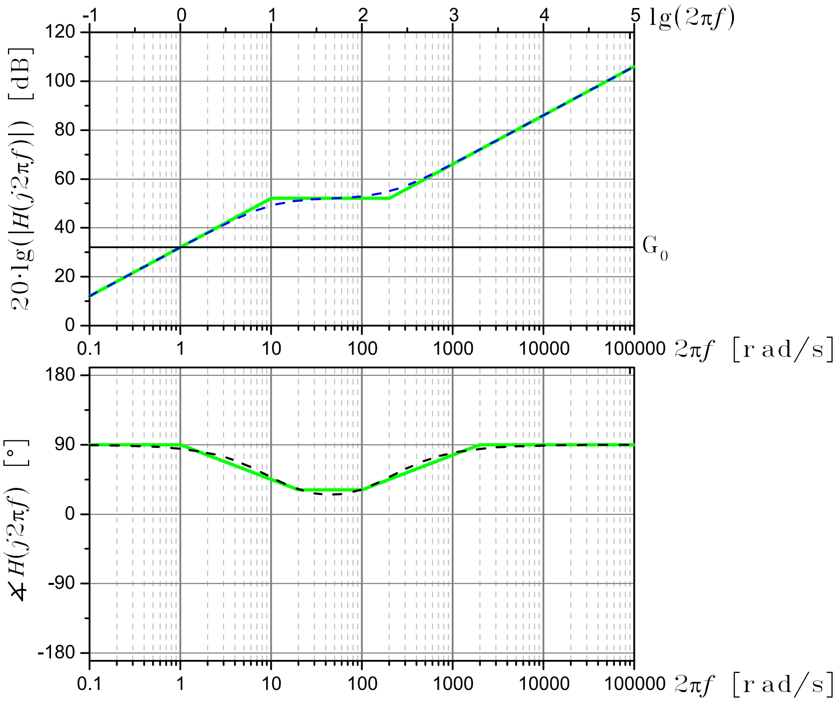
-1
0
1
2
3
4
5
lg(2πf)
80
60
40
20
0
20·lg(|H(j2πf)|) [dB]
G0
0.1
1
10
100
1000
10000
100000
2πf [rad/s]
180
90
0
-90
-180
∡H(j2πf) [°]
0.1
1
10
100
1000
10000
100000
2πf [rad/s]

B.

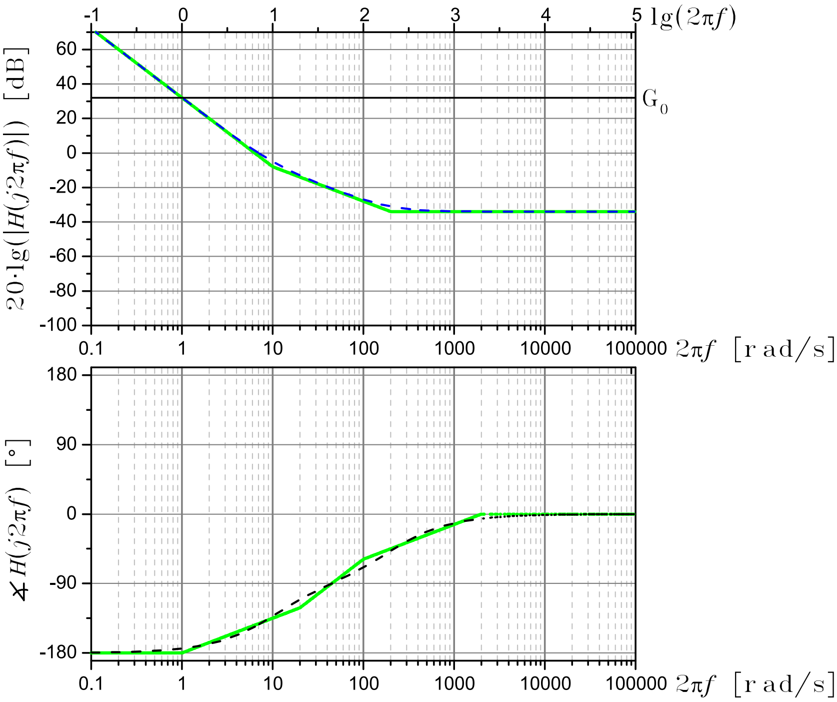


-1
0
1
2
3
4
5
lg(2πf)
60
40
20
0
20·lg(|H(j2πf)|) [dB]
G0
0.1
1
10
100
1000
10000
100000
2πf [rad/s]
180
90
0
-90
-180
∡H(j2πf) [°]
0.1
1
10
100
1000
10000
100000
2πf [rad/s]

C.

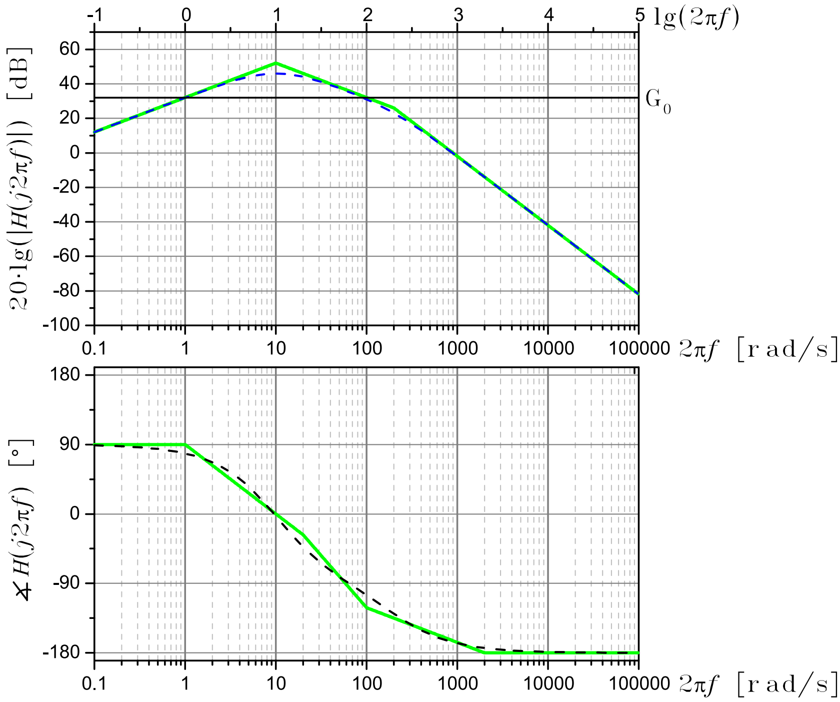

-1
0
1
2
3
4
5
lg(2πf)
120
100
80
60
40
20
0
20·lg(|H(j2πf)|) [dB]
G0
0.1
1
10
100
1000
10000
100000
2πf [rad/s]
180
90
0
-90
-180
∡H(j2πf) [°]
0.1
1
10
100
1000
10000
100000
2πf [rad/s]

D.


-1
0
1
2
3
4
5
lg(2πf)
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
20·lg(|H(j2πf)|) [dB]
G0
0.1
1
10
100
1000
10000
100000
2πf [rad/s]
180
90
0
-90
-180
∡H(j2πf) [°]
0.1
1
10
100
1000
10000
100000
2πf [rad/s]

E.

F.



Aufgabe 127

Erstellen Sie ein Zustandsmodell mit Phasenvariablen. Überlegen sie sich zuerst die Koeffizienten a_n und b_n und erstellen sie dann die Matrizen A,B,C,D.

$$y'' + 2y' = 4x'' + 5x' - 2x$$

Aufgabe 128

Berechnen Sie den Betragsfrequenzgang $|H(j2\pi f)|$ und Phasenverlauf $\varphi(2\pi f)$ von

$$H(s) = \frac{1 - Ts}{1 + Ts}.$$

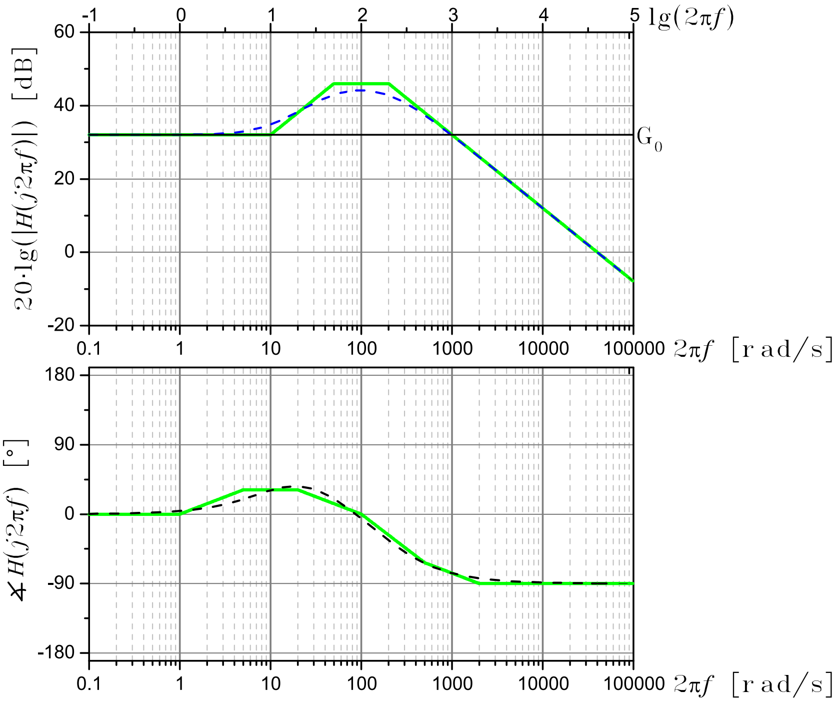
Aufgabe 129

Welches der folgenden Diagramme enspricht dem asymptotischen Bode-Diagramm für den Betragsfrequenzgang und Phasengang folgender Übertragungsfunktion?

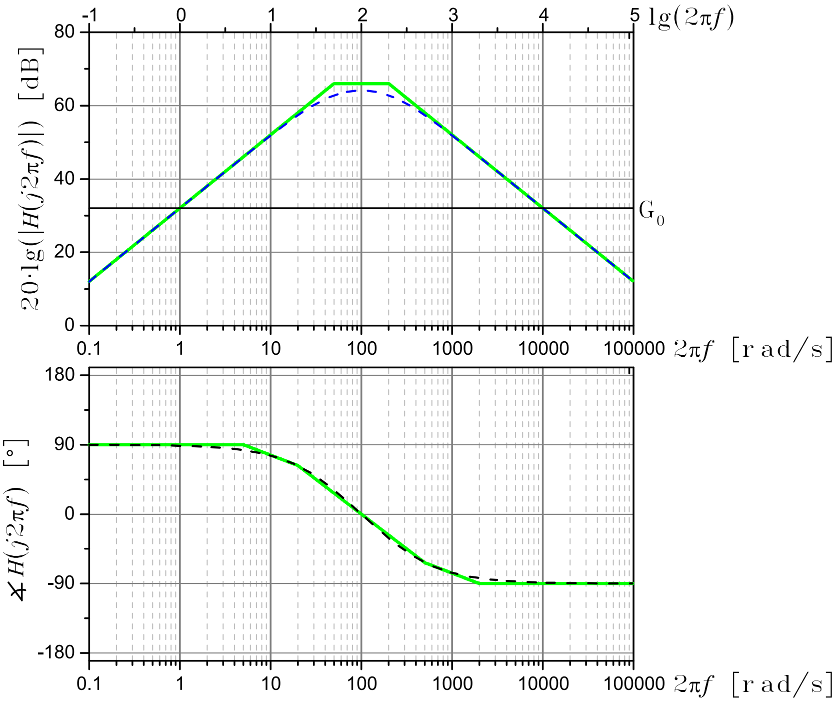
$$H(s) = 40000 \cdot \frac{(10 + s)}{(50 + s)(200 + s)} = 40 \cdot \frac{1 + \frac{s}{10}}{(1 + \frac{s}{50})(1 + \frac{s}{200})}$$

Die strichlierte Linie zeigt den exakten Verlauf, die durchgezogene Linie entspricht der asymptotischen Konstruktion. Beachten Sie, dass $G_0 = 20 \cdot \lg(40) \approx 32dB$.

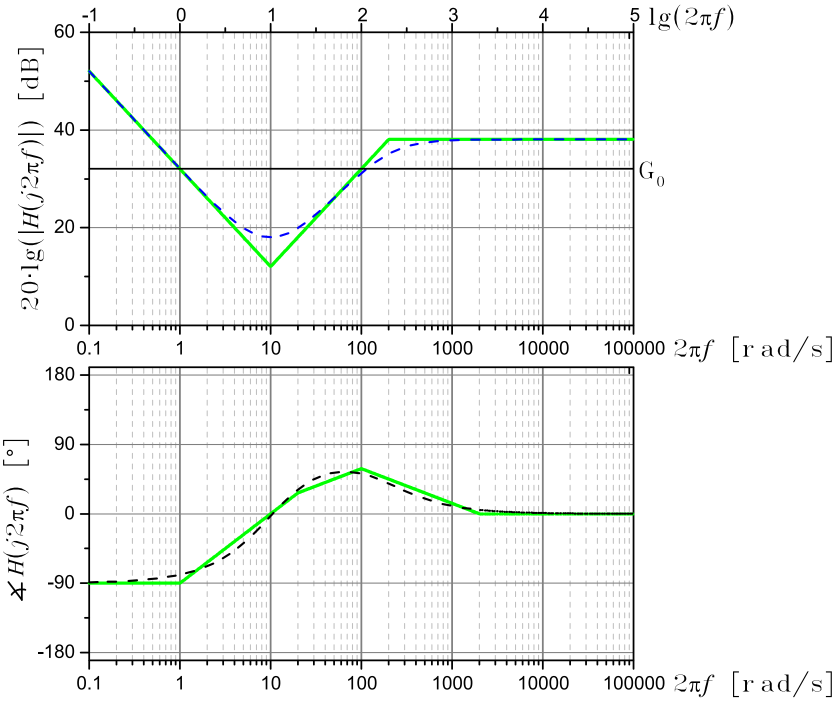
Antwortmöglichkeiten:


-1
0
1
2
3
4
5
lg(2πf)
60
40
20
0
-20
20·lg(|H(j2πf)|) [dB]
G0
0.1
1
10
100
1000
10000
100000
2πf [rad/s]
180
90
0
-90
-180
∡H(j2πf) [°]
0.1
1
10
100
1000
10000
100000
2πf [rad/s]

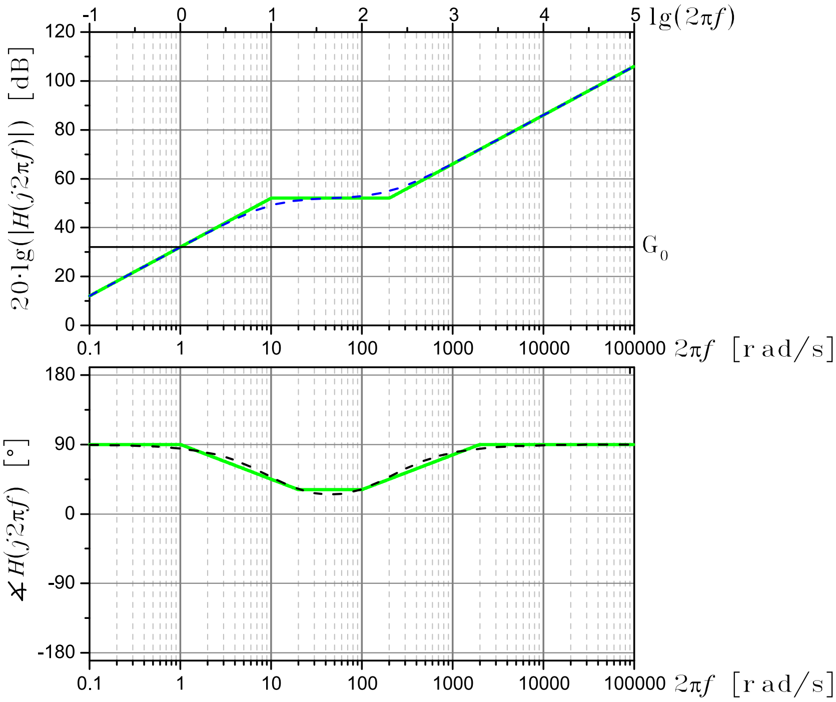
A.


-1
0
1
2
3
4
5
lg(2πf)
80
60
40
20
0
20·lg(|H(j2πf)|) [dB]
G0
0.1
1
10
100
1000
10000
100000
2πf [rad/s]
180
90
0
-90
-180
∡H(j2πf) [°]
0.1
1
10
100
1000
10000
100000
2πf [rad/s]

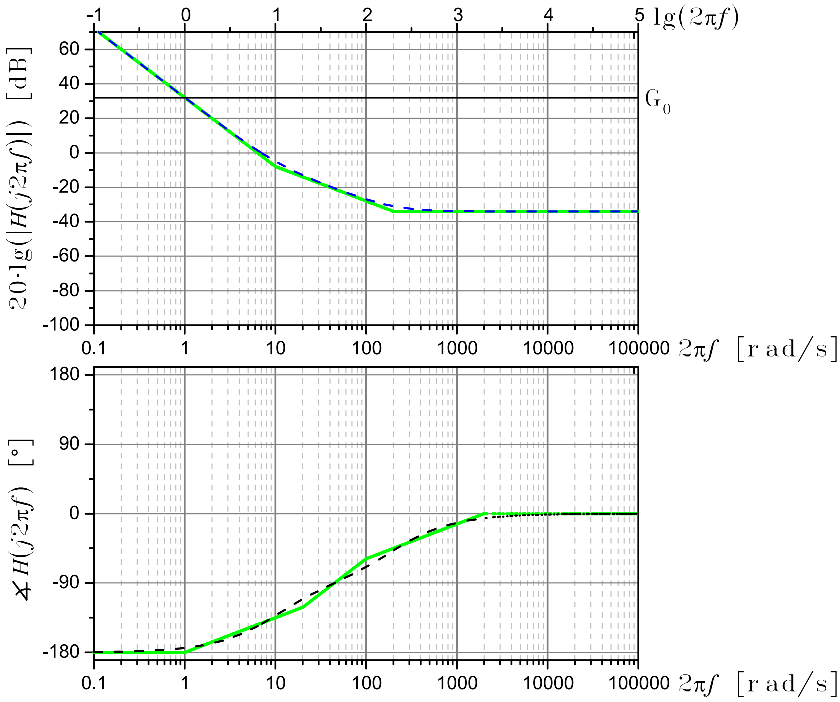
B.


lg(2πf)
20·lg(|H(j2πf)|) [dB]
G0
2πf [rad/s]
∡H(j2πf) [°]

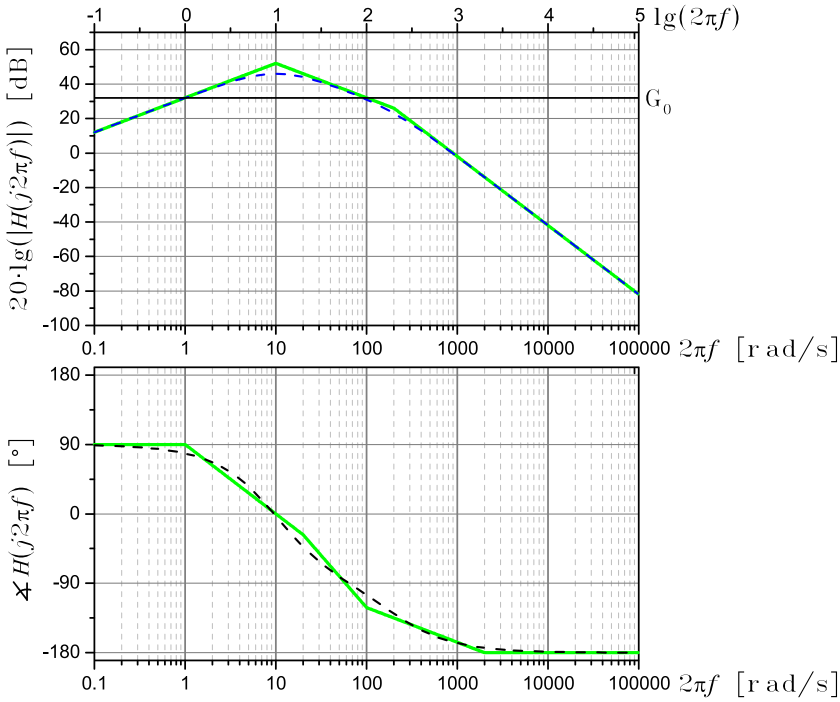
C.


lg(2πf)
20·lg(|H(j2πf)|) [dB]
G0
2πf [rad/s]
∡H(j2πf) [°]

D.



E.



F.

Aufgabe 130

Erstellen Sie ein Zustandsmodell mit Phasenvariablen. Überlegen sie sich zuerst die Koeffizienten a_n und b_n und erstellen sie dann die Matrizen A,B,C,D.

$$y'' + 3y' + 2y = 3x$$

Aufgabe 131

Berechnen Sie die Gruppenlaufzeit $t_g(f)$ von

$$H(s) = \frac{1 - Ts}{1 + Ts}.$$

Aufgabe 132

Erstellen sie ein Zustandsmodell mit Phasenvariablen. Überlegen sie sich zuerst die Koeffizienten a_n und b_n und erstellen sie dann die Matrizen A,B,C,D.

$$y'' + 4y' - 2y = 5x' + 7x$$

Aufgabe 133

Wie lautet der Phasenverlauf $\varphi(2\pi f)$ des angegebenen Systems? Um was für ein System handelt es sich?

$$H(s) = \frac{1 - Ts}{1 + Ts}$$

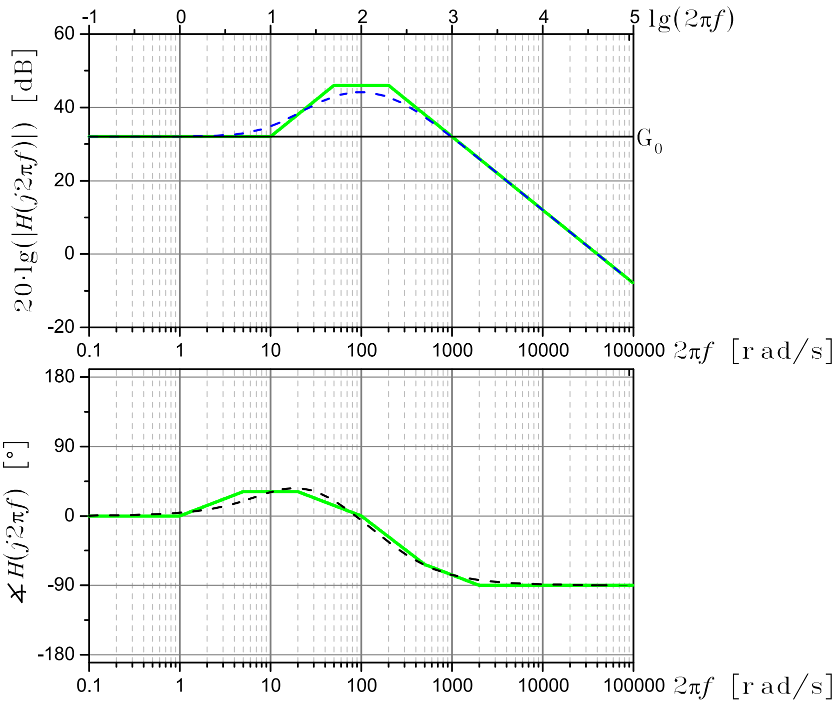
Aufgabe 134

Welches der folgenden Diagramme enspricht dem asymptotischen Bode-Diagramm für den Betragsfrequenzgang und Phasengang folgender Übertragungsfunktion?

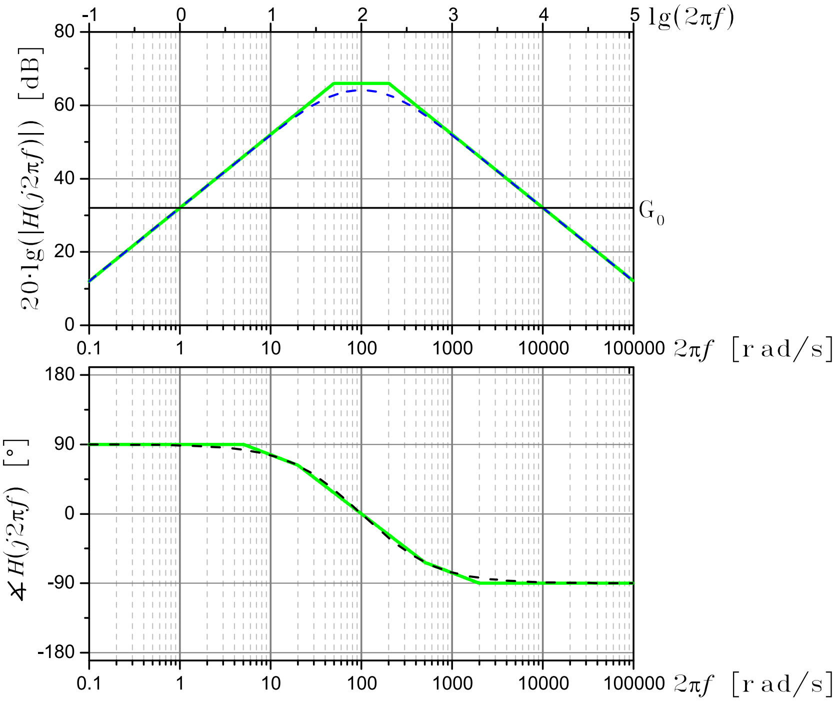
$$H(s) = 80 \cdot \frac{(10 + s)^2}{s(200 + s)} = 40 \cdot \frac{(1 + \frac{s}{10})^2}{s(1 + \frac{s}{200})}$$

Die strichlierte Linie zeigt den exakten Verlauf, die durchgezogene Linie entspricht der asymptotischen Konstruktion. Beachten Sie, dass $G_0 = 20 \cdot \lg(40) \approx 32dB$.

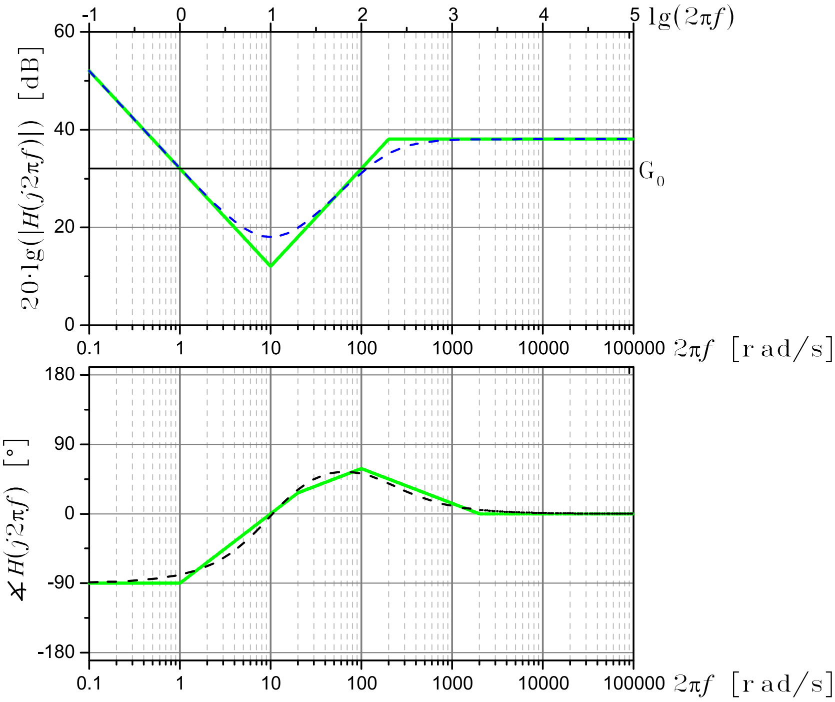
Antwortmöglichkeiten:



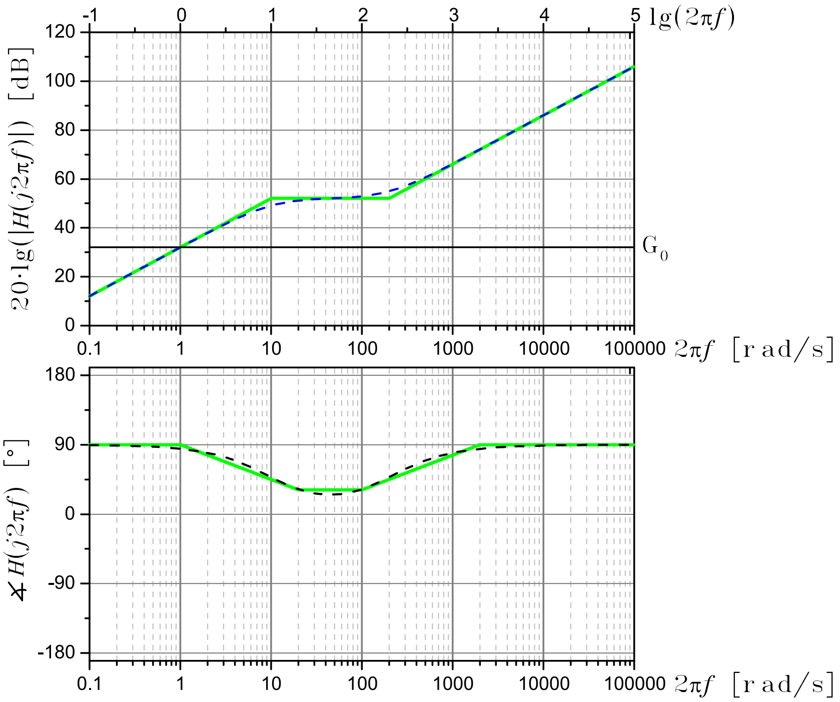
A.


-1 0 1 2 3 4 5 lg(2πf)
80
60
40
20
0
20·lg(|H(j2πf)|) [dB]
G0
0.1 1 10 100 1000 10000 100000 2πf [rad/s]
180
90
0
-90
-180
∡H(j2πf) [°]
0.1 1 10 100 1000 10000 100000 2πf [rad/s]

B.

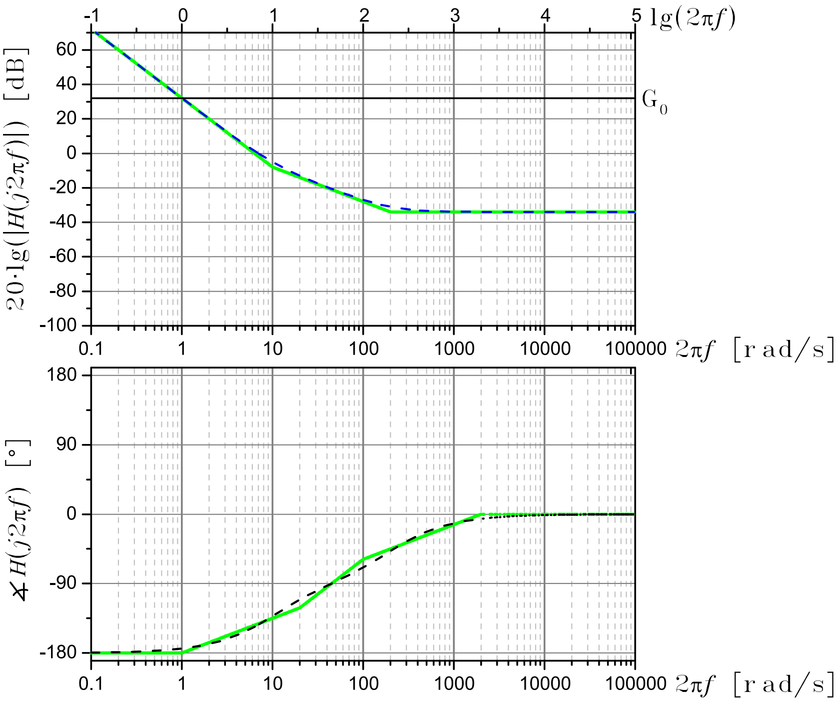

-1 0 1 2 3 4 5 lg(2πf)
60
40
20
0
20·lg(|H(j2πf)|) [dB]
G0
0.1 1 10 100 1000 10000 100000 2πf [rad/s]
180
90
0
-90
-180
∡H(j2πf) [°]
0.1 1 10 100 1000 10000 100000 2πf [rad/s]

C.



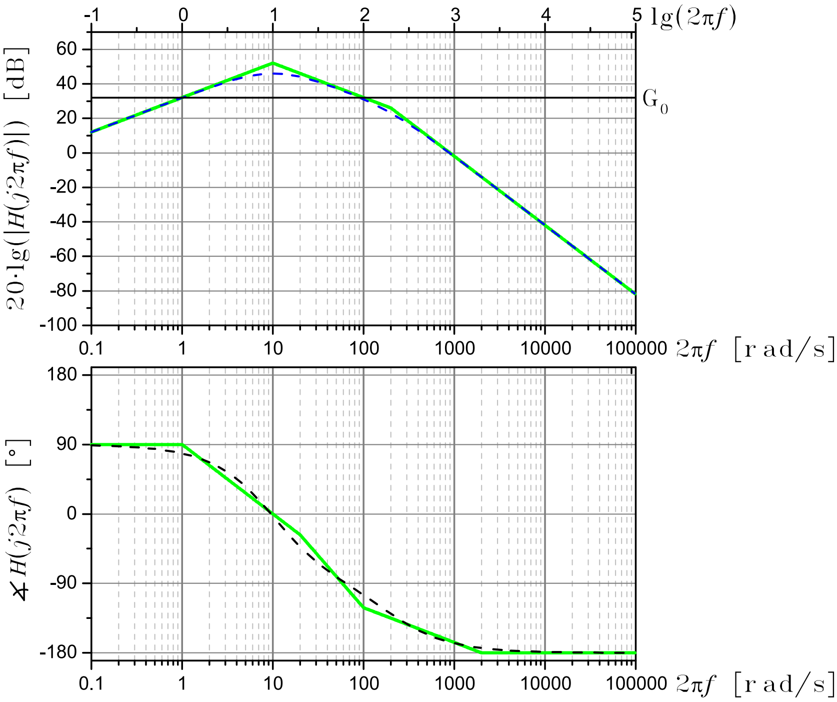
lg(2πf)
20·lg(|H(j2πf)|) [dB]
G0
2πf [rad/s]
∡H(j2πf) [°]

D.



lg(2πf)
20·lg(|H(j2πf)|) [dB]
G0
2πf [rad/s]
∡H(j2πf) [°]

E.

F. 

Aufgabe 135

Erstellen Sie ein Zustandsmodell mit Phasenvariablen. Überlegen sie sich zuerst die Koeffizienten a_n und b_n und erstellen sie dann die Matrizen A,B,C,D.

$$y'' + y' + 2y = 3x'' + 4x' - 2x$$

Aufgabe 136

Berechnen Sie die Gruppenlaufzeit bei $t_g\left(2\pi f = \frac{1}{T}\right)$.

$$H(s) = \frac{1 - Ts}{1 + Ts}$$

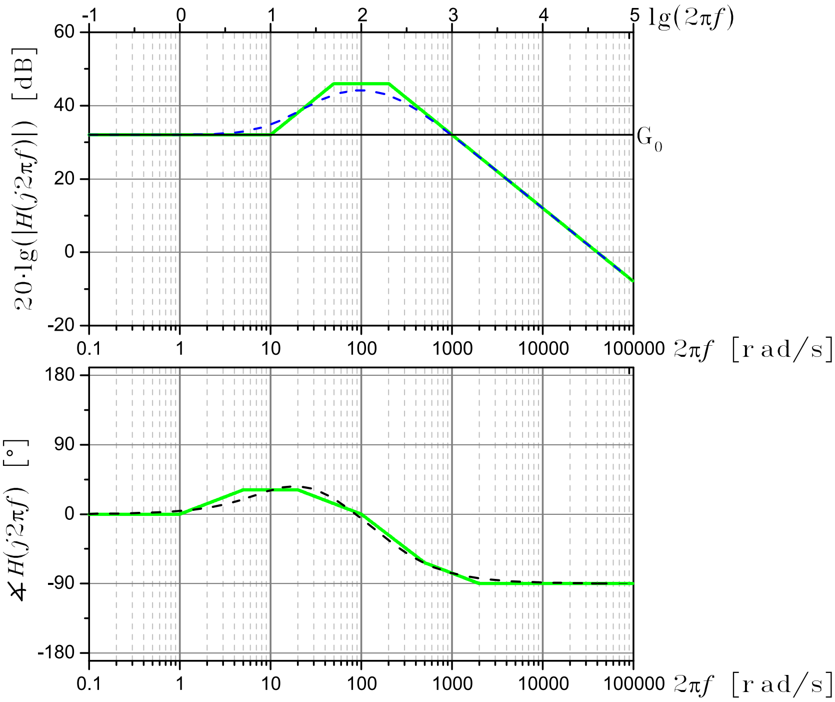
Aufgabe 137

Welches der folgenden Diagramme enspricht dem asymptotischen Bode-Diagramm für den Betragsfrequenzgang und Phasengang folgender Übertragungsfunktion?

$$H(s) = 2 \cdot \frac{s(200 + s)}{10 + s} = 40 \cdot \frac{s(1 + \frac{s}{200})}{(1 + \frac{s}{10})}$$

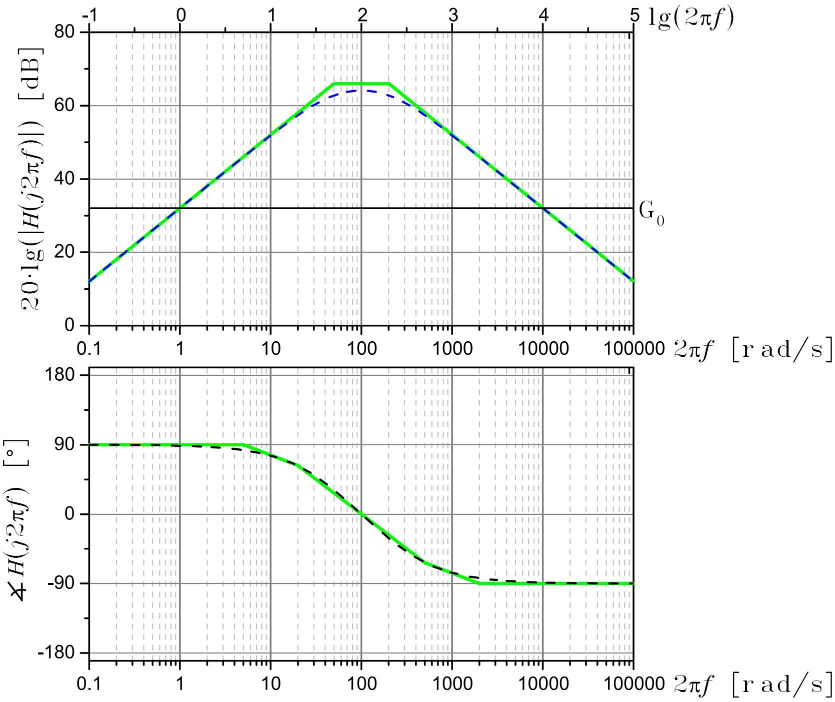
Die strichlierte Linie zeigt den exakten Verlauf, die durchgezogene Linie entspricht der asymptotischen Konstruktion. Beachten Sie, dass $G_0 = 20 \cdot \lg(40) \approx 32dB$.

Antwortmöglichkeiten:



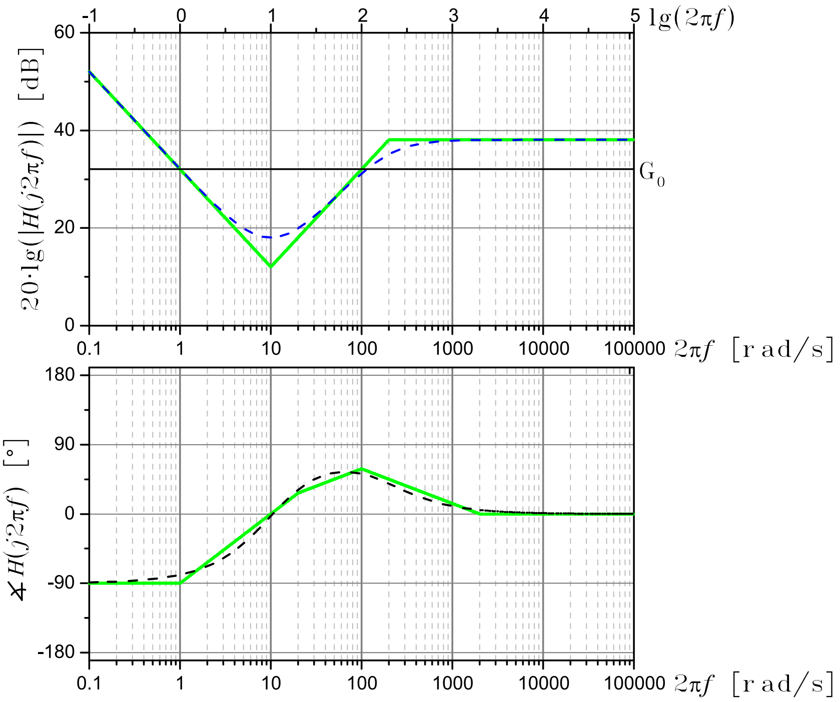
lg(2πf)
20·lg(|H(j2πf)|) [dB]
G0
2πf [rad/s]
∡H(j2πf) [°]

A.



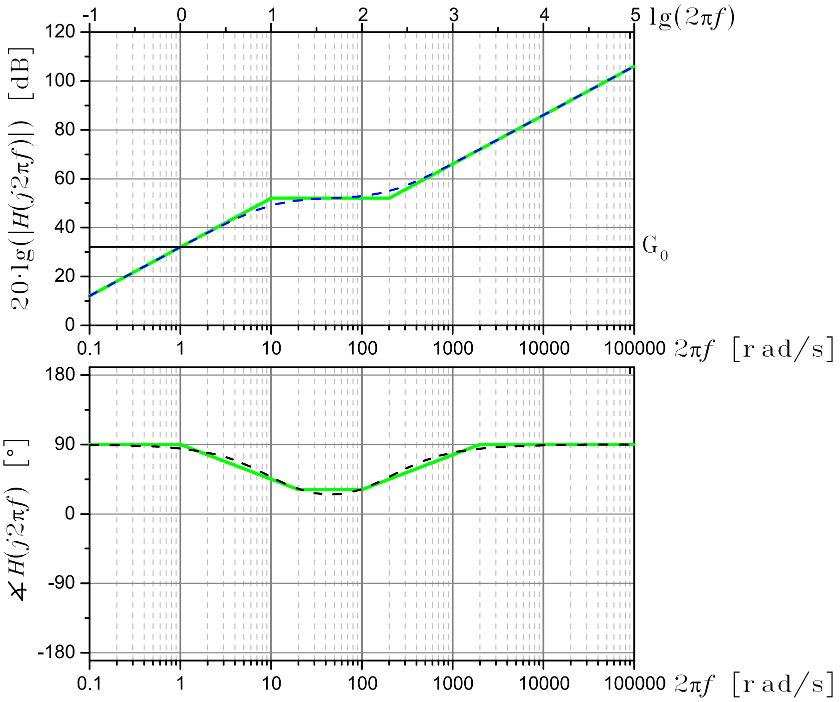
lg(2πf)
20·lg(|H(j2πf)|) [dB]
G0
2πf [rad/s]
∡H(j2πf) [°]

B.



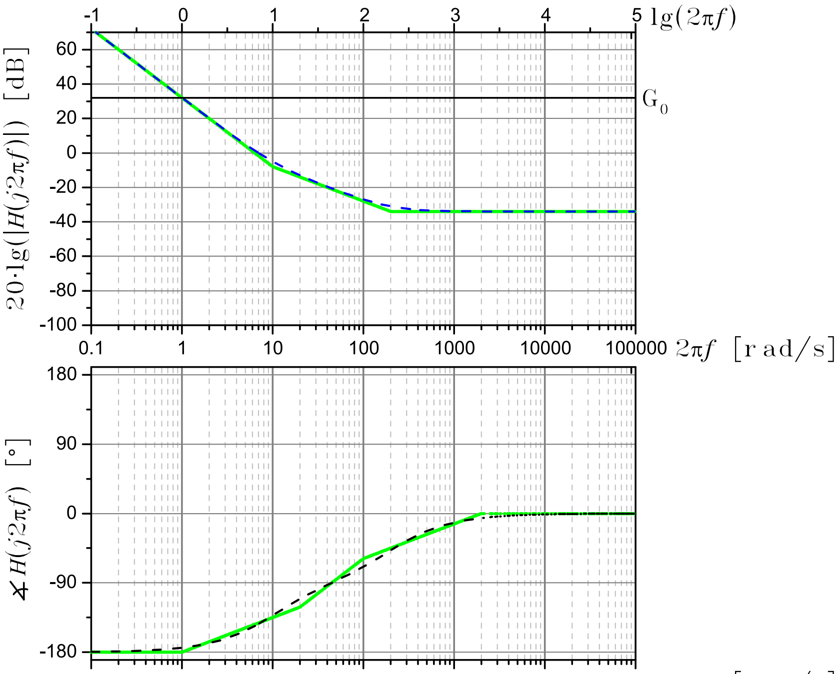
lg(2πf)
20·lg(|H(j2πf)|) [dB]
G0
2πf [rad/s]
∡H(j2πf) [°]

C.

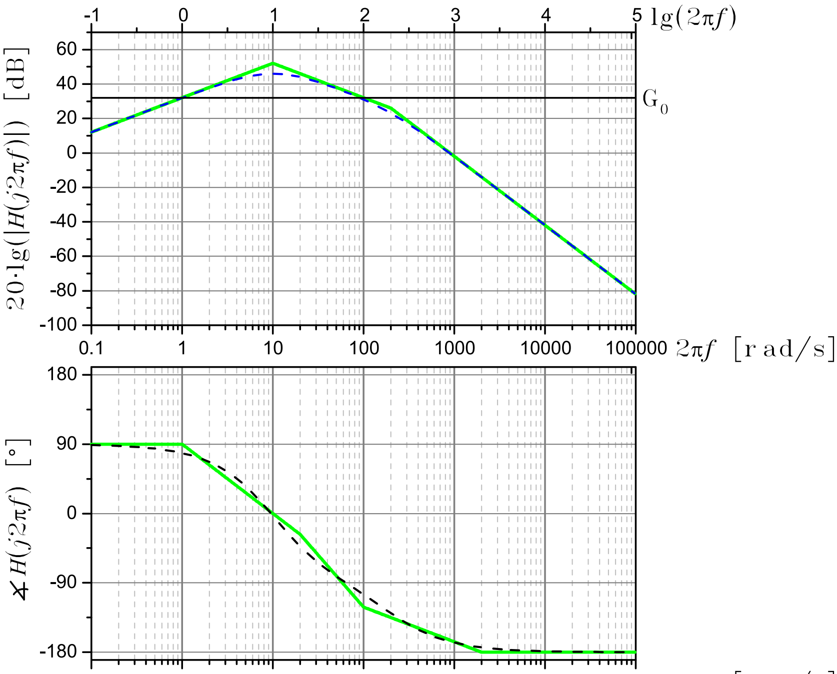


lg(2πf)
20·lg(|H(j2πf)|) [dB]
G0
2πf [rad/s]
∡H(j2πf) [°]

D.



E.



F.

Aufgabe 138

Berechnen Sie den Betragsfrequenzgang von

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 2}. \tag{7}$$

Aufgabe 139

Bestimmen Sie die Ortskurve der Übertragungsfunktion

$$H(f) = \frac{5}{10 + jf}.$$

Aufgabe 140

Bestimmen Sie die Ortskurve der Übertragungsfunktion

$$H(f) = \frac{1}{10f}. \tag{8}$$

Aufgabe 141

Bestimmen Sie die Ortskurve der Übertragungsfunktion

$$H(f) = \frac{1}{10jf}. \tag{9}$$

Aufgabe 142

Bestimmen Sie die Ortskurve der Übertragungsfunktion

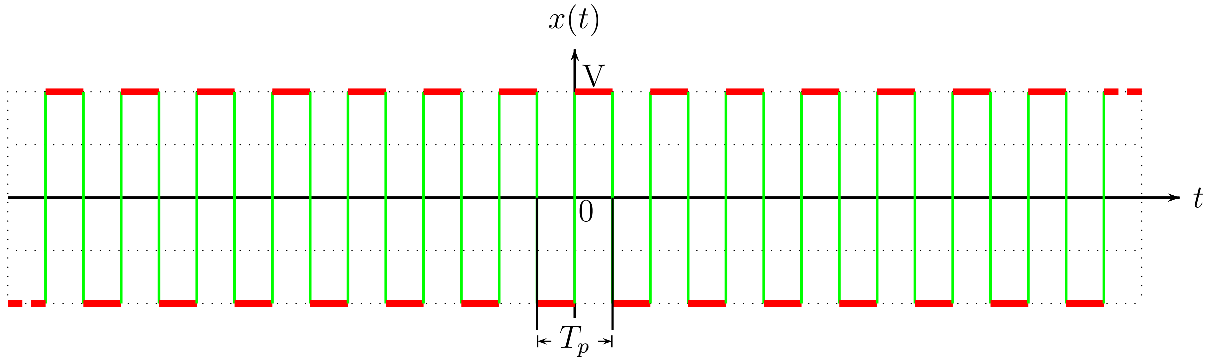
$$H(f) = \frac{5jf}{2 + 10jf}. \tag{10}$$

D Lösungen

D.1 Lösungen Aufgaben zu Signalen

Aufgabe 1

Gegeben sei das folgende periodische Signal:



Stellen Sie das Signal als reelle Fourier-Reihe dar.

Lösung:

Koeffizienten $a_n = 0$ für alle n, da $x(t)$ ungerade Funktion ist.

$$b_n = \frac{2}{T_p} \int\limits_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} x(t) \cdot \sin\left(\frac{2\pi nt}{T_p}\right) dt$$

$$= \frac{2}{T_p} \int\limits_{-\frac{T_p}{2}}^{0} (-V) \cdot \sin\left(\frac{2\pi nt}{T_p}\right) dt + \frac{2}{T_p} \int\limits_{0}^{\frac{T_p}{2}} V \cdot \sin\left(\frac{2\pi nt}{T_p}\right) dt$$

$$= \frac{V}{\pi n} \cos\left(\frac{2\pi nt}{T_p}\right)\Bigg|_{-\frac{T_p}{2}}^{0} - \frac{V}{\pi n} \cos\left(\frac{2\pi nt}{T_p}\right)\Bigg|_{0}^{\frac{T_p}{2}}$$

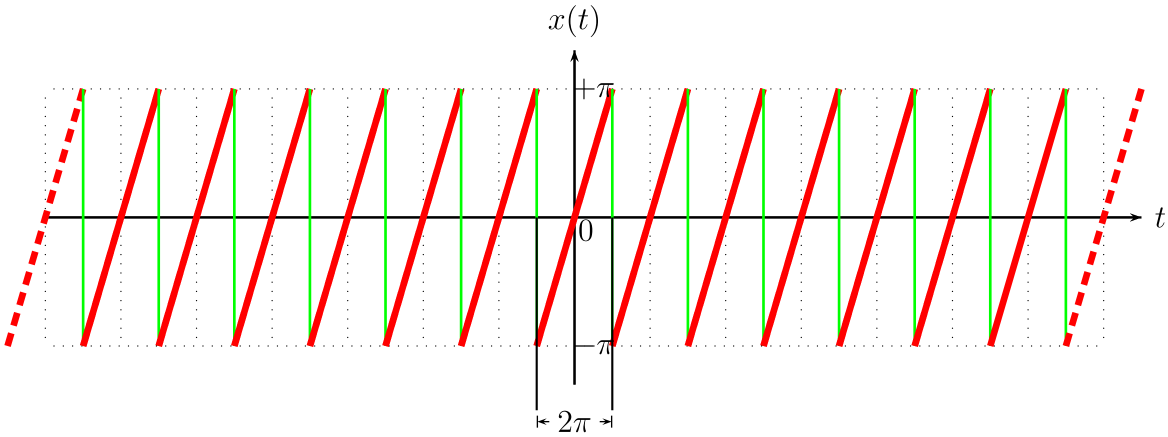
$$= \frac{V}{\pi n} \cdot [\cos(0) - \cos(\pi n)] - \frac{V}{\pi n} \cdot [\cos(\pi n) - \cos(0)] = \frac{2V}{\pi n} \cdot [1 - (-1)^n] = \frac{4V}{\pi n}, \quad n \text{ ungerade}$$

Mit $a_n = 0$ und $b_n = \frac{4V}{\pi}, \frac{4V}{3\pi}, \frac{4V}{5\pi}, \ldots$:

$$x(t) = \frac{4V}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right)}{n} = \frac{4V}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{2\pi(2k-1)}{T} t\right)}{2k-1}$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Fourier-Reihe der Sägezahnfunktion:



Lösung:

$x(t)$ ungerade $\Rightarrow$ Koeffizienten $a_n = 0 \quad \forall \quad n$.

$$b_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cdot \sin\left(\frac{2\pi n t}{2\pi}\right) dt$$

$$= -\frac{2\cos(n\pi)}{n} = -\frac{2}{n} \cdot (-1)^n = \frac{2}{n} \cdot (-1)^{n+1}$$

Mit $a_n = 0$ und $b_n = 2,\ -1,\ \frac{2}{3},\ -\frac{1}{2},\ \frac{2}{5} \ldots$:

$$x(t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\sin(nt)}{n}$$

Aufgabe 3

Gegeben ist eine reelle Fourier-Reihe mit Koeffizienten $a_0,\ a_n,\ b_n$ mit $n = 1, 2, 3, \ldots$. Wie lauten die Koeffizienten $X_0,\ X_n$ und X_{-n} der zugehörigen komplexen Fourier-Reihe?

Lösung:

$a_n = 2 \cdot \text{Re}\{X_n\}$

$b_n = -2 \cdot \text{Im}\{X_n\}$

Somit:

$X_0 = \text{Re}\{X_0\} + j\text{Im}\{X_0\} = \dfrac{a_0}{2}$

$$X_n = \mathrm{Re}\{X_n\} + j\mathrm{Im}\{X_n\} = \frac{a_n}{2} - j\frac{b_n}{2}$$

Die gegebene Fourier-Reihe ist reell, daher:

$\mathrm{Re}\{X_n\} = \mathrm{Re}\{X_{-n}\}$ (gerade)

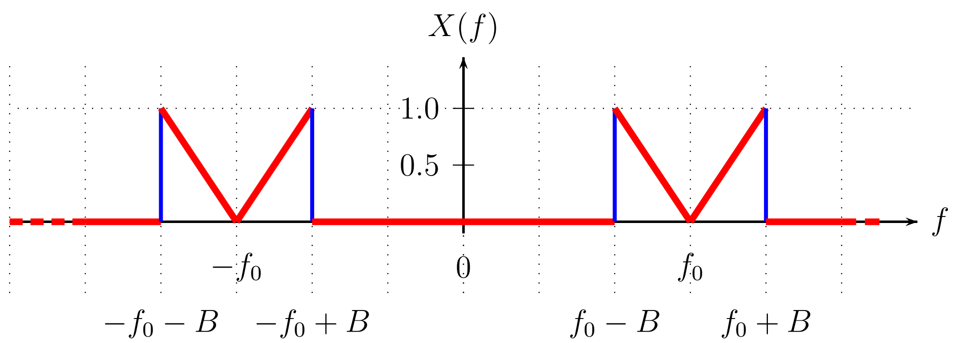
$\mathrm{Im}\{X_n\} = -\mathrm{Im}\{X_{-n}\}$ (ungerade)

$\Rightarrow X_{-n} = \mathrm{Re}\{X_{-n}\} + j\mathrm{Im}\{X_{-n}\} = \frac{a_n}{2} + j\frac{b_n}{2}$

Gesamt: $X_0 = \frac{a_0}{2}, X_{\pm n} = \frac{a_n \mp jb_n}{2}$

Aufgabe 4

Gegeben sei ein Signal $x(t)$ mit folgendem Spektrum $X(f)$:



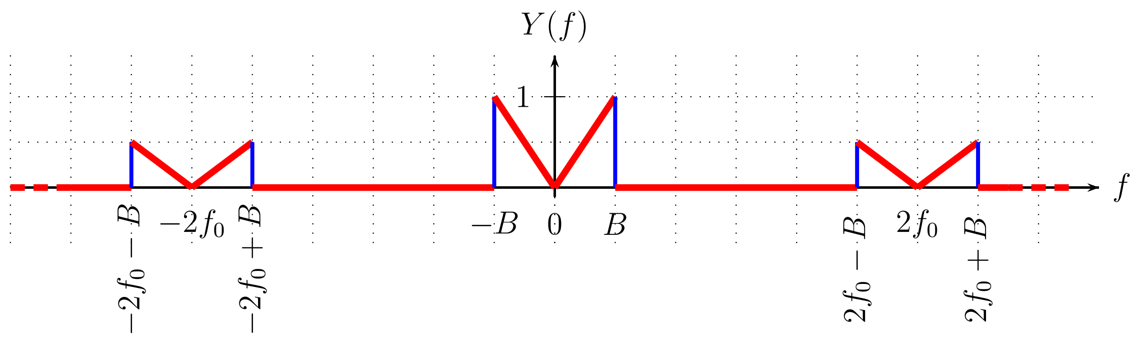
Das Signal $x(t)$ wird mit $\cos(2\pi f_0 t)$ moduliert:

$$y(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$$

Zeichnen Sie $Y(f)$.

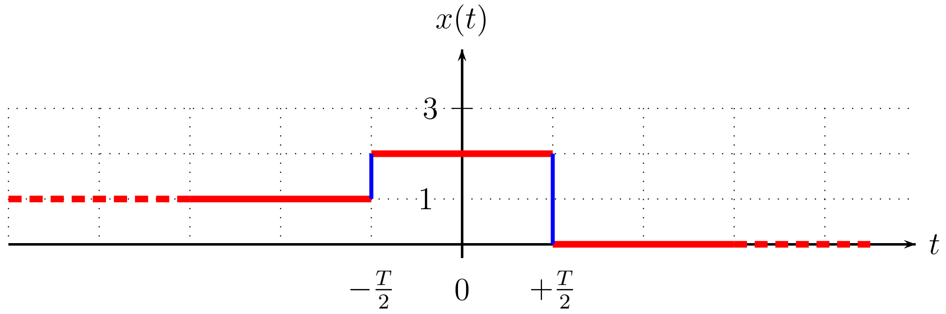
Lösung:

$$\begin{aligned} Y(f) &= X(f) * \tfrac{1}{2}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right] \\ &= \tfrac{1}{2}X(f - f_0) + \tfrac{1}{2}X(f + f_0) \end{aligned} \tag{11}$$



Aufgabe 5

Wie lautet die Fourier-Transformierte des folgenden Signals?



Lösung:

$$x(t) = \text{rect}\frac{t}{T} + \varepsilon\left(-(t-\tfrac{T}{2})\right)$$

Für die Fourier-Transformierte des $\varepsilon\left(-(t-\frac{T}{2})\right)$ wenden wir nacheinander die Verschiebungs- und dann die Zeitinversion-Regeln an:

$$\mathcal{F}\{\varepsilon(-(t-\tfrac{T}{2})\} = e^{+j2\pi f\frac{T}{2}} \cdot \mathcal{F}\{\varepsilon(-t)\} = e^{j\pi fT} \cdot \left[\tfrac{1}{2}\delta(-f) - \tfrac{1}{j2\pi f}\right]$$

Somit:

$$X(f) = T \cdot \text{si}(\pi fT) + e^{j\pi fT} \cdot \left[\tfrac{1}{2}\delta(-f) - \tfrac{1}{j2\pi f}\right]$$

Mit

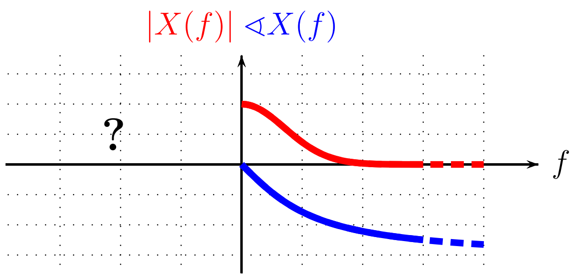
$$\delta(-f) \cdot e^{j\pi fT} = \delta(f) \cdot e^{j\pi fT} = \begin{cases} 1 \cdot e^{j\pi 0T} = 1 & f = 0 \\ 0 \cdot e^{j\pi fT} = 0 & f \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \delta(-f) \cdot e^{j\pi fT} = \delta(f)$$

Dann:

$$X(f) = T \cdot \text{si}(\pi fT) + \tfrac{1}{2} \cdot \delta(f) - \frac{e^{j\pi fT}}{j2\pi f}$$

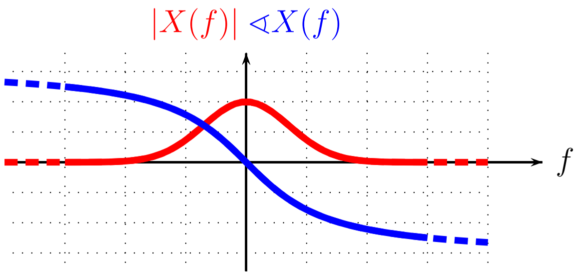
Aufgabe 6

Ergänzen Sie folgendes Spektrum eines reellen Signals $x(t)$:



Lösung:

Einer reellwertigen Funktion $x(t)$ entspricht ein Fourier-Bild $X(f)$ mit geradem Betragsverlauf und ungeradem Phasenverlauf, daher:



Aufgabe 7

Wie lautet das analytische Signal $x^+(t)$ zu $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$? (Hilbert Transformation)

Lösung:

$$x^+(t) = x(t) + j\mathcal{H}\{x(t)\}$$

Lösung über Fourier Transformation:

$$X(f) = \frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

$$X^+(f) = 2\varepsilon(f) \cdot X(f) = \delta(f - f_0)$$

$$x^+(t) = \mathcal{F}^-\{X^+(f)\} = e^{j2\pi f_0 t}$$

Alternative (lange) Lösung über Faltung:

$$\mathcal{H}\{x(t)\} = x(t) * \tfrac{1}{\pi t} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t')}{\pi \cdot (t - t')} dt'$$

Mit $x(t) = \cos(2\pi f_0 t) = \cos(\omega_0 t)$ bekommen wir:

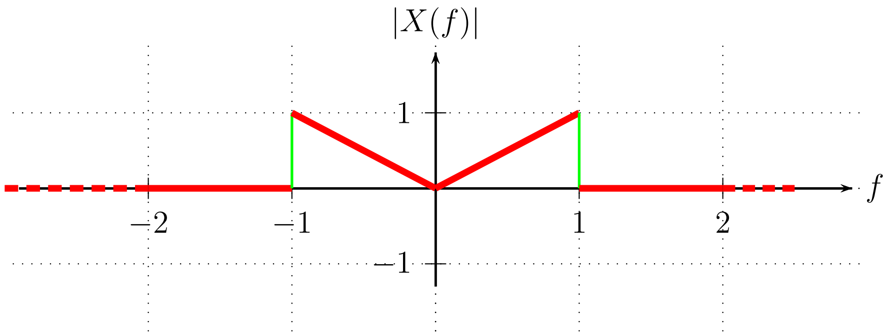
$$\mathcal{H}\{x(t)\} = \frac{1}{\pi} \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega_0 t')}{(t - t')} dt' \quad \underset{\tau = t - t'}{\underset{\uparrow}{=}} \quad \sin(\omega_0 t)$$

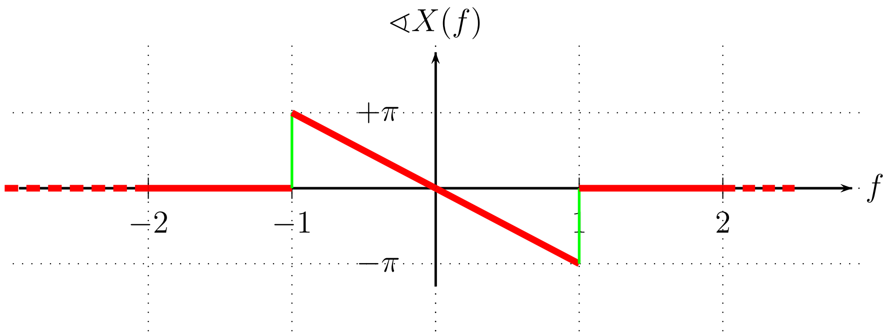
Daher: $x^+(t) = \cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t) = e^{j\omega_0 t}$

Hinweis: $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$, und $\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(\alpha)$

Aufgabe 8

Berechnen Sie die Zeitfunktion zu folgendem Spektrum:





Lösung:

Der Betragsverlauf kann als Summe folgender Funktionen dargestellt werden:

$$|X(f)| = A(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2}\right) - \Lambda(f)$$

und seine inv. Fourier-Transformierte:

$$\mathcal{F}^{-1}\{A(f)\} = 2 \cdot \mathrm{si}(2\pi t) - \mathrm{si}^2(\pi t)$$

Der Phasenverlauf:

$$\sphericalangle X(f) = -\pi f$$

Somit:

$$X(f) = A(f) \cdot e^{-j\pi f}$$

Dadurch, dass $A(f) = 0$ für $f > 1$ und $f < -1$, dürfen wir den gebrochenen Phasenverlauf mit einer unendlich geraden Funktion $\varphi(f) = -\pi f$ ersetzen. Wir wenden jetzt das Phasenverschiebungstheorem an und berechnen die entsprechende Zeitverschiebung:

$$\mathcal{F}\{x(t - t_0)\} = X(f) \cdot e^{-j2\pi f t_0}$$

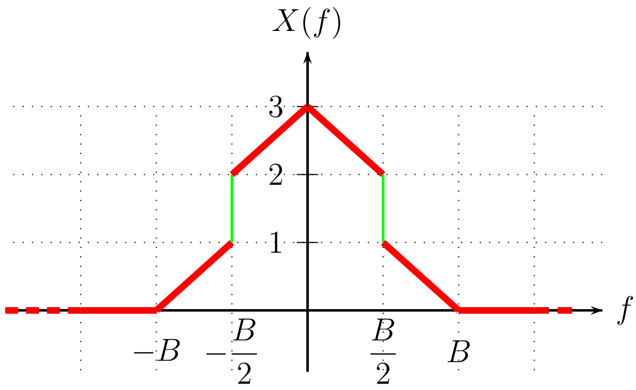
$$2\pi f t_0 = \pi f \quad \Rightarrow \quad t_0 = \frac{1}{2}$$

Daher

$$x(t) = 2 \cdot \mathrm{si}\left(2\pi(t - \tfrac{1}{2})\right) - \mathrm{si}^2\left(\pi(t - \tfrac{1}{2})\right)$$

Aufgabe 9

Berechnen Sie die inverse Fourier-Transformation zu folgendem Spektrum:



Lösung:

Das Spektrum kann als Summe folgender Funktionen dargestellt werden:

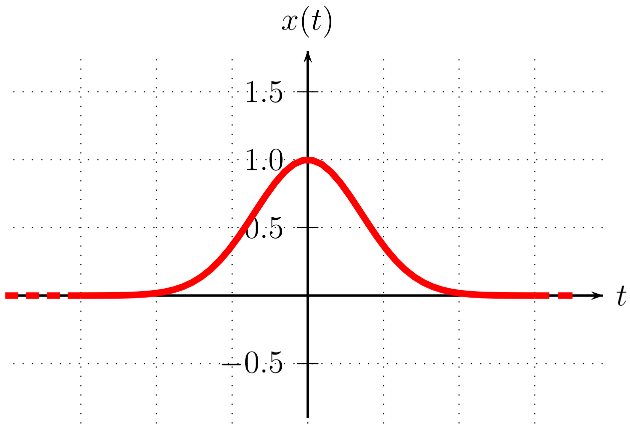
$$X(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{B}\right) + 2 \cdot \Lambda\left(\frac{f}{B}\right)$$

Die inverse Fourier-Transformierte dieser Summe lautet:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}X(f) = B \cdot \text{si}(B\pi t) + 2B \cdot \text{si}^2(B\pi t).$$

Aufgabe 10

Berechnen Sie das Zeit-Bandbreite-Produkt für einen Gauss-Impuls $x(t) = e^{-a^2t^2}$.



Lösung:

Zuerst finden wir die Impulsdauer bei der halben Signalhöhe (Full Width at Half Maximum, FWHM):

$$x(t_1) = e^{-a^2t_1^2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad -a^2t_1^2 = \ln\frac{1}{2} = \ln 1 \; - \; \ln 2 \; = \; 0 - \ln 2$$

$$\Rightarrow \; t_1 = \frac{\sqrt{\ln(2)}}{a} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\sqrt{\ln(2)}}{a}$$

und die Bandbreite bei der halben Signalhöhe:

$$X(f_1) = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \cdot e^{-\frac{\pi^2 f_1^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \cdot \frac{1}{2}$$

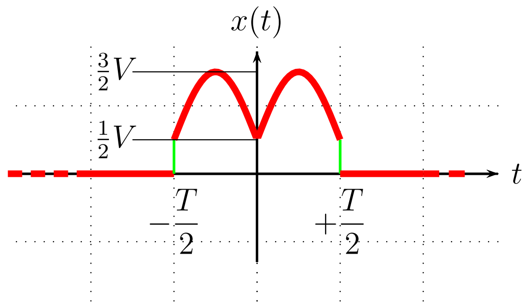
$$\Rightarrow \; f_1 = \frac{a\sqrt{\ln(2)}}{\pi} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{2a\sqrt{\ln(2)}}{\pi}$$

Somit ist das Zeit-Bandbreite-Produkt:

$$T \cdot B = \frac{4\ln(2)}{\pi} \approx 0.88254$$

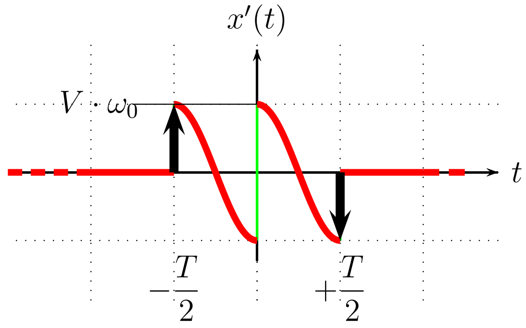
Aufgabe 11

Bestimmen Sie den Verlauf der 1. Ableitung des Signals $x(t) = V \cdot \mathrm{rect}_T \cdot \left[|\sin(\omega_0 t)| + \frac{1}{2}\right]$:



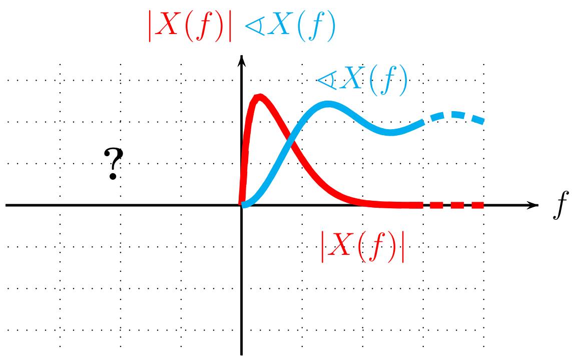
Lösung:

δ Funktionen bei Bruchstellen der $x(t)$, nicht aber bei Knickstellen.



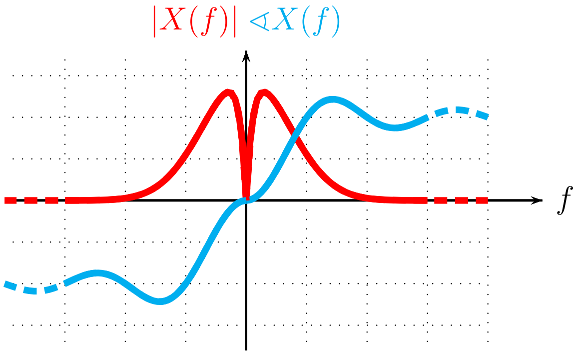
Aufgabe 12

Ergänzen Sie folgendes Spektrum eines reellen Signals $x(t)$:



Lösung:

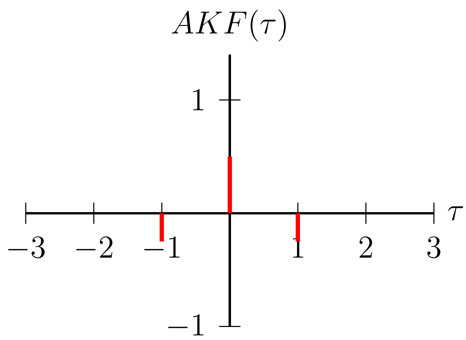
Ein reelles Zeitsignal besitzt eine konjugiert gerade Fourier-Transformierte:



Aufgabe 13

Skizzieren Sie die Autokorrelationsfunktion des Signals $x(t) = \frac{1}{2}\left[\delta\left(t-\frac{1}{2}\right) - \delta\left(t+\frac{1}{2}\right)\right]$.

Lösung:



Aufgabe 14

Wie lautet die Schwebungskreisfrequenz der bi-harmonischen Schwingung $y(t) = 2 \cdot \cos(4\pi f_0 t + \phi_1) + 3 \cdot \sin(6\pi f_0 t + \phi_2)$?

Lösung:

Die Schwebungskreisfrequenz ist $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \frac{1}{2} \cdot (3-2)\omega_0 = \pi f_0$.

Aufgabe 15

Eine reellwertige Fourier-Reihe ist durch folgende Koeffizienten beschrieben: $a_0 = 1$, $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ und $b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Bestimmen Sie die Koeffizienten X_0, $X_{\pm n}$ der entsprechenden komplexen Fourier-Reihe.

Lösung:

$a_n = 2 \cdot \mathrm{Re}\{X_n\}$

$b_n = -2 \cdot \mathrm{Im}\{X_n\}$

Somit:

$X_0 = \mathrm{Re}\{X_0\} + j\mathrm{Im}\{X_0\} = \frac{a_0}{2}$

$X_n = \mathrm{Re}\{X_n\} + j\mathrm{Im}\{X_n\} = \frac{a_n}{2} - j\frac{b_n}{2}$

Die gegebene Fourier-Reihe ist reell, daher:

$\mathrm{Re}\{X_n\} = \mathrm{Re}\{X_{-n}\}$ (gerade)

$\mathrm{Im}\{X_n\} = -\mathrm{Im}\{X_{-n}\}$ (ungerade)

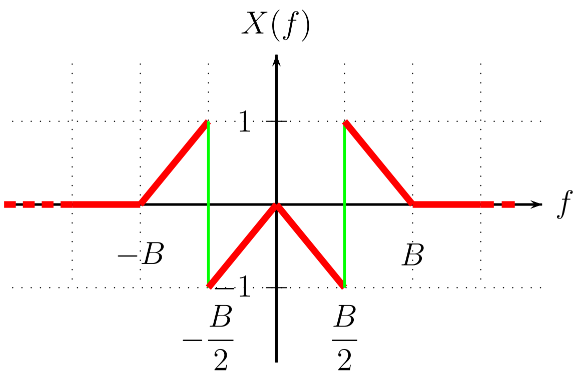
$\Rightarrow X_{-n} = \mathrm{Re}\{X_{-n}\} + j\mathrm{Im}\{X_{-n}\} = \frac{a_n}{2} + j\frac{b_n}{2}$

Gesamt: $X_0 = \frac{a_0}{2}, X_{\pm n} = \frac{a_n \mp jb_n}{2}$

d.h. $X_0 = \frac{1}{2}$, $X_{\pm n} = \frac{1}{2n}(-1)^n\,(1 \pm j)$.

Aufgabe 16

Berechnen Sie die inverse Fourier-Transformation zu folgendem Spektrum:



Lösung:

Das Spektrum kann als Summe folgender Funktionen dargestellt werden:

$$X(f) = -2 \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f}{B}\right) + 2 \cdot \Lambda\left(\frac{f}{B}\right)$$

und seine inverse Fourier-Transformierte:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\} = -2B \cdot \mathrm{si}(B\pi t) + 2B \cdot \mathrm{si}^2(B\pi t)$$
$$x(t) = 2B \cdot \mathrm{si}(B\pi t) \cdot [\mathrm{si}(B\pi t) - 1]$$

Aufgabe 17

Berechnen Sie die Hilbert-Transformierte der Dirac-Funktion $\delta(t)$.

Lösung:

$$\mathcal{H}\{x(t)\} = x(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t') \cdot \frac{1}{t-t'}dt' =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t') \cdot \frac{1}{t-t'}dt' = \frac{1}{\pi t}$$

Aufgabe 18

Wie lautet die Fourier-Transformierte von $x(t) = \cos(t) \cdot \mathrm{rect}\frac{t}{2\pi}$?

Lösung:

$$\cos(t) \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \frac{1}{2}\left[\delta\left(f+\frac{1}{2\pi}\right)+\delta\left(f-\frac{1}{2\pi}\right)\right]$$

$$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2\pi}\right) \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} 2\pi \cdot \mathrm{si}\left(2\pi^2 f\right)$$

$$\Rightarrow X(f) = \left[\delta\left(f+\frac{1}{2\pi}\right)+\delta\left(f-\frac{1}{2\pi}\right)\right] * \left[\pi \cdot \mathrm{si}\left(2\pi^2 f\right)\right]$$

$$X(f) = \pi\left[\mathrm{si}\left(2\pi^2 \cdot \left(f+\frac{1}{2\pi}\right)\right)+\mathrm{si}\left(2\pi^2 \cdot \left(f-\frac{1}{2\pi}\right)\right)\right]$$

Aufgabe 19

Berechnen Sie die Zeitfunktion zu $X(s) = \frac{s}{s+2}$.

Lösung:

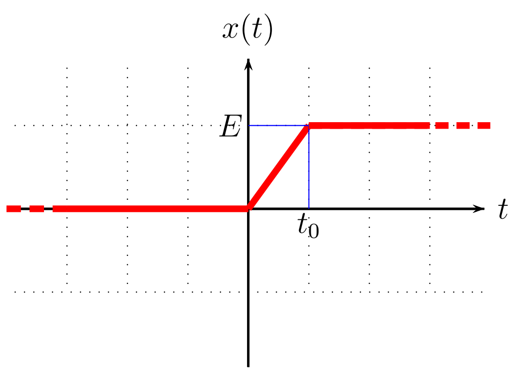
Polynomdivision:

$$X(s) = \frac{s+2}{s+2} + \frac{-2}{s+2} = 1 - \frac{2}{s+2}$$

$$X(s) \bullet\!\!-\!\!\circ\; x(t) = \delta(t) - 2e^{-2t} \cdot \varepsilon(t)$$

Aufgabe 20

Berechnen Sie die Laplace-Transformierte der folgenden Zeitfunktion:



Lösung:

Das Signal kann als Summe folgender Funktionen dargestellt werden:

$$x(t) = \frac{E}{t_0} \cdot t \cdot \varepsilon(t) - \frac{E}{t_0} \cdot (t - t_0) \cdot \varepsilon(t - t_0)$$

$$f_1(t) = \varepsilon(t) \cdot E \cdot \frac{t}{t_0}$$

$$\mathcal{L}_I\left(f_1(t)\right) = \int\limits_0^\infty \frac{E}{t_0} \cdot te^{-st}dt = \frac{E}{t_0}\left[t \cdot \frac{1}{-s} \cdot e^{-st}\Big|_0^\infty + \frac{1}{s}\int\limits_0^\infty e^{-st}dt\right] = \frac{E}{t_0} \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \mathcal{L}_I\left(f_1(t)\right) - \mathcal{L}_I\left(\frac{E}{t_0} \cdot (t - t_0) \cdot \varepsilon(t - t_0)\right) = \mathcal{L}_I\left(f_1(t)\right) - \mathcal{L}_I\left(f_1(t - t_0)\right)$$

$$= \mathcal{L}_I\left(f_1(t)\right) \cdot \left[1 - e^{-st_0}\right] = \frac{E}{t_0}\frac{1}{s^2} \cdot \left[1 - e^{-st_0}\right]$$

Aufgabe 21

Eine reellwertige Fourier-Reihe ist durch folgende Koeffizienten beschrieben $a_0 = 1$, $a_n = \frac{1}{1+n^2}$ und $b_n = \frac{n}{1+n^2}$ mit $n \geq 1$. Bestimmen Sie die Koeffizienten X_0, $X_{\pm n}$ der entsprechenden komplexen Fourier-Reihe.

Lösung:

$a_n = 2 \cdot \mathrm{Re}\{X_n\}$
$b_n = -2 \cdot \mathrm{Im}\{X_n\}$

Somit:

$X_0 = \mathrm{Re}\{X_0\} + j\mathrm{Im}\{X_0\} = \frac{a_0}{2}$

$X_n = \mathrm{Re}\{X_n\} + j\mathrm{Im}\{X_n\} = \frac{a_n}{2} - j\frac{b_n}{2}$

Die gegebene Fourier-Reihe ist reell, daher:

$\mathrm{Re}\{X_n\} = \mathrm{Re}\{X_{-n}\}$ (gerade)
$\mathrm{Im}\{X_n\} = -\mathrm{Im}\{X_{-n}\}$ (ungerade)

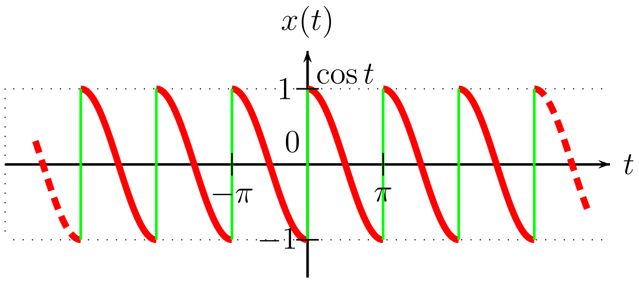
$\Rightarrow X_{-n} = \mathrm{Re}\{X_{-n}\} + j\mathrm{Im}\{X_{-n}\} = \frac{a_n}{2} + j\frac{b_n}{2}$

Gesamt: $X_0 = \frac{a_0}{2}, X_{\pm n} = \frac{a_n \mp jb_n}{2}$

d.h. $X_0 = \frac{1}{2}$, $X_{\pm n} = \frac{1 \mp jn}{2(1+n^2)}$

Aufgabe 22

Gegeben ist das folgende periodische Zeitsignal:



Wie lautet der Koeffizient b_1 der reellen Fourier-Reihe?

Lösung:

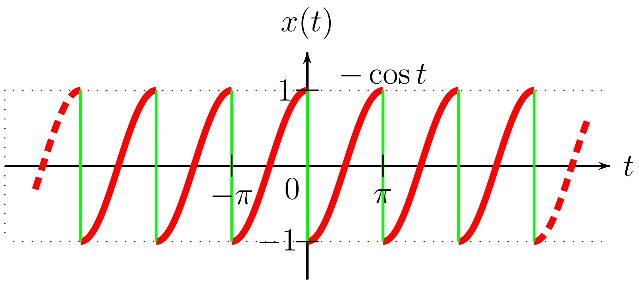
$$b_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos t \cdot \sin\left(2\pi \underset{n=1}{n} \frac{t}{\pi}\right) dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\sin t + \sin(3t))\, dt$$

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \tfrac{1}{2} \cdot [\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$$

$$b_1 = -\frac{1}{\pi}\left(\cos t + \frac{1}{3}\cos(3t)\right)\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{\pi}\left(-1-1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3\pi}$$

Aufgabe 23

Gegeben ist das folgende periodische Zeitsignal:



Wie lautet der Koeffizient b_1 der reellen Fourier-Reihe?

Lösung:

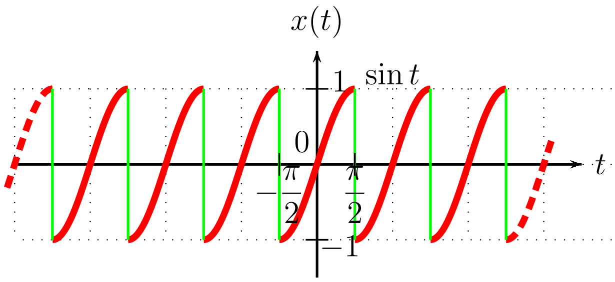
$$b_1 = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos t \cdot \sin\left(2\pi \underset{n=1}{n} \frac{t}{\pi}\right) dt = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\sin t + \sin(3t))\, dt$$

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \tfrac{1}{2} \cdot [\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\left(\cos t + \frac{1}{3}\cos(3t)\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(-1-1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right) = -\frac{8}{3\pi}$$

Aufgabe 24

Gegeben ist das folgende periodische Zeitsignal:



Wie lautet der Koeffizient b_1 der reellen Fourier-Reihe?

Lösung:

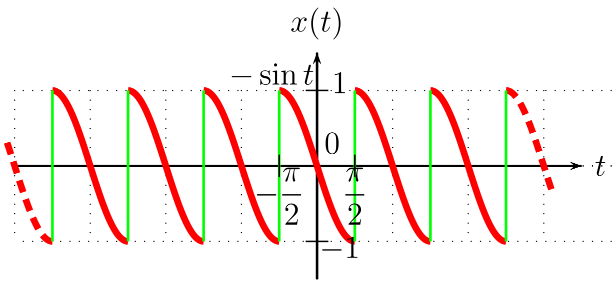
$$b_1 = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot \sin\left(2\pi \underset{n=1}{n} \frac{t}{\pi}\right) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t - \cos(3t))\, dt$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \tfrac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \left(\sin t - \frac{1}{3}\sin(3t)\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi}\left(1 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3\pi}$$

Aufgabe 25

Gegeben ist das folgende periodische Zeitsignal:



Wie lautet der Koeffizient b_1 der reellen Fourier-Reihe?

Lösung:

$$b_1 = -\frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot \sin\left(2\pi \underset{n=1}{n} \frac{t}{\pi}\right) dt = -\frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t - \cos(3t))\, dt$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \tfrac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$b_1 = -\frac{1}{\pi} \left(\sin t - \frac{1}{3}\sin(3t)\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{\pi}\left(1 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = -\frac{8}{3\pi}$$

Aufgabe 26

Berechnen Sie die inverse Laplace-Transformierte von $X(s) = \dfrac{s+6}{s^2+4}$.

Lösung:

$$X(s) = \frac{s}{s^2+4} + \frac{6}{s^2+4}$$

$$X(s) \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ\; [\cos(2t) + 3\cdot\sin(2t)]\cdot\varepsilon(t)$$

Aufgabe 27

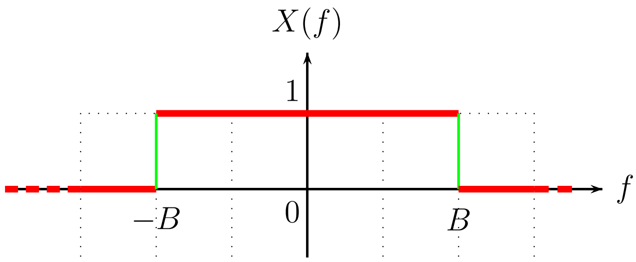
Wie ist das Konvergenzgebiet der einseitigen Laplace-Transformation in Aufgabe 26 definiert?

Lösung:

$$Re\{s\} > 0$$

Aufgabe 28

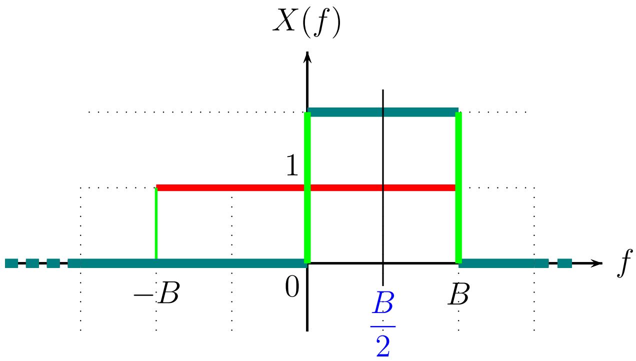
Berechnen Sie das analytische Signal $x^+(t)$ zu $x(t)$ mit folgendem Spektrum:



Lösung:

$$X(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

Die Hilbert Transformation betrachtet nur die positiven Frequenzen. Die auf der negativen Achsenseite verlorene Energie muss durch die Verdopplung der Amplitude kompensiert werden.



$$X^+(f) = 2X(f)\cdot\varepsilon(f) = 2\cdot\text{rect}\left(\frac{f-\frac{B}{2}}{B}\right)$$

Die Hilbert Transformierte lautet

$$X^+(f) \bullet\!\!-\!\!\circ\, x^+(t) = 2B \cdot e^{j\pi Bt} \cdot \mathrm{si}(\pi Bt).$$

Hier haben wir das Verschiebungstheorem angewandt um die Verschiebung des $H^+(f)$ Rechtecks um $\frac{B}{2}$ zu berücksichtigen.

Aufgabe 29

Berechnen Sie die Fourier-Transformierte von $x(t) = \Lambda(\alpha t) \cdot e^{j\beta t}$ mit $\alpha, \beta > 0, \in \mathbb{R}$.

Lösung:

$$\Lambda(\alpha t) \;\overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\; \frac{1}{\alpha}\mathrm{si}^2\left(\frac{\pi f}{\alpha}\right)$$

$$e^{j\beta t} \;\overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\; \delta\left(f - \frac{\beta}{2\pi}\right)$$

$$X(f) = \frac{1}{\alpha}\mathrm{si}^2\left(\frac{\pi f}{\alpha}\right) * \delta\left(f - \frac{\beta}{2\pi}\right) = \frac{1}{\alpha}\mathrm{si}^2\left(\frac{\pi}{\alpha} \cdot \left[f - \frac{\beta}{2\pi}\right]\right)$$

$$X(f) = \alpha^{-1} \cdot \mathrm{si}^2\left(\frac{2\pi f - \beta}{2\alpha}\right)$$

Aufgabe 30

Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion des periodischen Leistungssignals $x(t) = \sin(t)$.

Lösung:

$$\varphi_{xx}^L(\tau) = \frac{1}{T_p} \int\limits_{t_0}^{t_0+T_p} x(t) \cdot x(t+\tau)dt$$

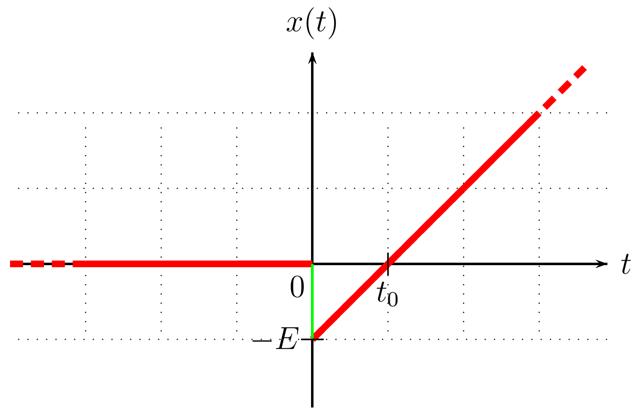
$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \sin(t) \cdot \sin(t+\tau)dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} \left(\cos(\tau) - \cos(2t+\tau)\right) dt$$

$$= \frac{1}{4\pi}\cos(\tau) \cdot t\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(2t+\tau)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\cos(\tau) + 0$$

Aufgabe 31

Berechnen Sie die Laplace Transformation der folgenden Zeitfunktion:



Lösung:

Das Signal kann als Summe folgender Funktionen dargestellt werden:

$$x(t) = \frac{E}{t_0} \cdot t \cdot \varepsilon(t) - E \cdot \varepsilon(t)$$

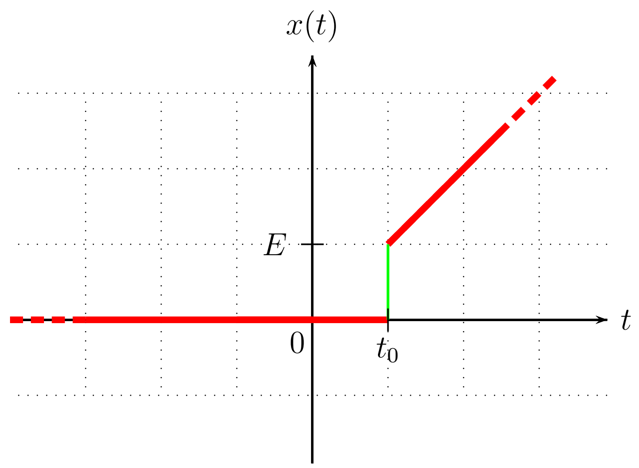
$$f_1(t) = \varepsilon(t) \cdot E \cdot \frac{t}{t_0}$$

$$\mathcal{L}_I\left(f_1(t)\right) = \int\limits_0^\infty \frac{E}{t_0} \cdot te^{-st}dt = \frac{E}{t_0}\left[t \cdot \frac{1}{-s} \cdot e^{-st}\Big|_0^\infty + \frac{1}{s}\int\limits_0^\infty e^{-st}dt\right] = \frac{E}{t_0} \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$\begin{aligned} x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ & \mathcal{L}_I\left(f_1(t)\right) - \mathcal{L}_I\left(E \cdot \varepsilon(t)\right) \\ &= \frac{E}{t_0}\frac{1}{s^2} - \frac{E}{s} \end{aligned}$$

Aufgabe 32

Berechnen Sie die Laplace Transformation der folgenden Zeitfunktion:



Lösung:

Das Signal kann als Summe folgender Funktionen dargestellt werden:

$$x(t) = \frac{E}{t_0} \cdot (t - t_0) \cdot \varepsilon(t - t_0) + E \cdot \varepsilon(t - t_0)$$

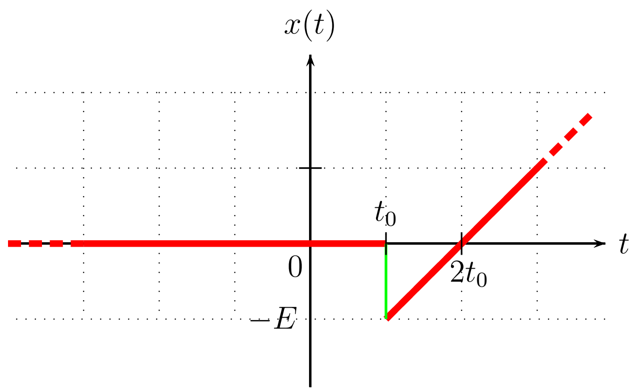
$$f_1(t) = \varepsilon(t) \cdot E \cdot \frac{t}{t_0}$$

$$\mathcal{L}_I\left(f_1(t)\right) = \int_0^\infty \frac{E}{t_0} \cdot t e^{-st} dt = \frac{E}{t_0} \left[t \cdot \frac{1}{-s} \cdot e^{-st} \Big|_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} dt \right] = \frac{E}{t_0} \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \; \mathcal{L}_I\left(f_1(t - t_0)\right) + \mathcal{L}_I\left(E \cdot \varepsilon(t - t_0)\right)$$
$$= \frac{E}{t_0} \frac{1}{s^2} \cdot e^{-st_0} + \frac{E}{s} \cdot e^{-st_0}$$

Aufgabe 33

Berechnen Sie die Laplace Transformation der folgenden Zeitfunktion:



Lösung:

Das Signal kann als Summe folgender Funktionen dargestellt werden:

$$x(t) = \frac{E}{t_0} \cdot (t - t_0) \cdot \varepsilon(t - t_0) - E \cdot \varepsilon(t - t_0)$$

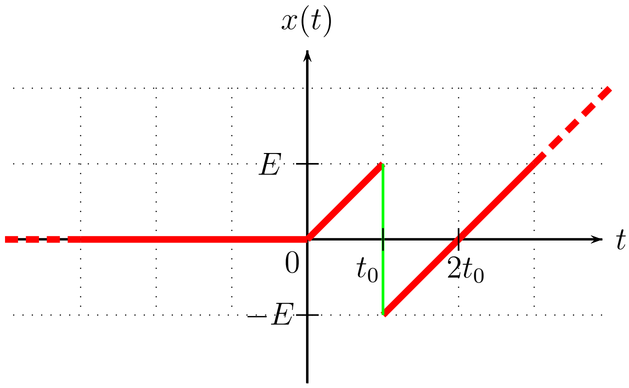
$$f_1(t) = \varepsilon(t) \cdot E \cdot \frac{t}{t_0}$$

$$\mathcal{L}_I\left(f_1(t)\right) = \int_0^\infty \frac{E}{t_0} \cdot t e^{-st} dt = \frac{E}{t_0} \left[t \cdot \frac{1}{-s} \cdot e^{-st} \Big|_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} dt \right] = \frac{E}{t_0} \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \; \mathcal{L}_I\left(f_1(t - t_0)\right) - \mathcal{L}_I\left(E \cdot \varepsilon(t - t_0)\right)$$
$$= \frac{E}{t_0} \frac{1}{s^2} \cdot e^{-st_0} - \frac{E}{s} \cdot e^{-st_0}$$

Aufgabe 34

Berechnen Sie die Laplace Transformation der folgenden Zeitfunktion:



Lösung:

Das Signal kann als Summe folgender Funktionen dargestellt werden:

$$x(t) = \frac{E}{t_0} \cdot t \cdot \varepsilon(t) - 2E \cdot \varepsilon(t - t_0)$$

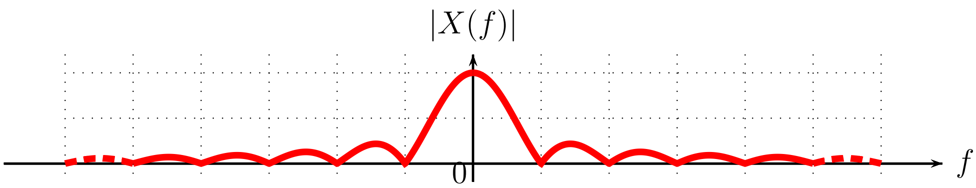
$$f_1(t) = \varepsilon(t) \cdot E \cdot \frac{t}{t_0}$$

$$\mathcal{L}_I\left(f_1(t)\right) = \int_0^\infty \frac{E}{t_0} \cdot te^{-st}dt = \frac{E}{t_0}\left[t \cdot \frac{1}{-s} \cdot e^{-st}\Big|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt\right] = \frac{E}{t_0} \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$\begin{aligned} x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ & \mathcal{L}_I\left(f_1(t)\right) - \mathcal{L}_I\left(2E \cdot \varepsilon(t - t_0)\right) \\ &= \frac{E}{t_0}\frac{1}{s^2} - 2\frac{E}{s} \cdot e^{-st_0} \end{aligned}$$

Aufgabe 35

Welcher Phasenverlauf entspricht dem im Bild gezeigten Betragsverlauf der Fourier-Transformierten des rect(t)-Impulses?



Lösung:

Gesucht ist der Phasenverlauf der Fourier-Transformierten eines **geraden, reellwertigen** Zeitsignals.

$$X(f) = |X(f)| \cdot e^{j\sphericalangle\{X(f)\}}$$

$$\varphi(f) \equiv \sphericalangle X(f)$$

somit:

$$Re\{X(f)\} = |X(f)| \cdot \cos(\varphi(f))$$
$$Im\{X(f)\} = |X(f)| \cdot \sin(\varphi(f))$$

$$\varphi(f) = \text{atan}\left(\frac{Im\{X(f)\}}{Re\{X(f)\}}\right) \tag{12}$$

Das gegebene Zeitsignal ist **reellwertig**, d.h. die Phase der Fourier-Transformierten ist ungerade:

$$x(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} Re\{X(-f)\} = Re\{X(f)\} & \text{gerader Reellanteil} \\ Im\{X(-f)\} = -Im\{X(f)\} & \text{ungerader Imaginäranteil} \\ \varphi(-f) = -\varphi(f) & \text{ungerade Phase} \end{cases} \tag{13}$$

Außerdem ist das Zeitsignal **gerade**:

$$x(t) = x(-t). \tag{14}$$

Es folgt mit Glgn. (13) und (14)

$$\Rightarrow Im\{X(f)\} = 0. \tag{15}$$

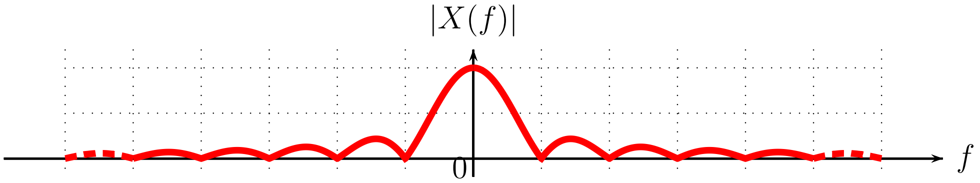
Aus Glgn. (12) und (15) folgt: $\varphi(f)$ ist stückweise konstant und nimmt folgende Werte an:

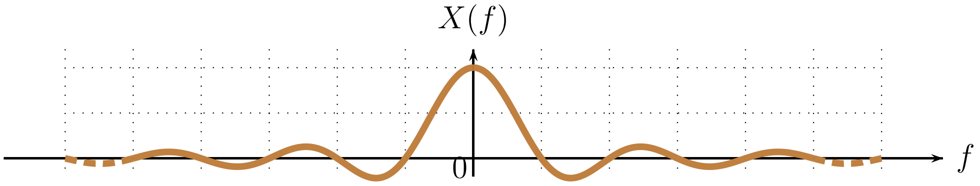
$$\varphi(f) = 0 + 2\pi n, \quad n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \pm 3 ... \text{für} X(f) = |X(f)|$$

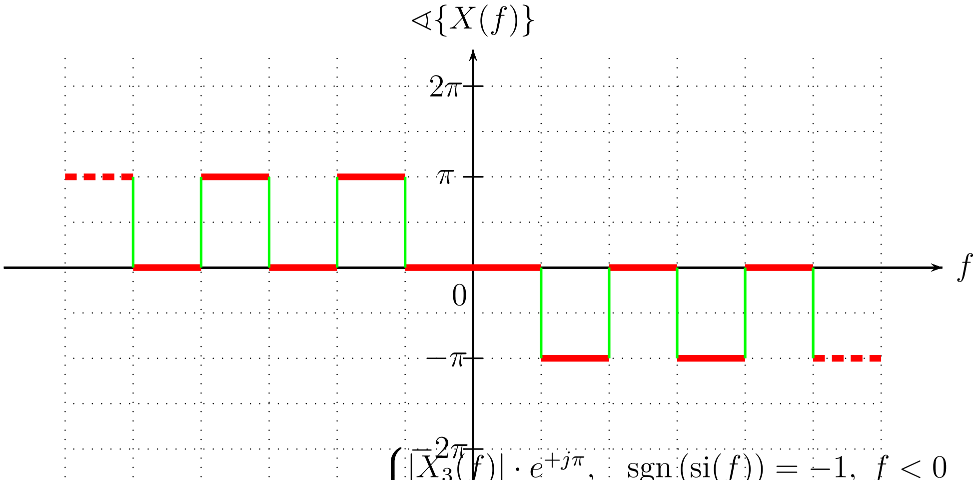
und

$$\varphi(f) = \pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 3, \pm 5, ... \text{für} X(f) = -|X(f)|.$$

Unter Beachtung der obigen Zusammenhänge ergibt sich für die Fourier-Transformierte des rect(t)-Impulses, d.h. für $X(f) = \text{si}(f)$, das Folgende:







$$X_3(f) = \mathrm{si}(f) \quad \Rightarrow X_3(f) = \begin{cases} |X_3(f)| \cdot e^{+j\pi}, & \mathrm{sgn}\,(\mathrm{si}(f)) = -1,\ f < 0 \\ |X_3(f)| \cdot e^{j0}, & \mathrm{sgn}\,(\mathrm{si}(f)) = 1 \\ |X_3(f)| \cdot e^{-j\pi}, & \mathrm{sgn}\,(\mathrm{si}(f)) = -1,\ f > 0 \end{cases}$$

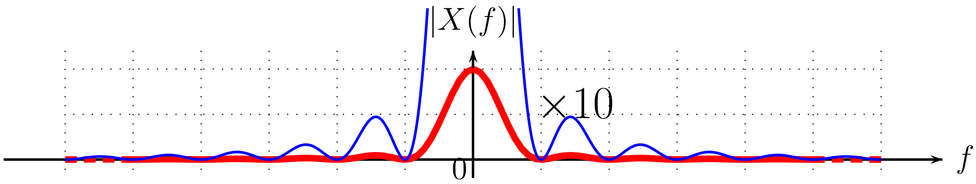
$$\Rightarrow \varphi_3(f) = \begin{cases} +\pi + 2\pi n, & \mathrm{sgn}\,(\mathrm{si}(f)) = -1,\ f < 0 \\ 0 + 2\pi n, & \mathrm{sgn}\,(\mathrm{si}(f)) = 1 \\ -\pi + 2\pi n, & \mathrm{sgn}\,(\mathrm{si}(f)) = -1,\ f > 0 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Es muss $\varphi_3(-f) = -\varphi_3(f)$ gelten!

π-Sprünge in der Phase!

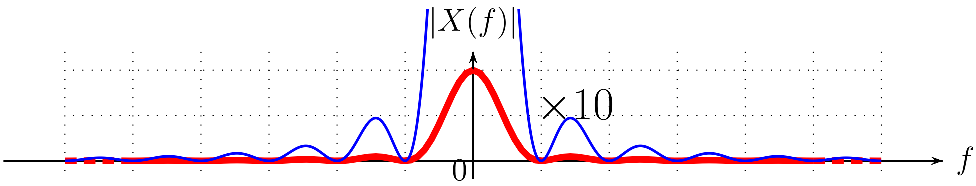
Aufgabe 36

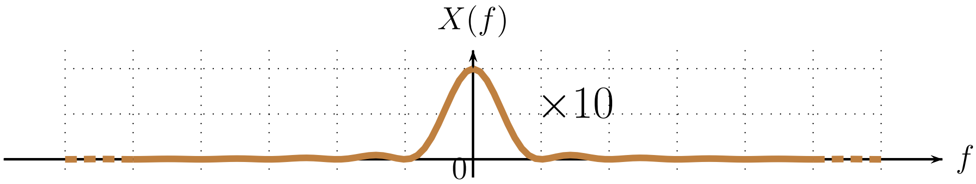
Welcher Phasenverlauf entspricht dem im Bild gezeigten Betragsverlauf der Fourier-Transformierten des $\Lambda(t)$-Impulses?

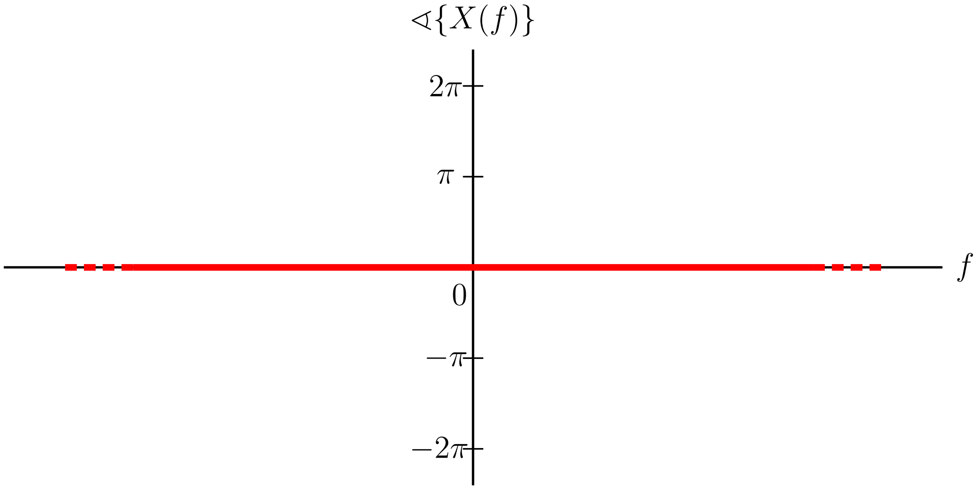


Lösung:

Unter Beachtung der allgemeinen Betrachtungen in der Lösung zu Aufgabe 35 findet man für die Fourier-Transformierte des $\Lambda(t)$-Impulses, d.h. $X(f) = \mathrm{si}^2(f)$, folgende Zusammenhänge:







$$|X_1(f)| = \mathrm{si}^2(f), \quad X_1(f) = |X_1(f)|, \quad \varphi_1(f) = 0 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

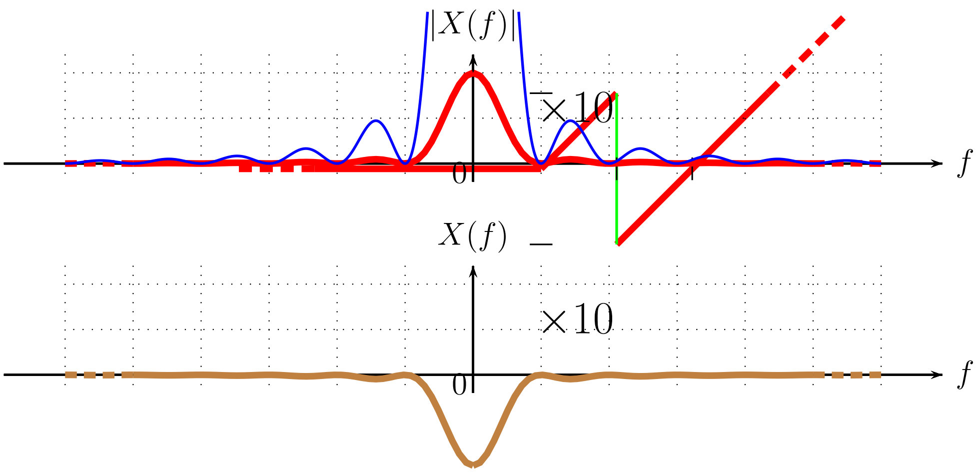
Phase flach, da $X(f) = |X(f)|$!

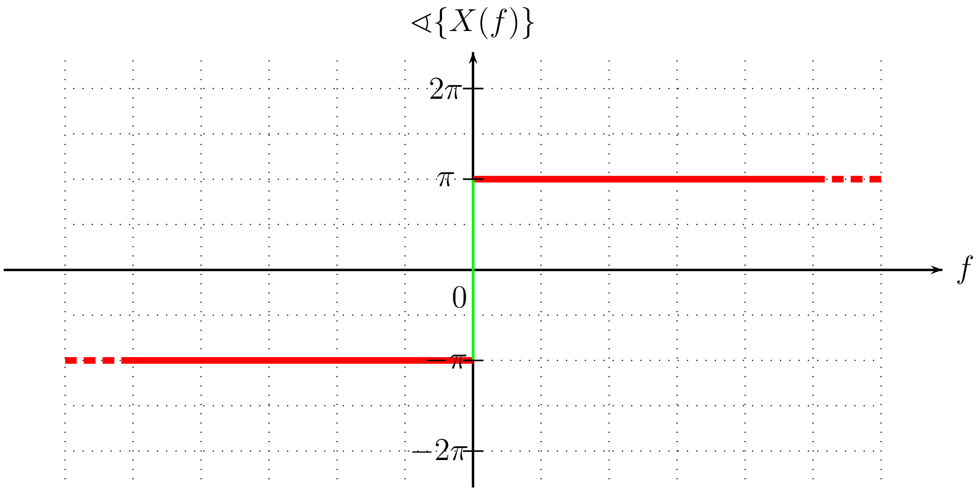
Aufgabe 37

Welcher Phasenverlauf entspricht der Fourier-Transformierten des negativen Lambda-Impulses, d.h. $-\Lambda(t)$?

Lösung:

Unter Beachtung der allgemeinen Betrachtungen in der Lösung zu Aufgabe 35 findet man für die Fourier-Transformierte von $-\Lambda(t)$, d.h. $X(f) = -\mathrm{si}^2(f)$, folgende Zusammenhänge:





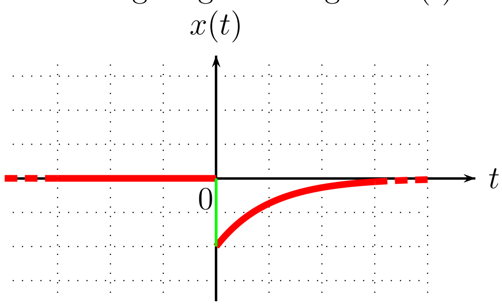
$$X_2(f) = -|X_2(f)| = -\mathrm{si}^2(f) \quad \Rightarrow X_2(f) = \begin{cases} |X_2(f)| \cdot e^{-j\pi}, & f < 0 \\ |X_2(f)| \cdot e^{+j\pi}, & f > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi_2(f) = \begin{cases} -\pi + 2\pi n, & f < 0 \\ +\pi + 2\pi n, & f > 0 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}. \text{ Es muss } \varphi_2(-f) = -\varphi_2(f) \text{ gelten!}$$

Sprung über 2π von $\pm\pi$ auf $\mp\pi$ bei $f = 0$!

Aufgabe 38

Gegeben ist das im Bild gezeigte Zeitsignal: $x(t) = -\varepsilon(t) \cdot e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$.



Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion dieses Signals.

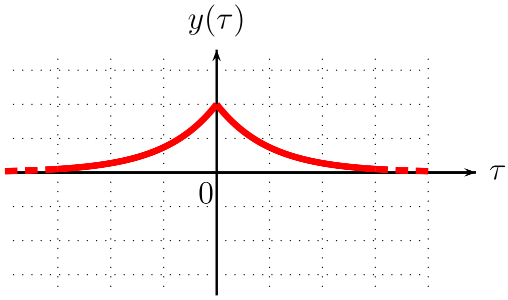
Lösung:

$$x(t) = -\varepsilon(t) \cdot e^{-\alpha t}$$

$$X(\omega) = \frac{-1}{\alpha + j\omega}$$

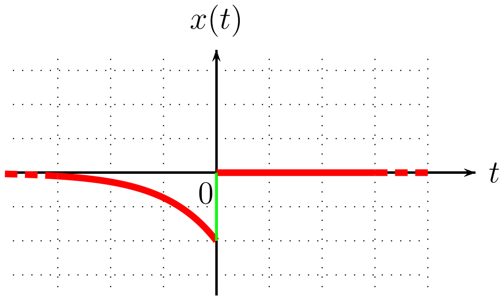
$$|X(\omega)|^2 = \frac{1}{2\alpha} \cdot \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$|X(\omega)|^2 \;\bullet\!\!\overset{\mathcal{F}}{-\!\!-}\!\!\circ\; y(\tau) = \frac{1}{2\alpha} \cdot e^{-\alpha|\tau|}$$



Aufgabe 39

Gegeben ist das im Bild gezeigte Zeitsignal: $x(t) = -\varepsilon(-t) \cdot e^{\alpha t}$, $\alpha > 0$.



Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion dieses Signals.

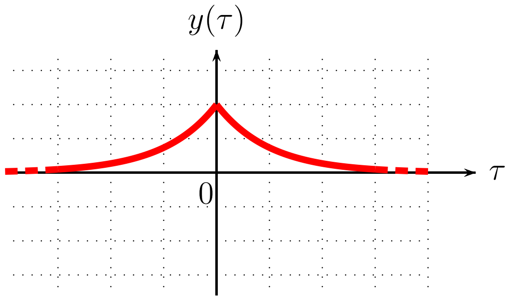
Lösung:

$$x(t) = -\varepsilon(-t) \cdot e^{\alpha t}$$

$$X(\omega) = \frac{-1}{\alpha - j\omega}$$

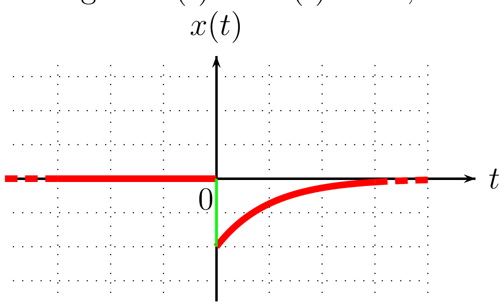
$$|X(\omega)|^2 = \frac{1}{2\alpha} \cdot \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$|X(\omega)|^2 \quad \bullet\!\!\overset{\mathcal{F}}{-}\!\!\circ \quad y(\tau) = \frac{1}{2\alpha} \cdot e^{-\alpha|\tau|}$$



Aufgabe 40

Gegeben ist das im Bild gezeigte Zeitsignal: $x(t) = -\varepsilon(t) \cdot e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$.



Berechnen Sie Selbst-Faltung dieses Signals.

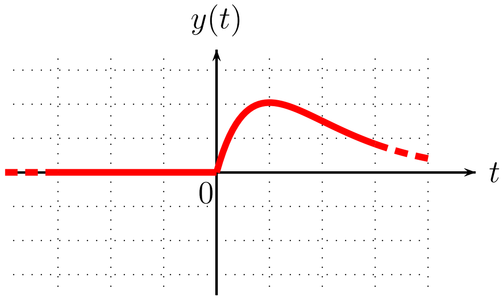
Lösung:

$$x(t) = -\varepsilon(t) \cdot e^{-\alpha t}$$

$$X(\omega) = \frac{-1}{\alpha + j\omega}$$

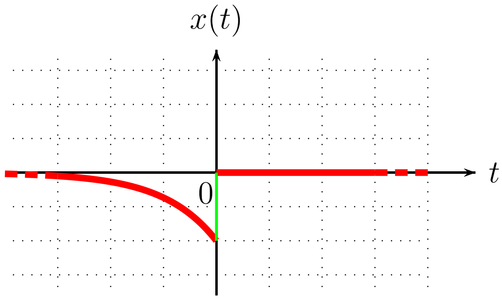
$$X^2(\omega) = \frac{1}{(\alpha + j\omega)^2}$$

$$X^2(\omega) \quad \bullet\!\!\stackrel{\mathcal{F}}{\frac{}{}}\!\!\circ \quad y(t) = t \cdot e^{-\alpha t}\varepsilon(t)$$



Aufgabe 41

Gegeben ist das im Bild gezeigte Zeitsignal: $x(t) = -\varepsilon(-t) \cdot e^{\alpha t}$, $\alpha > 0$.



Berechnen Sie die Selbst-Faltung dieses Signals.

Lösung:

Eine Möglichkeit, die Selbstfaltung $y(t) = x(t) * x(t)$ zu berechnen, ist die direkte Auswertung des Faltungsintegrals im Zeitbereich. Dies ist in diesem Fall sehr einfach durchzuführen. Eine andere Möglichkeit ergibt sich über die Korrespondenz $\mathcal{L}\{x(t) * x(t)\} = X^2(s)$, wie im Folgenden gezeigt. Da das Signal antikausal ist, können die in der Formelsammlung für kausale Signale gelisteten Korrespondenzen nicht verwendet werden. Die Laplace-Transformation des Signals

$$x(t) = -\varepsilon(-t) \cdot e^{\alpha t}$$

muss daher direkt durch Auswertung des Integrals $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$ erfolgen. Dies ergibt

$$X(s) = \frac{-1}{s - \alpha},$$

und damit

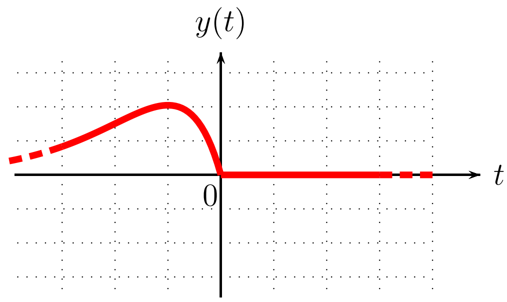
$$Y(s) = X^2(\omega) = \frac{1}{(s - \alpha)^2}.$$

Die Rücktransformation kann über den Residuensatz durchgeführt werden. Die Ermittlung der Residuen für das Zeitsignal erfolgt mittels Integration entlang einer Geraden, welche innerhalb des Konvergenzgebietes liegen muss, parallel zur imaginären Achse von $-\infty$ bis $+\infty$. Für das Zeitsignal $t > 0$ wird die Kurve gegen den Uhrzeigersinn geschlossen, für $t < 0$ im Uhrzeigersinn. Das Konvergenzgebiet der Laplace-Transformierten für ein antikausales Signal liegt links des Poles mit dem größten Realteil liegt. In unserem Fall liegt aufgrund von $\alpha > 0$ ein Doppelpol in der rechten Halbebene. Die Gerade muss also links des Doppelpoles liegen. Das Kurvenintegral liefert also 0 (es wird kein Pol umschlossen) für die Integrationsrichtung gegen den Uhrzeigersinn, d.h. für $t > 0$, während sich für Umlauf im Uhrzeigersinn ($t < 0$) das zum Doppelpol gehörige Residuum ergibt. Zusätzlich ergibt sich aufgrund des Umlaufes im Uhrzeigersinn ein negatives Vorzeichen:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} Y(s)e^{st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(s-\alpha)^2}e^{st}ds \\ &= \begin{cases} -\lim_{s\to\alpha} \frac{d}{ds}\left[(s-\alpha)^2 \frac{e^{st}}{(s-\alpha)^2}\right] & t < 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -te^{\alpha t} & t < 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

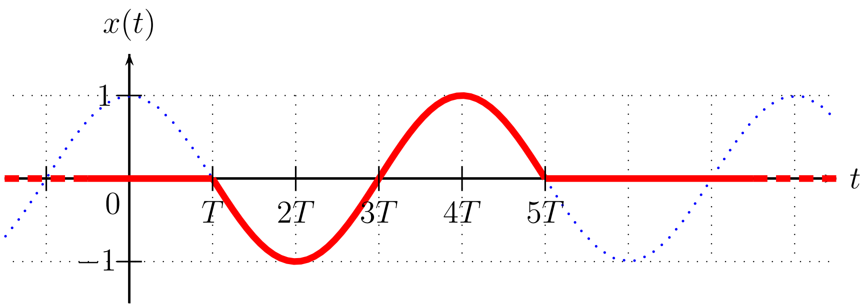
Die Selbstfaltung lautet also

$$y(t) = -t \cdot e^{\alpha t}\varepsilon(-t).$$



Aufgabe 42

Wie lautet die Laplace-Transformierte der skizzierten Funktion $x(t)$ bestehender aus einer Periode einer harmonischen Oszillation?



Lösung:

Wir definieren eine Hilfsfunktion: $f(t) = -\sin(\omega_0 t) \cdot \varepsilon(t)$, wo $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$ und $T_0 = 4T$. Somit:

$$x(t) = f(t-T) - f(t-5T)$$

Laut Korrespondenzen-Tabelle der Laplace-Transformation:

$$f(t) = -\sin(\omega_0 t) \cdot \varepsilon(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ -\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

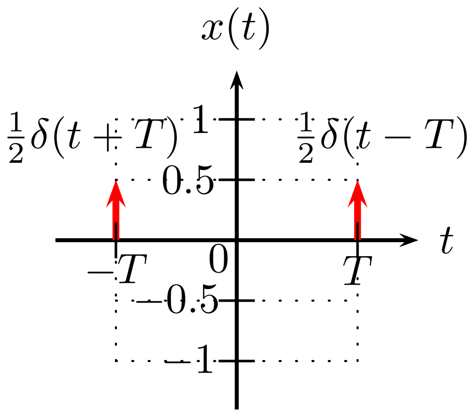
Mit Verwendung der Verschiebungs-Regel:

$$x(t) = f(t-T) - f(t-5T) \circ\!\!-\!\!\bullet\ -\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2} \cdot \left(e^{-sT} - e^{-s5T}\right)$$

$$= \frac{\frac{2\pi}{4T}}{s^2 + \left(\frac{2\pi}{4T}\right)^2} \cdot e^{-sT}\left(e^{-s4T} - 1\right) = \boxed{\frac{2\pi T}{(2sT)^2 + \pi^2} \cdot e^{-sT} \cdot \left(e^{-s4T} - 1\right)}$$

Aufgabe 43

Welcher Betrags- und Phasenverlauf entspricht der Fourier-Transformierten der skizzierten reellwertigen Funktion $x(t)$?



Lösung:

Diese Aufgabe ist ähnlich zu Aufgaben 47, 50 und 52. Es werden daher hier gleich die Lösungen für alle 4 Aufgaben auf einmal dargelegt.

Die Zeitfunktionen aus den 4 Aufgaben, bestehend aus Summen von zeitverschobenen Dirac-Delta Funktionen, und ihre Fourier-Transformierten lauten:

$$\frac{1}{2}\delta(t+T) + \frac{1}{2}\delta(t-T) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot e^{j\omega T} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot e^{-j\omega T} = \cos(\omega T)$$

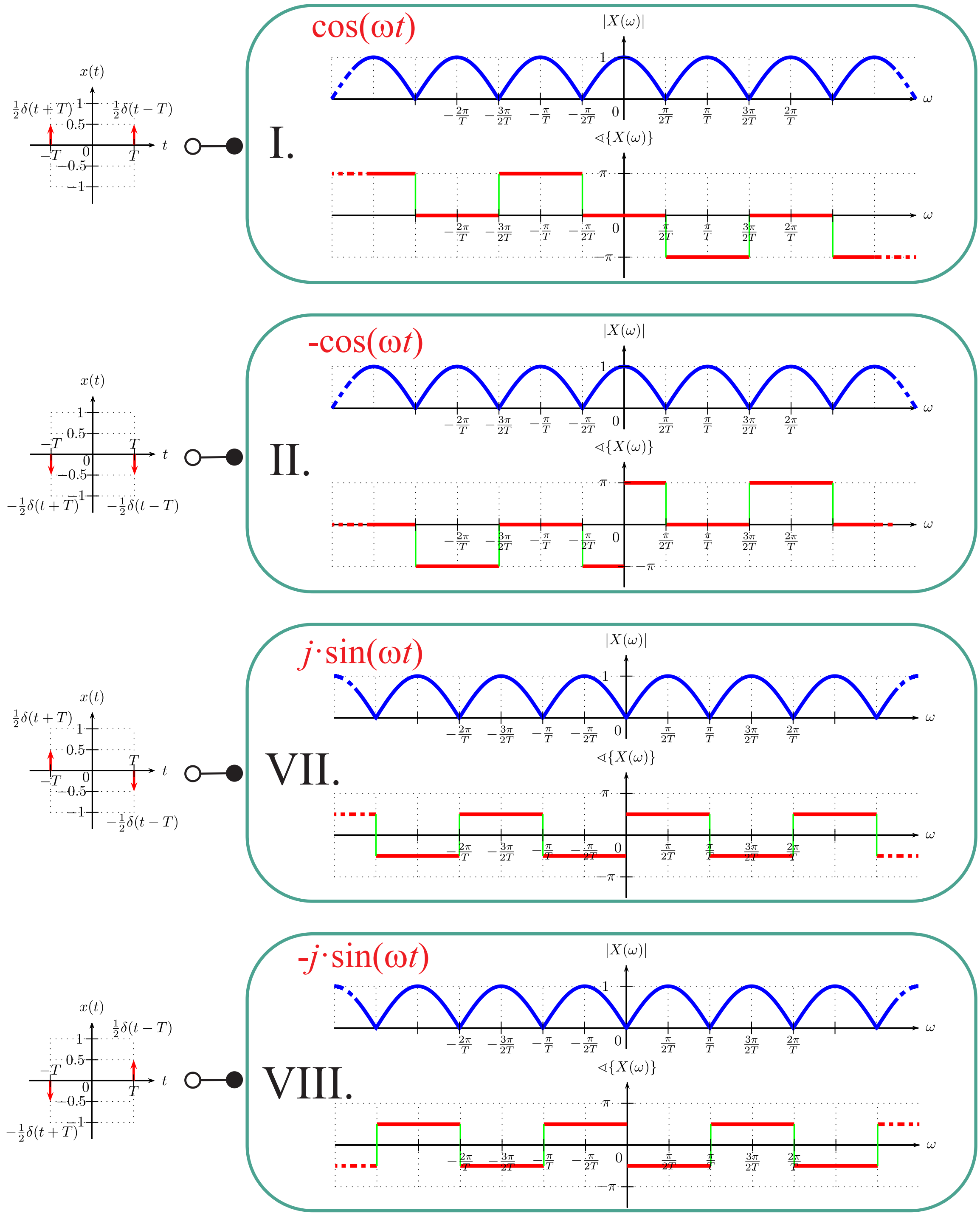
$$-\frac{1}{2}\delta(t+T) - \frac{1}{2}\delta(t-T) \circ\!\!-\!\!\bullet\ -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot e^{j\omega T} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot e^{-j\omega T} = -\cos(\omega T)$$

$$\frac{1}{2}\delta(t+T) - \frac{1}{2}\delta(t-T) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot e^{j\omega T} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot e^{-j\omega T} = j \cdot \sin(\omega T) = e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot \sin(\omega T)$$

$$-\frac{1}{2}\delta(t+T)+\frac{1}{2}\delta(t-T) \circ\!\!-\!\!\bullet -\frac{1}{2}\cdot 1\cdot e^{j\omega T}+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot e^{-j\omega T} = -j\cdot\sin(\omega T) \quad = \quad -e^{j\frac{\pi}{2}}\cdot\sin(\omega T)$$

$$\text{oder auch} \quad = \quad e^{-j\frac{\pi}{2}}\cdot\sin(\omega T)$$

Negative Amplitudenwerte der Funktionen $X(\omega)$ erhält man über $X(\omega)=|X(\omega)|\cdot e^{j\pi+2\pi n}$, $n = 0, \pm1, \pm2, ...$ Eine Multiplikation mit $\pm j$ entspricht einer zusätzlichen Phasenverschiebung um $\pm\frac{\pi}{2}$. Zu beachten ist, dass die Fourier-Transformierte einer reellwertigen geraden $x(t)$ einen geraden Betrags- und einen ungeraden Phasenverlauf aufweist. Damit ergeben sich die Lösungen der 4 Aufgaben 43, 47, 50, und 52 folgendermaßen:



Aufgabe 44

Gesucht sind die Koeffizienten X_n der komplexen Fourier-Reihe von

$$x(t) = \sin^2(t).$$

Lösung:

$$x(t) = \sin^2(t) = \left(\frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}\right)^2 = \frac{e^{2jt} + e^{-2jt} - 2}{-4} =$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{2jt} - \frac{1}{4}e^{-2jt}$$

Vergleich mit Fourier-Reihe:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n \frac{t}{T_P}}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2nt}$$

$$\begin{aligned} n = 0 &: X_0 = \frac{1}{2} \\ n = 1 &: X_1 = -\frac{1}{4} \\ n = -1 &: X_{-1} = -\frac{1}{4} \\ \text{sonst} &: X_n = 0 \end{aligned}$$

$$X_0 = \frac{1}{2}, \; X_{\pm 1} = -\frac{1}{4}$$

Aufgabe 45

Bestimmen Sie das Konvergenzgebiet der Laplace-Transformierten von

$$x(t) = \cosh(t) \cdot \varepsilon(t).$$

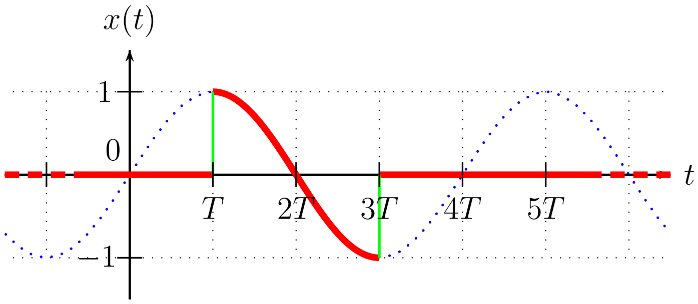
Lösung:

$$X(s) = \mathcal{L}\left\{\cosh(t)\varepsilon(t)\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\underbrace{\left\{e^{t} \cdot \varepsilon(t)\right\}}_{\kappa:\ \mathcal{R}e\{s\}>1} + \frac{1}{2}\underbrace{\mathcal{L}\left\{e^{-t} \cdot \varepsilon(t)\right\}}_{\kappa:\ \mathcal{R}e\{s\}>-1}$$

$$\mathcal{R}e\{s\} > 1$$

Aufgabe 46

Wie lautet die Laplace-Transformierte der skizzierten Funktion $x(t)$ bestehend aus einer halben Periode einer harmonischen Oszillation?



Lösung:

Wir definieren eine Hilfsfunktion: $f(t) = \cos(\omega_0 t) \cdot \varepsilon(t)$, wo $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0} = \dfrac{\pi}{2T}$ und $T_0 = 4T$. Somit:

$$x(t) = f(t-T) + f(t-3T)$$

Laut Korrespondenzen-Tabelle der Laplace-Transformation:

$$f(t) = \cos(\omega_0 t) \cdot \varepsilon(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2+\omega_0^2}$$

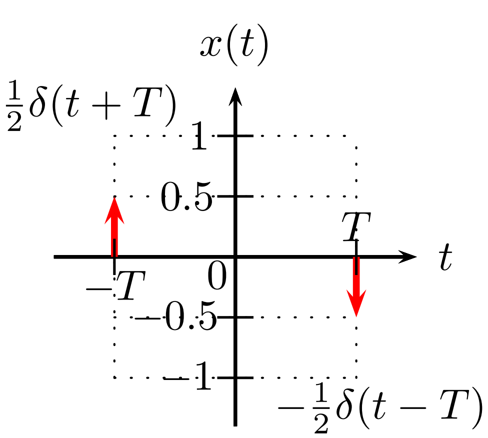
Mit Verwendung der Verschiebungs-Regel:

$$x(t) = f(t-T) + f(t-3T) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2+\omega_0^2} \cdot \left(e^{-sT} + e^{-s3T}\right)$$

$$= \frac{s}{s^2 + \left(\dfrac{\pi}{2T}\right)^2} \cdot e^{-sT}\left(e^{-s2T}+1\right) = \boxed{\frac{4sT^2}{(2sT)^2+\pi^2} \cdot e^{-sT} \cdot \left(e^{-s2T}+1\right)}$$

Aufgabe 47

Welcher Betrags- und Phasenvelauf entspricht der Fourier-Transformierten der skizzierten reellwertigen Funktion $x(t)$?



Lösung:

Siehe Lösung zu Aufgabe 43.

Aufgabe 48

Gesucht sind die Koeffizienten X_n der komplexen Fourier-Reihe von

$$x(t) = \cos^2(t).$$

Lösung:

$$\begin{aligned} x(t) = \cos^2(t) &= \left(\frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2}\right)^2 = \frac{e^{j2t} + e^{-j2t} + 2}{4} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{2jt} + \frac{1}{4}e^{-2jt} \end{aligned}$$

Vergleich mit Fourier-Reihe:

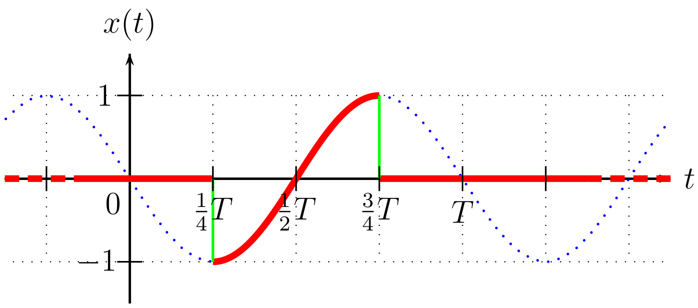
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n \frac{t}{T_P}}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2nt}$$

$$X_0 = \frac{1}{2},\ X_{\pm 1} = \frac{1}{4}$$

Aufgabe 49

Wie lautet die Laplace-Transformierte der skizzierten Funktion $x(t)$ bestehender aus einer halben Periode einer harmonischen Oszillation?



Lösung:

Wir definieren eine Hilfsfunktion: $f(t) = -\cos(\omega_0 t) \cdot \varepsilon(t)$, wo $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{T}$ und $T_0 = T$.
Somit:

$$x(t) = f(t - \tfrac{1}{4}T) + f(t - \tfrac{3}{4}T)$$

Laut Korrespondenzen-Tabelle der Laplace-Transformation:

$$f(t) = -\cos(\omega_0 t) \cdot \varepsilon(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ -\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

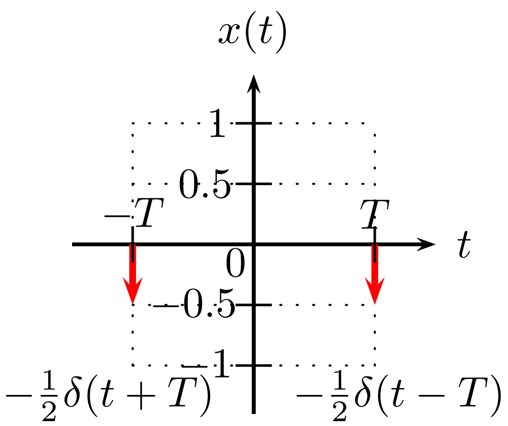
Mit Verwendung der Verschiebungs-Regel:

$$x(t) = f(t - \tfrac{1}{4}T) + f(t - \tfrac{3}{4}T) \circ\!\!-\!\!\bullet\ -\frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \cdot \left(e^{-s\frac{1}{4}T} + e^{-s\frac{3}{4}T}\right)$$

$$= -\frac{s}{s^2 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} \cdot e^{-s\frac{1}{4}T}\left(e^{-s\frac{1}{2}T} + 1\right) = \boxed{-\frac{sT^2}{(sT)^2 + 4\pi^2} \cdot e^{-s\frac{1}{4}T} \cdot \left(e^{-s\frac{1}{2}T} + 1\right)}$$

Aufgabe 50

Welcher Betrags- und Phasenverlauf entspricht der Fourier-Transformierten der skizzierten reellwertigen Funktion $x(t)$?

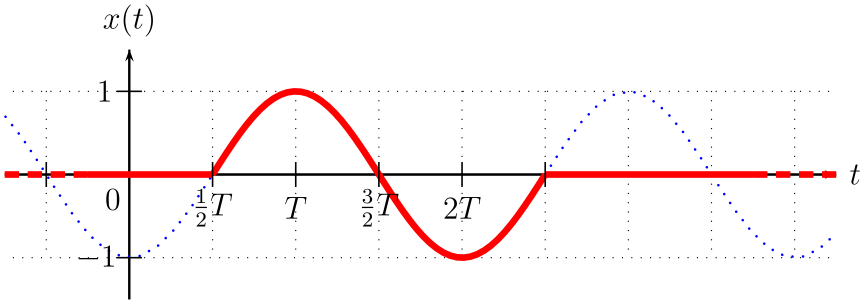


Lösung:

Siehe Lösung zu Aufgabe 43.

Aufgabe 51

Wie lautet die Laplace-Transformierte der skizzierten Funktion $x(t)$ bestehender aus einer Periode einer harmonischen Oszillation?



Lösung:

Wir definieren eine Hilfsfunktion: $f(t) = \sin(\omega_0 t) \cdot \varepsilon(t)$, wo $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0} = \dfrac{\pi}{T}$ und $T_0 = 2T$. Somit:

$$x(t) = f(t - \tfrac{1}{2}T) - f(t - \tfrac{5}{2}T)$$

Laut Korrespondenzen-Tabelle der Laplace-Transformation:

$$f(t) = \sin(\omega_0 t) \cdot \varepsilon(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

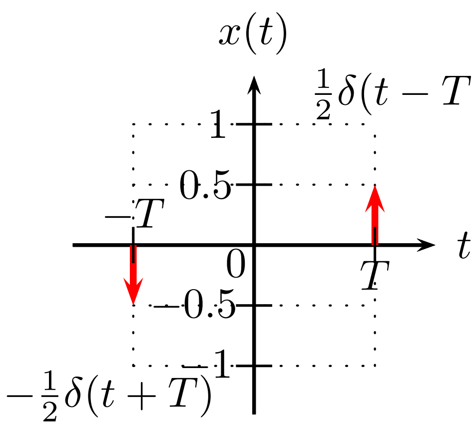
Mit Verwendung der Verschiebungs-Regel:

$$x(t) = f(t - \tfrac{1}{2}T) - f(t - \tfrac{5}{2}T) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \cdot \left(e^{-s\frac{1}{2}T} - e^{-s\frac{5}{2}T} \right)$$

$$= \frac{\dfrac{\pi}{T}}{s^2 + \left(\dfrac{\pi}{T}\right)^2} \cdot e^{-s\frac{T}{2}} \cdot \left(1 - e^{-s2T}\right) = \boxed{\frac{\pi T}{(sT)^2 + \pi^2} \cdot e^{-s\frac{T}{2}} \cdot \left(1 - e^{-s2T}\right)}$$

Aufgabe 52

Welcher Betrags- und Phasenverlauf entspricht der Fourier-Transformierten der skizzierten reellwertigen Funktion $x(t)$?



Lösung:

Siehe Lösung zu Aufgabe 43.

Aufgabe 53

Bestimmen Sie das Konvergenzgebiet der Laplace-Transformierten von

$$x(t) = \sinh(t) \cdot \varepsilon(t).$$

Lösung:

$$X(s) = \mathcal{L}\left\{\sinh(t)\varepsilon(t)\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\underbrace{\left\{e^t \cdot \varepsilon(t)\right\}}_{\kappa:\ \mathcal{R}e\{s\}>1} - \frac{1}{2}\underbrace{\mathcal{L}\left\{e^{-t} \cdot \varepsilon(t)\right\}}_{\kappa:\ \mathcal{R}e\{s\}>-1}$$

$$\mathcal{R}e\{s\} > 1$$

Aufgabe 54

Neu in Version 4.0 Berechnen Sie die Laplace-Transformierte von $x(t) = t \cdot \sinh(t) \cdot \varepsilon(t)$.

Lösung:

Vergleiche mit Aufgabe 6.2c) im Buch Frey/Bossert auf Seite 204 [$x(t) = t\cos(\omega t)\varepsilon(t)$], sowie Aufgabe 45 [Konvergenzgebiet von $x(t) = \cosh(t) \cdot \varepsilon(t)$].

$t \cdot \sinh(t) \cdot \varepsilon(t) = \frac{1}{2}t \cdot e^t\varepsilon(t) - \frac{1}{2}t \cdot e^{-t}\varepsilon(t)$

Laut bekannten Korrespondenzen:

$t \cdot x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ -\frac{d}{ds}X(s)$

$e^t \cdot \varepsilon(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{s-1}$

$e^{-t} \cdot \varepsilon(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{s+1}$

Somit:

$$\begin{aligned}
X(s) &= \frac{1}{2}\left(-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-1}\right) + \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+1}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{(s+1)^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{s^2+2s+1-s^2+2s-1}{\left((s-1)(s+1)\right)^2} \\
&= \boxed{\frac{2s}{(s^2-1)^2}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 55

Neu in Version 4.0 Berechnen Sie die Energie des Signals $x(t) = A \cdot \text{si}(\pi B t) \cdot \sin(2\pi f_0 t)$ mit $A,\ B,\ f_0 \in \mathbb{R}$.

Lösung:

Vergleiche mit Beispiel 6.14 im Buch Frey/Bossert auf Seite 195 [$x(t) = \text{si}(\pi \frac{t}{T})$] und Aufgabe 4 [$y(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$].

$$x(t) = A \cdot \text{si}(\pi B t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) = \frac{A}{2j} \cdot \text{si}(\pi B t) \cdot e^{j2\pi f_0 t} - \frac{A}{2j} \cdot \text{si}(\pi B t) \cdot e^{-j2\pi f_0 t}$$

Laut bekannten Korrespondenzen:

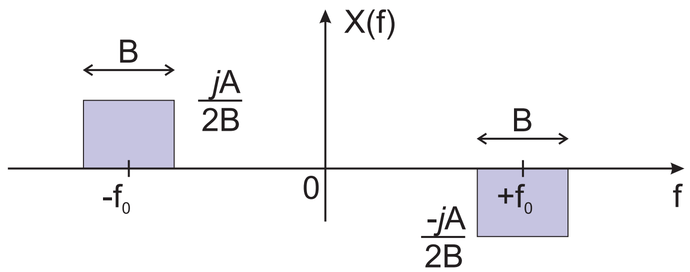
$\text{si}(\pi B t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{B}\text{rect}\left(\frac{f}{B}\right)$

$e^{j2\pi f_0 t} \circ\!\!-\!\!\bullet \delta(f - f_0)$

$e^{-j2\pi f_0 t} \circ\!\!-\!\!\bullet \delta(f + f_0)$

Somit:

$$X(f) = -\frac{jA}{2B}\text{rect}\left(\frac{f}{B}\right) * \delta(f - f_0) + \frac{jA}{2B}\text{rect}\left(\frac{f}{B}\right) * \delta(f + f_0)$$



Nach dem Parsevalschem Theorem bleibt die Energie des Signals im Zeit- und Frequenzbereich gleich.

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = 2\left(\frac{A}{2B}\right)^2 B = \boxed{\frac{A^2}{2B}}$$

Aufgabe 56

Neu in Version 4.0 Bestimmen Sie das Konvergenzgebiet der zweiseitigen Laplacetransformierten von:

$$x(t) = \begin{cases} 2e^{2t} & t < 0 \\ 4e^{-t} & t \geq 0 \end{cases}$$

Lösung:

Vergleiche mit Beispiel 6.1 im Buch Frey/Bossert auf Seite 172 [$x(t) = e^{at}$ für $t \geq 0, x(t) = e^{-at}$ für $t < 0$)]. Wurde in VU vorgerechnet.

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt = 2\int_{-\infty}^{0} e^{(2-s)t} dt + 4\int_{0}^{\infty} e^{-(1+s)t} dt$$
$$= \underbrace{2\frac{e^{(2-s)t}}{2-s}\bigg|_{-\infty}^{0}}_{X_1} + \underbrace{4\frac{e^{-(1+s)t}}{-(1+s)}\bigg|_{0}^{\infty}}_{X_2}$$

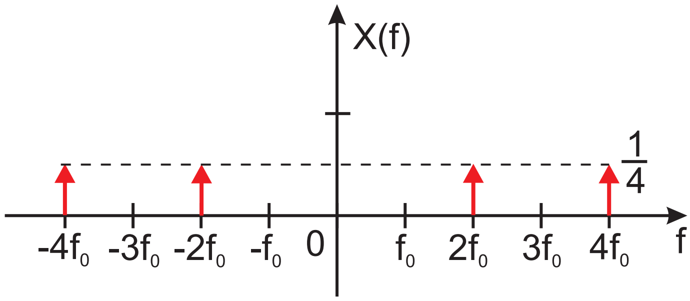
$\mathcal{K}_{x_1}: \quad 2 - Re\{s\} > 0 \Rightarrow Re\{s\} < 2$

$\mathcal{K}_{x_2}: \quad 1 + Re\{s\} > 0 \Rightarrow Re\{s\} > -1$

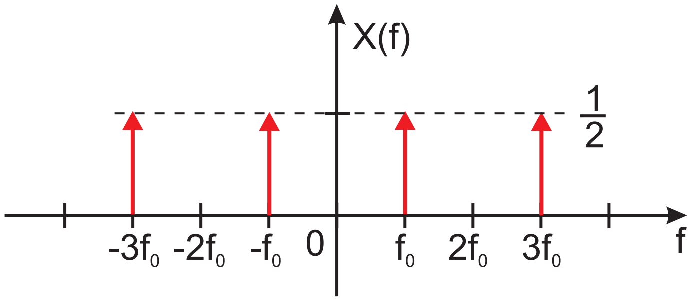
$\mathcal{K} \supseteq \mathcal{K}_{x_1} \cap \mathcal{K}_{x_2} \Rightarrow \boxed{-1 < Re\{s\} < 2}$

Aufgabe 57

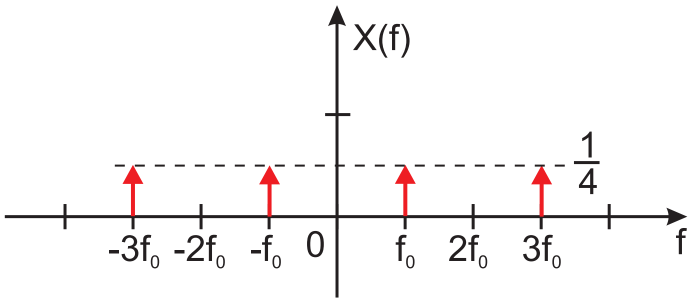
Neu in Version 4.0 Welche der folgenden Abbildungen zeigt das Spektrum des Signals $x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \cdot \cos(6\pi f_0 t)$:



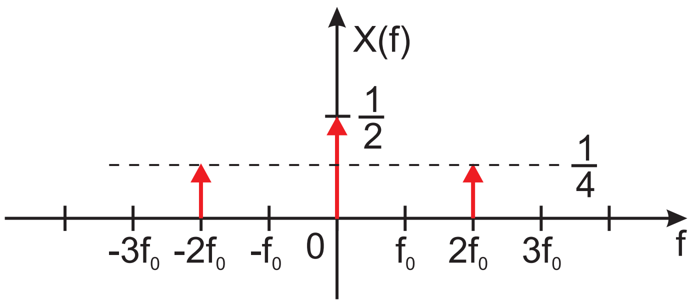
A.



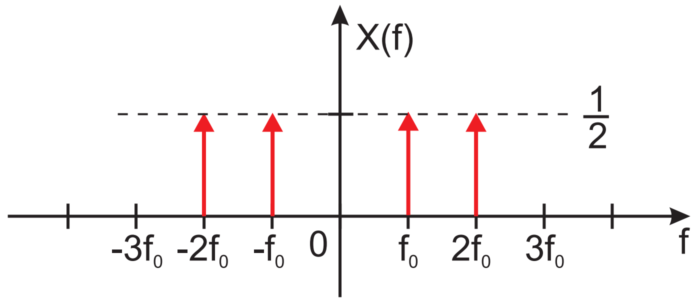
B.



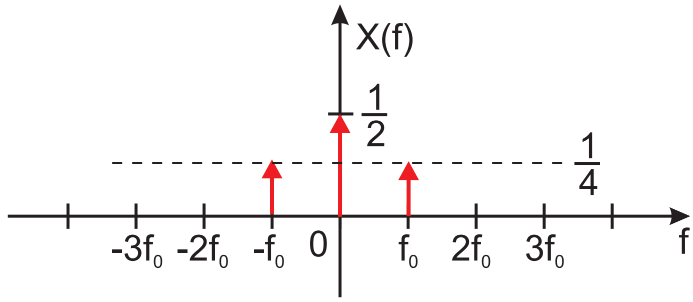
C.



D.



E.



F.

Lösung:

Vergleiche mit Aufgabe 4 [$y(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$].

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos(2\pi f_0 t) \cdot \cos(6\pi f_0 t) \\ &= \frac{1}{2}\left(\cos(4\pi f_0 t) + \cos(8\pi f_0 t)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{j4\pi f_0 t} + e^{-j4\pi f_0 t} + e^{j8\pi f_0 t} + e^{-j8\pi f_0 t}\right) \end{aligned}$$

$$X(f) = \frac{1}{4}\left(\delta(f + 4f_0) + \delta(f + 2f_0) + \delta(f - 2f_0) + \delta(f - 4f_0)\right).$$

Aufgabe 58

Neu in Version 4.0 Gegeben sei die **zweiseitige** Laplace-Transformierte $X(s) = \dfrac{(s-5)}{(s+1)(s-2)}$ im Konvergenzgebiet $-1 < Re\{s\} < 2$. Wie lautet die zugehörige Zeitfunktion? (Empfohlener Rechenweg: Anwendung des Residuensatzes; beachten Sie die Umlaufrichtung der Hilfskurve.)

Lösung:

Ein ganz ähnliches Beispiel wurde in VU vorgerechnet.

$$t > 0: \quad \text{Res}\{X, -1\} = \lim_{s \to -1}\left[(s+1)\frac{(s-5)e^{st}}{(s+1)(s-2)}\right] = 2e^{-t}$$

$$t < 0: \quad -\text{Res}\{X, 2\} = -\lim_{s \to 2}\left[(s-2)\frac{(s-5)e^{st}}{(s+1)(s-2)}\right] = e^{2t}$$

$$\Rightarrow x(t) = \boxed{\begin{cases} e^{2t} & t < 0 \\ 2e^{-t} & t \geq 0 \end{cases}}$$

Aufgabe 59

Neu in Version 4.0 Gesucht sind die Koeffizienten X_n der komplexen Fourier-Reihe von $x(t) = \cos^3(t)$.

Lösung:

Vergleiche Aufgabe 44 $[x(t) = \sin^2(t)]$.

$$\cos^3(t) = \left(\frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2}\right)^3 = \frac{e^{j3t} + 3e^{j2t} \cdot e^{-jt} + 3e^{jt} \cdot e^{-j2t} + e^{-j3t}}{8}$$

$$= \frac{e^{j3t} + 3e^{jt} + 3e^{-jt} + e^{-j3t}}{8}$$

Vgl:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \cdot e^{j2\pi n \frac{t}{T_p}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \cdot e^{jnt}$$

$$\Rightarrow \boxed{X_{\pm 1} = \pm\frac{3}{8};\ X_{\pm 3} = \pm\frac{1}{8};\ 0 \ \text{ sonst}}$$

Aufgabe 60

Neu in Version 4.0 Bestimmen Sie die Schwebungsfrequenz zweier Signale $y_1(t)$ und $y_2(t)$:

$y_1(t) = \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{8}\right)$

$y_2(t) = \sin^2\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$

Lösung:

Vergleiche Aufgabe 14 $[x(t) = 2\cos(2\omega t + \phi_1) + 3\cos(3\omega t + \phi_2)]$.

Die Anfangsphase hat keinen Einfluss auf die Frequenz $\rightarrow$ equivalent können wir phasenverschobene Signale betrachten:

$$y_1 \rightarrow \qquad \cos(\omega t) \qquad \Rightarrow \omega_1 = \omega$$

$$y_2 \rightarrow \qquad \sin^2(\omega t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\omega t)) \qquad \Rightarrow \omega_2 = 2\omega$$

Schwebungsfrequenz: $\frac{|\omega_1 - \omega_2|}{2} = \boxed{\frac{1}{2}\omega}$

Aufgabe 61

Neu in Version 4.0 Bestimmen Sie die Autokorrelationsfunktion des folgenden Zeitsignals:

$x(t) = \cos(\omega t) - \sin(2\omega t)$

Lösung:

Vergleiche Aufgabe 30 [$x(t) = \sin(t)$].

Das gegebene reellwertige Leistungssignal ist eine bi-harmonische Schwingung $x(t) = x_1(\omega_1 t) + x_2(\omega_2 t)$. Skalarprodukte harmonischer Signale unterschiedlicher Frequenzen sind Null. $\Rightarrow$ die Gesamt-AKF ist die Summe der AKF der Einzelschwingungen.

Für die jeweilige Kreisfrequenz ω_i bekommen wir:

$x_i(t) = \pm\cos(\omega_i t)$:

$$\varphi^L_{x_i x_i}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\omega_i t)\cdot\cos(\omega_i(t+\tau))dt = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\cos(\omega_i\tau) + \cos(\omega_i(2t+\tau))\right)dt$$

$$= \frac{1}{4\pi}\cos(\omega_i\tau)\cdot t\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin(\omega_i(2t+\tau))\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\cos(\omega_i\tau) + 0$$

bzw: $x_i(t) = \pm\sin(\omega_i t)$:

$$\varphi^L_{x_i x_i}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(\omega_i t)\cdot\sin(\omega_i(t+\tau))dt = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\cos(\omega_i\tau) - \cos(\omega_i(2t+\tau))\right)dt$$

$$= \frac{1}{4\pi}\cos(\omega_i\tau)\cdot t\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin(\omega_i(2t+\tau))\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\cos(\omega_i\tau) - 0$$

Für $\omega_i \neq \omega_j$: $\varphi^L_{x_i x_j}(\tau) = 0$

Somit: $\varphi^L_{xx} = \varphi^L_{x_1x_1} + \varphi^L_{x_2x_2} + \varphi^L_{x_1x_2} + \varphi^L_{x_2x_1} = \boxed{\frac{1}{2}\cos(\omega\tau) + \frac{1}{2}\cos(2\omega\tau)}$

Aufgabe 62

Neu in Version 4.0 Finden Sie die Fouriertransformierte $Y(j\omega)$ folgender Zeitfunktion:

$y(t) = \begin{cases} \sin(\omega_0 t) & |t| < \frac{a}{2} \\ 0 & |t| \geq \frac{a}{2} \end{cases}$ mit $a > 0$.

Lösung:

Vergleiche Aufgabe 18 [$x(t) = \cos(t)\cdot\mathrm{rect}(\frac{t}{2\pi})$]. Wurde in VU vorgerechnet.

$y(t) = \sin(\omega_0 t)\cdot\mathrm{rect}_a(t) = g(t)\cdot h(t)$

$g(t) = \sin(\omega_0 t)$

$h(t) = \mathrm{rect}_a(t)$

$g(t) \cdot h(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2\pi} G(j\omega) * H(j\omega)$

Laut Korrespondenzen:

$G(j\omega) = j\pi\delta(\omega + \omega_0) - j\pi\delta(\omega - \omega_0)$

$H(j\omega) = a \cdot \frac{\sin(\omega \frac{a}{2})}{\omega \frac{a}{2}}$

Somit:

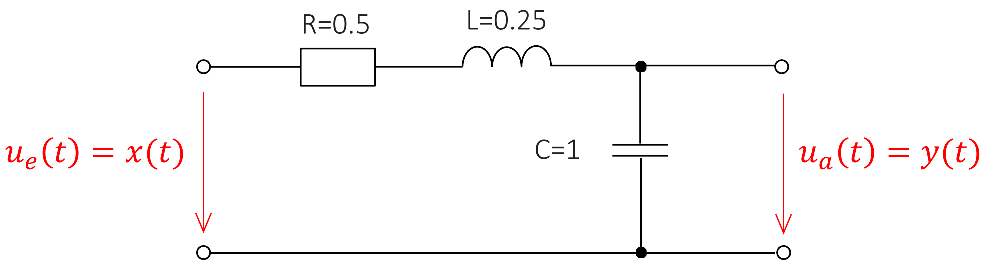
$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} G(j\omega) * H(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} \cdot ja\pi \int \delta(\Omega + \omega_0) \cdot \frac{\sin((\Omega - \omega)\frac{a}{2})}{(\Omega - \omega)\frac{a}{2}} d\Omega \\
&- \frac{1}{2\pi} \cdot ja\pi \int \delta(\Omega - \omega_0) \cdot \frac{\sin((\Omega - \omega)\frac{a}{2})}{(\Omega - \omega)\frac{a}{2}} d\Omega \\
&= j\frac{a}{2} \left[\frac{\sin((-\omega_0 - \omega)\frac{a}{2})}{(-\omega_0 - \omega)\frac{a}{2}} - \frac{\sin((\omega_0 - \omega)\frac{a}{2})}{(\omega_0 - \omega)\frac{a}{2}} \right]
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{2\pi} G(j\omega) * H(j\omega) = j\frac{a}{2} \left[\frac{\sin((\omega_0 + \omega)\frac{a}{2})}{(\omega_0 + \omega)\frac{a}{2}} - \frac{\sin((\omega_0 - \omega)\frac{a}{2})}{(\omega_0 - \omega)\frac{a}{2}} \right]}$$

D.2 Lösungen Aufgaben zu Systemen

Aufgabe 63

Bestimmen Sie für das skizzierte LTI-System die Systemdifferentialgleichung für $y(t)$ und daraus die Spannungsübertragungsfunktion $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$.



Lösung:

$$i_C = C\frac{dy}{dt} = C\dot{y}$$

$$u_L = L\frac{di_C}{dt} = LC\ddot{y}$$

$$u_e = x = Ri_C + LC\ddot{y} + y$$

Damit ergibt sich die Systemdifferentialgleichung als

$$x = RC\dot{y} + LC\ddot{y} + y$$

Nach Transformation in den Laplace-Bereich ergibt sich somit

$$X(s) = RC \cdot sY(s) + LC \cdot s^2 Y(s) + Y(s)$$

und damit die Spannungsübertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

Aufgabe 64

Bestimmen Sie für das System mit der Übertragungsfunktion $H(s) = \dfrac{5s+3}{2s^3 + as^2 + 3s + 3}$ den Wertebereich des Parameters a damit das System stabil ist.

Lösung:

Mit Hilfe des Hurwitz-Kriteriums lässt sich errechnen für welches a

$$H(s) = 2s^3 + as^2 + 3s + 3$$

ein Hurwitz-Polynom ist.

Wir berechnen die Hurwitz-Matrix:

$$H = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & {\scriptstyle H_1} & {\scriptstyle H_2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} a & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & a & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

Alle Determinanten müssen > 0 sein:

$$\begin{aligned} H_1 &= a & &\Rightarrow \quad a > 0 \\ H_2 &= 3a - 6 & &\Rightarrow \quad a > 2 \\ H_3 &= 3H_2 = 3\,[3a - 6] & &\Rightarrow \quad a > 2 \end{aligned}$$

(Anmerkung: Die Berechnung von H_3 ist nicht notwendig, da für ein System 2. Ordnung bereits $H_2 > 0$ ein notwendiges und hinreichendes Stabilitätskriterium darstellt.)

Der Wertebereich für a, in dem das System stabil ist, lautet $\boxed{a > 2}$.

Aufgabe 65

Bestimmen Sie mit Hilfe des Routh-Verfahrens, ob das System mit der Übertragungsfunktion $H(s) = \dfrac{s^2 + 2s + 8}{s^5 + 3s^4 + s^3 + 5s^2 + 2s + 7}$ stabil ist. Wie lautet der zweite Entwicklungs-Koeffizient der Kettenbruchentwicklung? Ist das System stabil?

Lösung:

Für die Anwendung des Routh-Kriteriums zerlegen wir $a(s) = s^5 + 3s^4 + s^3 + 5s^2 + 2s + 7$ in ein gerades, a_g, und ein ungerades, a_u, Polynom:

$$\begin{aligned} a_g &= 3s^4 + 5s^2 + 7 \\ a_u &= s^5 + s^3 + 2s \end{aligned}$$

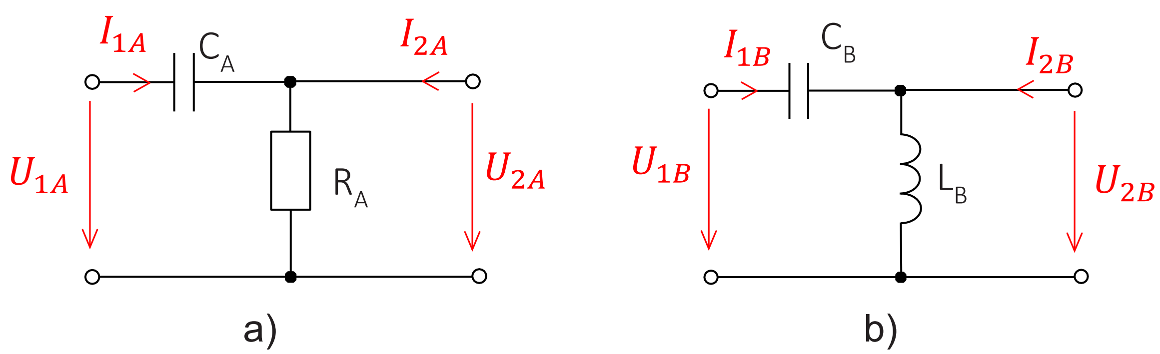
Da a_u einen höheren Grad aufweist, führen wir die Kettenbruchentwicklung $\dfrac{a_u(s)}{a_g(s)}$ durch:

	$s^5 + s^3 + 2s$		
	$s^5 + \frac{5}{3}s^3 + \frac{7}{3}s$	$3s^4 + 5s^2 + 7$	$\frac{1}{3}s$
$-\frac{9}{2}s$	$-\frac{2}{3}s^3 - \frac{1}{3}s$	$3s^4 + \frac{3}{2}s^2$	
	$-\frac{2}{3}s^3 - \frac{4}{3}s$	$\frac{7}{2}s^2 + 7$	$-\frac{4}{21}s$
$\frac{7}{2}s$	s	$\frac{7}{2}s^2$	
	s	7	$\frac{1}{7}s$
	0		

Der zweite Entwicklungskoeffizient lautet $\boxed{-\frac{9}{2}s}$ und ist < 0. Damit könnte man die Kettenbruchentwicklung sofort abbrechen, es handelt sich bei $a(s)$ um kein Hurwitz-Polynom $\Rightarrow$ $\boxed{\textit{System instabil}}$.

Aufgabe 66

Geben seien zwei Zweitore A und B (siehe Zeichnung). Bestimmen Sie die Impedanzmatrizen der Einzel-Systeme.



Lösung:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} U_1 = Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_2 \\ U_2 = Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot I_2 \end{cases}$$

Zweitor A:

$$\begin{aligned} Z_{11} &= \left.\frac{U_1}{I_1}\right|_{I_2=0} &= \frac{1}{sC_A} + R_A \\ Z_{12} &= \left.\frac{U_1}{I_2}\right|_{I_1=0} &= R_A \\ Z_{21} &= \left.\frac{U_2}{I_1}\right|_{I_2=0} &= R_A \\ Z_{22} &= \left.\frac{U_2}{I_2}\right|_{I_1=0} &= R_A \end{aligned}$$

Somit lautet die Impedanzmatrix

$$Z_A = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{sC_A} + R_A & R_A \\ R_A & R_A \end{bmatrix}$$

Zur Bestimmung der Impedanzmatrix des Zweitors B kann man genauso vorgehen:

$$\begin{aligned} Z_{11} &= \left.\frac{U_1}{I_1}\right|_{I_2=0} &= sL_B + \frac{1}{sC_B} \\ Z_{12} &= \left.\frac{U_1}{I_2}\right|_{I_1=0} &= sL_B \\ Z_{21} &= \left.\frac{U_2}{I_1}\right|_{I_2=0} &= sL_B \\ Z_{22} &= \left.\frac{U_2}{I_2}\right|_{I_1=0} &= sL_B \end{aligned}$$

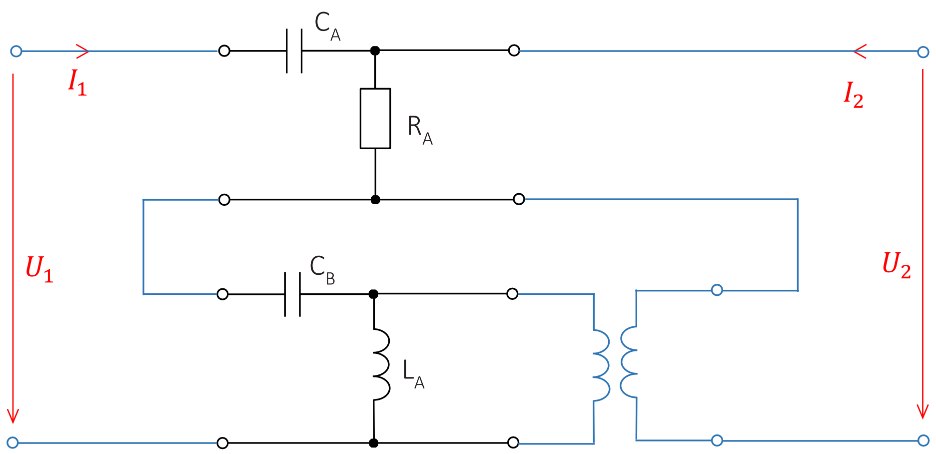
Alternativ kann man die Ähnlichkeit der beiden Zweitore ausnutzen und folgende Ersetzungen durchführen, $C_A \to C_B$, $R_A \to sL_B$.

Beide Möglichkeiten ergeben

$$Z_B = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sL_B + \frac{1}{sC_B} & sL_B \\ sL_B & sL_B \end{bmatrix}$$

Aufgabe 67

Die beiden Zweitore aus Aufgabe 66 werden unter Verwendung eines idealen Übertragers miteinander in Serie verschalten (siehe nachfolgende Skizze).



Das kombinierte System wird anschließend am Ausgang (Tor Nummer 2) kurzgeschlossen (d.h. $U_2 = 0$). Ermitteln Sie für diesen Fall die Übertragungsfunktion $H(s) = Z_1(s) = \frac{U_1(s)}{I_1(s)}$.

Lösung:

Die Impedanzmatrix der Serienschaltung der beiden Einzelsysteme erhält man aus der Summe der Einzel-Impedanzmatrizen:

$$Z_{ges} = Z_A + Z_B = \begin{bmatrix} R_A + \dfrac{1}{sC_A} + sL_B + \dfrac{1}{sC_B} & sL_B + R_A \\ R_A + sL_B & R_A + sL_B \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} U_1 = Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_2 \\ U_2 = Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot I_2 = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad I_2 = -\dfrac{Z_{21}}{Z_{22}} \cdot I_1 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_1 = Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot \left(-\frac{Z_{21}}{Z_{22}} \right) \cdot I_1$$

$$H(s) \equiv Z_1(s) = \frac{U_1}{I_1} = Z_{11} - Z_{12} \cdot \frac{Z_{21}}{Z_{22}}$$

$$= R_A + \frac{1}{sC_A} + sL_B + \frac{1}{sC_B} - (sL_B + R_A) \cdot \frac{R_A + sL_B}{sL_B + R_A}$$

$$= \frac{1}{sC_A} + \frac{1}{sC_B} = \frac{C_B + C_A}{s \cdot C_A C_B}$$

Somit $\boxed{H(s) = \dfrac{C_A + C_B}{C_A \cdot C_B} \cdot \dfrac{1}{s}}$

Aufgabe 68

Realisieren Sie für die Übertragungsfunktion $H(s) = \dfrac{4s^2 + 7s + 2}{4s^2 + 6s + 1/2}$ durch geeignete Verschaltung von Widerständen, Kondensatoren und Induktivitäten die Impedanzform eines Zweipols in Kettenbruchschaltung. Welches Element müssen Sie für Z_3 verwenden und welchen Wert hat dieses?

Lösung:

Wir bringen die gegebene Übertragungsfunktion in die Form

$$H(s) = Z_1 + \cfrac{1}{Y_2 + \cfrac{1}{Z_3 + \cfrac{1}{Y_4}}}$$

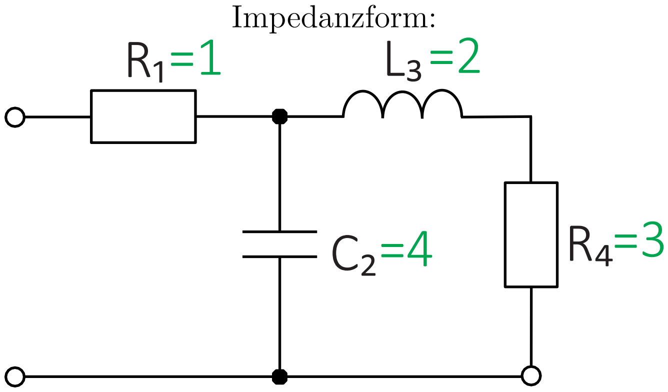
Dazu führen wir die folgende Kettenbruchentwicklung durch:

	$4s^2 + 7s + 2$		
	$4s^2 + 6s + \frac{1}{2}$	$4s^2 + 6s + \frac{1}{2}$	1
$4s$	$s + \frac{3}{2}$	$4s^2 + 6s$	
	s	$\frac{1}{2}$	$2s$
$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	
		0	

Wir erhalten somit:

$$H(s) = \underbrace{1}_{Z_1} + \cfrac{1}{\underbrace{4s}_{Y_2} + \cfrac{1}{\underbrace{2s}_{Z_3} + \cfrac{1}{\underbrace{\cfrac{1}{3}}_{Y_4}}}}$$

Impedanzform:

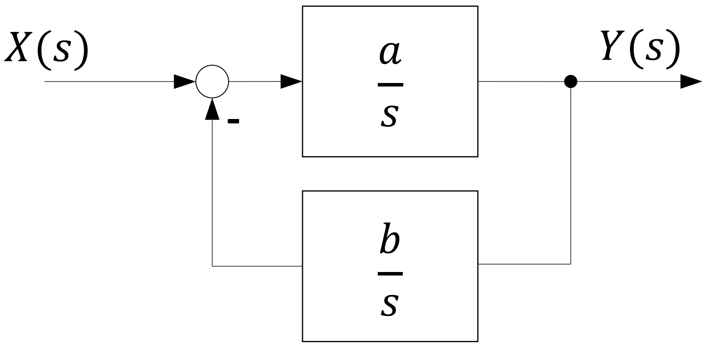


Koeffizientenvergleich:

$$\begin{array}{llcccll}
Z_1: & R_1 & = & 1 & & & \\
Y_2: & sC_2 & = & 4s & \Rightarrow & C_2 & = 4 \\
Z_3: & sL_3 & = & 2s & \Rightarrow & L_3 & = 2 \\
Y_4: & G_4 & = & \frac{1}{R_4} = \frac{1}{3} & \Rightarrow & R_4 & = 3
\end{array}$$

Aufgabe 69

Zwei Integrator-Glieder werden wie folgt miteinander kombiniert:



Berechnen und skizzieren Sie $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$ für $a = 1$, $b = 2$ wenn an den Eingang ein Einheitssprung $x(t) = \varepsilon(t)$ gelegt wird.

Lösung:

$$Y = \left(X - Y \cdot \frac{b}{s}\right) \cdot \frac{a}{s} \qquad \Rightarrow \qquad Y\left(1 + \frac{ab}{s^2}\right) = X\frac{a}{s}$$

Somit:

$$Y(s) = \frac{as}{s^2 + ab} X(s)$$

Mit den gegebenen Werten für a und b erhält man die Sprungantwort

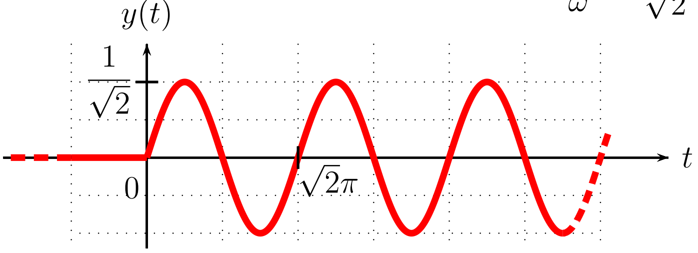
$$Y(s) = \frac{as}{s^2 + ab} \cdot \frac{1}{s} = \left.\frac{a}{s^2 + ab}\right|_{a=1,\, b=2} = \frac{1}{s^2 + 2}$$

Rücktransformation der Sprungantwort mittels Laplace-Tabelle führt auf:

$$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \sin(\omega_0 t) \cdot \varepsilon(t)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{s^2 + 2} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t) \cdot \varepsilon(t) = y(t)$$

Damit ergibt sich die Periodendauer zu $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\pi.$

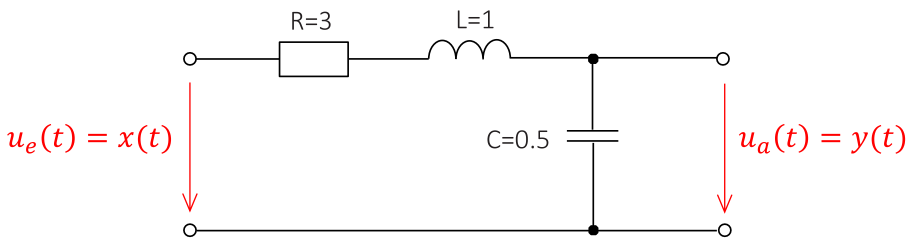


Aufgabe 70

Bestimmen Sie für das skizzierte LTI-System mit der Übertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

(vgl. Aufgabe 63) den Wert von $y(t=2)$ für ein Eingangssignal
$x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \cdot \varepsilon(t)$ mit $T = 4$, wenn $R = 3, \quad L = 1, \quad C = \frac{1}{2}$.



Lösung:

Zur Lösung der Aufgabe ist es am zielführendsten, das Ausgangssignal mittels Faltung des Eingangssignals mit der Impulsantwort zu berechnen, $y(t) = h(t) * x(t)$. Dazu benötigen wir die Impulsantwort $h(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ H(s)$. Um die notwendige Laplace-Rücktransformation durchführen zu können, setzen wir die gegebenen Werte für R, L und C in die Übertragungsfunktion $H(s)$ ein:

$$H(s) = \left.\frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}\right|_{L=1,\, C=\frac{1}{2},\, R=3} = \frac{2}{s^2 + 3s + 2}$$

Die Pole von $H(s)$ lauten $s = -1$ und $s = -2$: $s^2 + 3s + 2 = (s+2)(s+1)$. Damit lässt sich die Partialbruchzerlegung von $H(s)$ wie folgt durchführen:

$$H(s) = \frac{2}{(s+2)(s+1)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+1}$$

$$A \cdot (s+1) + B \cdot (s+2) = 2$$

$$s = -1: \quad B \cdot (-1+2) = 2 \quad \Rightarrow \quad B = 2$$

$$s = -2: \quad A \cdot (-1) = 2 \quad \Rightarrow \quad A = -2$$

$$\Rightarrow \quad H(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2} = 2 \cdot \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}\right)$$

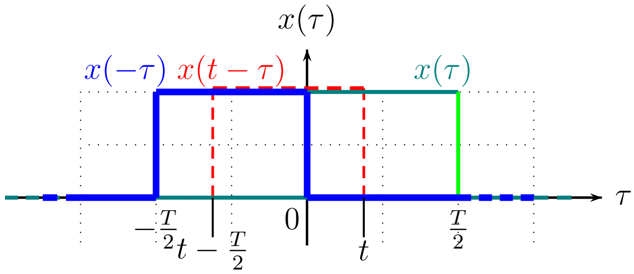
Die Rücktransformation in den Zeitbereich ist einfach mit folgender Korrespondenz durchzuführen: $\frac{1}{s-a} \circ\!\!-\!\!\bullet\ e^{at} \cdot \varepsilon(t)$

$$\Rightarrow \quad H(s) \circ\!\!-\!\!\bullet\ h(t) = 2\left[e^{-t} - e^{-2t}\right] \cdot \varepsilon(t)$$

Damit können wir das Ausgangssignal $y(t)$ mit Hilfe der Faltung wie folgt berechnen:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau$$

Für die gegebene Signalform $x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \cdot \varepsilon(t)$ lässt sich das Faltungsintegral sehr einfach berechnen. Es müssen drei Fälle unterschieden werden: $t < 0$, $0 \leq t < T/2$, $t \geq T/2$. Um dies zu sehen hilft die folgende Skizze:



Die Faltungsintegrale für die drei Fälle lauten:
$t < 0$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{0} h(\tau) \cdot \mathbf{0} d\tau = 0$$

$0 \leq t < T/2$:

$$y(t) = \int_{0}^{t} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{t} h(\tau) \cdot \mathbf{1} d\tau$$

$t \geq T/2$:

$$y(t) = \int_{t-T/2}^{t} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{t-T/2}^{t} h(\tau) \cdot \mathbf{1} d\tau$$

Gefordert ist $y(t=2)$. Da $T = 4$, genügt für $t = 2$ die Berechnung eines der beiden letzteren Integrale. Wir wählen den Fall $t \geq T/2$:

$$y(t) = \int_{t-\frac{T}{2}}^{t} h(\tau) \cdot \mathbf{1} d\tau$$

Somit:

$$y(t) = \int_{t-\frac{T}{2}}^{t} h(\tau)d\tau \underset{T=4}{=} 2 \cdot \int_{t-2}^{t} e^{-\tau} d\tau - 2 \cdot \int_{t-2}^{t} e^{-2\tau} d\tau$$

$$\begin{aligned} y(t) &= -2e^{-\tau}\Big|_{t-2}^{t} + 2 \cdot \frac{1}{2} e^{-2\tau}\Big|_{t-2}^{t} \\ &= -2\left(e^{-t} - e^{-t+2}\right) + \left(e^{-2t} - e^{-2t+4}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y(t=2) &= -2\left(e^{-2}-e^{-2+2}\right) &+& \left(e^{-2\cdot 2}-e^{-2\cdot 2+4}\right) \\
&= -2\left(e^{-2}-e^{0}\right) &+& \left(e^{-4}-e^{0}\right) \\
&= -2\left(e^{-2}-1\right) &+& \left(e^{-4}-1\right) \\
&= e^{-4}-2e^{-2}+1
\end{aligned}
$$

Aufgabe 71

Bestimmen Sie für das System mit der Übertragungsfunktion $H(s) = \dfrac{as}{2s^2+s+3}$ den Wert von a so, dass das Ausgangssignal $y(t)$ des Systems für ein Eingangssignal $x(t) = 3\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\varepsilon(t)$ für $t \gg 30$ eine Amplitude von 1 aufweist.

Lösung:

Das System hat Pole bei $s_{1,2} = -1/4 \pm j\sqrt{23}/4$. Die Impulsantwort $h(t)$ lautet $h(t) = \left[Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}\right]\cdot\varepsilon(t)$ (vergleiche Aufgabe 70). Einschwingvorgänge werden daher mit der Zeitkonstante $1/Re(s_{1,2}) = 4$ abklingen. Nach 6 Zeitkonstanten (d.h. nach $t = 24$) hat das System daher in sehr guter Näherung seinen eingeschwungenen Zustand erreicht. Für $t \gg 30$ können wir daher die komplexe Wechselstromrechnung anwenden und die Übertragungsfunktion für eingeschwungene Zustände anschreiben:

$$H(s) \underset{s\to j\omega}{=} \frac{aj\omega}{-2\omega^2+j\omega+3}$$

Das gegebene Signal $x(t) = 3\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\varepsilon(t) = 3\cos\left(2t+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\varepsilon(t)$ schwingt mit der Kreisfrequenz $\omega = 2$ und kann für $t \gg 30$ als reeller Anteil einer komplexen Schwingung dargestellt werden:

$$x(t) = Re\{3e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{j\omega t}\} = Re\{x_0 e^{j\omega t}\}$$

Die komplexe Amplitude des Signals lautet also $x_0 = 3e^{-j\frac{\pi}{4}}$. Die komplexe Amplitude des Ausgangssignals ergibt sich dann als

$$y_0 = H(j\omega)x_0$$

Somit:

$$y_0 = H(j\omega)\Big|_{\omega=2}\cdot x_0 = \frac{j2a}{-8+j2+3}\cdot 3e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

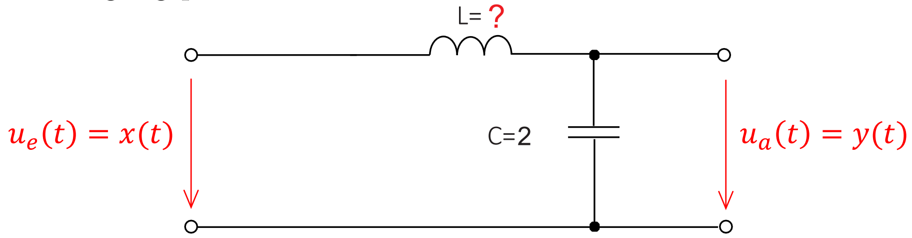
Wir verlangen, dass die Amplitude des Ausgangssignals $|y_0| = 1$:

$$|y_0| = \frac{2a}{|-5+j2|}\cdot 3 = \frac{6a}{\sqrt{5^2+2^2}} \overset{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{\sqrt{29}}{6}}.$$

Aufgabe 72

Bestimmen Sie für das skizzierte LTI-System (das System von Aufgabe 63 für $R = 0$) für $C = 2$ den Wert von L so, dass $y(t)$ nach einer Anregung durch einen Dirac-Impuls eine Schwingungsperiode von $T = \pi$ aufweist.



Lösung:

Die Übertragungsfunktion des Systems wurde bereits in Aufgabe 63 gefunden:

$$H(s) = \left. \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \right|_{R=0} \Rightarrow H(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{1}{LC}}$$

Gesucht wird die Stoßantwort/Impulsantwort:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$$

Mit der Abkürzung $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$ ergeben sich die Pole der Übertragungsfunktion zu $s_{1,2} = \pm j\omega_0$. Die Stoßantwort ist also eine reine Sinusschwingung, wie wir auch durch Vergleich mit der Laplace-Tabelle erkennen:

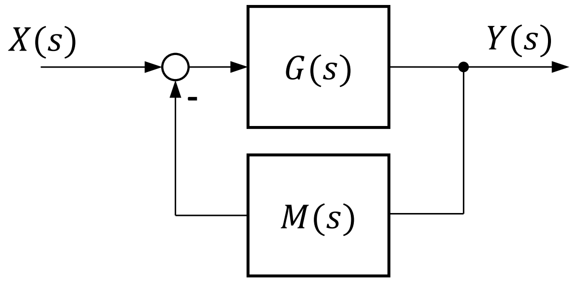
$$\frac{\omega_0^2}{s^2 + \omega_0^2} \circ\!\!-\!\!\bullet\ \omega_0 \sin(\omega_0 t) \cdot \varepsilon(t).$$

Wir verlangen, dass $T = \frac{2\pi}{\omega_0} \stackrel{!}{=} \pi \Rightarrow \quad \omega_0 \stackrel{!}{=} 2.$

$\omega_0^2 = 4 = \frac{1}{LC}$ für $C = 2 \Rightarrow \boxed{L = \frac{1}{8}}$.

Aufgabe 73

Gegeben sei das folgende dynamische System mit $G(s) = \frac{s}{s^2 + 3s + 2}$ und $M(s) = \frac{as}{s^2 + s + 2}$. Für welchen Wertebereich des Parameters a ist das Gesamtsystem mit der Übertragungsfunktion $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ stabil?



Lösung:

$$Y(s) = [X(s) - Y(s) \cdot M(s)]\, G(s)$$

$$Y(s)[1 + M(s)G(s)] \;\Rightarrow\; H = \frac{Y}{X} = \frac{G}{1 + M \cdot G}$$

$$M(s) = \frac{M_Z(s)}{M_N(s)}, \quad G(s) = \frac{G_Z(s)}{G_N(s)} \quad \Rightarrow H(s) = \frac{\dfrac{G_Z}{G_N}}{1 + \dfrac{G_Z \cdot M_Z}{G_N \cdot M_N}} = \frac{G_Z \cdot M_N}{G_N \cdot M_N + G_Z \cdot M_Z}$$

$$P(s) = G_N \cdot M_N + G_Z \cdot M_Z = (s^2 + 3s + 2)\,(s^2 + s + 2) + a \cdot s^2$$

$$P(s) = s^4 + 3s^3 + 2s^2 + s^3 + 3s^2 + 2s + 2s^2 + 6s + 4 + as^2$$

$$P(s) = \underbrace{1}_{a_4} \cdot s^4 + \underbrace{4}_{a_3} \cdot s^3 + \underbrace{(7 + a)}_{a_2} \cdot s^2 + \underbrace{8}_{a_1} \cdot s + \underbrace{4}_{a_0}$$

Wann ist $P(s)$ ein Hurwitz-Polynom?

$$H = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&H_1 = a_3 && && \\
&H_2 = a_3 \cdot a_2 - a_4 \cdot a_1 && = 28 + 4a - 8 > 0 && \Rightarrow \boldsymbol{a > -5} \\
&H_3 = a_3 \cdot a_2 \cdot a_1 - a_4 \cdot a_1^2 - a_3^2 \cdot a_0 && = a_1(a_3 \cdot a_2 - a_1 \cdot a_4) - a_3^2 \cdot a_0 > 0 && \\
&H_4 = a_0 \cdot H_3 > 0 && \Rightarrow a_0 \cdot H_3 > 0 && \Rightarrow H_3 > 0 \text{ (wenn } a_0 > 0)
\end{aligned}$$

Somit $H_3 = 8(4(7 + a) - 8) - 16 \cdot 4 > 0 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{a > -3}}$.

Aufgabe 74

Ein LTI System antwortet auf einen Einheitssprung am Eingang mit folgendem Signalverlauf am Ausgang: $y(t) = 3(1 - e^{-2t}) \cdot \varepsilon(t)$. Wie lautet das Ausgangssignal im eingeschwungenen Zustand (für sehr große Werte von t), wenn an den Eingang eine Sinusschwingung $x(t) = 1.5 \sin(2t) \cdot \varepsilon(t)$ gelegt wird?

Lösung:

$y(t) = 3(1 - e^{-2t}) \circ\!\!-\!\!\bullet\, Y(s) = \frac{3}{s} - 3\frac{1}{s+2}$

$Y(s) = H(s) \cdot \frac{1}{s} \;\Rightarrow\; H(s) = s \cdot Y(s) = 3 - \frac{3s}{s+2} = \frac{3s+6-3s}{s+2} = \frac{6}{s+2}$

Im eingeschwungenen Zustand kann für Sinusschwingungen der Formalismus der komplexen Wechselstromrechnung angewandt werden. Dazu benötigt man die Übertragungsfunktion $H(s)$ und das Eingangssignal in komplexer Schreibweise. Das gegebene Signal $x(t) = 1.5 \sin(2t) \cdot \varepsilon(t) = 1.5 \cos(2t - \frac{\pi}{2}) \cdot \varepsilon(t)$ schwingt mit der Kreisfrequenz $\omega = 2$ und kann als reeller Anteil einer komplexen Schwingung dargestellt werden:

$$x(t) = Re\{\underbrace{1.5e^{-j\frac{\pi}{2}}}_{\underline{x}_0} \cdot e^{j\omega t}\} = Re\{\underline{x}_0 e^{j\omega t}\}$$

Somit: $\underline{y}_0 = H(s) \cdot \underline{x}_0 \underset{s \to j\omega}{=} \frac{6}{j\omega + 2} 1.5e^{-j\frac{\pi}{2}}$

$$\underline{y}_0 = 9e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{2 - j\omega}{4 + \omega^2} = \frac{9}{8} e^{-j\frac{\pi}{2}} \sqrt{2^2 + 2^2} e^{j\,\mathrm{atan}\left(\frac{-\omega}{2}\right)}$$

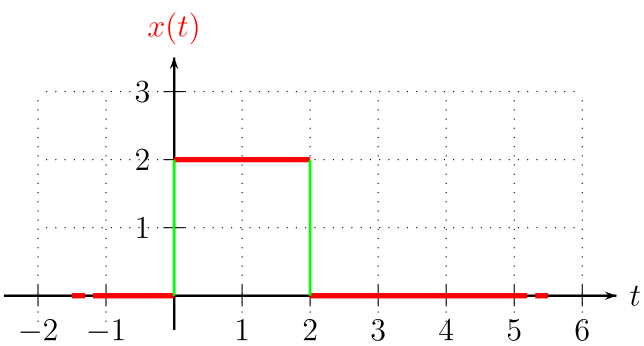
$$\underline{y}_0\Big|_{\omega=2} = \frac{9}{2\sqrt{2}} e^{-j\frac{3\pi}{4}}$$

$$y(t) = Re\{\underline{y}_0 e^{j\omega t}\}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{9}{2\sqrt{2}} \cdot \cos(2t - \tfrac{3\pi}{4})}$$

Aufgabe 75

Ein PT2-System habe Pole bei -1 und -2. Wenn man an den Eingang eine Sinusschwingung mit Amplitude 3 und Kreisfrequenz 2 anlegt, hat die Amplitude am Ausgang (nach Abklingen aller Einschwingvorgänge) einen Wert von $\frac{\sqrt{10}}{2}$. Welchen Wert hat das Ausgangssignal des PT2-Systems zum Zeitpunkt $t = 2$, wenn an den Eingang folgendes Signal gelegt wird?



Lösung:

$$H(s) = \frac{K}{(s+2)(s+1)}$$

$$|\underline{Y}_0| = \frac{\sqrt{10}}{2} = |H(s=j2)| \cdot 3 = \left|\frac{K}{(j2+2)(j2+1)}\right| \cdot 3 = \frac{3K}{\sqrt{2^2+2^2}\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{3K}{\sqrt{8}\sqrt{5}} \;\Rightarrow\; K = \frac{10}{3}$$

Somit: $H(s) = \frac{10}{3}\frac{1}{(s+2)(s+1)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+1}$.

$$A\cdot(s+1) + B\cdot(s+2) = \frac{10}{3}$$

$$s=-1: \quad B\cdot(-1+2) = \frac{10}{3} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{10}{3}$$

$$s=-2: \quad A\cdot(-2+1) = \frac{10}{3} \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{10}{3}$$

Somit:

$$H(s) = \frac{10}{3}\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}\right) \bullet\!\!-\!\!\circ\; h(t) = \frac{10}{3}\left(e^{-t} - e^{-2t}\right).$$

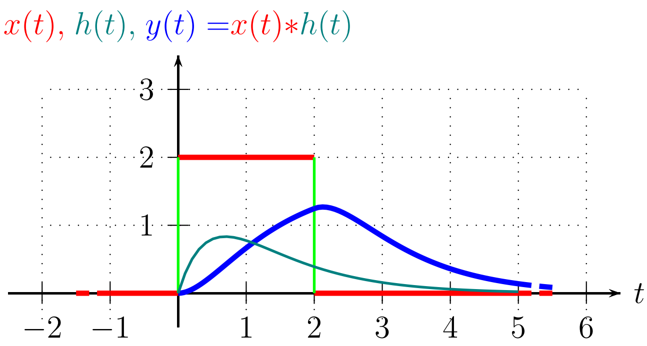
Das Ausgangssignal:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

$$\begin{aligned}
0 < t \le 2: \quad y_A(t) &= 2\int_0^t h(\tau)d\tau = \frac{20}{3}\left[-e^{-\tau} + \tfrac{1}{2}e^{-2\tau}\right]\Big|_0^t = \frac{20}{3}\left[-e^{-t} + \tfrac{1}{2}e^{-2t} + 1 - \tfrac{1}{2}\right] \\
t \ge 2: \quad y_B(t) &= 2\int_{t-2}^t h(\tau)d\tau = \frac{20}{3}\left[-e^{-\tau} + \tfrac{1}{2}e^{-2\tau}\right]\Big|_{t-2}^t \\
&= \frac{20}{3}\left[-e^{-t} + \tfrac{1}{2}e^{-2t} + e^{-(t-2)} - \tfrac{1}{2}e^{-2(t-2)}\right]
\end{aligned}$$

$$y(t=2) = \frac{20}{3}\left[-e^{-2} + \tfrac{1}{2}e^{-4} + \tfrac{1}{2}\right].$$

$$\boxed{y(t=2) = \frac{10}{3}\left[1 + e^{-4}\right] - \frac{20}{3}e^{-2}}.$$



Aufgabe 76

Ein Zweitor mit der Kettenmatrix $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{sC} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ werde am Ausgang mit einer Impedanz $Z = R$ abgeschlossen. Wie lautet der Spannungsverlauf $u(t)$ an $Z = R$ nach einem Einheitssprung am Eingang?

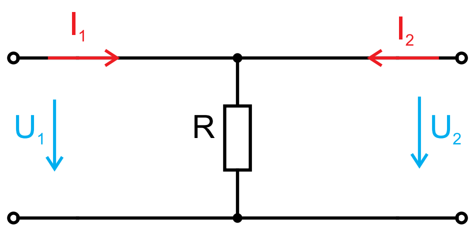
Lösung:

Wenn wir den Abschlusswiderstand als Zweitor verstehen und wir die Kettenmatrix diese Zweitores berechnen, lässt sich das Gesamtsystem als Hintereinanderschaltung von zwei Zweitoren behandeln. Es gilt dann $A_{ges} = A_1 \cdot A_2$ mit

$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{sC} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

und A_2 der Kettenmatrix des Abschlusswiderstandes.

Diese finden wir wie folgt:



$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

Wir merken, dass $U_1 = U_2$.

$$\begin{aligned} I_2 = 0: \quad & U_1 = A_{11}U_2 = A_{11}U_1 && \Rightarrow A_{11} = 1 \\ & I_1 = A_{21}U_2 = A_{21}U_1 && \Rightarrow A_{21} = \frac{1}{R} \\ U_2 = 0: \quad & U_1 = -A_{12}I_2 = 0 && \Rightarrow A_{12} = 0 \\ & I_1 = -A_{22}I_2 = A_{22}I_1 && \Rightarrow A_{22} = 1 \end{aligned}$$

$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R} & 1 \end{bmatrix}$

$$A_{ges} = A_1 \cdot A_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{sC} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\frac{1}{sRC} & \frac{1}{sC} \\ \frac{1}{R} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = A_{ges} \cdot \begin{bmatrix} U_2 = U_R \\ -I_2 \end{bmatrix},$$

wobei hier I_2 den Strom am Ausgang des Gesamtzweitores laut obiger Skizze bedeutet. Für $I_2 = 0$ folgt, dass $U_1 = A_{11} U_R$ und damit $\dfrac{U_R}{U_1} = \dfrac{1}{A_{11}} = \dfrac{sRC}{sRC+1}$

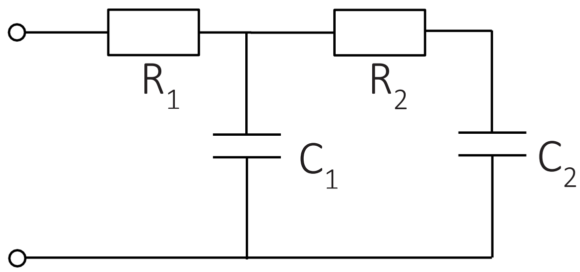
$\boxed{\Rightarrow \quad H(s) = \dfrac{s}{s+\frac{1}{RC}}}$.

Für den Einheitssprung am Eingang:

$Y(s) = H(s) \cdot \dfrac{1}{s} = \dfrac{1}{s+\frac{1}{RC}} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \boxed{e^{-\frac{t}{RC}} \cdot \varepsilon(t)}$.

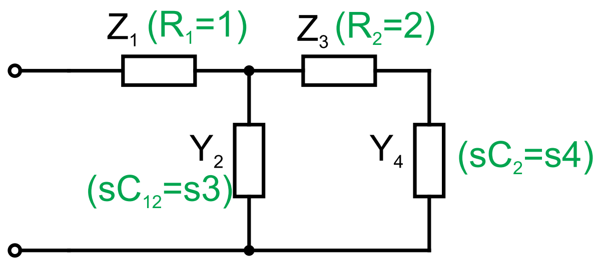
Aufgabe 77

Wie lautet die Impedanzfunktion des skizzierten Zweipols, wenn $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, $C_1 = 3$, $C_2 = 4$?



Lösung:

Wir setzen die gegebenen Werte ein:



Die Impedanzfunktion lautet:

$$Z(s) = Z_1 + \cfrac{1}{Y_2 + \cfrac{1}{Z_3 + \cfrac{1}{Y_4}}} = \mathbf{1} + \cfrac{1}{\mathbf{3s} + \cfrac{1}{\mathbf{2} + \cfrac{1}{\mathbf{4s}}}}$$

Nach Algebra erhalten wir: $\boxed{Z(s) = \dfrac{24s^2 + 15s + 1}{24s^2 + 7s}}$.

Alternativ kann die Impedanzfunktion einfach mit Hilfe der Regeln über Reihen- und Parallelschaltungen von Impedanzen ermittelt werden.

Ergebniskontrolle mit Hilfe der Kettenbruchentwicklung:

	$24s^2 + 15s + 1$		
	$24s^2 + 7s$	$24s^2 + 7s$	$1 \to Z_1$
$Y_2 \leftarrow 3s$	$8s + 1$	$24s^2 + 3s$	
	$8s$	$4s$	$2 \to Z_3$
$Y_4 \leftarrow 4s$	1	$4s$	
		0	

Aufgabe 78

Wie sieht das Pol-Nullstellen-Diagramm des LTI-Systems mit der Stoßantwort $h(t) = (2te^{-3t} - 1) \cdot \varepsilon(t)$ aus? [Pole: Kreuze, Nullstellen: Kreise]

Lösung:

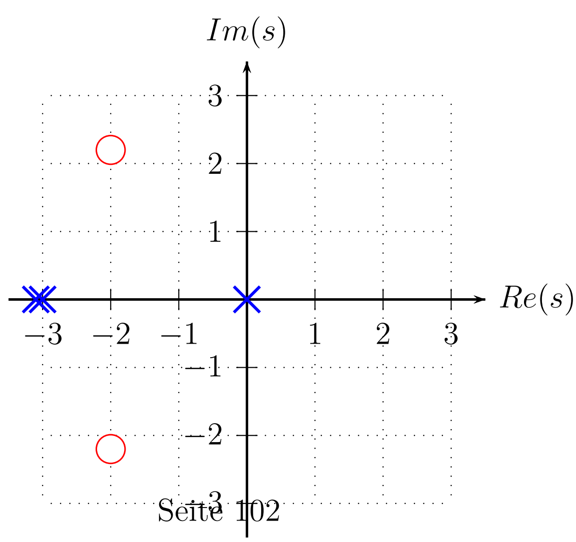
$$h(t) = 2te^{-3t} - 1 \circ\!\!-\!\!\bullet\; H(s) = 2\frac{1}{(s+3)^2} - \frac{1}{s}$$
$$= \frac{2s - (s+3)^2}{(s+3)^2 s} = \frac{-s^2 - 4s - 9}{(s+3)^2 s}$$

Pole: zweifacher Pol bei $s = -3$; einfacher Pol bei $s = 0$.

Nullstellen:

$$-s^2 - 4s - 9 = 0 \;\Rightarrow\; s^2 + 4s + 9 = 0$$
$$s_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 9}}{2} = -2 \pm j\sqrt{5}$$

Das Pol-Nullstellen-Diagramm schaut damit folgendermaßen aus:



Der Pol bei Null bedeutet, dass das System grenzstabil ist. Dies ist auch unmittelbar aus der Stoßantwort ersichtlich: Aufgrund des konstanten Wertes -1 für $t \to \infty$ ist sie nicht absolut integrierbar.

Aufgabe 79

Für welchen Wertebereich von a ist das LTI-System mit der angegebenen Systemdifferentialgleichung stabil?

$$\left(5\frac{d^4}{dt^4} + 2\frac{d^3}{dt^3} + a\frac{d^2}{dt^2} + 3\frac{d}{dt} + 2\right) y(t) = \left(3\frac{d^2}{dt^2} + 2\right) x(t)$$

Lösung:

Berechnung mittels Hurwitz-Kriterium. Aufstellen der Hurwitz-Matrix:

$$H = \begin{bmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Alle nordwestlichen Unterdeterminanten (Hauptminoren) müssen positiv sein. Es gilt $H_4 = a_0 \cdot H_3$. Da $a_0 > 0$, ist es unter Ausnützung des Liénard-Chipart-Kriteriums notwendig und hinreichend, wenn alle ungeraden Hurwitzdeterminanten positiv sind:

$$\begin{aligned} H_1 &= a_3 > 0 \\ H_3 &= a_3 \cdot a_2 \cdot a_1 - a_4 \cdot a_1^2 - a_3^2 \cdot a_0 > 0. \end{aligned}$$

$H_1 = a_3 = 2 > 0$ ist offenbar erfüllt. Es bleibt zu prüfen, für welche Werte von a die Hurwitzdeterminante $H_3 > 0$ ist. Nach Einsetzen der Zahlenwerte erhält man sofort:

$$H_3 = 2 \cdot a \cdot 3 - 4 \cdot 2 - 5 \cdot 9 = 6a - 8 - 45 = 6a - 53 > 0 \;\Rightarrow\; \boxed{a > \frac{53}{6}}$$

Aufgabe 80

Eine Regelstrecke besteht aus zwei identischen, stabilen, seriell miteinander verknüpften LTI-Systemen vom Typ PT1. Zur Charakterisierung des Zeitverhaltens der Strecke wird an Eingang des ersten Systems ein Dirac-Stoß gelegt. Dabei wird beobachtet, dass das Ausgangssignal am zweiten System, $h(t)$, ein Maximum bei $t_{max} = \frac{1}{2}$ zeigt. Zur Bestimmung der Verstärkung der Strecke wird danach eine Sinusschwingung mit Kreisfrequenz $\omega = 2$ und Amplitude $x_0 = 4$ gelegt. Nach Abklingen aller Einschwingvorgänge wird am Ausgang des zweiten Systems eine Amplitude von $y_0 = 2$ gemessen. Wie lautet die Übertragungsfunktion des einzelnen PT1-Gliedes?

Lösung:

Die Übertragungsfunktion eines PT1-Gliedes hat die Form

$$H_{PT1}(s) = \frac{k}{s+a}.$$

Die Übertragungsfunktion der Strecke $H_S(s)$ erhält man damit durch Quadrierung derselben (Serienschaltung zweier identischer PT1-Glieder!):

$$H_S(s) = \frac{k^2}{(s+a)^2}$$

Gesucht sind also zwei Unbekannte, die Verstärkung k und der die Zeitkonstante bestimmende Pol $-a$. Für die Bestimmung dieser beiden Unbekannten sind die Ergebnisse von zwei Messungen gegeben.

Die erste Messung betrifft die Stoßantwort der Strecke, $h(t)$. Diese zeigt ein Maximum bei $t_{max} = \frac{1}{2}$.
Stoßantwort:

$$h(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{k^2}{(s+a)^2} \Rightarrow h(t) = k^2 t e^{-at} \cdot \varepsilon(t)$$

Das Maximum dieser Funktion erhält man durch Ableitung nach der Zeit und Nullsetzen:

$$\frac{d}{dt} h(t) = k^2[e^{-at} - ate^{-at}], t > 0.$$

Dies ergibt

$$t = t_{max} = \frac{1}{a},$$

bzw.

$$a = \frac{1}{t_{max}} = 2.$$

Die Verstärkung k^2 erhält man aus der Messung mit der Sinusschwingung. Die Amplitude der Sinusschwingung am Ausgang erhält man durch Anwendung der Regeln der komplexen Wechselstromrechnung als

$$|\underline{y}_0| = |H(s=j\omega)| \cdot |\underline{x}_0| = \left|\frac{k^2}{(j\omega + a)^2}\right| \cdot |\underline{x}_0| = \frac{k^2}{|-\omega^2 + 2ja\omega + a^2|} \cdot |\underline{x}_0| = \frac{k^2}{|(a^2 - \omega^2) + 2ja\omega|} \cdot |\underline{x}_0|.$$

Mit $a = \frac{1}{t_{max}}$ erhält man

$$|\underline{y}_0| = \frac{k^2}{\left|\underbrace{(\frac{1}{t_{max}^2} - \omega^2)}_{0} + j\frac{2\omega}{t_{max}}\right|} \cdot |\underline{x}_0|.$$

Da $\frac{1}{t_{max}^2} - \omega^2 = 0$ (das war bei allen Gruppen so!!), führt dies auf

$$|\underline{y}_0| = \frac{k^2}{\frac{2\omega}{t_{max}}} \cdot |\underline{x}_0| \qquad \Rightarrow \qquad k^2 = \left|\frac{\underline{y}_0}{\underline{x}_0}\right| \cdot \frac{2\omega}{t_{max}} = \frac{2}{4}\frac{2\cdot 2}{\frac{1}{2}} = 4$$

Mit $k = \sqrt{k^2} = 2$ erhält man daraus unmittelbar

$$\boxed{H_{PT1}(s) = \frac{2}{s+2}}$$

Aufgabe 81

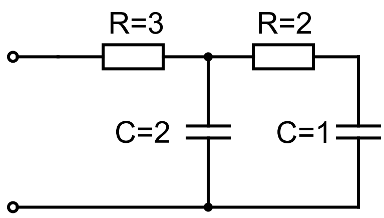
Gegeben sei das System mit der Übertragungsfunktion $H(s) = \frac{12s^2 + 11s + 1}{4s^2 + 3s}$. Realisieren Sie für diese durch geeignete Verschaltung von Widerständen, Kondensatoren und/oder Induktivitäten die <u>Impedanzform</u> eines Zweipols in Kettenbruchschaltung.

Lösung:

Kettenbruchentwicklung mit Interpretation der Koeffizienten für eine Impedanzform:

$$H(s) = \frac{(12s^2 + 11s + 1)}{(4s^2 + 3s)} = Z_1 + \cfrac{1}{Y_2 + \cfrac{1}{Z_3 + \cfrac{1}{Y_4}}} = \mathbf{3} + \cfrac{1}{\mathbf{2s} + \cfrac{1}{\mathbf{2} + \cfrac{1}{\mathbf{s}}}}$$

	$12s^2 + 11s + 1$		
	$12s^2 + 9s$	$4s^2 + 3s$	$3 \to Z_1$
$Y_2 \leftarrow 2s$	$2s + 1$	$4s^2 + 2s$	
	$2s$	$1s$	$2 \to Z_3$
$Y_4 \leftarrow s$	1	$1s$	
		0	



Aufgabe 82

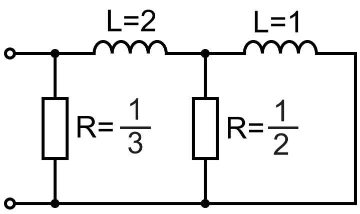
Gegeben sei das System mit der Übertragungsfunktion $H(s) = \frac{12s^2 + 11s + 1}{4s^2 + 3s}$. Realisieren Sie für diese durch geeignete Verschaltung von Widerständen, Kondensatoren und/oder Induktivitäten die <u>Admittanzform</u> eines Zweipols in Kettenbruchschaltung.

Lösung:

Kettenbruchentwicklung mit Interpretation der Koeffizienten für eine Admittanzform:

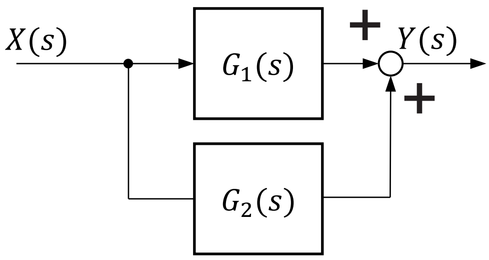
$$H(s) = \frac{(12s^2 + 11s + 1)}{(4s^2 + 3s)} = Y_1 + \cfrac{1}{Z_2 + \cfrac{1}{Y_3 + \cfrac{1}{Z_4}}} = \mathbf{3} + \cfrac{1}{\mathbf{2s} + \cfrac{1}{\mathbf{2} + \cfrac{1}{\mathbf{s}}}}$$

	$12s^2 \; + \; 11s \; + \; 1$		
	$12s^2 \; + \; 9s$	$4s^2 \; + \; 3s$	$3 \rightarrow Y_1$
$Z_2 \leftarrow 2s$	$2s \; + \; 1$	$4s^2 \; + \; 2s$	
	$2s$	$1s$	$2 \rightarrow Y_3$
$Z_4 \leftarrow s$	1	$1s$	
		0	



Aufgabe 83

Zwei LTI-Systeme werden miteinander laut untenstehender Skizze verknüpft. Wie lautet das Ausgangssignal $y(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, Y(s)$, wenn an den Eingang ein Einheitssprung $x(t) = \varepsilon(t)$ gelegt wird, und die Übertragungsfunktionen der beiden Systeme $G_1(s) = \dfrac{3}{s+1}$ und $G_2(s) = \dfrac{2}{s+2}$ sind?



Lösung:

Die beiden Systeme sind parallel geschalten, die Gesamtübertragungsfunktion ergibt sich also durch Summation der beiden Systeme entsprechend der Vorzeichen an der Summationsstelle:

$$H = \frac{3}{s+1} + \frac{2}{s+2}.$$

Gesucht ist $y(t)$ für einen Einheitssprung am Eingang. Dies lässt sich sehr einfach durch Faltung im Zeitbereich berechnen. Wir benötigen dazu die Stoßantwort:

$$h(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, H(s) \quad \Rightarrow \quad h(t) = 3e^{-t} + 2e^{-2t}.$$

Das Faltungsintegral lautet

$$y(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\varepsilon(t-\tau)d\tau = \int\limits_{0}^{t} h(\tau)d\tau.$$

Einsetzen von $h(t)$ führt auf den Ausdruck

$$y(t) = \int\limits_{0}^{t} (Ae^{-a\tau} + Be^{-b\tau})d\tau = \left[Ae^{-a\tau} \cdot \frac{1}{-a} + Be^{-b\tau} \cdot \frac{1}{-b} \right] \Bigg|_{0}^{t}$$

bzw.

$$y(t) = \frac{A}{a}\left(1 - e^{-at}\right) + \frac{B}{b}\left(1 - e^{-bt}\right).$$

Nach Einsetzen der Zahlenwerte für A, a, B und b erhält man

$$\boxed{y(t) = \left[4 - 3e^{-t} - e^{-2t}\right] \cdot \varepsilon(t)}$$

Aufgabe 84

Gegeben sei ein Zweitor mit der Impedanzmatrix $Z = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}s + 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Das Zweitor wird am Ausgang kurzgeschlossen und an den Eingang wird eine Spannung $u_1(t) = \frac{3}{2} \sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \varepsilon(t)$ gelegt. Danach wird, nach Abwarten aller Einschwingvorgänge, der Eingangsstromverlauf gemessen. Wie lautet dieser (Betrag und Phase)?

Lösung:

Gesucht ist der Eingangsstromverlauf $i_1(t)$ eines Zweitores für gegebenen sinusförmigen Verlauf der Eingangsspannung $u_1(t)$. Im eingeschwungenen Zustand kann daher der Formalismus der komplexen Wechselstromrechnung angewandt werden. Dazu muss eine Beziehung zwischen U_1 und I_1 der Form

$$U_1(s) = Z_1(s) \cdot I_1(s)$$

gefunden werden. Diese Beziehung lässt sich einfach finden mit Hilfe der gegebenen Impedanzmatrix und der Information, dass das Zweitor am Ausgang kurzgeschlossen wird.

Die Impedanzmatrix ist definiert als

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \underline{Z} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}.$$

Die Matrix $\underline{Z}$ hat laut Angabe die Form

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} sA + D & D \\ D & D + B \end{bmatrix}$$

mit den Zahlenwerten $A = 1/4$, $D = 3$ und $B = 1$. Kurzschluss am Ausgang bedeutet $U_2 = 0$. Mit dieser Bedingung erhält man aus der zweiten Zeile der Matrix

$$0 = Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot I_2 \quad \Rightarrow \quad I_2 = -\frac{Z_{21}}{Z_{22}} \cdot I_1$$

und, nach Einsetzen in die erste Zeile,

$$U_1 = \left(Z_{11} - \frac{Z_{21} Z_{12}}{Z_{22}} \right) \cdot I_1,$$

bzw.

$$I_1 = U_1 \frac{1}{Z_{11} - \frac{Z_{21} Z_{12}}{Z_{22}}}.$$

Nach Einsetzen der Matrixelemente führt dies auf

$$I_1(s) = \frac{B + D}{BD + sA(B + D)} \cdot U_1(s) = \frac{1}{Z_1(s)} \cdot U_1(s).$$

Anmerkung: Dies entspricht einem Zweipol bestehend aus der Serienschaltung einer Induktivität mit einem Widerstand.

Zur Berechnung des Stromverlaufes $i_1(t)$ muss zuerst die Eingangsspannung $u_1(t)$ in komplexer Form dargestellt werden:

$$u_1(t) = \mathcal{R}e \left\{ \underline{u}_{10} \cdot e^{j\omega t} \right\},$$

mit $\omega = 3$.

Unter Beachtung von $\sin(\omega t) = \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$ erhält man aus der gegebenen Eingangsspannung die komplexe Amplitude

$$\underline{u}_{10} = \frac{3}{2} e^{j\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)},$$

und damit die komplexe Amplitude des Eingangsstroms,

$$\underline{i}_{10} = \frac{1}{Z_1(s = j\omega)} \cdot \underline{u}_{10}.$$

Einsetzen der Ausdrücke für $Z_1(s = j\omega)$ und $\underline{i}_{10}$ führt auf

$$\underline{i}_{10} = \frac{B + D}{BD + j\omega A(B + D)} \cdot \frac{3}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}}.$$

Nach Einsetzen der Zahlenwerte erhält man

$$\underline{i}_{10} = \frac{4}{3 + j3} \cdot \frac{3}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} = \frac{6}{2\sqrt{2}} \frac{1}{e^{j\frac{\pi}{4}}} e^{-j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} e^{-j\frac{\pi}{2}}.$$

Damit erhält man den Stromverlauf $i_1(t)$:

$$i_1(t) = \mathcal{R}e \left\{ \underline{i}_{10} \cdot e^{j\omega t} \right\} = \mathcal{R}e \left\{ \sqrt{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j3t} \right\} = \sqrt{2} \cos\left(3t - \frac{\pi}{2}\right),$$

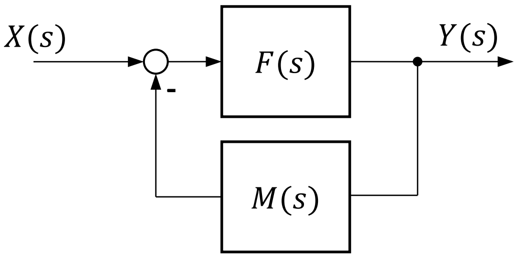
das heißt,

$$\boxed{i_1(t) = \sqrt{2} \cos\left(3t - \frac{\pi}{2}\right)}$$

Aufgabe 85

Gegeben sei der skizzierte Regelkreis mit der Übertragungsfunktion $F(s) = R(s) \cdot G(s) = \frac{K}{s+2}$ (bestehend aus Regler $R(s)$ und Strecke $G(s)$) und der Übertragungsfunktion $M(s) =$

$\frac{1}{s+4}$ des Messgliedes. In welchem maximalen Werte-Bereich kann die Verstärkung K des Reglers gewählt werden, sodass die Führungsübertragungsfunktion $H_{\text{Führ}}(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ stabil ist und das Ausgangssignal $y(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ Y(s)$ nach einem Dirac-Impuls am Eingang keinen oszillatorischen Anteil enthält (also nur aus abklingenden Exponentialfunktionen besteht)?



Lösung:

Die Führungsübertragungsfunktion $H_{\text{Führ}}(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ ist dann stabil, wenn ihre Pole alle in der linken offenen Halbebene liegen. Die zugehörige Stoßantwort (Impulsantwort) $h(t)$ oszilliert dann nicht und besteht nur aus abklingenden Exponentialfunktionen, wenn die Pole von $H_{\text{Führ}}(s)$ alle reell sind.

Wir benötigen also $H_{\text{Führ}}(s)$, welche sich einfach mit Hilfe der Skizze folgendermaßen ermitteln lässt:

$$Y = (X - Y \cdot M)F = X \cdot F - Y \cdot M \cdot F \quad \Rightarrow \quad Y = \frac{F}{1 + M \cdot F} \cdot X,$$

das heißt,

$$H_{\text{Führ}}(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{F}{1 + M \cdot F}.$$

Einsetzen von

$$F(s) = \frac{K}{s+a}$$

und

$$M(s) = \frac{1}{s+b}$$

ergibt

$$H_{\text{Führ}}(s) = \frac{K \cdot (s+b)}{(s+a)(s+b) + K} = K \cdot \frac{s+b}{s^2 + (a+b)s + (K+ab)}.$$

Die Pole von $H_{\text{Führ}}(s)$ erhält man daher aus

$$P(s) = s^2 + (a+b)s + (K+ab) = 0;$$

sie lauten

$$s_{1,2} = \frac{-(a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4(K+ab)}}{2} = \frac{-(a+b)}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a+b)^2 - 4(K+ab)}.$$

Damit die Impulsantwort $h(t)$ keine Oszillationen zeigt, sondern nur abklingende Exponentialfunktionen, müssen beide Pole auf der reellen Achse liegen und keinen Imaginärteil aufweisen. Würden sie einen Imaginärteil besitzen (d.h., wären sie konjugiert komplex), würde $h(t)$ Schwingungen mit der Frequenz $\mathcal{Im}\left\{s_{1,2}\right\}$ aufweisen (vergleiche Bild 5.12 im Buch von Frey/Bossert, Seite 131).

Die Forderung nach verschwindendem Imaginärteil bedeutet, dass der Ausdruck unter der Wurzel in $s_{1,2}$ größer gleich Null sein muss, d.h.,

$$(a+b)^2 - 4(K+ab) \geq 0,$$

was auf die Forderung

$$K \leq \frac{(a+b)^2}{4} - ab$$

führt.

Die zweite Forderung, nämlich Stabilität von $H_{\text{Führ}}(s)$, bedeutet, dass beide Pole links der imaginären Achse liegen müssen, dass also $\mathcal{Re}\left\{s_{1,2}\right\} < 0$ gilt. Es genügt, den Realteil des weiter rechts liegenden Poles zu betrachten. Wenn für diesen $\mathcal{Re}\left\{s\right\} < 0$ gilt, gilt dies automatisch auch für den weiter links liegenden Pol.

Da obige Forderung schon sicher stellt, dass beide Pole reell sind, genügt es zu fordern, dass

$$s_2 = \frac{-(a+b)}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(a+b)^2 - 4(K+ab)} < 0,$$

was unmittelbar auf die Forderung $K > -ab$ führt. Dieses Ergebnis ist sehr anschaulich, bedeutet es doch, dass der Koeffizient nullter Ordnung im Nennerpolynom von $H_{\text{Führ}}(s)$ größer Null sein muss, was eine notwendige Bedingung für Stabilität ist.

Beide Forderungen zusammen ergeben

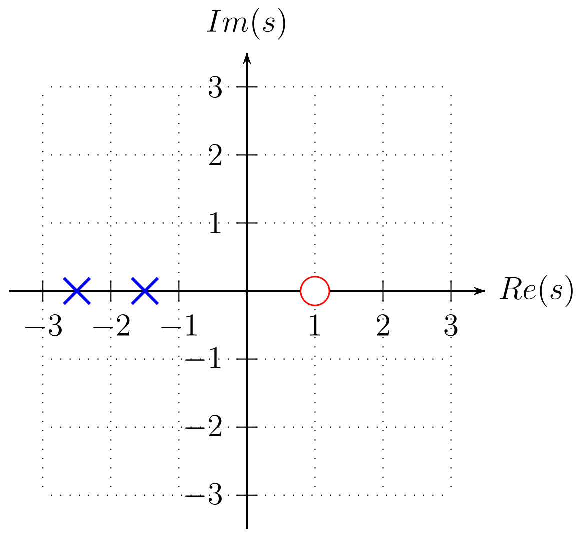
$$\boxed{-ab < K \leq \frac{(a+b)^2}{4} - ab}$$

Einsetzen der Werte für a und b ergibt

$$\boxed{-8 < K \leq \frac{6^2}{4} - 8 = 9 - 8 = 1}$$

Aufgabe 86

Gegeben sei folgendes Pol-Nullstellen-Diagramm (Pole: Kreuze, Nullstellen: Kreise). Wie lautet die Impulsantwort des zugehörigen Systems?



Lösung:

Es handelt sich um ein System zweiter Ordnung (zwei Pole, bei a und b) mit einer Nullstelle bei N. Die Übertragungsfunktion lässt sich also allgemein schreiben als

$$H(s) = \frac{s-N}{(s-a)(s-b)}.$$

Gesucht ist die Impulsantwort $h(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, H(s)$. Um die inverse Laplacetransformation einfach durchführen zu können, führen wir eine Partialbruchzerlegung von $H(s)$ durch:

$$H(s) = \frac{s-N}{(s-a)(s-b)} = \frac{A}{s-a} + \frac{B}{s-b} = \frac{a-N}{a-b} \cdot \frac{1}{s-a} + \frac{b-N}{b-a} \cdot \frac{1}{s-b}.$$

Damit ergibt sich $h(t)$ als

$$h(t) = \frac{1}{(a-b)} \cdot \left[(a-N)e^{at} + (N-b)e^{bt}\right] \cdot \varepsilon(t)$$

Einsetzen der Zahlenwerte:

$$N = +1, a = -2.5, b = -1.5 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(a-b)} = -1, a-N = -3.5, N-b = 2.5$$

$$h(t) = [3.5e^{-2.5t} - 2.5e^{-1.5t}] \cdot \varepsilon(t) = \left[\frac{7}{2}e^{-\frac{5}{2}t} - \frac{5}{2}e^{-\frac{3}{2}t}\right] \cdot \varepsilon(t)$$

Aufgabe 87

Realisieren Sie durch geeignete Verschaltung von Widerständen, Kondensatoren und Induktivitäten für die Übertragungsfunktion $H(s) = \dfrac{12s^2 + 10s + \frac{1}{2}}{12s^2 + s}$ die Impedanzform eines Zweipols in Partialbruchschaltung.

Lösung:

Partialbruchzerlegung $\rightarrow$ Durchdividieren.

$$\begin{array}{|ccccc|ccc|c}
12s^2 & + & 10s & + & \frac{1}{2} & & & & \\
12s^2 & + & s & & & 12s^2 & + & s & 1 \\ \hline
 & & 9s & + & \frac{1}{2} & & & &
\end{array}$$

$$\Rightarrow \quad H(s) = 1 + \frac{9s + \frac{1}{2}}{12s^2 + s} = 1 + \frac{1}{12} \cdot \frac{9s + \frac{1}{2}}{s\left(s + \frac{1}{12}\right)} = 1 + \frac{\frac{3}{4}s + \frac{1}{24}}{s\left(s + \frac{1}{12}\right)}.$$

Nun Partialbruchzerlegung des echt gebrochenen Termes:

$$\frac{\frac{3}{4}s + \frac{1}{24}}{s\left(s + \frac{1}{12}\right)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{1}{12}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{3}{4}s + \frac{1}{24} = A \cdot \left(s + \frac{1}{12}\right) + Bs$$

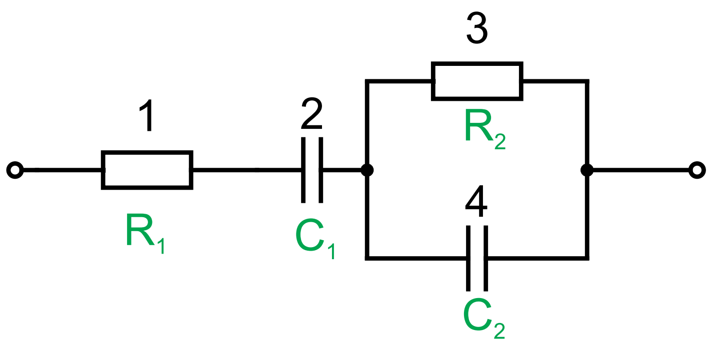
Bestimmung der Koeffizienten A und B:

$$\begin{aligned}
s = 0: &\qquad \frac{1}{24} = \frac{A}{12} &&\Rightarrow \quad A = \frac{1}{2} \\
s = -\frac{1}{12}: &\quad -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = -\frac{1}{12}B &&\Rightarrow \quad B = \frac{3}{4} - \frac{12}{24} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$Z(s) = H(s) = \underbrace{1}_{R_1} + \underbrace{\frac{\frac{1}{2}}{s}}_{C_1} + \underbrace{\frac{\frac{1}{4}}{s + \frac{1}{12}}}_{Z_2 = R_2 || C_2}$$

für die Impedanzform



Die Werte der Widerstände und Kondensatoren erhält man durch Koeffizientenvergleich:

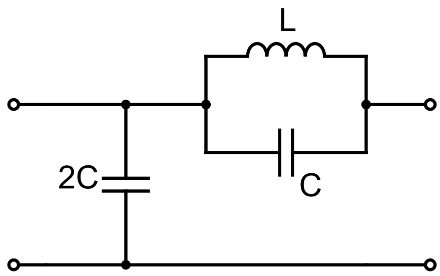
$$R_1 = 1$$

$$\frac{1}{s2} = \frac{1}{sC_1} \qquad \Rightarrow \quad C_1 = 2$$

$$Z_2 = \frac{R_2 \cdot \frac{1}{sC_2}}{R_2 + \frac{1}{sC_2}} = \frac{\frac{1}{C_2}}{s + \frac{1}{R_2C_2}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{1}{C_2} = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{R_2C_2} = \frac{1}{12} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_2 = 4 \\ R_2 = 3 \end{cases}$$

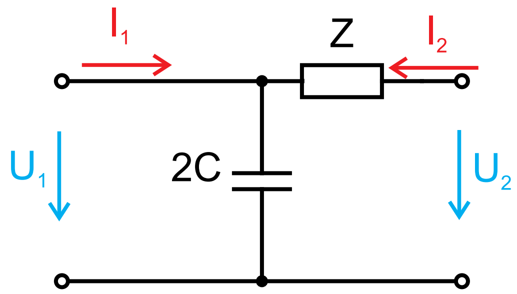
Aufgabe 88

Wie lautet die Kettenmatrix des skizzierten Zweitors?



Lösung:

Das Zweitor lässt sich darstellen als



mit

$$Z = C||L = \frac{sL \cdot \frac{1}{sC}}{sL + \frac{1}{sC}} = \frac{sL}{1 + s^2LC}$$

Die Kettenmatrix **A** eines Zweitors ist definiert als: $\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$

Das heißt:

$$\begin{aligned} U_1 = &\quad A_{11}U_2 \quad - \quad A_{12}I_2 \\ I_1 = &\quad A_{21}U_2 \quad - \quad A_{22}I_2 \end{aligned}$$

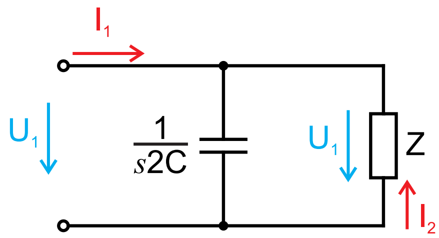
$\underline{1)\ I_2 = 0}$:

a) Kein Spannungsabfall an $Z \Rightarrow \boxed{U_1 = U_2}$.

b) $\frac{U_1}{I_1} = Z_1|_{I_2=0} = \frac{1}{s2C}$.

$$\begin{aligned} U_1 = A_{11}U_2 = A_{11}U_1 &\quad \Rightarrow \boxed{A_{11} = 1} \\ I_1 = A_{21}U_2 = A_{21}U_1 &\quad \Rightarrow \boxed{A_{21} = \frac{1}{Z_1|_{I2=0}} = s2C} \end{aligned}$$

$\underline{2)\ U_2 = 0}$: (Kurzschluss am Ausgang)



$$\begin{aligned} U_1 &= - \quad A_{12} I_2 \\ I_1 &= - \quad A_{22} I_2 \end{aligned}$$

$$U_1 = -Z \cdot I_2 = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{A_{12} = Z = \frac{sL}{1 + s^2 LC}}$$

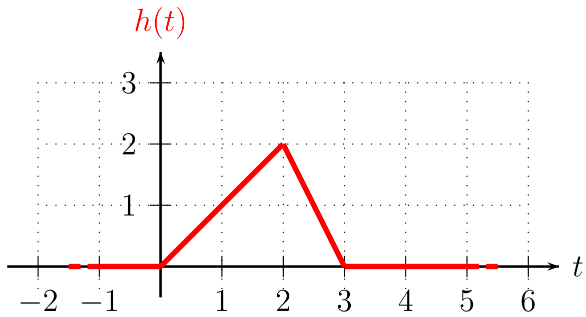
$$\frac{U_1}{I_1} = Z_1|_{U_2=0} = \frac{A_{12}}{A_{22}} \quad \Rightarrow A_{22} = \frac{Z}{Z_1|_{U_2=0}}$$

$$Z_1|_{U_2=0} = 2C||Z = \frac{\frac{1}{s2C} \cdot Z}{Z + \frac{1}{s2C}} = \frac{Z}{1 + s2CZ} \Rightarrow A_{22} = \frac{Z}{Z_1} = 1 + s2CZ = s2C \cdot \frac{sL}{1 + s^2 LC}$$

$$\boxed{A_{22} = 1 + \frac{s^2 2LC}{1 + s^2 LC} = \frac{3s^2 LC + 1}{s^2 LC + 1}}$$

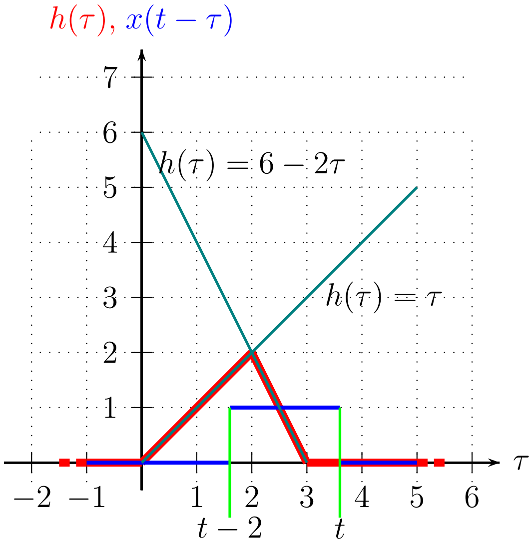
Aufgabe 89

Angenommen, es gäbe ein LTI-System, dessen Impulsantwort $h(t)$ den unten skizzierten Verlauf hätte. Welchen Verlauf hätte dann das Ausgangssignal $y(t)$ des Systems für $3 < t < 4$, wenn an den Eingang ein Signal $x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{4}\right) \cdot \varepsilon(t)$ gelegt wird?



Lösung:

Die Impulsantwort $h(t)$ kann stückweise linear approximiert werden:

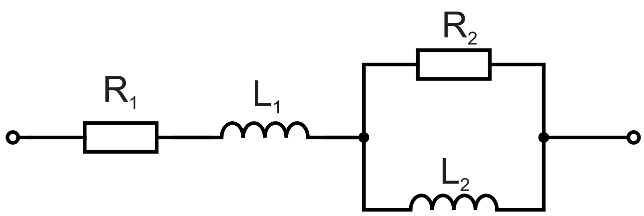


Die Dauer des Pulses rect $\left(\frac{t}{4}\right) \cdot \varepsilon(t)$ beträgt $\frac{1}{2}$ der Breite des rect $\left(\frac{t}{4}\right)$, also 2. Im Zeitbereich $3 < t < 4$ sind wie in der Skizze gezeigt zwei linear Funktionen relevant. Auswertung des Faltungsintegrals liefert dann Folgendes:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \\
&= \int\limits_{t-2}^{2} \tau d\tau = + \int\limits_{2}^{3} (-2\tau + 6)d\tau \\
&= \left.\frac{\tau^2}{2}\right|_{t-2}^{2} + \left.\left[-2\frac{\tau^2}{2} + 6\tau\right]\right|_{2}^{3} \\
&= \frac{4}{2} - \frac{1}{2}(t-2)^2 + [-9 + 18 + 4 - 12] \\
&= \boxed{3 - \frac{1}{2}(t-2)^2}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 90

Wandeln Sie die folgende Impedanzform eines Zweipoles in Partialbruchschaltung in seine entsprechende Admittanzform um ($R_1 = 1$, $R_2 = 2$, $L_1 = 3$, $L_2 = 4$).



Lösung:

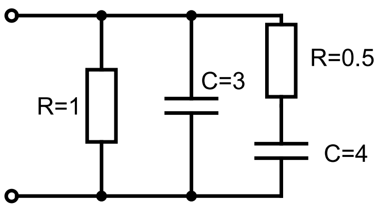
$$H(s) = Z(s) = R_1 + sL_1 + \frac{R_2 \cdot sL_2}{R_2 + sL_2}$$

Wir setzen die gegebenen Werte ein:

$$H(s) = 1 + 3s + \frac{8s}{2+4s}$$

$$H(s) = \underbrace{1}_{Y_1 \to G} + \underbrace{3s}_{Y_2 \to C} + \underbrace{\frac{2s}{s+\frac{1}{2}}}_{Y_3 \to G+C \text{ in Serie}} \stackrel{!}{=} Y(s)$$

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \quad G = 1 && \Rightarrow \boxed{R = 1} \\
Y_2 &= \quad sC = 3s && \Rightarrow \boxed{C = 3} \\
Y_3 &= \quad \frac{G \cdot sC}{G + sC} = \frac{Gs}{s + \frac{G}{C}} = \frac{2s}{s + \frac{1}{2}} && \Rightarrow \begin{cases} G = 2 \ \Rightarrow \boxed{R = \frac{1}{2}} \\ \frac{G}{C} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{C = 2G = 4} \end{cases}
\end{aligned}$$



Aufgabe 91

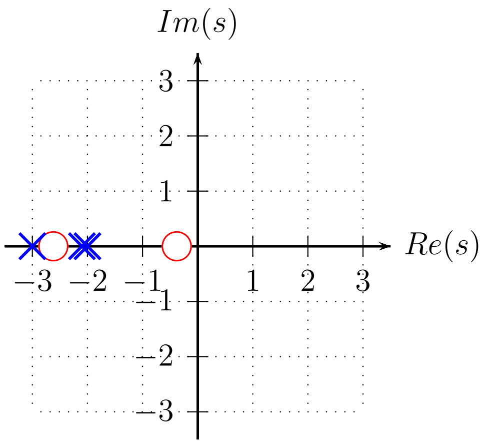
Wie sieht das Pol-Nullstellen-Diagramm des LTI-Systems mit der Stoßantwort $h(t) = \frac{2}{3}\left[te^{-2t} - e^{-3t}\right] \cdot \varepsilon(t)$ aus? [Pole: Kreuze, Nullstellen: Kreise]

Lösung:

$$h(t) = \frac{2}{3}\left[te^{-2t} - e^{-3t}\right] \cdot \varepsilon(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, H(s) = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{(s+2)^2} - \frac{1}{s+3}\right]$$
$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{s+3-(s+2)^2}{(s+2)^2(s+3)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{-s^2-1-3s}{(s+2)^2(s+3)}$$

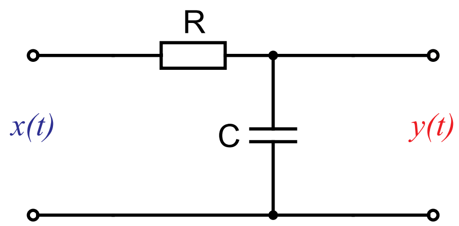
<u>Pole:</u> zweifacher Pol bei $s = -2$; einfacher Pol bei $s = -3$.

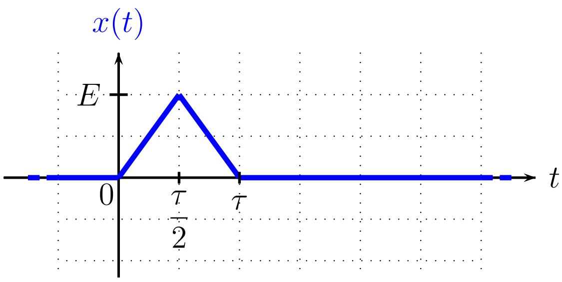
<u>Nullstellen:</u> $s^2 + 3s + 1 = 0 \ \Rightarrow \ s_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4}}{2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}$



Aufgabe 92

Wie schaut das Spannungssignal $y(t)$ am Ausgang des im Bild skizzierten LTI Systems für das gezeigte nichtperiodische Dreieck-Signal $x(t)$ aus, wenn $RC \ll \tau$, $RC \approx \tau$ bzw. $RC \gg \tau$ ist?





Lösung:

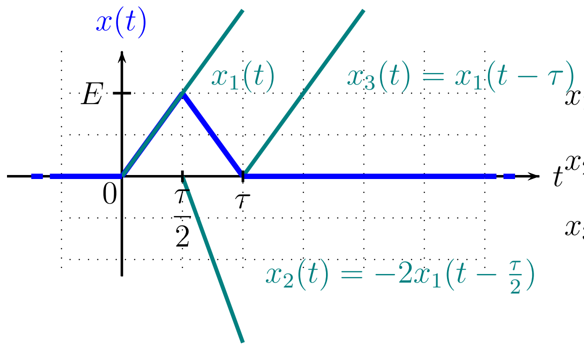
Das Ausgangssignal $y(t)$ kann einfach durch Auswertung des Faltungsintegrals berechnet werden. Im Folgenden wollen wir jedoch einen Lösungsweg über die Laplacetransformation einschlagen und dabei das Transformationsintegral direkt mit Hilfe des Residuensatzes lösen.

Die analytische Form des Eingangssignals ist:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{2E}{\tau} t, & 0 \le t \le \frac{\tau}{2} \\ \frac{2E}{\tau}(t-\tau), & \frac{\tau}{2} \le t \le \tau \end{cases}$$

$$x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X(s) = \int\limits_0^{\frac{\tau}{2}} \frac{2E}{\tau} \cdot t \cdot e^{-st} dt - \int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} \frac{2E}{\tau} \cdot (t-\tau) \cdot e^{-st} dt$$
$$= \frac{2E}{\tau} \cdot \frac{1}{s^2} \cdot \left(1 - 2e^{-\frac{s\tau}{2}} + e^{-s\tau}\right) \tag{16}$$

Wir stellen das Eingangssignal als Summe von drei verschobenen, gewichteten Rampen dar:



$$x_1(t) = \frac{E}{\tau} t\varepsilon(t)$$
$$x_2(t) = -2\frac{E}{\tau}\left(t - \tfrac{\tau}{2}\right)\varepsilon\left(t - \tfrac{\tau}{2}\right)$$
$$x_3(t) = \frac{E}{\tau}(t-\tau)\,\varepsilon(t-\tau)$$

Somit ist das Spannnungssignal am Eingang:

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t), & 0 \le t < \frac{\tau}{2} \\ x_1(t) - 2x_1(t-\frac{\tau}{2}), & \frac{\tau}{2} \le t < \tau \\ x_1(t) - 2x_1(t-\frac{\tau}{2}) + x_1(t-\tau), & t \ge \tau \end{cases}$$

Übertragungsfunktion: $H(s) = Z(s) = \dfrac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \dfrac{1}{sRC+1} \underset{\frac{1}{RC}=\alpha}{=} \dfrac{\alpha}{s+\alpha}$.

Das übertragene Spannungssignal am Ausgang für die x_1-Rampe am Eingang lautet:

$$Y_1(s) = X(s) \cdot H(s) = \frac{2E}{\tau} \cdot \frac{1}{s^2} \cdot \frac{\alpha}{s+\alpha}$$

$$Y_1(s) \bullet\!\!-\!\!\circ\, y_1(t) = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{2E\alpha}{\tau} \cdot \frac{1}{s^2(s+\alpha)} e^{st} dt = \sum_{m=1}^{2} Res_m$$

Der Integrand weist zwei Pole auf: einen zweifachen Pol bei $s_1 = 0$, $k_1 = 2$ und einfachen Pol bei $s_2 = -\alpha$, $k_2 = 1$. Wir bestimmen jetzt die Residuen bei den Polstellen:

$$\begin{aligned}
Res_1 &= \lim_{s_1=0} \underbrace{\frac{1}{(k_1-1)!}}_{\text{Zweifacher Pol!}} \cdot \frac{d}{ds}\left[\frac{2E\alpha}{\tau} \cdot \frac{1}{s^2(s+\alpha)} \cdot (s-s_1)^{k_1} e^{st}\right] \\
&= \frac{2E\alpha}{\tau} \frac{d}{ds}\left[\frac{e^{st}}{s+\alpha}\right] = \frac{2E\alpha}{\tau}\left[\frac{te^{st}(s+\alpha) - e^{st}}{(s+\alpha)^2}\right]\Bigg|_{s_1=0} \\
&= \frac{2E}{\alpha\tau}(\alpha t - 1), \quad t \ge 0 \\
Res_2 &= \lim_{s_2=-\alpha}\left[\frac{2E\alpha}{\tau} \cdot \frac{1}{s^2(s+\alpha)} \cdot (s-s_2)e^{st}\right] \\
&= \frac{2E}{\alpha\tau} e^{\alpha t}. \quad t \ge 0
\end{aligned}$$

Somit: $y_1(t) = \sum_{m=1}^{2} Res_m = Res_1 + Res_2 = \frac{2E}{\alpha\tau}\left[\alpha t - (1 - e^{-\alpha t})\right], \quad t \geq 0$. Wir ersetzen $t \geq 0$ durch die Sprungfunktion, dann: $y_1(t) = \frac{2E}{\alpha\tau}\left[\alpha t - (1 - e^{-\alpha t})\right] \cdot \varepsilon(t)$.

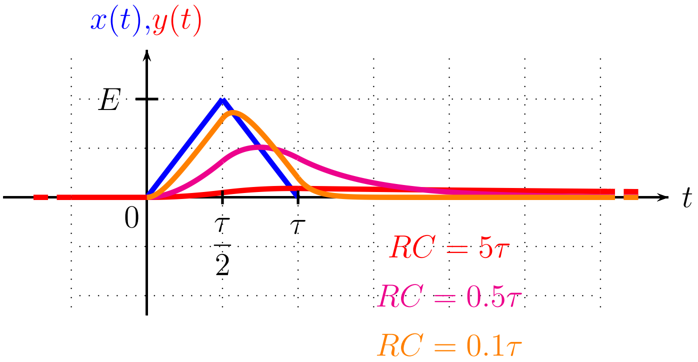
Damit ergibt sich das Spannnungssignal am Ausgang:

$$y(t) = \begin{cases} y_1(t), & 0 \leq t < \frac{\tau}{2} \\ y_1(t) - 2y_1(t - \frac{\tau}{2}), & \frac{\tau}{2} \leq t < \tau \\ y_1(t) - 2y_1(t - \frac{\tau}{2}) + y_1(t - \tau). & t \geq \tau \end{cases}$$

Nach Einsetzen der Ausdrücke für $y_1(t)$ erhalten wir

$$y(t) = \begin{cases} \frac{2E}{\alpha\tau}\left[\alpha t - (1 - e^{-\alpha t})\right], & 0 \leq t < \frac{\tau}{2} \\ \frac{2E}{\alpha\tau}\left[1 - \alpha(t - \tau) + \left(1 - 2e^{\frac{\alpha t}{2}}\right)e^{-\alpha t}\right], & \frac{\tau}{2} \leq t < \tau \\ \frac{2E}{\alpha\tau}\left[e^{\frac{\alpha\tau}{4}} - e^{-\frac{\alpha\tau}{4}}\right]^2 e^{-\frac{\alpha\tau}{2}} e^{-\alpha(t-\tau)}. & t \geq \tau \end{cases}$$

Das Ausgangssignal für verschiedene Werte von RC stellt sich also folgendendermaßen dar:



Für $RC \ll \tau$, d.h. für eine kleine Integrationszeitkonstante, ist das Ausgangssignal dem Eingangssignal sehr ähnlich. Für $RC \approx \tau$ ist eine ausgeprägte Integrationswirkung des Kondensators bemerkbar. Für $RC \gg \tau$ schließlich, ist das Eingangssignal nur mehr als stark verzerrtes bzw. verlängertes Signal am Ausgang erkennbar.

Aufgabe 93

Gegeben sei ein System mit folgender Übertragungsfunktion:

$$H(s) = \frac{(1 + 2s)e^{-2s}}{s^2}$$

Berechnen Sie die zugehörige Stoßantwort.

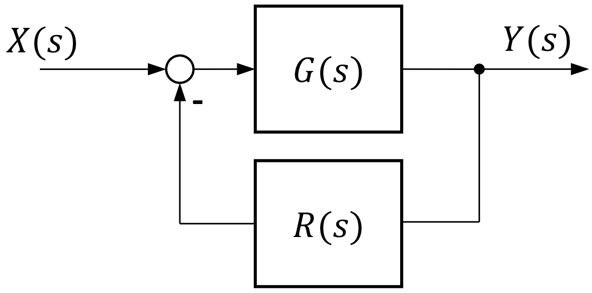
Lösung:

$$H(s) = \left(\frac{1 + 2s}{s^2}\right) e^{-2s} = \left(\underbrace{\frac{1}{s^2}}_{t\cdot\varepsilon(t)} + \underbrace{\frac{2}{s}}_{2\varepsilon(t)}\right) \cdot \overbrace{e^{-2s}}^{\text{Zeitverschiebung um 2}}$$

$$h(t) = (t-2)\varepsilon(t-2) + 2\varepsilon(t-2) = t \cdot \varepsilon(t-2)$$

Aufgabe 94

Eine stabile Regelstrecke mit PT2-Verhalten soll durch eine Rückkopplungsschaltung laut untenstehender Skizze mit einem Hilfsregler $R(s) = F$ (reines Proportionalglied) charakterisiert werden. Dazu wird die Antwort des Gesamtsystems $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$ auf einen Dirac-Stoß am Eingang $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \delta(t)$ aufgezeichnet. Sie lautet $y(t) = Ae^{-Bt} \cdot \sin(Ct) \cdot \varepsilon(t)$. Wie lautet die Übertragungsfunktion $G(s)$ der Regelstrecke wenn $F = 2$, $A = 2$, $B = 3$, $C = 2$?



Lösung:

Regler:

$$R(s) = F$$

Ausgang des Regelkreises:

$$(X(s) - FY(s))G(s) = Y(s)$$
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s) - FY(s)}$$

Stoßantwort:

$$y(t) = Ae^{-Bt}\sin(Ct) \cdot \varepsilon(t)$$

Bestimmen der Laplace-Transformierten:

$$\begin{aligned} y(t) &= Ae^{-Bt}\sin(Ct) \cdot \varepsilon(t) \\ &= Ae^{-Bt}\frac{1}{2j}\left(e^{jCt} - e^{-jCt}\right) = A\frac{1}{2j}\left(e^{-(B-jC)t} - e^{-(B+jC)t}\right) \end{aligned}$$

$$\gamma = B + jC$$
$$\gamma^* = B - jC$$
$$y(t) = A\frac{1}{2j}\left(e^{-\gamma^* t} - e^{-\gamma t}\right)$$

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{A}{2j}\left(\frac{1}{s+\gamma^*} - \frac{1}{s+\gamma}\right) \\
&= \frac{A}{2j}\frac{s+\gamma-(s+\gamma^*)}{(s+\gamma^*)(s+\gamma)} \\
&= \frac{A}{2j}\frac{\gamma-\gamma^*}{s^2+s\left(\gamma+\gamma^*\right)+|\gamma|^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma-\gamma^* &= B+jC-B+jC = 2jC \\
\gamma+\gamma^* &= B+jC+B-jC = 2B \\
|\gamma|^2 &= B^2+C^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{A}{2j}\frac{2jC}{s^2+2Bs+B^2+C^2} \\
&= AC\frac{1}{s^2+2Bs+B^2+C^2}
\end{aligned}
$$

Berechnen von $G(s)$:

$$
G(s) = \frac{AC}{s^2+2Bs+B^2+C^2-FAC}
$$

Pole bestimmen:

$$
s^2+2Bs+B^2+C^2-FAC = 0
$$

$$
\begin{aligned}
s_{12} &= -B \pm \sqrt{B^2-B^2-C^2+FAC} \\
&= -B \pm \sqrt{FAC-C^2}
\end{aligned}
$$

einsetzen der Werte: $F=2,\ A=2,\ B=3,\ C=2$

$$
\begin{aligned}
s_1 &= -1 \\
s_2 &= -5 \\
AC &= 4
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{G(s) = \frac{4}{(s+1)(s+5)}}
$$

Aufgabe 95

An den Eingang eines stabilen PT1-Systems werde ein Signal $x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \arctan\varphi) \cdot \varepsilon(t)$ gelegt. Nach Abklingen aller Einschwingvorgänge wird am Ausgang ein Signal mit Amplitude B und einer Phase $\arctan C$ gemessen, d.h. $y(t) = B \cdot \cos(\omega t + \arctan C)$. Wie lautet die Sprungantwort des PT1-Systems?

$A = 2$, $B = 1$, $\omega = 2$, $\arctan\varphi = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$, $\arctan C = \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$.

Anmerkung: $\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-x\cdot y}\right)$, für $x \cdot y < 1$.

Lösung:

$$\underline{x} = \mathrm{Re}\left(Ae^{j(\omega t + \arctan\varphi)}\right) = \mathrm{Re}\left(\underbrace{Ae^{j\arctan\varphi}}_{x_0} e^{j\omega t}\right)$$

$$\underline{y}_0 = H(s = j\omega)\underline{x}_0 = \frac{K}{j\omega + a} Ae^{j\arctan\varphi}$$

$$\begin{aligned} Be^{j\arctan C} &= Ae^{j\arctan\varphi} K \frac{a - j\omega}{a^2 + \omega^2} \\ &= AK\frac{1}{a^2+\omega^2}\sqrt{a^2+\omega^2}e^{j\arctan\left(-\frac{\omega}{a}\right)}e^{j\arctan\varphi} \\ &= \frac{AK}{\sqrt{a^2+\omega^2}} e^{j\arctan\left(\frac{\varphi - \frac{\omega}{a}}{1+\varphi\frac{\omega}{a}}\right)} \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man sofort

$$C = \frac{\varphi - \frac{\omega}{a}}{1 + \varphi\frac{\omega}{a}}, \qquad B = \frac{AK}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$$

Daraus ergibt sich durch einfaches Umformen

$$a = \omega\frac{1 + C\varphi}{\varphi - C}, \qquad K = \frac{B}{A}\sqrt{a^2+\omega^2}$$

Stoßantwort des PT1-Gliedes:

$$h(t) = Ke^{-at}\varepsilon(t)$$

Sprungantwort:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\varepsilon(t-\tau)d\tau = K\int_0^t e^{-a\tau}d\tau = -\frac{K}{a}\left(e^{-at} - 1\right), \quad t > 0$$

$$y(t) = \frac{K}{a}\left(1 - e^{-at}\right), \quad t > 0,$$

mit a und K aus dem obigen Koeffizientenvergleich.

Einsetzen der Werte $\omega = 2$, $A = 2$, $B = 1$, $\varphi = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{3}$ ergibt

$$a = \omega \frac{1 + C\varphi}{\varphi - C} = 14.$$

und

$$\frac{K}{a} = \frac{B}{A}\frac{\sqrt{a^2+\omega^2}}{a} = \frac{B}{A}\sqrt{\frac{a^2+\omega^2}{a^2}} = \frac{B}{A}\sqrt{1+\frac{\omega^2}{a^2}} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{50}}{7}.$$

Damit lautet die Sprungantwort des Systems

$$\boxed{h(t) = \frac{5}{7\sqrt{2}}\left(1 - e^{-14t}\right) \cdot \varepsilon(t)}$$

Aufgabe 96

An einem umkehrbaren (reziproken) Zweitor werden bei einer bestimmten Frequenz ω folgende Impedanzen gemessen:

Bei Leerlauf am Ausgang: $\dfrac{U_1}{I_1} = A_r + jA_i$,

Bei Leerlauf am Eingang: $\dfrac{U_2}{I_2} = B_r + jB_i$,

Bei Kurzschluss am Ausgang: $\dfrac{U_1}{I_1} = C_r + jC_i$.

Wie lautet die komplexe Amplitude der Ausgangsspannung u_2, wenn für Leerlauf am Ausgang am Eingang ein sinusförmiger Stromverlauf mit einer Frequenz ω und einer komplexen Amplitude von $i_1 = i_0 e^{j\varphi}$ eingeprägt wird und folgende Werte gelten $A = 5 + \dfrac{j}{\sqrt{2}}$, $B = 2 - j2$, $C = 5 + j\dfrac{2}{\sqrt{2}}$, $i_1 = 5 \cdot e^{j\frac{5\pi}{8}}$?

Lösung:

Kopplungssymmetrisch / reziprok / umkehrbar

$$Z_{12} = Z_{21}$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{12} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Leerlauf am Ausgang: $I_2 = 0$

$$\frac{U_1}{I_1} = Z_{11} = A_r + jA_i$$

Leerlauf am Eingang: $I_1 = 0$

$$\frac{U_2}{I_2} = Z_{22} = B_r + jB_i$$

Kurzschluss am Ausgang: $U_2 = 0$

$$\frac{U_1}{I_1} = C_r + jC_i$$

$$U_2 = 0 = Z_{12}I_1 + Z_{22}I_2 \;\Rightarrow\; I_2 = -\frac{Z_{12}}{Z_{22}}I_1$$

$$U_1 = Z_{11}I_1 - \frac{Z_{12}^2}{Z_{22}}I_1$$

$$\frac{U_1}{I_1} = Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{22}} = C_r + jC_i$$

$$Z_{12}^2 = (Z_{11} - C_r - jC_i)\,Z_{22}$$

$$Z_{12}^2 = (A_r + jA_i - C_r - jC_i) \cdot (B_r + jB_i)$$

Für Leerlauf am Ausgang:

$$u_2 = Z_{12}i_1$$

Einsetzen der Werte $A = 5 + \frac{j}{\sqrt{2}},\; B = 2 - j2,\; C = 5 + j\frac{2}{\sqrt{2}},\; i_1 = 5e^{j\frac{5\pi}{8}}$ ergibt

$$Z_{12}^2 = \left(5 + \frac{j}{\sqrt{2}} - 5 - j\frac{2}{\sqrt{2}}\right)(2 - j2) =$$
$$= -\frac{j}{\sqrt{2}}(2 - j2) = -\sqrt{2}\,(1 + j)\,.$$

Ziehen der komplexen Wurzel ergibt

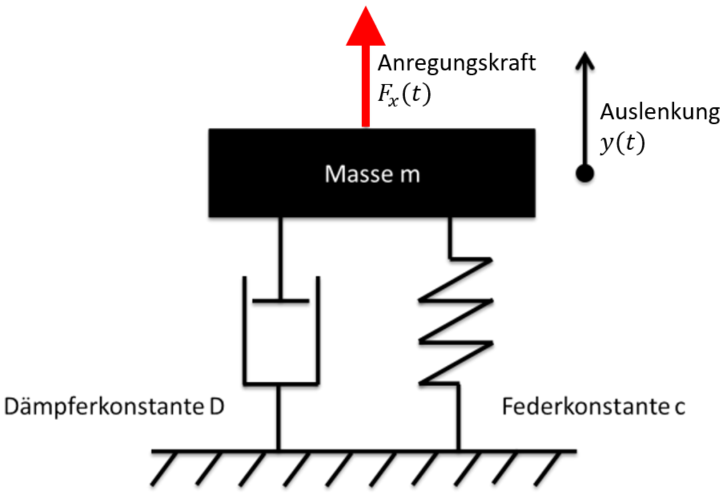
$$Z_{12} = \sqrt{2}e^{-j\frac{3}{8}\pi},$$

und damit die Amplitude der Ausgangsspannung

$$\boxed{U_2 = Z_{12}I_1 = 5\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}}$$

Aufgabe 97

Neu in Version 5.0 Wie lautet die Systemdifferentialgleichung des skizzierten Feder-Masse Systems mit Dämpfung, wenn die Auslenkung der Masse die Ausgangsgröße $y(t)$ und die Anregungskraft $F_x(t)$ die Eingangsgröße ist? Normieren Sie die Systemdifferentialgleichung, sodass der Koeffizient bei der höchsten Ordnung 1 wird.



Lösung:

Relevante physikalische Gesetze

- Trägheitskraft der Masse: $F_T = m\frac{d^2}{dt^2}y(t)$
- Dämpfung (geschwindigkeitsabhängig): $F_d = D\frac{d}{dt}y(t)$
- Federrückstellkraft laut Hooke'schem Gesetz: $F_c = cy(t)$
- Anregungskraft (=Systemeingang): $F_x(t) = x(t)$

Verbinden der relevanten physikalischen Gesetze entsprechend Systemgeometrie und –anordnung

Kräftegleichgewicht an Masse m:

$$\sum \text{Kräfte} = 0 \Rightarrow F_a - F_T - F_d + F_x = 0$$

Dies führt unmittelbar auf die Systemdifferentialgleichung:

$$m\frac{d^2}{dt^2}y(t) + D\frac{d}{dt}y(t) + cy(t) = F_x(t)$$

Normierung

Es ist üblich, die Systemdifferentialgleichung so zu normieren, dass der Koeffizient bei der höchsten Ordnung 1 wird. Das heißt: Dividieren durch m.

Das ergibt:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + D/m\frac{d}{dt}y(t) + c/my(t) = \frac{1}{m}F_x(t)$$

Mit den Bezeichnungen $\omega_0^2 = c/m$ und $D/m = 2d\omega_0$ erhalten wir die normierte Systemdifferentialgleichung:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 2d\omega_0\frac{d}{dt}y(t) + \omega_0^2 y(t) = \frac{1}{m}F_x(t)$$

Wie in den Aufgaben 98 und 100 erläutert, stellt $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$ die Eigenfrequenz des ungedämpften Systems dar. Die normierte Dämpfung d ergibt sich zu $d = \frac{D}{2}\frac{1}{\sqrt{mc}}$.

Aufgabe 98

$\boxed{\textbf{Neu in Version 5.0}}$ Diskutieren Sie das dynamische Verhalten des gedämpften Feder-Masse-Systems aus Aufgabe 97 für verschiedene Werte der normierten Dämpfung $0 < d < \infty$.

Lösung:

Durch Laplace-Transformation der normierten Systemdifferentialgleichung des Feder-Masse-Systems

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 2d\omega_0\frac{d}{dt}y(t) + \omega_0^2 y(t) = \frac{1}{m}F_x(t)$$

erhält man die Übertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{K}{s^2 + 2d\omega_0 \cdot s + \omega_0^2}$$

mit $K = 1/m$. Es handelt sich um ein System zweiter Ordnung mit Proportionalanteil (gegeben durch K), üblicherweise als PT2 bezeichnet. Das dynamische Verhalten wird durch die Pole von $H(s)$ bestimmt. Die zwei Pole von $H(s)$ lauten:

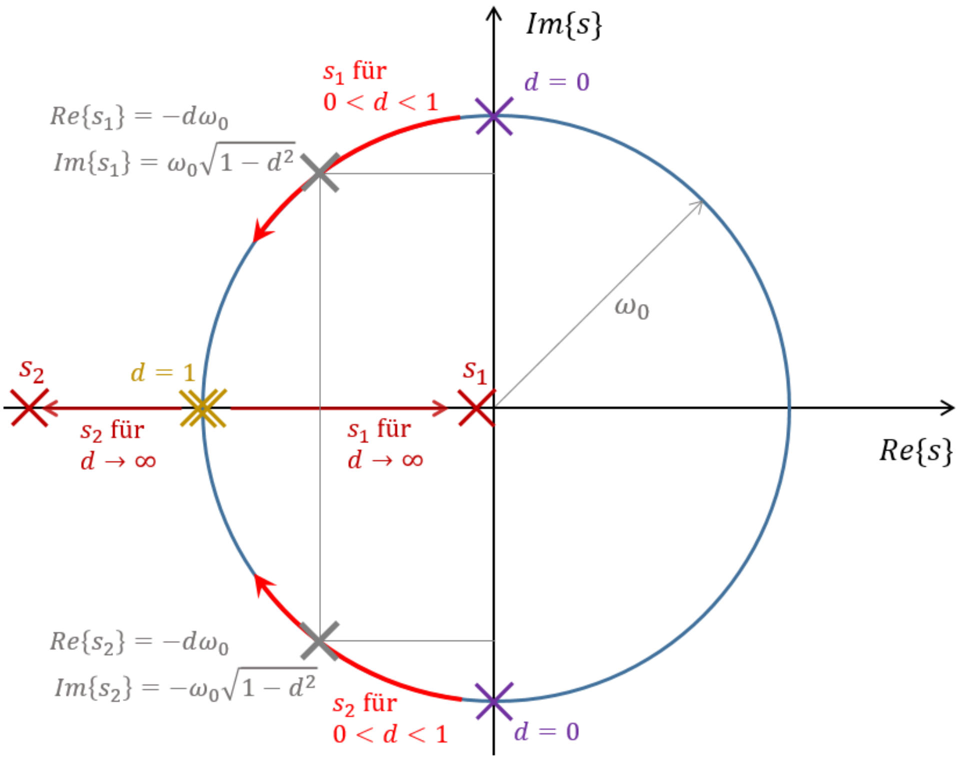
$$s_{1,2} = -d\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{d^2 - 1}.$$

Für $d \leq 1$ sind die beiden Pole konjugiert komplex:

$$s_{1,2} = -d\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1 - d^2},$$
$$s_2 = s_1^*.$$

Dies ist verständlich, da der Ausgang eines Systems mit reellen Koeffizienten für ein reelles Eingangssignal reell sein muss. Daher sind die Pole eines Systems mit reellen Koeffizienten entweder reell oder konjugiert komplex. Bei letzterem Fall ergänzen sich die beiden zu den Polen gehörigen komplexen Schwingungen zu einer reellen Sinusschwingung.

Für $d = 0$ sind die Pole rein imaginär (ungedämpfte Schwingungen). Ein ungedämpftes PT2 System schwingt, einmal angestoßen, mit dieser Frequenz ω_0. Diese Frequenz stellt also die Eigenfrequenz des ungedämpften Systems dar.

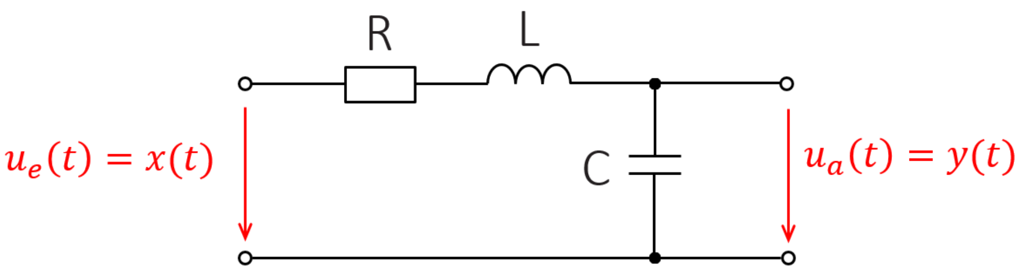


Für $d \to 1$ wandern die Pole entlang eines Kreises mit Radius $r = \omega_0$ zum Punkt $-\omega_0$ auf der reellen Achse (siehe dazu die Skizze). Diese Grafik verbildlicht die Lage der Pole (=Nullstellen bzw. Wurzeln des Nennerpolynoms von $H(s)$) in der komplexen Ebene als Funktion des Parameters d. Solch eine Darstellung, bei der die Lage der Wurzeln als Funktion eines Parameters dargestellt werden, wird als Wurzelortskurve bezeichnet. Für $d > 1$ und weitere Erhöhung von $d \to \infty$ wandert ein Pol auf der reellen Achse gegen $-\infty$ und der zweite Pol gegen 0, siehe Grafik.

Das bedeutet: Für $d \leq 1$ antwortet das PT2 Glied auf einen Stoß mit gedämpften Schwingungen, wobei sich die Schwingungsamplitude und Schwingungsfrequenz mit steigender Dämpfung verringern. Die Verringerung der Eigenfrequenz des gedämpften Systems mit steigendem d ist aus $Im\{s_{1,2}\} = -\omega_0\sqrt{1-d^2}$ ersichtlich. Sie ist ω_0 für $d = 0$ und 0 für $d = 1$. Für $d > 1$ antwortet das PT2 Glied mit reinen Exponentialverläufen. Nach einem Sprung am Eingang nimmt der Ausgang in diesem Dämpfungsbereich also mit den beiden Zeitkonstanten $T_{1,2} = 1/Re\{s_{1,2}\}$ den Endwert an. Der Ausgang 'kriecht' also dem Endwert des Sprunges entgegen (exponentieller Kriechfall), wobei die kleinere der beiden Zeitkonstanten die Dynamik bestimmt. Dies ist verständlich, da der Exponentialverlauf, bestimmt durch den Pol mit großem $|Re\{s\}| \to \infty$, sehr schnell abklingt, während der andere Pol einer großen Zeitkonstante entspricht und der zugehörige Exponentialverlauf seinen Endwert daher entsprechend langsamer annimmt.

Aufgabe 99

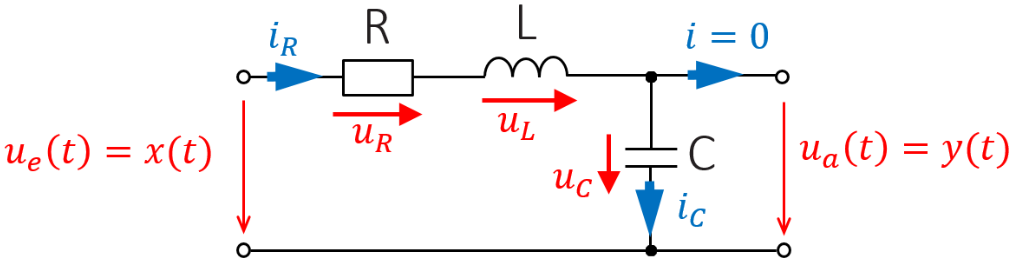
Neu in Version 5.0 Wie lautet die normierte Übertragungsfunktion der als Serienschwingkreis bezeichneten skizzierten RLC-Schaltung?



Lösung:

Für die Spannungen gilt laut untenstehender Skizze:

$$x(t) = u_R(t) + u_L(t) + y(t).$$



Relevante physikalische Gesetze (siehe auch Aufgabe 102 und VU bzw. Buch Frey/Bossert):

$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$, $u_R(t) = R\, i_R(t)$, $i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt}$.

Ströme:

$i_R(t) = i_L(t) = i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} = C\frac{dy(t)}{dt}$.

Einsetzen in Gleichung für die Spannungen:

$$x(t) = RC\frac{dy(t)}{dt} + L\frac{d}{dt}\left(C\frac{dy(t)}{dt}\right) + y(t).$$

Damit erhalten wir die Systemdifferentialgleichung

$$LC\frac{d^2}{dt^2}y(t) + RC\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = x(t).$$

Normieren wie in der Lösung zur Aufgabe 97 beschrieben. Dazu durch LC dividieren. Dies ergibt:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \frac{R}{L}\frac{d}{dt}y(t) + \frac{1}{LC}y(t) = \frac{1}{LC}x(t),$$

bzw.

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 2d\omega_0\frac{d}{dt}y(t) + \omega_0^2 y(t) = \omega_0^2 x(t),$$

mit der Eigenfrequenz des ungedämpften Systems $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ und $d = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$. Die normierte Systemdifferentialgleichung (und damit die Übertragungsfunktion) ist ident mit jener des gedämpften Feder-Masse-Systems aus Aufgabe 97. Das System verhält sich daher dynamisch vollkommen gleich wie das Feder-Masse-System. Alles in der Lösung zu Aufgabe 98 Gesagte gilt damit auch für den RLC-Schwingkreis.

Aufgabe 100

Neu in Version 5.0 Wie lautet die Stoßantwort des PT2-Gliedes aus Aufgabe 99 für $0 < d < 1$?

Lösung:

Ausgehend von der normierten Systemdifferentialgleichung des PT2-Gliedes (siehe Aufgabe 99),

$$H(s) = \frac{K}{s^2 + 2d\omega_0 \cdot s + \omega_0^2},$$

mit $K = \omega_0^2$ und den Polen (siehe Aufgabe 99)

$$s_{1,2} = -d\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-d^2},$$
$$s_2 = s_1^*,$$

erhalten wir aus

$$H(s) = \frac{K}{(s-s_1)(s-s_1^*)},$$

mittels Partialbruchzerlegung

$$H(s) = \frac{A}{s-s_1} + \frac{B}{s-s_1^*},$$

mit $A = \frac{K}{s_1 - s_1^*}$ und $B = -\frac{K}{s_1 - s_1^*}$. Das heißt,

$$H(s) = \frac{K}{s_1 - s_1^*} \cdot \left[\frac{1}{s-s_1} - \frac{1}{s-s_1^*}\right].$$

Rücktransformation in den Zeitbereich ergibt

$$h(t) = \frac{K}{s_1 - s_1^*} \cdot \left[e^{s_1 t} - e^{s_1^* t}\right] \cdot \varepsilon(t),$$

bzw.

$$h(t) = \frac{K}{2jIm(s_1)} \cdot e^{Re(s_1)t} \cdot \left[e^{jIm(s_1)t} - e^{-jIm(s_1)t}\right] \cdot \varepsilon(t).$$

Nach Einsetzen der Real- und Imaginärteile von s_1 und mit $K = \omega_0^2$ erhalten wir

$$h(t) = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-d^2}} \cdot e^{-d\omega_0 t} \sin\left(\omega_0\sqrt{1-d^2}t\right) \cdot \varepsilon(t).$$

Den Verlauf der Stoßantwort für verschiedene Werte der Dämpfung zeigt das Bild in der Lösung zur Aufgabe 101.

Aufgabe 101

Neu in Version 5.0 Wie lautet die Sprungantwort des PT2-Gliedes aus Aufgabe 99 für $0 < d < 1$?

Lösung:

Die Sprungantwort $y_\varepsilon(t)$ des PT2-Gliedes kann entweder im Laplace-Bereich über $Y_\varepsilon(s) = H(s)\cdot\frac{1}{s}$ und anschließender Rücktransformation in den Zeitbereich oder mittels Auswertung des Faltungsintegrals $y_\varepsilon(t) = h(t) * \varepsilon(t)$ erhalten werden. Wir beschreiten hier den zweiten Weg. Wir beginnen mit der Stoßantwort $h(t)$ von Aufgabe 100:

$$h(t) = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-d^2}} \cdot e^{-d\omega_0 t} \sin\left(\omega_0\sqrt{1-d^2}t\right) \cdot \varepsilon(t).$$

Aus der VU ist bekannt, dass die Faltung eines Signals $x(t)$ mit einem Einheitssprung sich als Integration von $x(t)$ im Bereich $-\infty$ bis t darstellt. Da $h(t)$ hier rein rechtsseitig ist, verschiebt sich die untere Integrationsgrenze auf 0. Das Faltungsintegral lautet daher

$$y_\varepsilon(t) = h(t) * \varepsilon(t) = \int_0^t h(t')dt' = \int_0^t \frac{\omega_0}{\sqrt{1-d^2}} \cdot e^{-d\omega_0 t'} \sin\left(\omega_0\sqrt{1-d^2}t'\right) dt'.$$

Mit $a = d\omega_0$, $b = \omega_0\sqrt{1-d^2}$ und $c = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-d^2}}$ erhalten wir

$$y_\varepsilon(t) = c\int_0^t e^{-at'} \sin(bt')\, dt'.$$

Durch zweimalige partielle Integration erhält man

$$\int e^{-at'} \sin(bt')\, dt' \left[1 + \frac{b^2}{a^2}\right] = -\frac{a}{a^2+b^2} e^{-at} \left[\sin(bt) + \frac{b}{a}\cos(bt)\right].$$

Auswertung des Integrals an den Integrationsgrenzen 0 und t ergibt

$$y_\varepsilon(t) = c\frac{b}{a^2+b^2}\left\{1 - \frac{a}{b}e^{-at}\left[\sin(bt) + \frac{b}{a}\cos(bt)\right]\right\},$$

und nach Rückeinsetzen der Ausdrücke für a, b und c erhält man

$$y_\varepsilon(t) = 1 - \frac{d}{\sqrt{1-d^2}} e^{-d\omega_0 t}\left[\sin(\omega_0\sqrt{1-d^2}t) + \frac{\sqrt{1-d^2}}{d}\cos(\omega_0\sqrt{1-d^2}t)\right].$$

Die $\sin(\cdot)$- und $\cos(\cdot)$-Terme der gleichen Frequenz $\omega_0\sqrt{1-d^2}$ lassen sich wie folgt zu einer einzigen Sinusschwingung mit einer Phase zusammen fassen. Unter Benützung der Identität

$$\sin(At + \arccos B) = \sin(At) \cdot \cos(\arccos B) + \cos(At) \cdot \sin(\arccos B),$$

ergibt sich mit

$$\sin(\arccos(B)) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos(B))} = \sqrt{1 - B^2}$$

die Beziehung

$$\sin(At + \arccos B) = B \cdot \sin(At) + \cos(At)\sqrt{1 - B^2} = B \cdot \left[\sin(At) + \frac{\sqrt{1 - B^2}}{B}\cos(At)\right].$$

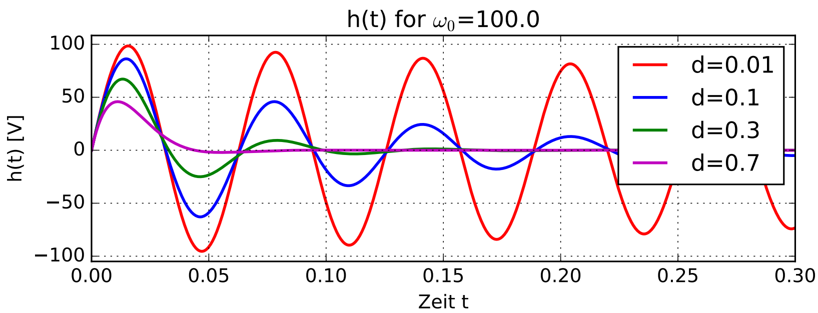
Durch Vergleich mit dem sin/cos-Term in $y_\varepsilon(t)$ erhalten wir damit und mit den Setzungen

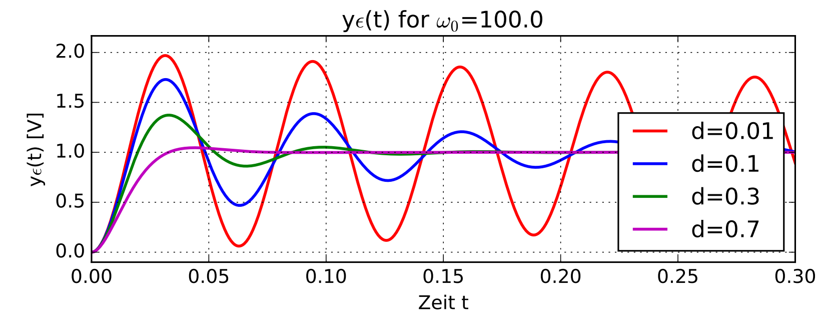
$$A = \omega_0\sqrt{1 - d^2} \qquad B = d$$

die finale Form der Sprungantwort des PT2-Gliedes:

$$y_\varepsilon(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - d^2}} e^{-d\omega_0 t} \sin\left(\omega_0\sqrt{1 - d^2}t + \arccos(d)\right).$$

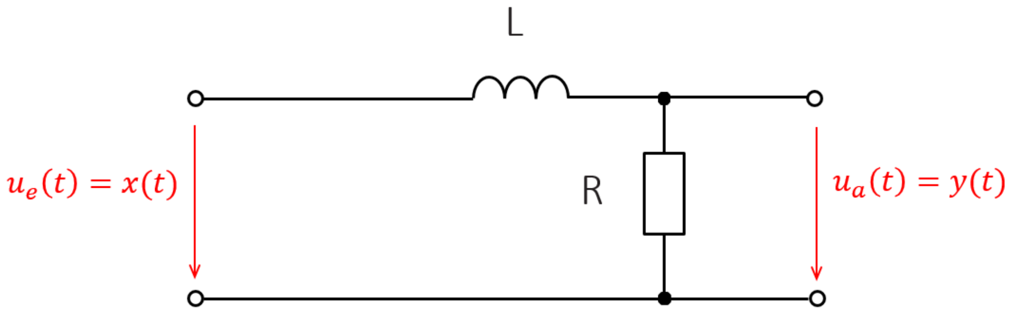
Den Verlauf der Sprungantwort für verschiedene Werte der Dämpfung zeigt das folgende Bild:





Aufgabe 102

Neu in Version 5.0 Wie lautet die Systemdifferentialgleichung der skizzierten RL-Schaltung?



Lösung:

Die relevanten physikalischen Gesetze sind die Systemgleichung der Induktivität L, $u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$, und das Ohm'sche Gesetz für den Widerstand, $u_R(t) = R\, i_R(t)$. Für die Spannungen finden wir mit untenstehender Skizze

$$x(t) = u_L(t) + y(t).$$

Einsetzen der Spannung an der Induktivität ergibt

$$x(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} + y(t).$$

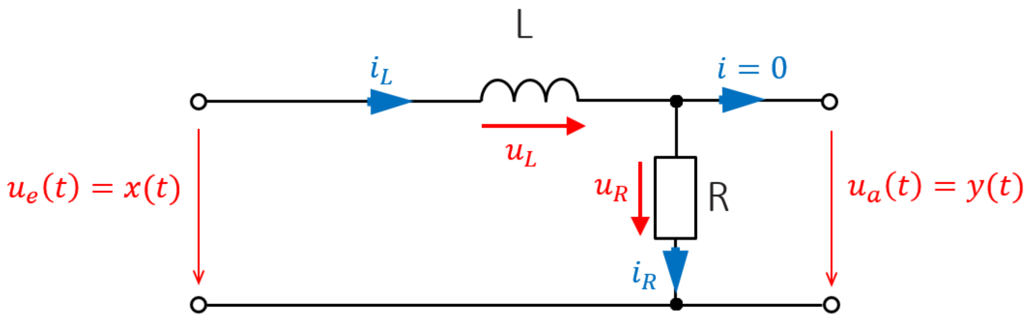
Mit $i_L(t) = i_R(t) = u_R(t)/R = y(t)/R$ erhalten wir

$$x(t) = \frac{L}{R} \cdot \frac{dy(t)}{dt} + y(t).$$

Der Quotient L/R ist die Zeitkonstante des Systems, $\tau = L/R$, womit wir die Systemdifferentialgleichung als

$$\tau\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

schreiben können.



Aufgabe 103

Neu in Version 5.0 Wie lautet die Sprungantwort der RL-Schaltung aus Aufgabe 102?

Lösung:

Die Sprungantwort können wir entweder im Laplace-Bereich berechnen, oder mittels Faltung der Impulsantwort mit dem Einheitssprung. Wir werden hier den zweiten Weg gehen. Wir beginnen mit der Stoßantwort $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$. Die Übertragungsfunktion $H(s)$ erhalten wir durch Laplace-Transformation der Systemdifferentialgleichung:

$$H(s) = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{1}{s + 1/\tau},$$

und daraus die Stoßantwort

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \cdot \varepsilon(t).$$

Die Sprungantwort erhalten wir durch Faltung:

$$\begin{aligned} y_\varepsilon(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau')\varepsilon(t-\tau')d\tau' \\ &= \frac{1}{\tau}\int_0^t e^{-\tau'/\tau} d\tau' \\ &= -e^{-t/\tau}|_0^t \\ &= 1 - e^{-\tau'/\tau} \qquad t > 0, \end{aligned}$$

das heißt

$$y_\varepsilon(t) = 1 - e^{-t/\tau} \qquad t > 0.$$

Da für den Strom durch den Widerstand $i_R(t) = y(t)/R$ gilt, ist die Ausgangsspannung proportional zum Strom $i_R = i_L$ im System. Das heißt, im Gegensatz zum RC-Tiefpass-Glied, wo die Spannung am Kondensator PT1-Verhalten aufweist (siehe VU und Buch Frey/Bossert), zeigt beim gegebenen RL-Glied der Strom PT1-Verhalten. Dieses Verhalten kann zur stufenlosen Variation von Strömen, bspw. durch einen Motor, und damit zur Drehzahlsteuerung verwendet werden, siehe Aufgabe 104.

Aufgabe 104

Neu in Version 5.0 Berechnen und skizzieren Sie den Spannungsverlauf $u_a(t)$ der RL-Schaltung aus Aufgabe 102 im eingeschwungenen Zustand, wenn am Eingang eine periodische Rechteckschwingung mit der Periodendauer T anliegt und für den Verlauf einer Periode Folgendes gilt:

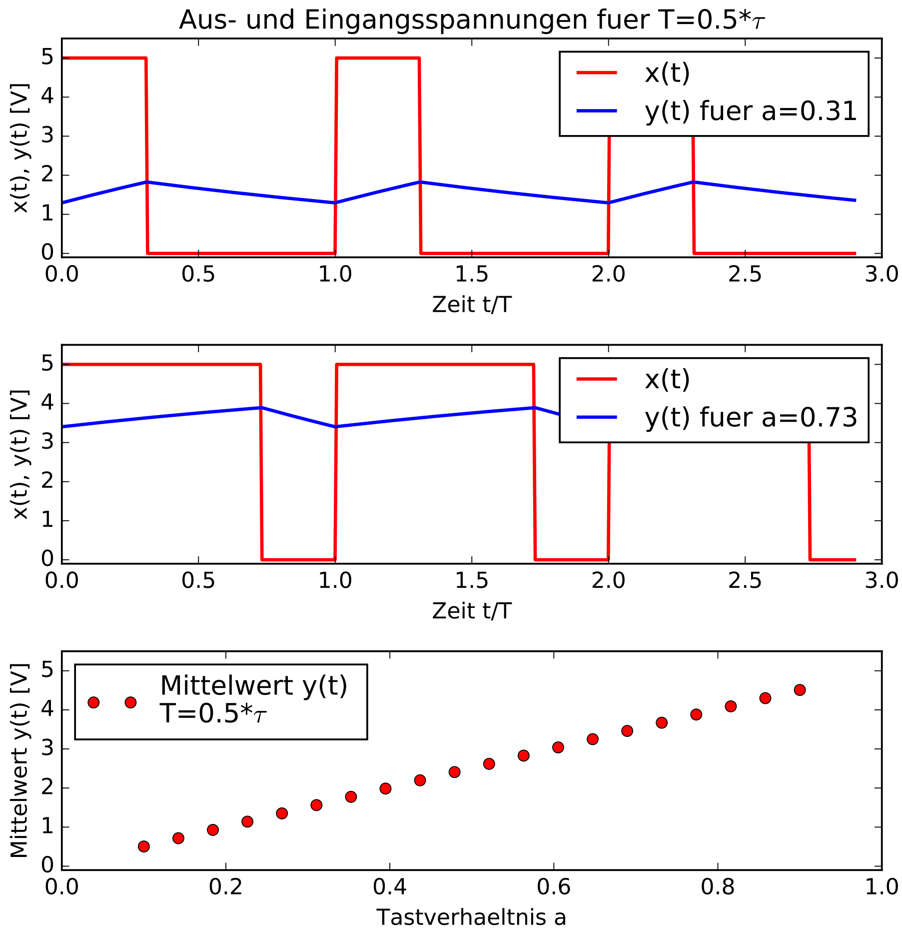
$$u_e(t) = \begin{cases} U_0 & t < aT \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

mit $0 < a < 1$.

Wie verändert sich der Mittelwert von $u_a(t)$ bei Variation von a im Bereich $0 < a < 1$, wenn die Zeitkonstante des Systems $\tau \gg T$?

Lösung:

Die Eingangspannung im eingeschwungenen Zustand, $u_e(t) = x(t)$, ist im Bild für zwei verschiedene Werte von a gezeichnet. Der Wert a gibt das Verhältnis zwischen Einschaltzeit der Rechteckspannung und der Periode T an, $a = T_{ein}/T$, und wird daher als Tastverhältnis bezeichnet.



Wie in der Lösung zur Aufgabe 103 und in der VU erläutert, nähert sich die Ausgangsspannung $u_a(t) = y(t)$ nach einem Spannungssprung am Eingang dem Endwert mit PT1-Verhalten. Wenn die Zeitkonstante des Systems $\tau = L/R \ll T$, erreicht die Ausgangsspannung während der Einschaltzeit der Eingangsspannung den Endwert U_0 und klingt während der Ausschaltzeit wieder auf 0 ab. Ist hingegen die Zeitkonstante $\tau \gg T$, bzw. die Schaltfrequenz $1/T \gg 1/\tau$, so kann die Ausgangsspannung während der Einschaltzeiten aT bzw. der Ausschaltzeiten $(1-a)T$ dem Eingangsspannungsverlauf nicht mehr schnell genug folgen und pendelt lediglich um einen Mittelwert (siehe Bild).

Je größer der Wert von a, desto länger ist die Zeit pro Periode, während der die Ausgangsspannung den Wert U_0 annimmt, und je größer ist auch dieser Mittelwert. Bei Variation von a im Bereich $0 < a < T$ ergibt sich daher im eingeschwungenen Zustand ein umso größerer Mittelwert, je höher a gewählt wird, siehe unterstes Teilbild. Der Mittelwert steigt linear mit a. Die Variation der Ausgangsspannung mit der Pulsweite a wird auch Pulsweitenmodulation genannt. Das schnelle Ein- und Ausschalten einer Gleichspannung U_0 zur Variation der Ausgangsspannung (oder des Ausgangsstromes) ist das Prinzip auf dem getaktete Leistungsquellen, wie sie bspw. in Schaltnetzteilen oder in Motorantriebssteuerungen zu finden sind, basieren. Als Schalter kommen dabei Transistoren und andere leistungselektronische Bauteile zum Einsatz.

Um den Verlauf von $u_a(t)$ zu berechnen, gehen wir von der Systemdifferentialgleichung der Schaltung (siehe Aufgabe 102) aus:

$$\tau\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t).$$

Laplace-Transformation der Gleichung ergibt

$$\tau\left[sY - y(0^-)\right] + Y = X.$$

Es müssen zwei Zeitbereiche unterschieden werden:

- $0 < t < aT \qquad x(t) = U_0,$
- $aT < t < T \qquad x(t) = 0.$

Für diese beiden Bereiche gelten auch unterschiedliche Systemgleichungen. Bezeichnen wir die Werte der Ausgangsspannung zu den Zeitpunkten aT und T mit $y(aT)$ bzw. $y(T)$, so erhalten wir

- $Y_A = \left[\frac{U_0}{s} + U(T)\tau\right]\frac{1}{1+s\tau} \qquad 0 < t < aT,$
- $Y_B = U(aT)\frac{\tau}{1+s\tau} \qquad aT < t < T.$

Rücktransformation in den Zeitbereich ergibt

- $y_A(t) = U_0 + e^{-t/\tau}\left[U(T) - U_0\right] \qquad 0 < t < aT,$
- $y_B(t) = U(aT)e^{-t/\tau} \qquad aT < t < T.$

Da die Eingangsspannung periodisch in T ist, gilt dies im eingeschwungenen Zustand auch für die Ausgangsspannung. Daher gilt:

$$y_A(aT) = y_B(0)$$
$$y_A(0) = y_B((1-a)T).$$

Das ergibt

$$U_0 + e^{-aT/\tau}\left[U(T) - U_0\right] = U(aT)$$
$$U(aT)e^{-(1-a)T/\tau} = U(T).$$

Auflösung des Gleichungssystems nach $U(aT)$ und $U(T)$:

$$U(T) = U_0\frac{e^{aT/\tau} - 1}{e^{T/\tau} - 1}$$
$$U(aT) = U(T)e^{(1-a)T/\tau}.$$

Mit $y_A(t)$ und $y_B(t)$ erhält man für $T = 0.5\tau$ und den entsprechenden Werten für a die im Bild gezeichneten Verläufe.

Aufgabe 105

$\boxed{\text{Neu in Version 6.0}}$ Berechnen Sie für den normierten Schwingkreis aus Aufgabe 99 allgemein das Ausgangssignal $y(t)$ im eingeschwungenen Zustand, wenn an den Eingang ein Signal $x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ gelegt wird. Wie hängt das Ausgangssignal von der Frequenz ω des Eingangssignals und der Dämpfung d des Systems ab?

Lösung:

Im eingeschwungenen Zustand kann die komplexe Wechselstromrechnung verwendet werden:

$$\underline{y_0} = H(s = j\omega)\underline{x_0} = \frac{\omega_0^2}{(j\omega)^2 + 2d\omega_0 j\omega + \omega_0^2} \cdot \underline{x_0}$$

mit

$$\underline{x_0} = A \cdot e^{j\varphi}.$$

Für das komplexe Ausgangssignal ergibt sich damit

$$\underline{y_0} = \frac{A\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j2d\omega_0\omega} \cdot e^{j\varphi}.$$

Sein Betrag und seine Phase lauten

$$|\underline{y_0}| = \frac{A\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4d^2\omega_0^2\omega^2}}$$

und

$$\arg(\underline{y_0}) = \varphi - \operatorname{atan}\left[\frac{2d\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right].$$

Das Ausgangssignal lautet daher

$$y(t) = \operatorname{Re}\left\{|\underline{y_0}| \cdot e^{j\arg(\underline{y_0})}\right\} = |\underline{y_0}| \cdot \cos(\omega t + \arg(\underline{y_0})).$$

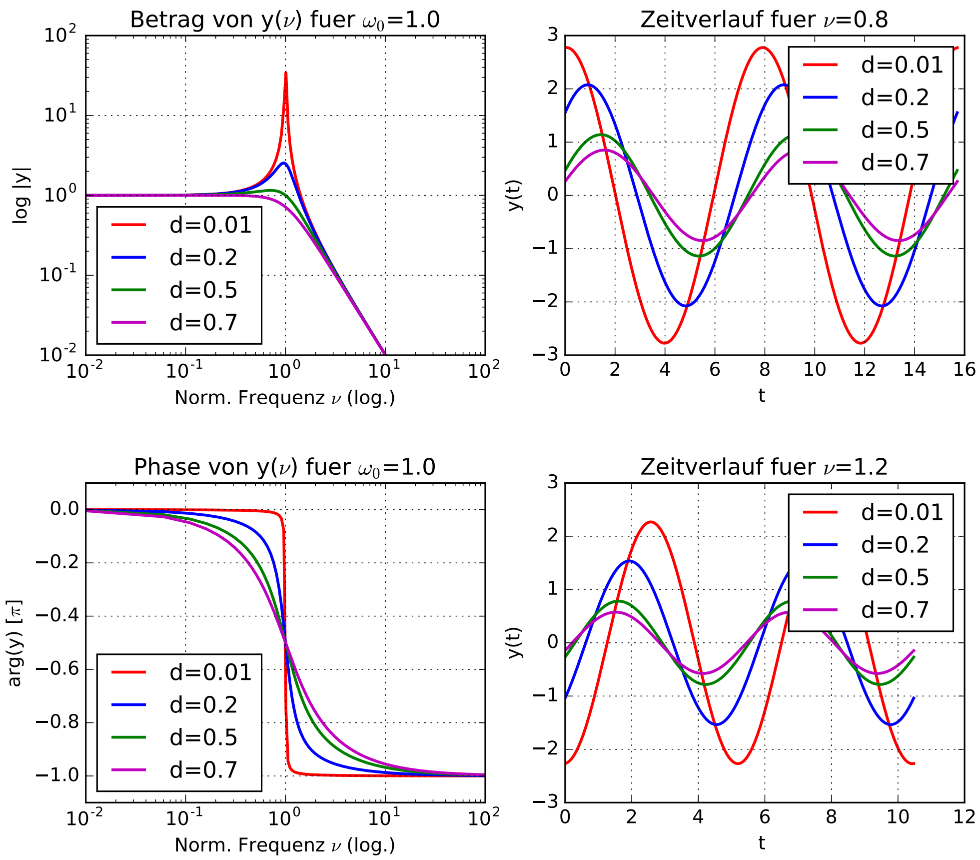
Es bietet sich an, die Frequenz auf die Resonanzfrequenz des ungedämpften PT2 Gliedes zu normieren, $\nu = \omega/\omega_0$. Mit dieser normierten Frequenz erhalten wir für $\varphi = 0$ (was ohne Beschränkung der Allgemeinheit immer erreichbar ist) und einer Eingangsamplitude $A = 1$ die normierte komplexe Amplitude des Ausgangssignals

$$\underline{y_{0,N}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{(1 - \nu^2)^2 + 4d^2\omega_0^2\nu^2}} \cdot e^{j\arg(\underline{y_{0,N}})},$$

mit

$$\arg(\underline{y_{0,N}}) = -\operatorname{atan}\left[\frac{2d\nu}{1 - \nu^2}\right].$$

Die linke Spalte im Bild zeigt den Verlauf von $|\underline{y_{0,N}}|$ und $\arg(\underline{y_{0,N}})$ über der normierten Frequenz ν für verschiedene Werte der Dämpfung d ($A = 1$, $\varphi = 0$). Die rechte Spalte zeigt exemplarische Zeitverläufe von $\mathrm{Re}\left\{\underline{y_{0,N}} \cdot e^{j\nu t}\right\}$ für Frequenzen unter- (obere Tafel) und oberhalb (untere Tafel) von $\nu = 1$. Die Amplituden-Überhöhung von $y(t)$ bei der Resonanzfrequenz ω_0 für kleine Werte von d entspricht dem Überschwingen bei der Sprungantwort (vgl. Aufgabe 101). Die Phase ändert sich mit der Frequenz beim Durchgang durch die Resonanz um π. Bei der Resonanzfrequenz ist der Wert $\pi/2$. Dieser Phasensprung ist in den Zeitverläufen in der rechten Spalte gut erkennbar. Dies ist allgemeingültig für alle schwingfähigen Systeme zweiter Ordnung, nicht bloß für den RLC-Schwingkreis!



Aufgabe 106

Neu in Version 7.0 Gegeben sei ein PT2 System mit der Übertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{K}{s^2 + 2d\omega_0 \cdot s + \omega_0^2}.$$

Bestimmen Sie allgemein den Zeitpunkt t_{max}, an dem die Stoßantwort ihren Maximalwert annimmt.

Lösung:

Den Zeitpunkt t_{max} erhält man durch Nullsetzen der Ableitung der Stoßantwort nach der Zeit. Die Stoßantwort des PT2-Systems erhält man durch Rücktransformation der Übertragungsfunktion in den Zeitbereich, wie in Aufgabe 100 gezeigt. Die Stoßantwort lautet

$$h(t) = \frac{K}{\omega_e} \cdot e^{-d\omega_0 t} \sin(\omega_e t) \cdot \varepsilon(t),$$

wobei die Schwingkreisfrequenz des gedämpften Systems hier mit $\omega_e = \omega_0\sqrt{1-d^2}$ bezeichnet wurde. Ableitung von $h(t)$ nach der Zeit ergibt für $t > 0$

$$\frac{d}{dt}h(t) = \frac{K}{\omega_e} e^{-d\omega_0 t} \cdot \left[-d\omega_0 \sin(\omega_e t) + \cos(\omega_e t)\right].$$

Nullsetzen dieses Ausdrucks:

$$\frac{d}{dt}h(t) = 0$$

$$d\omega_0 \sin(\omega_e t) = \omega_e \cos(\omega_e t),$$

$$\omega_e t = \arctan(\frac{\omega_e}{d\omega_0}) = \arctan(\frac{\sqrt{1-d^2}}{d}).$$

Damit erhält man t_{max} zu

$$t_{max} = \frac{1}{\omega_0\sqrt{1-d^2}} \arctan(\frac{\sqrt{1-d^2}}{d}).$$

Wie durch Vergleich mit der Sprungantwort des PT2-Systems aus Aufgabe 101 ersichtlich, entspricht das Maximum der Stoßantwort bei t_{max} dem Wendepunkt der Sprungantwort während des Anstiegs.

Aufgabe 107

Neu in Version 7.0 Bestimmen Sie allgemein den Maximalwert der Stoßantwort eines PT2-Systems.

Lösung:

Wie in Aufgabe 106 berechnet besitzt die Stoßantwort eines PT2-Systems ein Maximum bei

$$t_{max} = \frac{1}{\omega_0\sqrt{1-d^2}} \arctan(\frac{\sqrt{1-d^2}}{d}).$$

Einsetzen dieser Zeit in den in der Aufgabe 100 berechneten Ausdruck für die Stoßantwort,

$$h(t) = \frac{K}{\omega_e} \cdot e^{-d\omega_0 t} \sin(\omega_e t) \cdot \varepsilon(t),$$

ergibt für $t > 0$

$$h(t_{max}) = \frac{K}{\omega_e} \cdot e^{-d\omega_0 t_{max}} \sin(\omega_e t_{max}).$$

Der Ausdruck für die Sinusschwingung

$$\sin(\omega_e t_{max}) = \sin\left(\omega_0\sqrt{1-d^2}\frac{1}{\omega_0\sqrt{1-d^2}} \arctan(\frac{\sqrt{1-d^2}}{d})\right) = \sin\left(\arctan(\frac{\sqrt{1-d^2}}{d})\right)$$

lässt sich mit und der Beziehung

$$\sin(x) = \frac{\tan(x)}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$$

vereinfachen. Einsetzen von $x = \arctan(\frac{\sqrt{1-d^2}}{d})$ in diese Beziehung ergibt

$$\sin(x) = \frac{\tan(x)}{\sqrt{1+\tan^2(x)}} = \frac{\tan(\arctan(\frac{\sqrt{1-d^2}}{d}))}{\sqrt{1+\tan^2(\arctan(\frac{\sqrt{1-d^2}}{d}))}} = \frac{\frac{\sqrt{1-d^2}}{d}}{\sqrt{1+\frac{1-d^2}{d^2}}} = \sqrt{1-d^2},$$

das heißt

$$\sin\left(\omega_e t_{max}\right) = \sqrt{1-d^2}.$$

Damit erhalten wir

$$h(t_{max}) = \frac{K}{\omega_e} \cdot e^{-d\omega_0 t_{max}} \sqrt{1-d^2},$$

bzw.

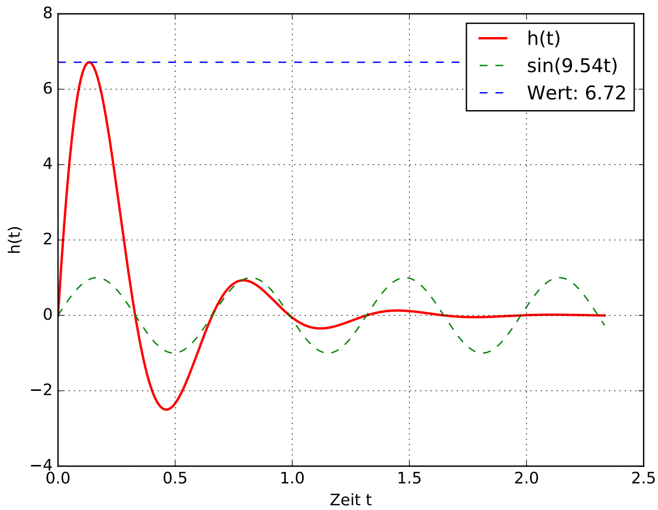
$$h(t_{max}) = \frac{K}{\omega_0\sqrt{1-d^2}} \cdot e^{-d\omega_0 \frac{1}{\omega_0\sqrt{1-d^2}} \arctan(\frac{\sqrt{1-d^2}}{d})} \sqrt{1-d^2},$$

nach Vereinfachung

$$h(t_{max}) = \frac{K}{\omega_0} \cdot e^{-\frac{d}{\sqrt{1-d^2}} \arctan(\frac{\sqrt{1-d^2}}{d})}.$$

Aufgabe 108

Neu in Version 7.0 Zur Charakterisierung eines PT2-Systems wird seine Stoßantwort gemessen. Diese besitzt, wie im folgenden Bild dargestellt, ein Maximum bei 6.72 und eine Schwingungsfrequenz von 9.54. Mit Hilfe einer separaten Messung wurde die Dämpfung zu $d = 0.3$ bestimmt.



Wie lautet die Übertragungsfunktion des Systems?

Lösung:

Zur Bestimmung der Übertragungsfunktion benötigen wir neben der Dämpfung, d, die Eigenfrequenz des ungedämpften Systems, ω_0, und die Verstärkung, K, des Systems. Mit diesen Größen lässt sich die Übertragungsfunktion unmittelbar folgendermaßen angeben:

$$H(s) = \frac{K}{s^2 + 2d\omega_0 \cdot s + \omega_0^2}.$$

Aus der gemessenen Kreisfrequenz des gedämpften Systems, $\omega_e = \omega_0\sqrt{1-d^2} = 9.54$, erhalten wir mit $d = 0.3$ die Kreisfrequenz des ungedämpften Systems, $\omega_0 = 9.54/\sqrt{1-0.09} = 10$.

Mit dem Ergebnis der Aufgabe 107 lässt sich mit Kenntnis der Dämpfung d und der Kreisfrequenz ω_0 die Verstärkung K aus dem Maximalwert der Stoßantwort berechnen:

$$h(t_{max}) = \frac{K}{\omega_0} \cdot e^{-\frac{d}{\sqrt{1-d^2}} \arctan(\frac{\sqrt{1-d^2}}{d})},$$

bzw. mit $y = \frac{d}{\sqrt{1-d^2}}$

$$h(t_{max}) = \frac{K}{\omega_0} \cdot e^{-y \arctan(\frac{1}{y})}.$$

Mit $d = 0.3$ erhalten wir $y \approx 0.3145$ und damit

$$e^{-y \arctan(\frac{1}{y})} \approx 0.672.$$

Daraus erhalten wir mit

$$h(t_{max}) = 6.72 = \frac{K}{10} 0.672$$

die Verstärkung $K = 100$, womit sich die Übertragungsfunktion unmittelbar bestimmen lässt:

$$H(s) = \frac{100}{s^2 + 6s + 100}.$$

Aufgabe 109

Neu in Version 7.0 Zur Bestimmung der Parameter einer Regelstrecke wird die Stoßantwort gemessen. Diese lässt sich als $h_{Mess}(t) = Ae^{-Bt}\sin(Ct)$ mit $A = 10.482$, $B = 3$, $C = 9.54$ angeben. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion der Regelstrecke.

Lösung:

Die Stoßantwort der Strecke hat die Form einer exponentiell gedämpften, reellen Sinusschwingung multipliziert mit einem Verstärkungsfaktor. Wie in der VU ausführlich diskutiert (siehe dazu auch die entsprechenden Passagen im Buch Frey/Bossert), entspricht eine reelle, gedämpfte Schwingung im Zeitbereich einem konjugiert komplexen Polpaar in der negativen Halbebene des Laplace-Bildbereiches. Damit ist klar, dass es sich bei der Strecke um ein stabiles, reelles System mit einer reellen Verstärkung handelt, dessen Übertragungsfunktion aus einem konjugiert komplexen Polpaar und einem reellen Verstärkungsfaktor besteht. Es handelt sich bei der Strecke also offensichtlich um ein PT2-Glied, dessen Übertragungsfunktion sich allgemein

$$H_{PT2}(s) = \frac{K}{s^2 + s2d\omega_0 + \omega_0^2}$$

schreiben lässt, vergleiche dazu auch Aufgabe 99. Die Stoßantwort $h_{PT2}(t)$ eines PT2-Glieds erhält man durch Rücktransformation von $H_{PT2}(s)$. Dies wurde in Aufgabe 99 gezeigt. Eine Lösungsmöglichkeit für diese Aufgabe bestünde also darin, die Parameter d, ω_0 und K durch Koeffizientenvergleich zwischen $h_{Mess}(t)$ und $h_{PT2}(t)$ zu ermitteln. Hier wollen wir den umgekehrten Weg gehen und nach Laplace-Transformation von $h_{Mess}(t)$ den Koeffizientenvergleich im Bildbereich durchführen:

$$h_{Mess}(t) = Ae^{-Bt}\sin(Ct) = Ae^{-Bt}\frac{1}{2j}[e^{jCt} - e^{-jCt}]$$

$$h_{Mess}(t) = \frac{A}{2j}[e^{-(B-jC)t} - e^{-(B+jC)t}]$$

Mit $D = B + jC$ lässt sich das als

$$h_{Mess}(t) = \frac{A}{2j}[e^{-D^*t} - e^{-Dt}]$$

schreiben. Nach Laplace-Transformation von $h_{Mess}(t)$ erhalten wir die Übertragungsfunktion der Strecke, $H_S(s) = \mathcal{L}\{h_{Mess}(t)\}$. Diese lautet

$$H_S(s) = \frac{A}{2j}\left[\frac{1}{s+D^*} - \frac{1}{s+D}\right],$$

bzw.

$$H_S(s) = \frac{A}{2j}\left[\frac{D-D^*}{(s+D^*)(s+D)}\right],$$

und damit

$$H_S(s) = \frac{AC}{s^2 + s2B + (B^2 + C^2)}.$$

Die Parameter d, ω_0 und K erhalten wir durch Koeffizientenvergleich mit

$$H_{PT2}(s) = \frac{K}{s^2 + s2d\omega_0 + \omega_0^2},$$

also

$$K = AC$$

$$2d\omega_0 = 2B$$

$$\omega_0^2 = B^2 + C^2.$$

Beginnend mit dem letzten Ausdruck erhalten wir also

$$\omega_0^2 = 9 + 9.54^2 = 100 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = 10,$$

$$d = \frac{B}{\omega_0} = \frac{3}{10} = 0.3$$

$$K = AC = 10.482 \times 9.54 = 100,$$

das heißt

$$H_{PT2}(s) = \frac{100}{s^2 + 6s + 100}.$$

D.3 Lösungen Aufgaben zu Frequenzbereich und Zustandsraum

Aufgabe 110

Gegeben ist folgende Übertragungsfunktion. Bestimmen sie die Eckfrequenzen und dort die Gruppenlaufzeit t_g bei der unteren Eckfrequenz f_1 und bei der oberen Eckfrequenz f_2.

$$H(s) = \frac{9.9s}{s^2 + 9.9s + 1}$$

Lösung:

Nullstelle bei $s = 0$

Aus $s^2 + 9.9s + 1 = 0 \Rightarrow$ Pole bei $s_{1,2} = \dfrac{-9.9 \pm \sqrt{9.9^2 - 4}}{2} = -4.95 \pm \sqrt{4.95^2 - 1}$.

Somit die Eckfrequenzen:

$f_1 = \dfrac{|s_1|}{2\pi} \approx \dfrac{0.1}{2\pi}$ und $f_2 = \dfrac{|s_2|}{2\pi} \approx \dfrac{9.8}{2\pi}$.

Gruppenlaufzeit:

$$t_g(s) = Re\left\{ -\frac{\frac{d}{ds}H(s)}{H(s)}\bigg|_{s=j2\pi f} \right\} = \frac{-9.9(s^2-1)}{s^4 - 96.01s^2 + 1} \underset{s \to j2\pi f}{=} \frac{9.9((2\pi f)^2 + 1)}{(2\pi f)^4 + 96.01(2\pi f)^2 + 1}$$

$\boxed{t_g(2\pi f_1) = t_g(\sim 0.1) \approx 5.1,\ t_g(2\pi f_2) = t_g(\sim 9.8) \approx 0.05}$.

Aufgabe 111

Bestimmen sie das Bode-Diagramm folgender Übertragungsfunktion für $RC = \dfrac{1}{22\pi}$, $\dfrac{L}{R} = \dfrac{11}{20\pi}$. Wie ist der Verlauf des Betragsfrequenzganges?

$$H(s) = \frac{1}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1}.$$

Lösung:

$$LCs^2 + \tfrac{L}{R}s + 1 = 0 \Rightarrow\ s^2 + \tfrac{1}{RC}s + \tfrac{1}{LC} = 0$$

Pole bei

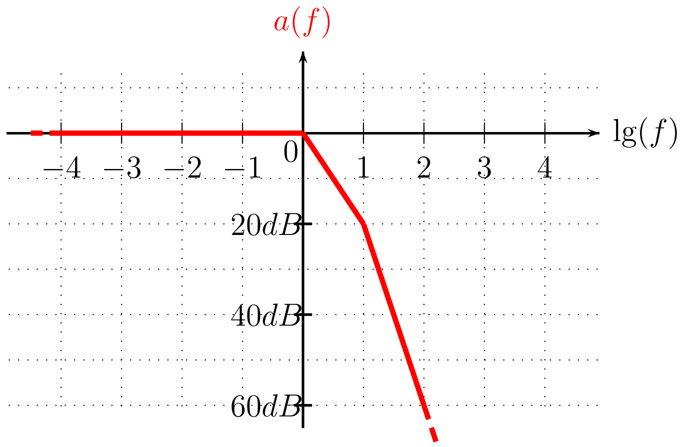
$$s_{1,2} = \frac{-\frac{1}{RC} \pm \sqrt{(\frac{1}{RC})^2 - \frac{4}{LC}}}{2} = -\frac{1}{2(RC)}\left(1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot(RC)\cdot\left(\frac{R}{L}\right)}\right) = -\pi(11 \pm 9).$$

Somit lauten die Eckfrequenzen: $f_1 = 1,\ f_2 = 10$.

$a_0 = \lg|H_0| = \lg(1) = 0.$

Ab $\lg(f_1) = \lg(1)$ Abfall mit -20 dB.

Ab $\lg(f_2) = \lg(10)$ Abfall mit 2×(-20 dB).



Aufgabe 112

Bestimmen sie den Phasengang der gegebenen Übertragungsfunktion für $RC = \frac{1}{22\pi}$, $\frac{L}{R} = \frac{11}{20\pi}$. Bestimmen sie zuerst die Zahl der Pole. Und geben sie dann den Phasenbeitrag für das jeweilige Frequenzinterval.

$$H(s) = \frac{1}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1}.$$

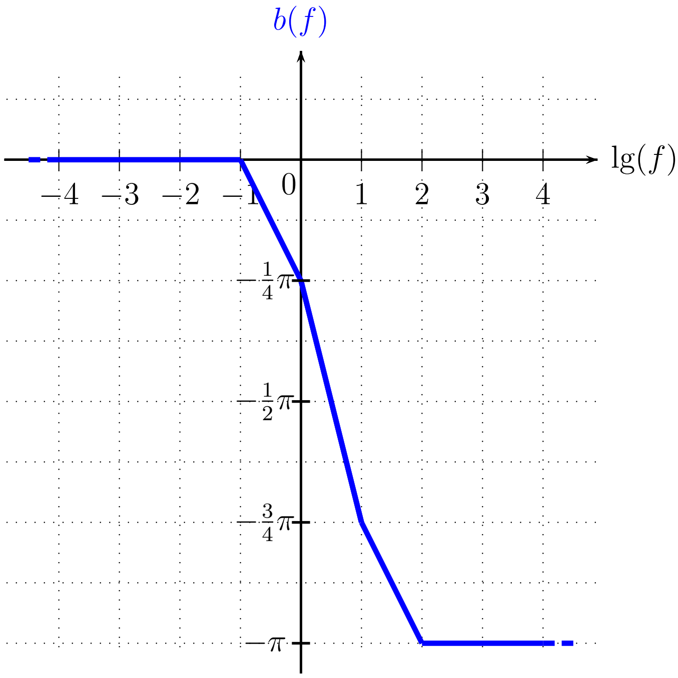
Lösung:

Keine Nullstellen, positiv ⇒ kein Grundbeitrag.

Zwei Pole bei $s_{1,2} = -\pi(11 \pm 9)$, Eckfrequenzen: $f_1 = 1$, $f_2 = 10$. (Siehe Aufgabe 111).

Jeweils Abfall um $\frac{\pi}{4}$ pro Dekade oberhalb und unterhalb der Eckfrequenz.

Achtung: Überlappung!



Aufgabe 113

Erstellen sie ein Zustandsmodell mit Phasenvariabalen. Überlegen sie sich zuerst die Koeffizienten a_n und b_n und erstellen dann die Matrizen A, B, C, D.

$y'' + 3y' + 2y = 3x'' + 6x' + 4x$.

Lösung:

Ablesen der Koeffizienten.

$a_0 = 2$, $a_1 = 3$, $b_0 = 4$, $b_1 = 6$, $b_2 = 3$.

$$\begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} \cdot x$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & -3 \end{bmatrix}}_{C} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \underbrace{3}_{D} \cdot x$$

Aufgabe 114

Berechnen sie Nullstellen, Pole, Betragsfrequenzgang und Phasenverlauf von

$$H(s) = \frac{1}{1 + 5s}.$$

Lösung:

$$H(j2\pi f) = \frac{1}{1+10j\pi f} = \frac{1-10j\pi f}{(1+10j\pi f)(1-10j\pi f)} =$$
$$= \frac{1-10j\pi f}{1+100\pi^2 f^2}$$

Betragsfrequenzganz:

$$|H(j2\pi f)|^2 = H(j2\pi f)H^*(j2\pi f) = \frac{(1-10j\pi f)(1+10j\pi f)}{(1+100\pi^2 f^2)^2} =$$
$$= \frac{1+100\pi f^2}{(1+100\pi^2 f^2)^2} = \frac{1}{1+100\pi^2 f^2}$$

$$|H(j2\pi f)| = \frac{1}{\sqrt{1+100\pi^2 f^2}}$$

Phasengang:

$$\varphi(j2\pi f) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(H(j2\pi f))}{\mathrm{Re}(H(j2\pi f)}\right) = -\arctan(10\pi f)$$

Pol bei $s = -\frac{1}{5} \Rightarrow f_1 = \frac{1}{10\pi}$.

Aufgabe 115

Berechnen sie Nullstellen, Pole, Betragsfrequenzgang und Phasenverlauf von

$$H(s) = \frac{1}{s^2+2s+1}.$$

Lösung:

$$H(2j\pi f) = \frac{1}{-4\pi^2 f^2 + 4j\pi f + 1} =$$
$$= \frac{-4\pi^2 f^2 - 4j\pi f + 1}{(-4\pi^2 f^2 - 4j\pi f + 1)(-4\pi^2 f^2 + 4j\pi f + 1)}$$

Betragsfrequenzganz:

$$|H(j2\pi f)|^2 = \frac{1}{(-4\pi^2 f^2 + 4j\pi f + 1)(-4\pi^2 f^2 - 4j\pi f + 1)} =$$
$$= \frac{1}{16\pi^4 f^4 - 4\pi^2 f^2 + 16\pi^2 f^2 - 4\pi^2 f^2 + 1} =$$
$$= \frac{1}{16\pi^4 f^4 + 8\pi^2 f^2 + 1} = \frac{1}{(4\pi^2 f^2 + 1)^2}$$

$$|H(j2\pi f)| = \frac{1}{4\pi^2 f^2 + 1}$$

Phasengang:

$$\varphi(j2\pi f) = \arctan\left(\frac{4\pi f}{4\pi^2 f^2 - 1}\right)$$

Doppelter Pol bei $s = -1 \Rightarrow f_{1,2} = \frac{|-1|}{2\pi}$.

Aufgabe 116

Berechnen sie Betragsfrequenzgang und Phasenverlauf eines Hochpasses

$$H(s) = \frac{5s}{10+s}.$$

Lösung:

$$\begin{aligned} H(j2\pi f) &= \frac{10j\pi f}{10 + 2j\pi f} = \\ &= \frac{10j\pi f(10 - 2j\pi f)}{100 + 4\pi^2 f^2} = \frac{20\pi^2 f^2 + 100j\pi f}{100 + 4\pi^2 f^2} \end{aligned}$$

Betragsfrequenzgang:

$$\begin{aligned} |H(2j\pi f)|^2 &= \frac{100\pi^2 f^2 (10 - 2j\pi f)(10 + 2j\pi f)}{(100 + 4\pi^2 f^2)^2} = \\ &= \frac{100\pi^2 f^2 (100 + 4\pi^2 f^2)}{(100 + 4\pi^2 f^2)^2} = \frac{100\pi^2 f^2}{(100 + 4\pi^2 f^2)} \end{aligned}$$

$$|H(j2\pi f)| = \frac{10\pi f}{\sqrt{100 + 4\pi^2 f^2}}$$

Phasengang:

$$\varphi(2j\pi f) = \arctan\left(\frac{100\pi f}{20\pi^2 f^2}\right) = \arctan\left(\frac{5}{\pi f}\right)$$

Nullstelle bei $s = 0 \Rightarrow f_0 = 0$.

Polstelle bei $s = -10 \Rightarrow f_1 = \frac{|-10|}{2\pi}$.

Aufgabe 117

Berechnen sie Nullstellen, Pole, Phasengang und Gruppenlaufzeit von

$$H(s) = \frac{8s}{s^2 + 8s + 1}.$$

Lösung:

$$\begin{aligned} H(j2\pi f) &= \frac{16j\pi f}{-4\pi^2 f^2 + 16j\pi f + 1} = \\ &= \frac{16j\pi f(-4\pi^2 f^2 - 16j\pi f + 1)}{(-4\pi^2 f^2 + 16j\pi f + 1)(-4\pi^2 f^2 - 16j\pi f + 1)} = \\ &= \frac{-64j\pi^3 f^3 + 256\pi^2 f^2 + 16j\pi f}{16\pi^4 f^4 + 248\pi^2 f^2 + 1} \end{aligned}$$

Phasengang:

$$\varphi(j2\pi j f) = \arctan\left(\frac{16\pi f - 64\pi^3 f^3}{256\pi^2 f^2}\right) = \arctan\left(\frac{16 - 64\pi^2 f^2}{256\pi f}\right)$$

$$\tau = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{df}\varphi(j2\pi j f) = \frac{1}{2\pi}\frac{-128\pi^2 f 256\pi f - 256\pi(16 - 64\pi^2 f^2)}{256^2\pi^2 f^2}\frac{1}{1 + \left(\frac{16-64\pi^2 f^2}{256\pi f}\right)^2}$$

Aufgabe 118

Skizzieren sie das Bodediagramm (Betrag und Phase) folgender Übertragungsfunktion

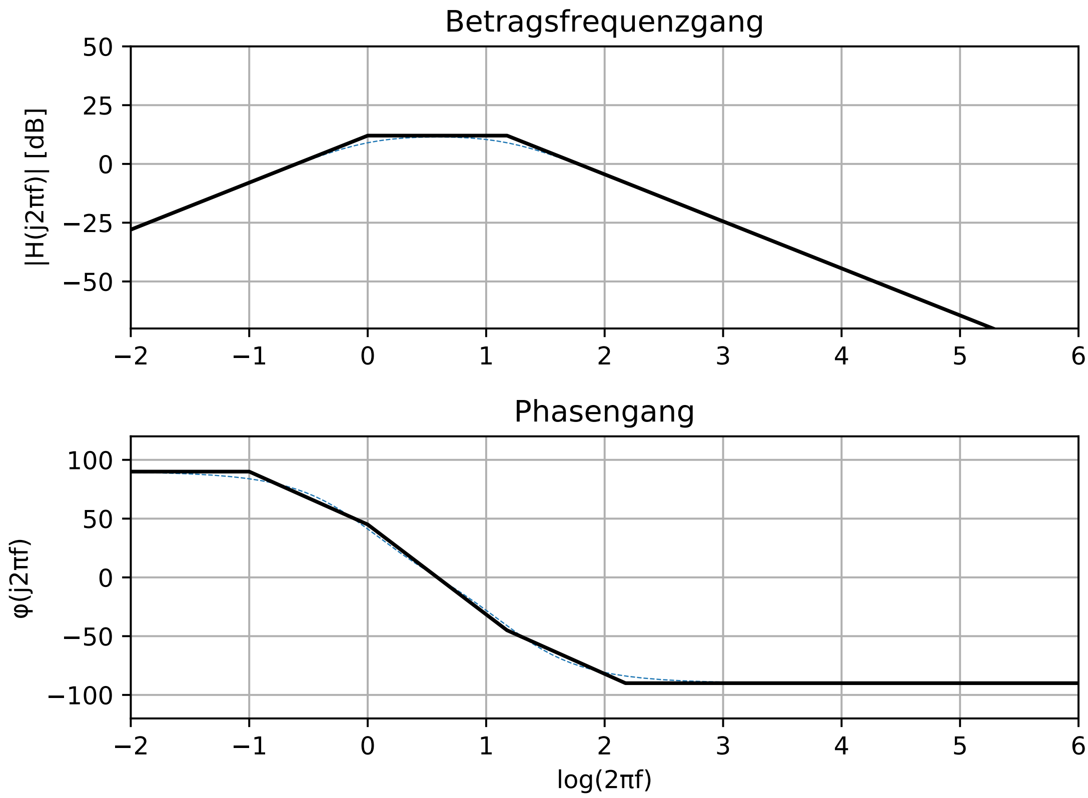
$$H(s) = \frac{4s}{\frac{s^2}{15} + \frac{16}{15}s + 1}.$$

Lösung:

$$H(j2\pi f) = \frac{8j\pi f}{-\frac{4}{15}\pi^2 f^2 + \frac{32}{15}j\pi f + 1}$$

Nullstelle bei $s = 0 \Rightarrow f_0 = 0$.

Pole bei $s = -1 \Rightarrow f_1 = \frac{1}{2\pi}$ und $s = -15 \Rightarrow f_2 = \frac{15}{2\pi}$.



Aufgabe 119

Skizzieren sie die Ortskurve der Impedanz der Serienschaltung aus einem Widerstand R und einer Induktivität L.

Lösung:

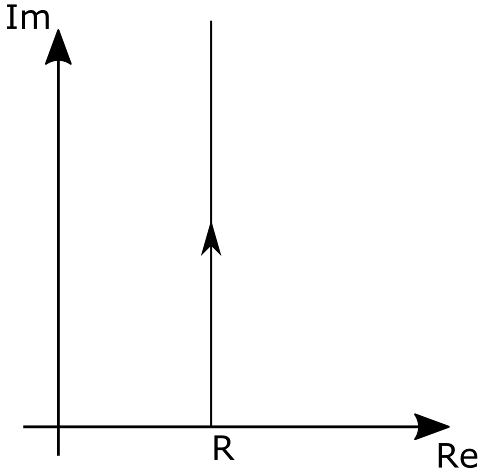
$$Z = R + j\omega L$$

$\frac{1}{H(f)}$	$H(f)$
Gerade durch Ursprung	Gerade durch Ursprung
Kreis durch Ursprung	Gerade nicht durch Ursprung
Gerade nicht durch Ursprung	Kreis durch Ursprung
Kreis nicht durch Ursprung	Kreis nicht durch Ursprung

$$|Z|^2(\omega) = (R - j\omega L)(R + j\omega L) = R^2 + \omega^2 L^2$$

$$|Z|(\omega) = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2},\ Z(0) = R$$

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$



Aufgabe 120

Berechnen Sie Betragsfrequenzgang, Phasenverlauf und Gruppenlaufzeit von

$$H(s) = \frac{1 - Ts}{1 + Ts}.$$

Um welches System handelt es sich?

Lösung:

$$H(j2\pi f) = \frac{1 - 2\pi j f T}{1 + 2\pi j f T} = \frac{(1 - 2\pi j f T)^2}{1 + 4\pi^2 f^2 T^2} = \\ = \frac{1 - 4\pi j f T - 4\pi^2 f^2 T^2}{1 + 4\pi^2 f^2 T^2}$$

Betragsfrequenzgang:

$$|H(j2\pi f)| = \sqrt{\frac{1 - 2\pi j f T}{1 + 2\pi j f T} \frac{1 + 2\pi j f T}{1 - 2\pi j f T}} = \sqrt{1} = 1$$

Phasengang:

$$\varphi(2j\pi f) = -\arctan\left(\frac{4\pi f T}{1 - 4\pi^2 f^2 T^2}\right)$$

Gruppenlaufzeit:

$$\tau_g = \mathrm{Re}\left(-\frac{1}{H(s)} \frac{d}{ds} H(s)\right)$$

$$\frac{d}{ds}H(s) = \frac{-T(1+Ts) - T(1-Ts)}{(1+Ts)^2} = \frac{-T - T^2 s - T + T^2 s}{(1+Ts)^2} =$$
$$= -2\frac{T}{(1+Ts)^2}$$

$$\frac{1}{H(s)}\frac{d}{ds}H(s) = -2\frac{1+Ts}{1-Ts}\frac{T}{(1+Ts)^2} = -2\frac{T}{(1+Ts)(1-Ts)} =$$
$$= -2\frac{T}{1-T^2s^2}$$

s durch $j2\pi f$ ersetzt:

$$\tau_g = \mathrm{Re}\left(2\frac{T}{1+4\pi^2 f^2 T^2}\right) = 2\frac{T}{1+4\pi^2 f^2 T^2}$$

Es handelt sich um einen Allpass.

Aufgabe 121

Filter: Konstruieren sie eine Bandsperre ($f_u = 0.01$, $f_o = 100$) ausgehend von einem Tiefpass.

Lösung:

Tiefpass:

$$H_T(s) = \frac{1}{1+s}$$

Tiefpaß	s	$\omega_g = 1$
Hochpaß	$\frac{1}{s}$	$\omega_g = 1$
Bandpaß	$\frac{1}{B}\left(s+\frac{1}{s}\right)$	$\omega_m = 1 = \sqrt{\omega_u \omega_o}\,, \quad B = \omega_o - \omega_u$
Bandsperre	$\frac{B}{s+\frac{1}{s}}$	$\omega_m = 1 = \sqrt{\omega_u \omega_o}\,, \quad B = \omega_o - \omega_u$

Tabelle Frequenztransformation

Bandsperre:

$$H_{BS}(s) = \frac{B}{s+\frac{1}{s}}$$

Einsetzen:

$$H(s) = \frac{1}{1+\frac{B}{s+\frac{1}{s}}} = \frac{s+\frac{1}{s}}{s+\frac{1}{s}+B} = \frac{s^2+1}{s^2+Bs+1}$$

Mittenfrequenz:

$$f_m = \sqrt{f_u f_o} = 1$$

Bandbreite:

$$B_f = (f_0 - f_u) = 2\pi(100\text{ Hz} - 0.01\text{ Hz}) = 2\pi \cdot 99,99\text{Hz}.$$

Aufgabe 122

Filter: Annahme ist ein idealer Rechteckfilter $G(j2\pi f) = \mathrm{Rect}(f/f_G)$. Berechnen sie die Stoßantwort als Fourier-Rücktransformierte. Was lernen wir daraus?

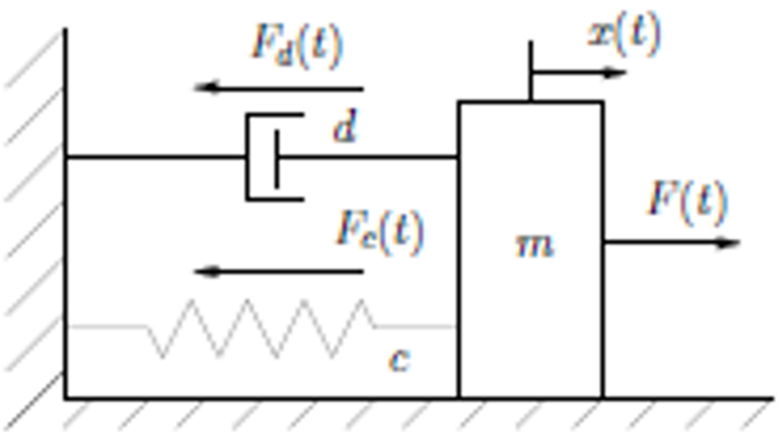
Lösung:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\left(G(j2\pi f)\right) &= \int_{-f_g/2}^{f_g/2} e^{j2\pi ft} df = \left| \begin{array}{c} u := j2\pi ft \\ \frac{du}{df} = j2\pi t \\ df = -j\frac{1}{2\pi t} \end{array} \right| = \\
&= -j\frac{1}{2\pi t}\int_{-j\pi f_g t}^{j\pi f_g t} e^u du = -\frac{j}{2\pi t}\left(e^{j\pi f_g t} - e^{-j\pi f_g t}\right) = \\
&= \frac{\sin(\pi f_g t)}{\pi t}
\end{aligned}$$

Das System ist akausal!

Aufgabe 123

Aufstellen der Zustandsgleichung eines Feder-Masse-Dämpfer-Systems laut nachfolgender Skizze:



Lösung:

Aufstellen der System-Differentialgleichung:

$$m\ddot{x}(t) = -[cx(t) + d\dot{x}(t)] + F(t)$$

$$m\ddot{x}(t) + d\dot{x}(t) + cx(t) = F(t)$$

Einführen der Zustandsvariablen:

$$\begin{aligned} z_1(t) &= x(t) \\ z_2(t) &= \dot{z}_1(t) = \dot{x}(t) \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} m\dot{z}_2 + dz_2 + cz_1(t) &= F(t) \\ \dot{z}_2(t) &= -\frac{c}{m}z_1(t) - \frac{d}{m}z_2(t) + \frac{F(t)}{m} \end{aligned}$$

Zustandsraumdarstellung:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{m} & -\frac{d}{m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{F(t)}{m} \end{bmatrix}$$

Aufgabe 124

Erstellen Sie ein Zustandsmodell mit Phasenvariablen. Überlegen Sie sich zuerst die Koeffizienten a_n und b_n und erstellen Sie dann die Matrizen A,B,C,D.

$$y'' + 2y' = 4x'' + 5x' - 2x$$

Lösung:

Laplace-Transformation der Systemdifferentialgleichung ergibt

$$s^2Y + 2sY = 4s^2X + 5sX - 2X.$$

Die Übertragungsfunktion lautet damit

$$G(s) = \frac{4s^2 + 5s - 2}{s^2 + 2s} = \frac{b_2s^2 + b_1s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0}.$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + 4x$$

Aufgabe 125

Gegeben sei die Übertragungsfunktion $H(s) = \dfrac{1 - Ts}{1 + Ts}$.

Berechnen Sie den Betragsfrequenzgang $|H(j2\pi f)|$ und den Phasenverlauf $\varphi(2\pi f)$.

Lösung:

$$\begin{aligned} H(j2\pi f) &= \frac{1 - 2\pi j f T}{1 + 2\pi j f T} = \frac{(1 - 2\pi j f T)^2}{1 + 4\pi^2 f^2 T^2} = \\ &= \frac{1 - 4\pi j f T - 4\pi^2 f^2 T^2}{1 + 4\pi^2 f^2 T^2} \\ &= \frac{1 - 4\pi^2 f^2 T^2}{1 + 4\pi^2 f^2 T^2} - j \frac{4\pi f T}{1 + 4\pi^2 f^2 T^2} \end{aligned}$$

Betragsfrequenzgang:

$$\begin{aligned} |H(j2\pi f)| &= \left| \frac{1 - 2\pi j f T}{1 + 2\pi j f T} \right| = \frac{|1 - j2\pi f T|}{|1 + j2\pi f T|} \\ &= \frac{\sqrt{1 + 4\pi^2 f^2 T^2}}{\sqrt{1 + 4\pi^2 f^2 T^2}} = 1 \end{aligned}$$

Phasengang:

$$\varphi(2\pi f) = -\arctan\left(\frac{4\pi f T}{1 - 4\pi^2 f^2 T^2}\right)$$

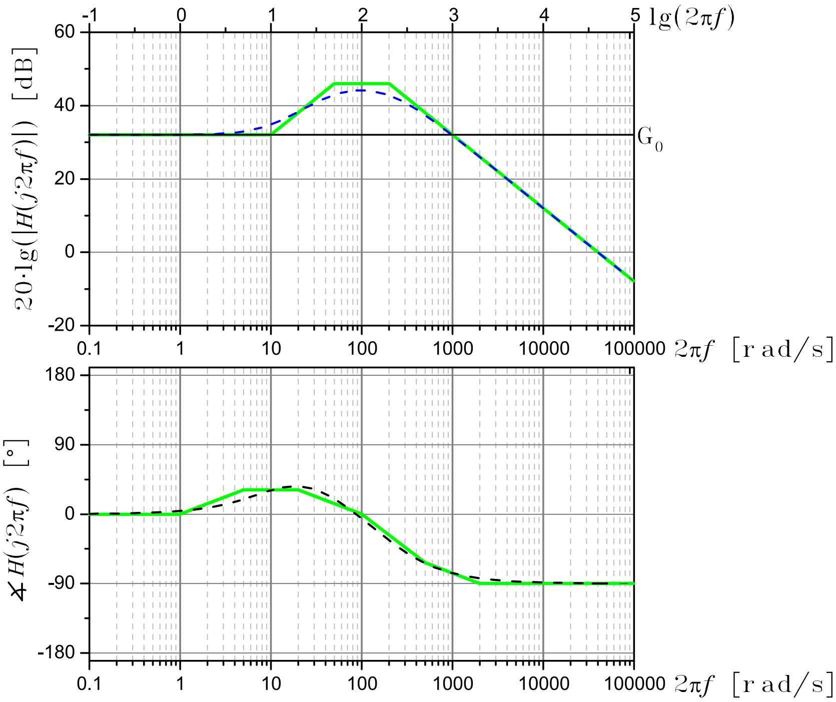
Aufgabe 126

Welches der folgenden Diagramme enspricht dem asymptotischen Bode-Diagramm für den Betragsfrequenzgang und Phasengang folgender Übertragungsfunktion?

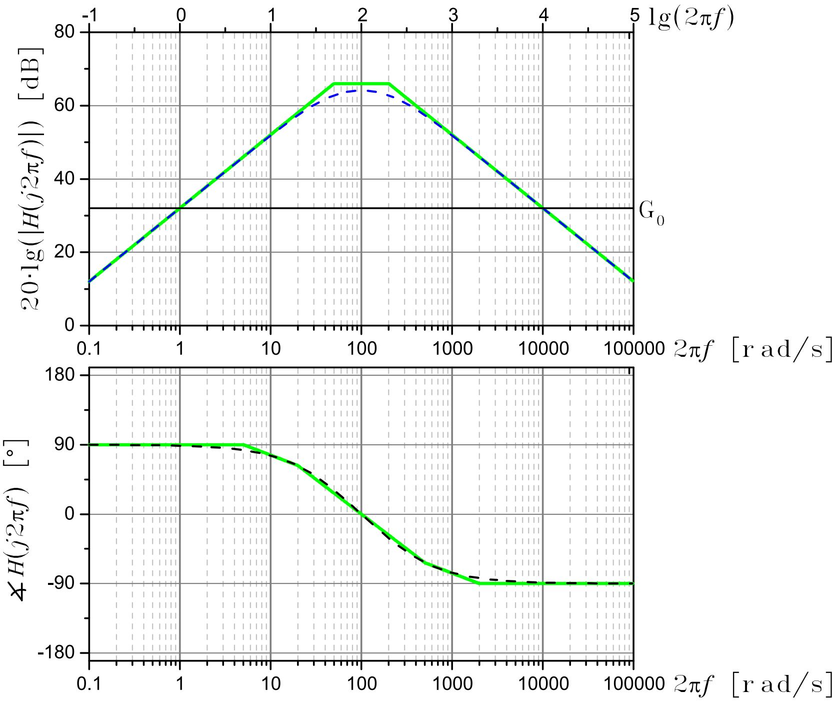
$$H(s) = 40000 \cdot \frac{(10 + s)}{(50 + s)(200 + s)} = 40 \cdot \frac{1 + \frac{s}{10}}{(1 + \frac{s}{50})(1 + \frac{s}{200})}$$

Die strichlierte Linie zeigt den exakten Verlauf, die durchgezogene Linie entspricht der asymptotischen Konstruktion. Beachten Sie, dass $G_0 = 20 \cdot \lg(40) \approx 32dB$.

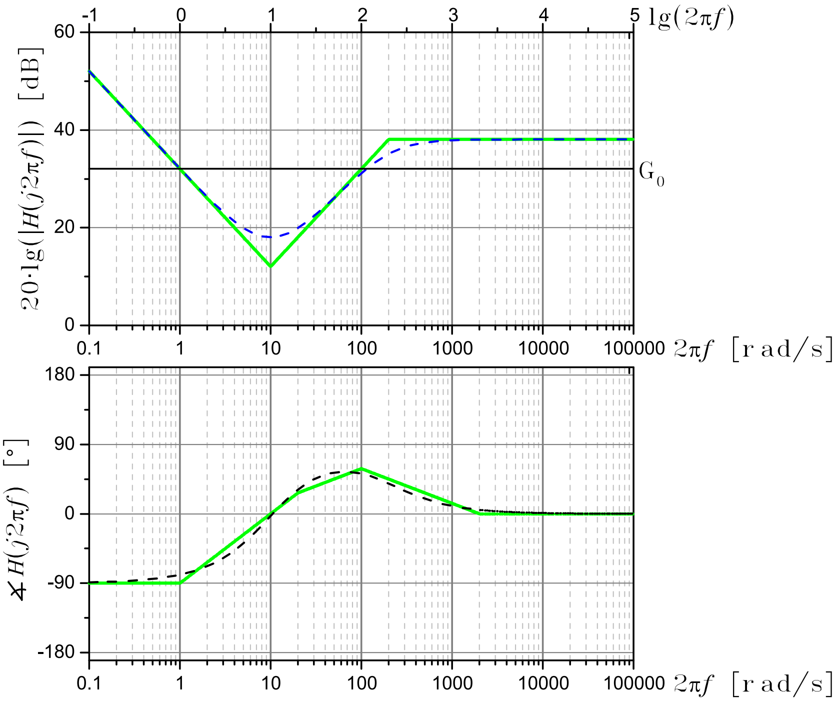
Antwortmöglichkeiten:


-1
0
1
2
3
4
5
lg(2πf)
60
40
20
0
-20
20·lg(|H(j2πf)|) [dB]
G0
0.1
1
10
100
1000
10000
100000
2πf [rad/s]
180
90
0
-90
-180
∡H(j2πf) [°]
0.1
1
10
100
1000
10000
100000
2πf [rad/s]

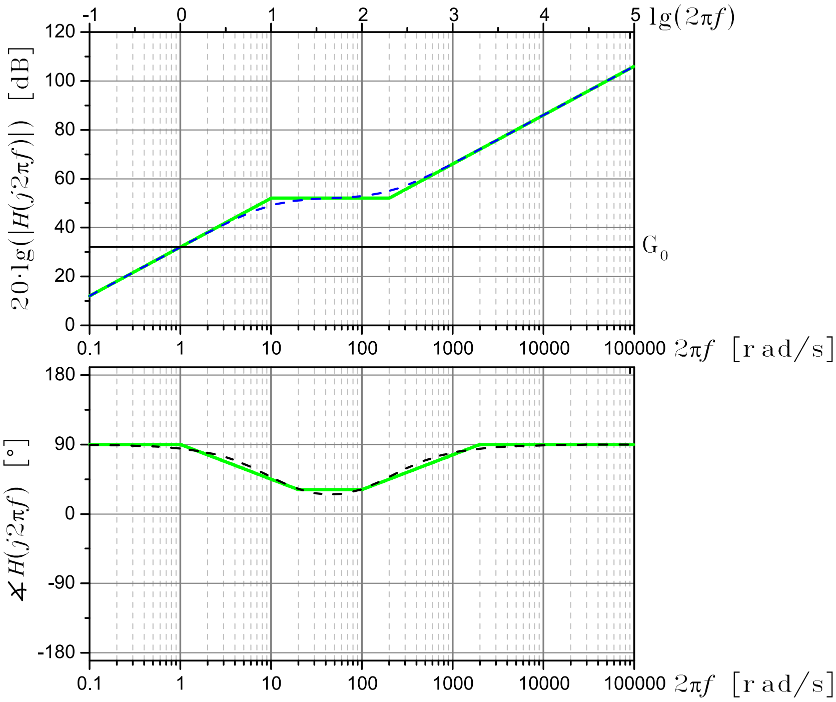
A.


-1
0
1
2
3
4
5
lg(2πf)
80
60
40
20
0
20·lg(|H(j2πf)|) [dB]
G0
0.1
1
10
100
1000
10000
100000
2πf [rad/s]
180
90
0
-90
-180
∡H(j2πf) [°]
0.1
1
10
100
1000
10000
100000
2πf [rad/s]

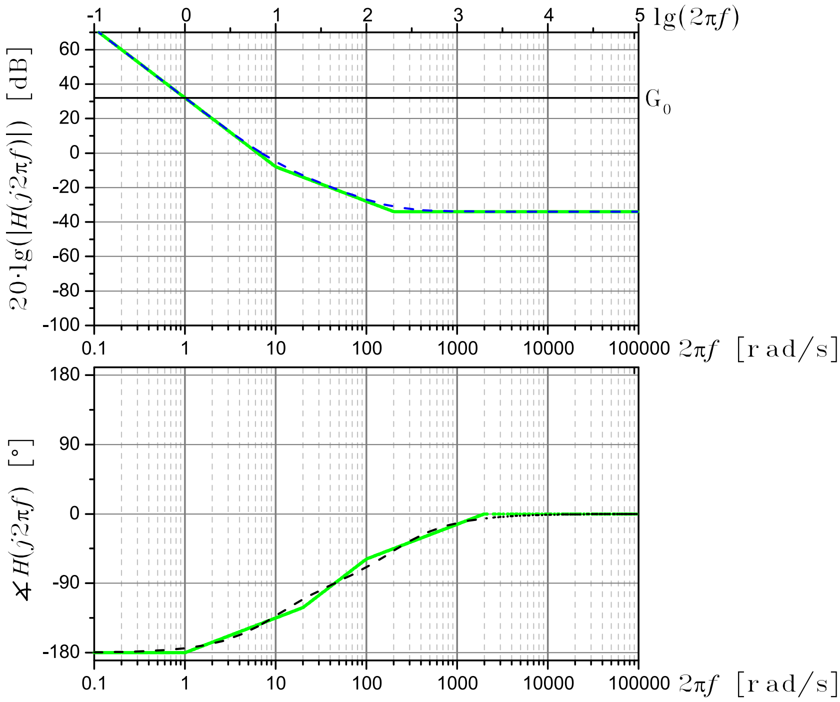
B.


lg(2πf)
-1
0
1
2
3
4
5
60
40
20
0
20·lg(|H(j2πf)|) [dB]
G0
0.1
1
10
100
1000
10000
100000
2πf [rad/s]
180
90
0
-90
-180
∡H(j2πf) [°]
0.1
1
10
100
1000
10000
100000
2πf [rad/s]

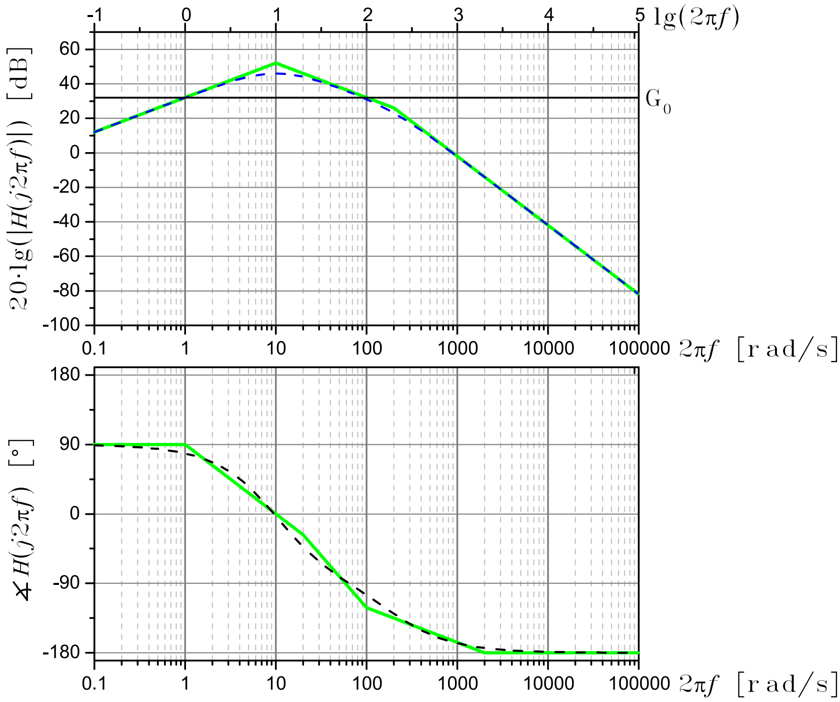
C.


lg(2πf)
-1
0
1
2
3
4
5
120
100
80
60
40
20
0
20·lg(|H(j2πf)|) [dB]
G0
0.1
1
10
100
1000
10000
100000
2πf [rad/s]
180
90
0
-90
-180
∡H(j2πf) [°]
0.1
1
10
100
1000
10000
100000
2πf [rad/s]

D.



E.



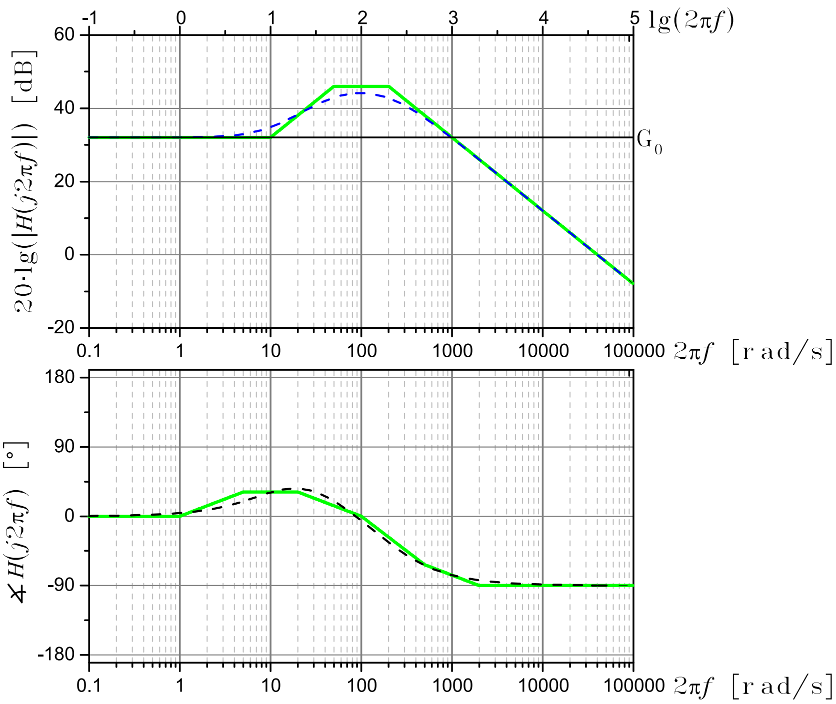
F.

Lösung:

Die Übertragungsfunktion hat reelle Pole bei $\alpha_1 = -50$ und $\alpha_2 = -200$ und eine Nullstelle bei $\beta_1 = -10$. Die Grundverstärkung beträgt $G_0 = 20 \cdot \lg(40) \approx 32dB$. Der Verstärkungsverlauf beginnt horizontal bei diesem Wert. Aufgrund der Nullstelle beginnt er bei $\lg(2\pi f_{\beta 1}) = \lg(10)$ mit 20 dB/Dek. zu steigen. Bei den Eckfrequenzen $\lg(2\pi f_{\alpha 1}) = \lg(50)$

und $\lg(2\pi f_{\alpha 2}) = \lg(200)$ verringert sich der Anstieg jeweils um 20 dB/Dek. Das heißt, bei lg(50) wird er horizontal, ab lg(200) fällt er mit 20 dB/Dek.

Der Phasengang verläuft entsprechend: Er beginnt horizontal bei Null, und erhöht sich aufgrund der Nullstelle bei der Frequenz lg(10), verschliffen über zwei Dekaden, um +90°. Gäbe es nur die Nullstelle, würde die Erhöhung genau bei lg(10) genau +45° betragen, weit darüber +90°. Bei den Frequenzen lg(50) und lg(200) erniedrigt der Phasengang sich jedoch jeweils um 90° (wiederum verschliffen über jeweils zwei Dekaden). Weit über $\lg(2\pi f_{\alpha 2}) = \lg(200)$ verläuft er horizontal bei einem Phasenwert von $0 + 90° - 90° - 90° = -90°$.



Aufgabe 127

Erstellen Sie ein Zustandsmodell mit Phasenvariablen. Überlegen sie sich zuerst die Koeffizienten a_n und b_n und erstellen sie dann die Matrizen A,B,C,D.

$$y'' + 2y' = 4x'' + 5x' - 2x$$

Lösung:

$$s^2Y + 2sY = 4s^2X + 5sX - 2$$

$$G(s) = \frac{4s^2 - 5s - 2}{s^2 + 2s} = \frac{b_0 s^2 - b_1 s - b_2}{s^2 + a_1 s + a_2}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + 4x$$

Aufgabe 128

Berechnen Sie den Betragsfrequenzgang $|H(j2\pi f)|$ und Phasenverlauf $\varphi(2\pi f)$ von

$$H(s) = \frac{1 - Ts}{1 + Ts}.$$

Lösung:

$$\begin{aligned} H(j2\pi f) &= \frac{1 - 2\pi jfT}{1 + 2\pi jfT} = \frac{(1 - 2\pi jfT)^2}{1 + 4\pi^2 f^2 T^2} = \\ &= \frac{1 - 4\pi jfT - 4\pi^2 f^2 T^2}{1 + 4\pi^2 f^2 T^2} \end{aligned}$$

Betragsfrequenzgang:

$$|H(j2\pi f)| = \sqrt{\frac{1 - 2\pi jfT}{1 + 2\pi jfT} \frac{1 + 2\pi jfT}{1 - 2\pi jfT}} = \sqrt{1} = 1$$

Phasengang:

$$\varphi(2\pi f) = -\arctan\left(\frac{4\pi fT}{1 - 4\pi^2 f^2 T^2}\right)$$

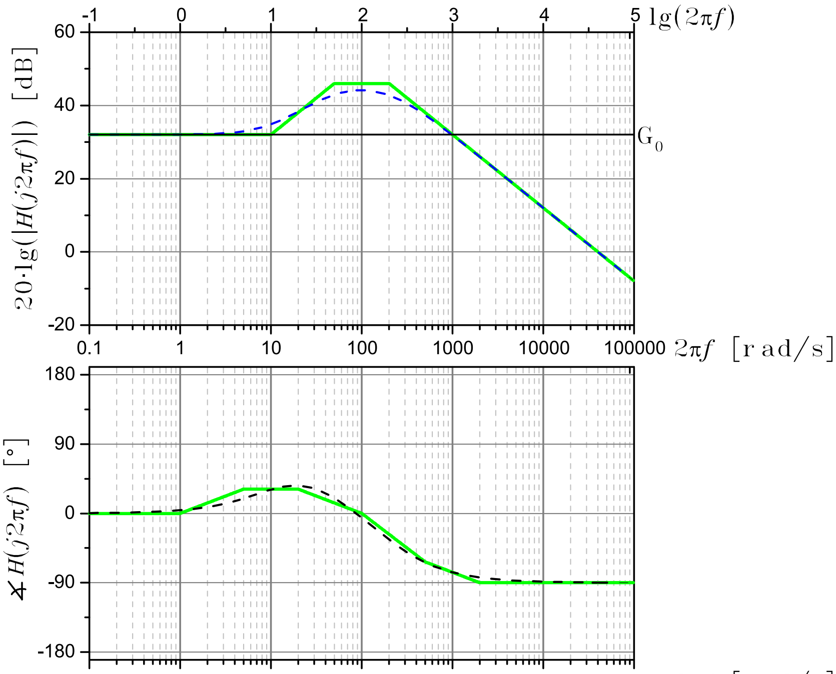
Aufgabe 129

Welches der folgenden Diagramme enspricht dem asymptotischen Bode-Diagramm für den Betragsfrequenzgang und Phasengang folgender Übertragungsfunktion?

$$H(s) = 40000 \cdot \frac{(10 + s)}{(50 + s)(200 + s)} = 40 \cdot \frac{1 + \frac{s}{10}}{(1 + \frac{s}{50})(1 + \frac{s}{200})}$$

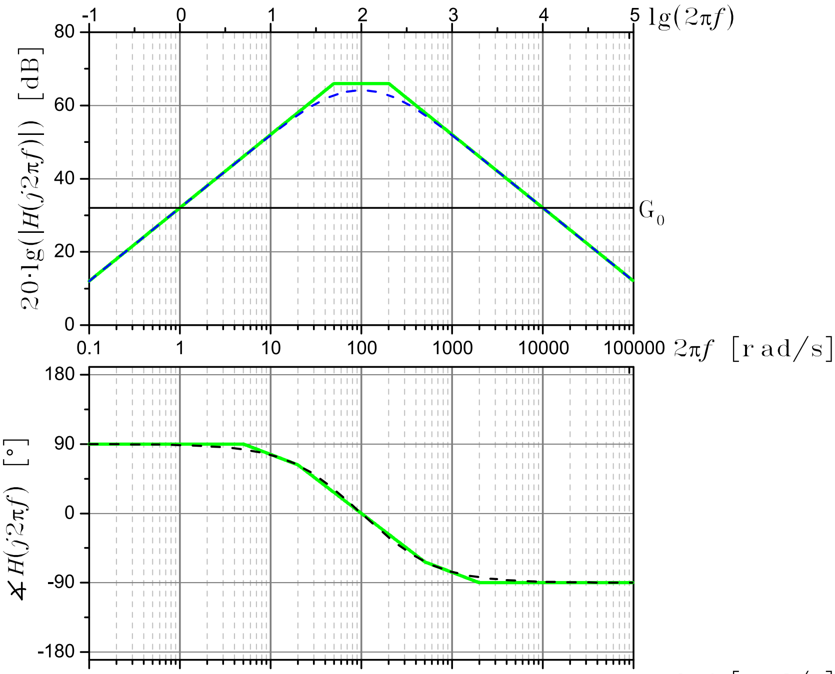
Die strichlierte Linie zeigt den exakten Verlauf, die durchgezogene Linie entspricht der asymptotischen Konstruktion. Beachten Sie, dass $G_0 = 20 \cdot \lg(40) \approx 32dB$.

Antwortmöglichkeiten:



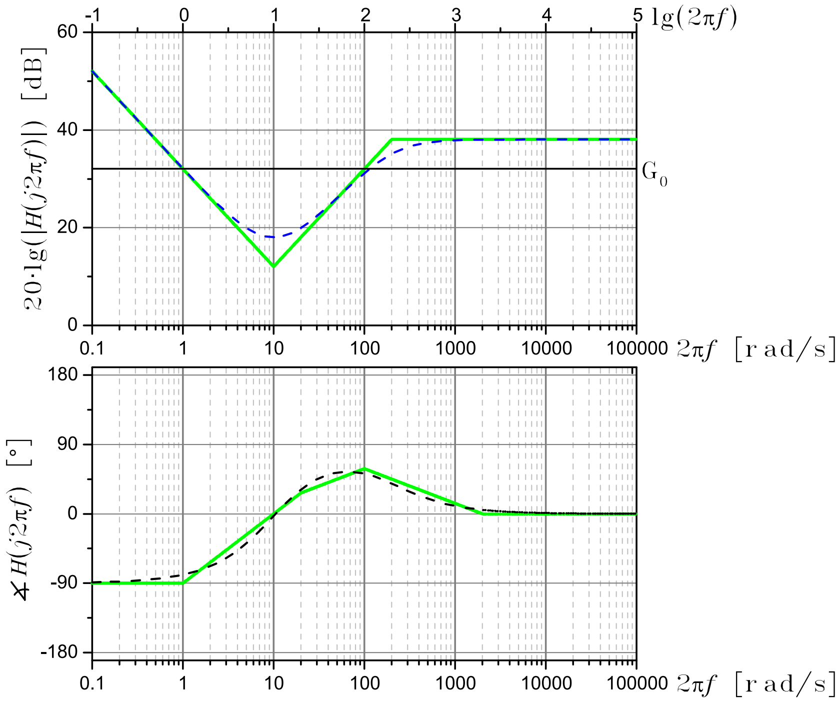
lg(2πf)
20·lg(|H(j2πf)|) [dB]
G0
2πf [rad/s]
∡H(j2πf) [°]

A.



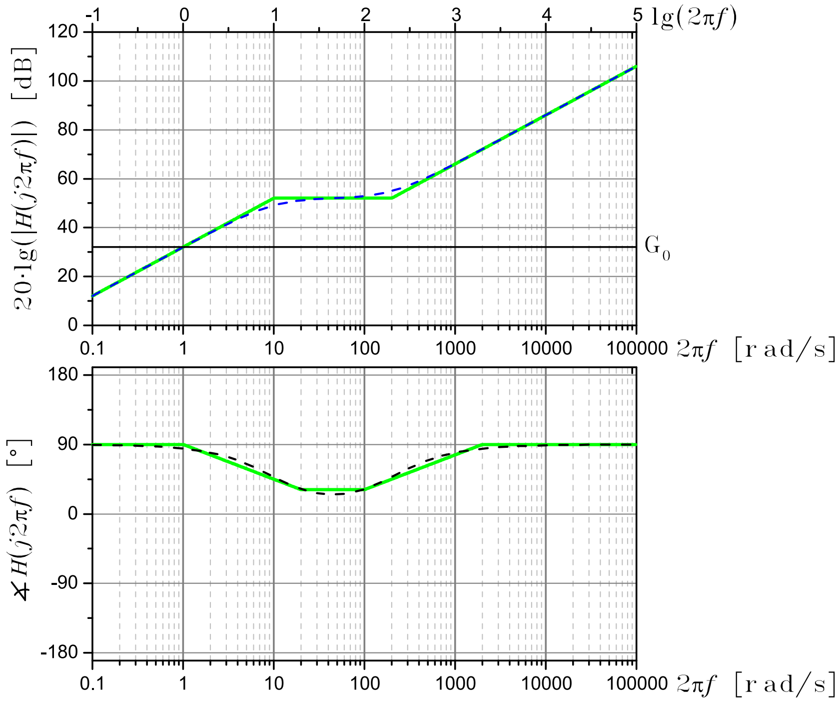
lg(2πf)
20·lg(|H(j2πf)|) [dB]
G0
2πf [rad/s]
∡H(j2πf) [°]

B.



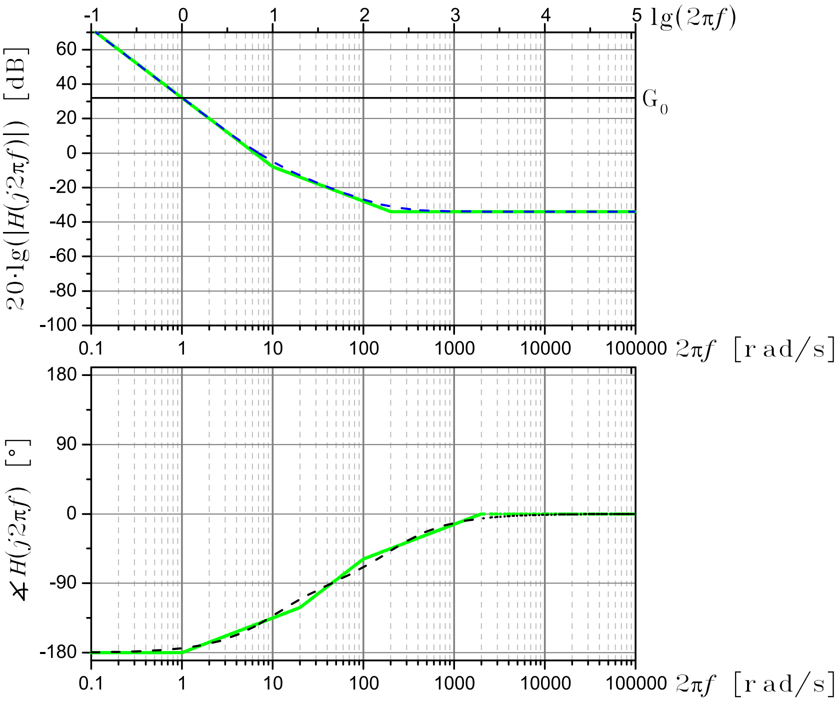
lg(2πf)
20·lg(|H(j2πf)|) [dB]
∡H(j2πf) [°]
G0
2πf [rad/s]

C.



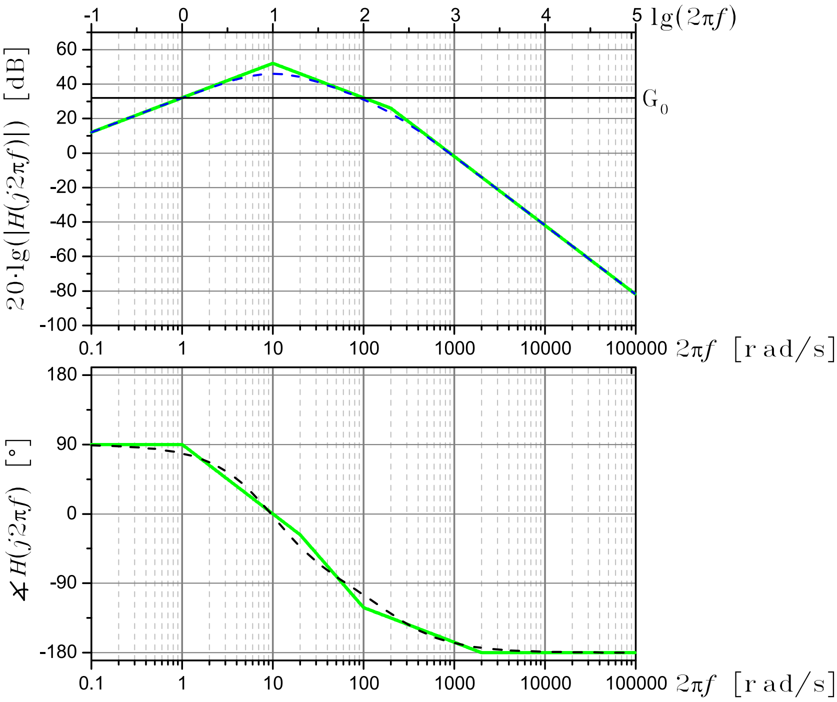
lg(2πf)
20·lg(|H(j2πf)|) [dB]
∡H(j2πf) [°]
G0
2πf [rad/s]

D.



-1 0 1 2 3 4 5 lg(2πf)
20·lg(|H(j2πf)|) [dB]
60 40 20 0 -20 -40 -60 -80 -100
G0
0.1 1 10 100 1000 10000 100000 2πf [rad/s]
∡H(j2πf) [°]
180 90 0 -90 -180
0.1 1 10 100 1000 10000 100000 2πf [rad/s]

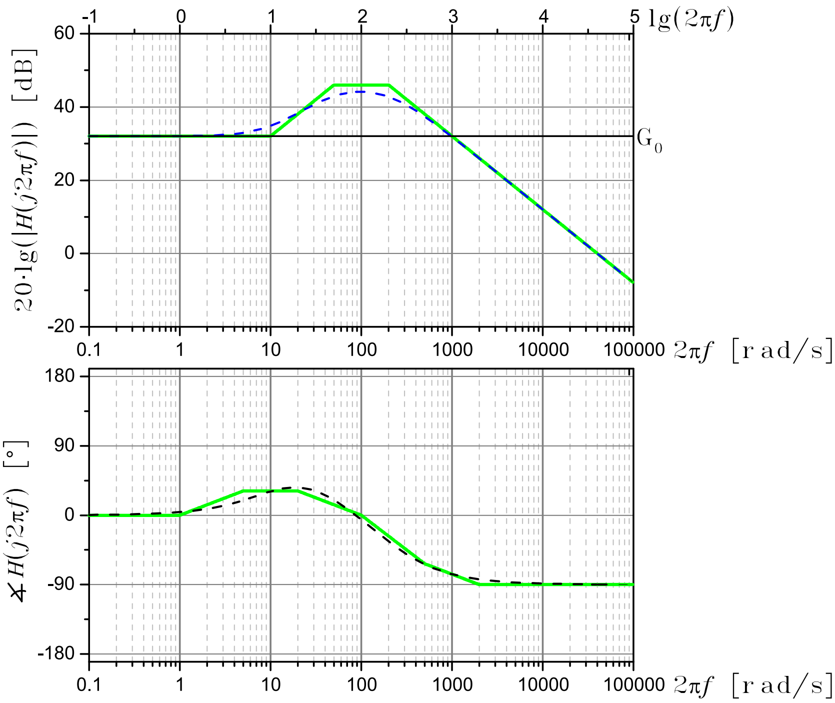
E.



-1 0 1 2 3 4 5 lg(2πf)
20·lg(|H(j2πf)|) [dB]
60 40 20 0 -20 -40 -60 -80 -100
G0
0.1 1 10 100 1000 10000 100000 2πf [rad/s]
∡H(j2πf) [°]
180 90 0 -90 -180
0.1 1 10 100 1000 10000 100000 2πf [rad/s]

F.

Lösung:



Aufgabe 130

Erstellen Sie ein Zustandsmodell mit Phasenvariablen. Überlegen sie sich zuerst die Koeffizienten a_n und b_n und erstellen sie dann die Matrizen A,B,C,D.

$$y'' + 3y' + 2y = 3x$$

Lösung:

$$s^2Y + 3sY + 2Y = 3X$$

$$G(s) = \frac{3}{s^2 + 3s + 2s} = \frac{b_0 s^2 - b_1 s - b_2}{s^2 + a_1 s + a_2}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 131

Berechnen Sie die Gruppenlaufzeit $t_g(f)$ von

$$H(s) = \frac{1 - Ts}{1 + Ts}.$$

Lösung:

$$t_g = \mathrm{Re}\left(-\frac{1}{H(s)}\frac{d}{ds}H(s)\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}H(s) &= \frac{-T(1+Ts)-T(1-Ts)}{(1+Ts)^2} = \frac{-T-T^2s-T+T^2s}{(1+Ts)^2} = \\ &= -2\frac{T}{(1+Ts)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{H(s)}\frac{d}{ds}H(s) &= -2\frac{1+Ts}{1-Ts}\frac{T}{(1+Ts)^2} = -2\frac{T}{(1+Ts)(1-Ts)} = \\ &= -2\frac{T}{1-T^2s^2}\end{aligned}$$

s durch $j2\pi f$ ersetzt:

$$t_g = \mathrm{Re}\left(2\frac{T}{1+4\pi^2f^2T^2}\right) = 2\frac{T}{1+4\pi^2f^2T^2}$$

Aufgabe 132

Erstellen sie ein Zustandsmodell mit Phasenvariablen. Überlegen sie sich zuerst die Koeffizienten a_n und b_n und erstellen sie dann die Matrizen A,B,C,D.

$$y'' + 4y' - 2y = 5x' + 7x$$

Lösung:

$$s^2Y + 4sY - 2Y = 5sX + 7X$$

$$G(s) = \frac{5s+7}{s^2+4s-2} = \frac{b_0s^2-b_1s-b_2}{s^2+a_1s+a_2}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} 7 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 133

Wie lautet der Phasenverlauf $\varphi(2\pi f)$ des angegebenen Systems? Um was für ein System handelt es sich?

$$H(s) = \frac{1-Ts}{1+Ts}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}H(j2\pi f) &= \frac{1-2\pi jfT}{1+2\pi jfT} = \frac{(1-2\pi jfT)^2}{1+4\pi^2f^2T^2} = \\ &= \frac{1-4\pi jfT-4\pi^2f^2T^2}{1+4\pi^2f^2T^2}\end{aligned}$$

Betragsfrequenzgang:

$$|H(j2\pi f)| = \sqrt{\frac{1 - 2\pi jfT}{1 + 2\pi jfT}\frac{1 + 2\pi jfT}{1 - 2\pi jfT}} = \sqrt{1} = 1$$

Es handelt sich um einen Allpass!

Phasengang:

$$\varphi(2\pi f) = -\arctan\left(\frac{4\pi fT}{1 - 4\pi^2 f^2 T^2}\right)$$

Aufgabe 134

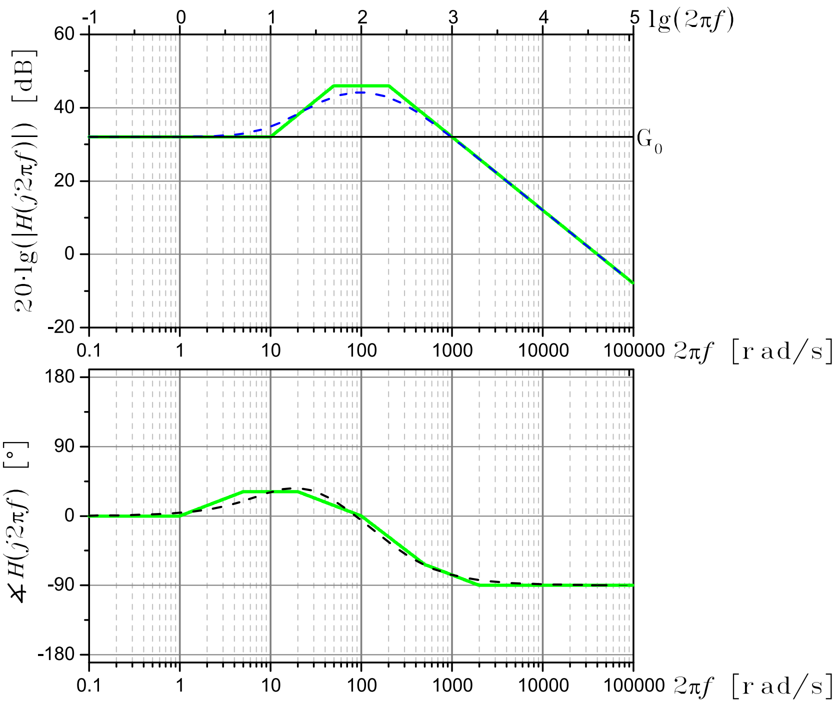
Welches der folgenden Diagramme enspricht dem asymptotischen Bode-Diagramm für den Betragsfrequenzgang und Phasengang folgender Übertragungsfunktion?

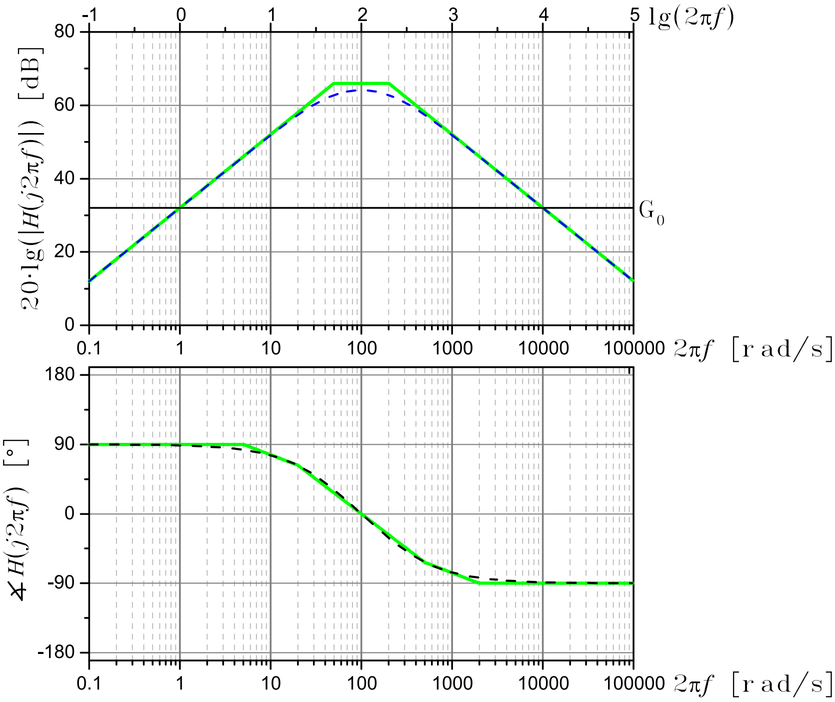
$$H(s) = 80 \cdot \frac{(10 + s)^2}{s(200 + s)} = 40 \cdot \frac{(1 + \frac{s}{10})^2}{s(1 + \frac{s}{200})}$$

Die strichlierte Linie zeigt den exakten Verlauf, die durchgezogene Linie entspricht der asymptotischen Konstruktion. Beachten Sie, dass $G_0 = 20 \cdot \lg(40) \approx 32dB$.

Antwortmöglichkeiten:

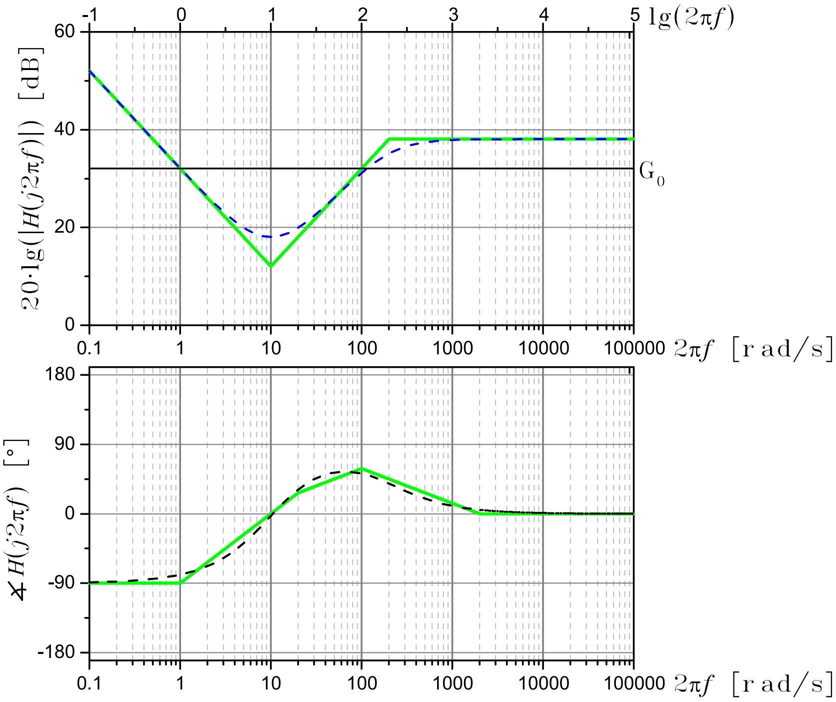
A.





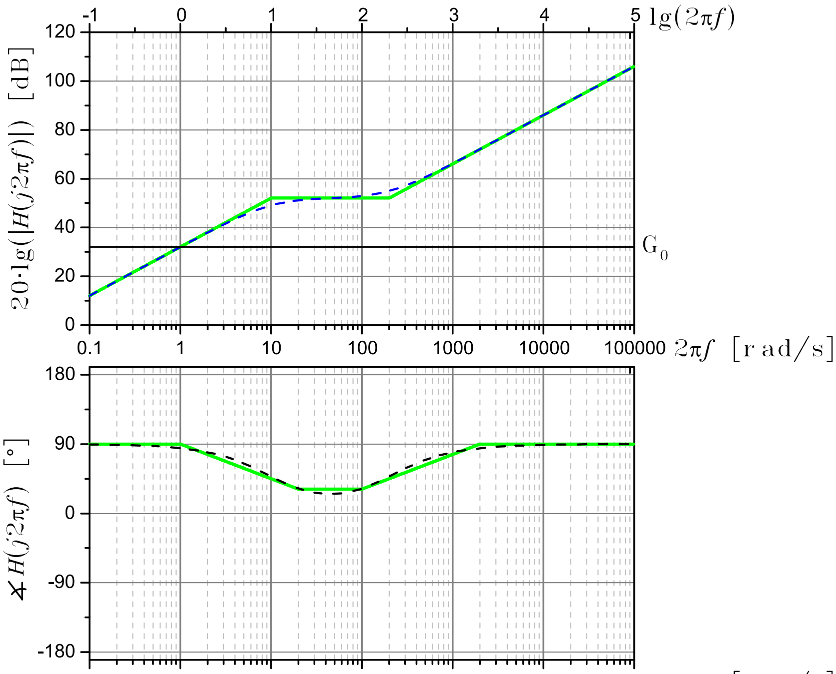
-1
0
1
2
3
4
5
lg(2πf)
80
60
40
20
0
20·lg(|H(j2πf)|) [dB]
G0
0.1
1
10
100
1000
10000
100000
2πf [rad/s]
180
90
0
-90
-180
∡H(j2πf) [°]
0.1
1
10
100
1000
10000
100000
2πf [rad/s]

B.

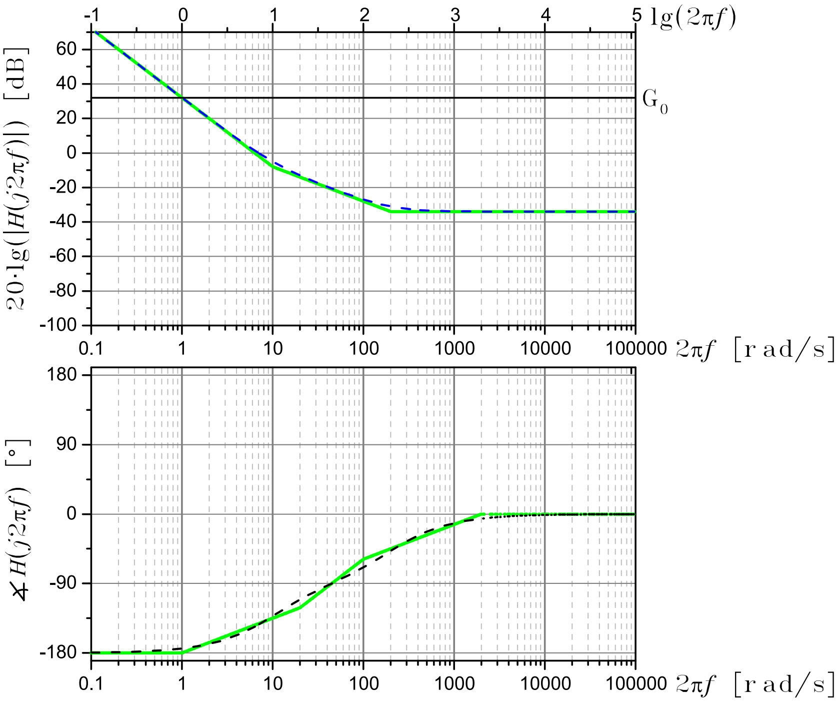


-1
0
1
2
3
4
5
lg(2πf)
60
40
20
0
20·lg(|H(j2πf)|) [dB]
G0
0.1
1
10
100
1000
10000
100000
2πf [rad/s]
180
90
0
-90
-180
∡H(j2πf) [°]
0.1
1
10
100
1000
10000
100000
2πf [rad/s]

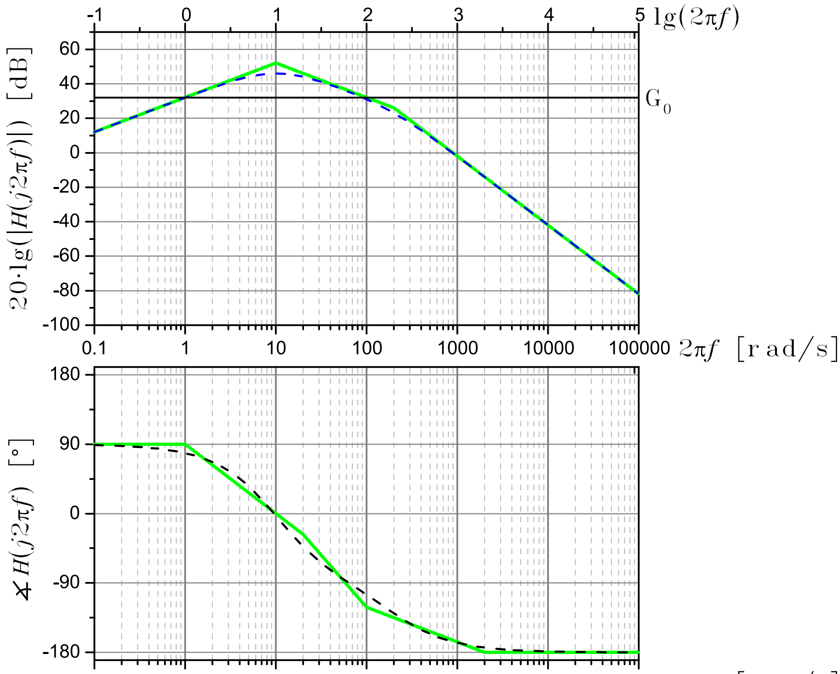
C.


lg(2πf)
20·lg(|H(j2πf)|) [dB]
G0
2πf [rad/s]
∡H(j2πf) [°]
2πf [rad/s]

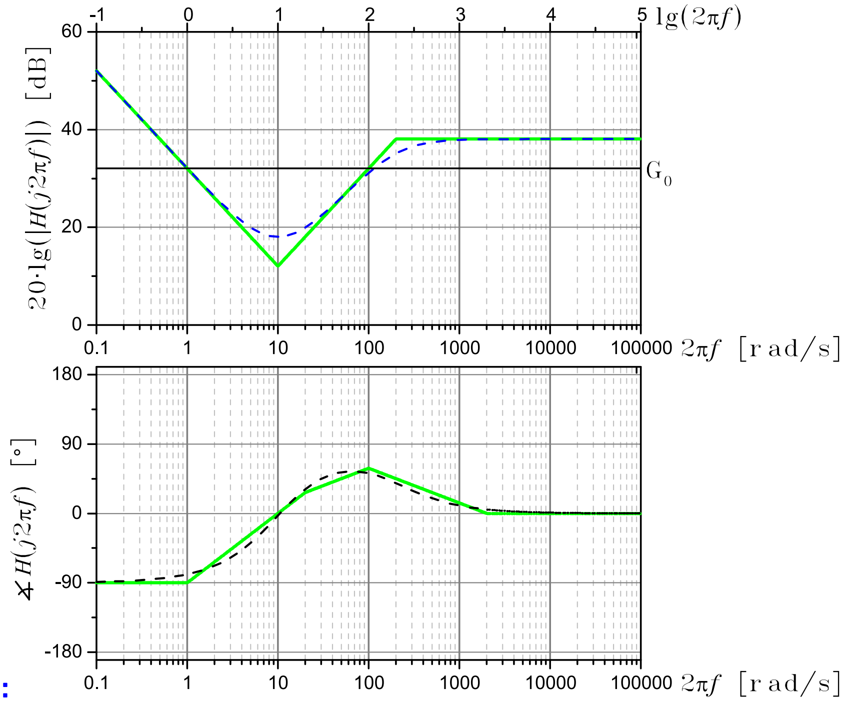
D.


lg(2πf)
20·lg(|H(j2πf)|) [dB]
G0
2πf [rad/s]
∡H(j2πf) [°]
2πf [rad/s]

E.



F.



Lösung:

Aufgabe 135

Erstellen Sie ein Zustandsmodell mit Phasenvariablen. Überlegen sie sich zuerst die Koeffizienten a_n und b_n und erstellen sie dann die Matrizen A,B,C,D.

$$y'' + y' + 2y = 3x'' + 4x' - 2x$$

Lösung:

$$s^2Y + sY + 2Y = 3s^2X + 4sX - 2X$$

$$G(s) = \frac{3s^2 + 4s - 2}{s^2 + s + 2} = \frac{b_0s^2 - b_1s - b_2}{s^2 + a_1s + a_2}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} -8 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + 3x$$

Aufgabe 136

Berechnen Sie die Gruppenlaufzeit bei $t_g\left(2\pi f = \frac{1}{T}\right)$.

$$H(s) = \frac{1 - Ts}{1 + Ts}$$

Lösung:

$$t_g = \mathrm{Re}\left(-\frac{1}{H(s)}\frac{d}{ds}H(s)\right)$$

$$\frac{d}{ds}H(s) = \frac{-T(1+Ts) - T(1-Ts)}{(1+Ts)^2} = \frac{-T - T^2s - T + T^2s}{(1+Ts)^2} =$$
$$= -2\frac{T}{(1+Ts)^2}$$

$$\frac{1}{H(s)}\frac{d}{ds}H(s) = -2\frac{1+Ts}{1-Ts}\frac{T}{(1+Ts)^2} = -2\frac{T}{(1+Ts)(1-Ts)} =$$
$$= -2\frac{T}{1 - T^2s^2}$$

s durch $j2\pi f$ ersetzt:

$$t_g = \mathrm{Re}\left(2\frac{T}{1 + 4\pi^2f^2T^2}\right) = 2\frac{T}{1 + 4\pi^2f^2T^2}$$

$2\pi f$ durch $\frac{1}{T}$ ersetzen:

$$t_g(2\pi f) = T$$

Aufgabe 137

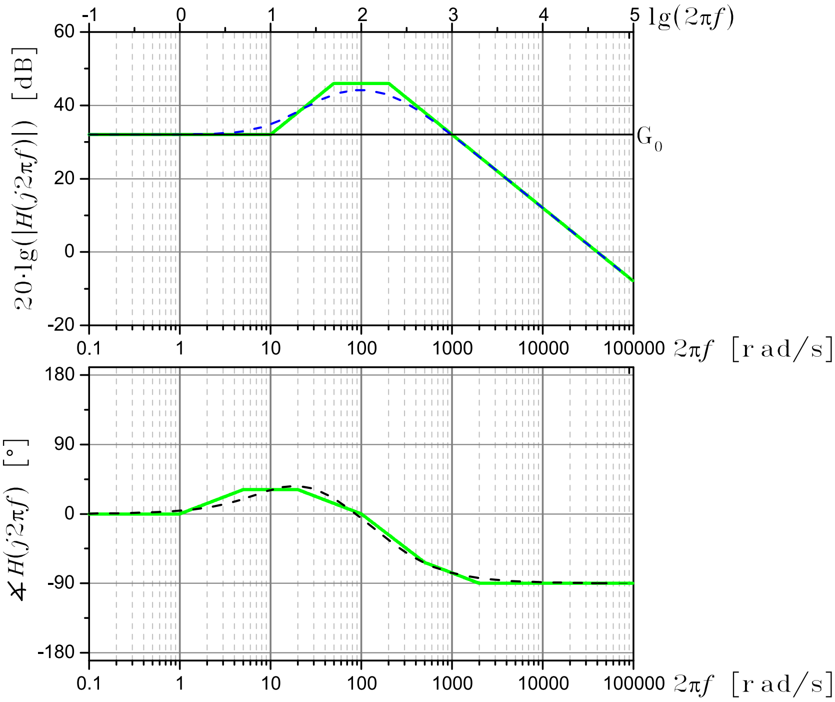
Welches der folgenden Diagramme enspricht dem asymptotischen Bode-Diagramm für den Betragsfrequenzgang und Phasengang folgender Übertragungsfunktion?

$$H(s) = 2 \cdot \frac{s(200+s)}{10+s} = 40 \cdot \frac{s(1 + \frac{s}{200})}{(1 + \frac{s}{10})}$$

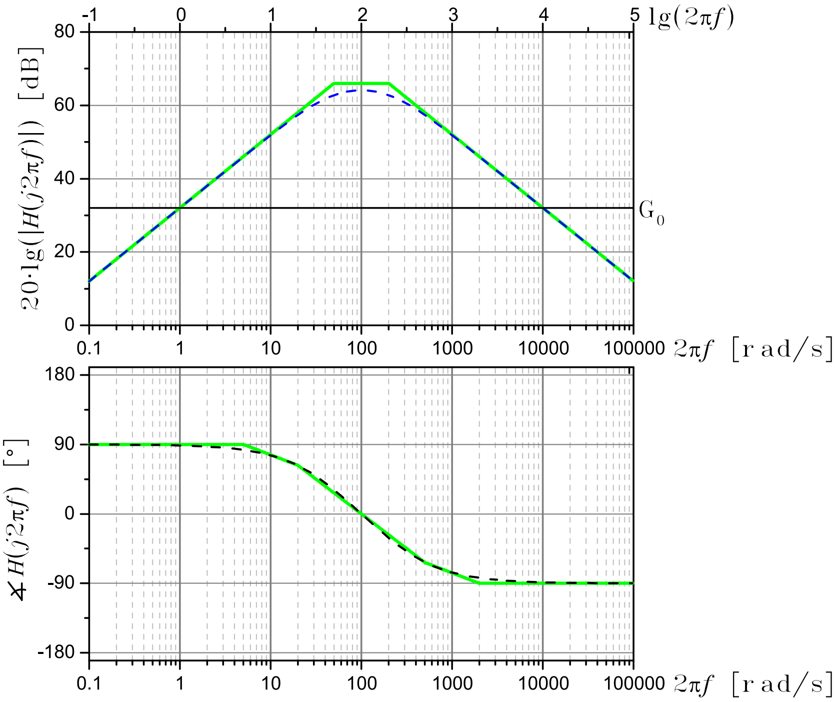
Die strichlierte Linie zeigt den exakten Verlauf, die durchgezogene Linie entspricht der asymptotischen Konstruktion. Beachten Sie, dass $G_0 = 20 \cdot \lg(40) \approx 32dB$.

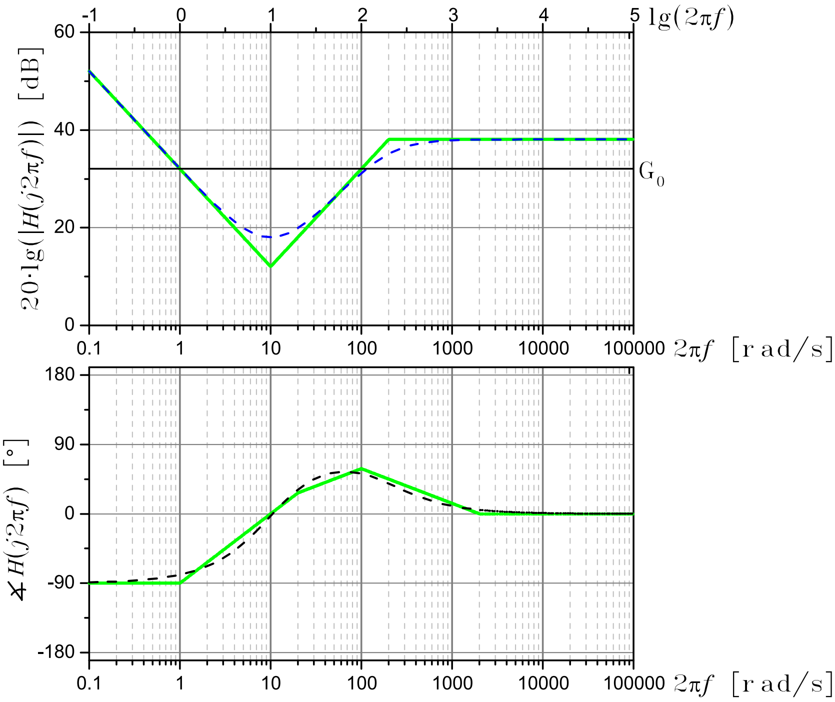
Antwortmöglichkeiten:

A.



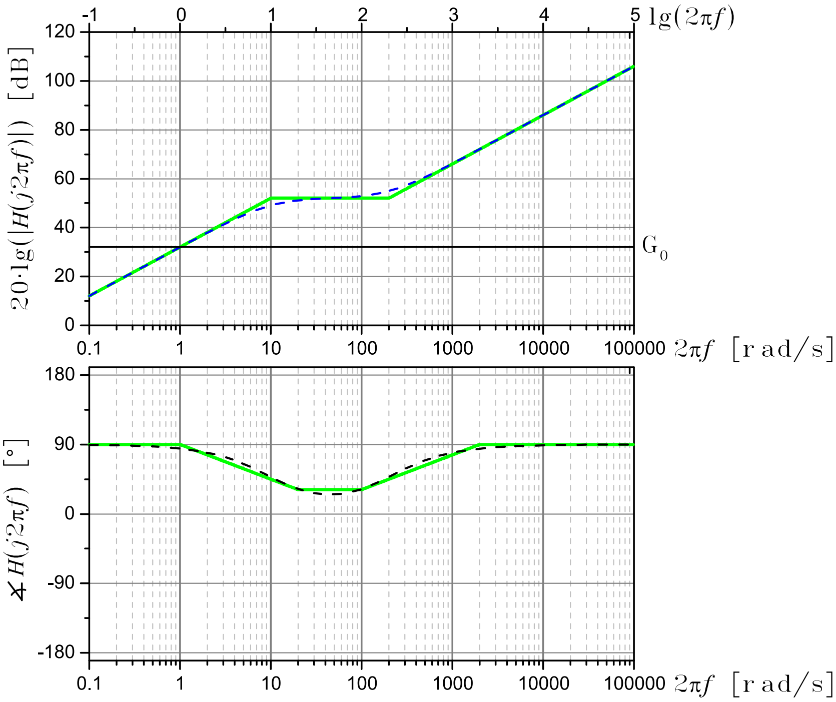
B.





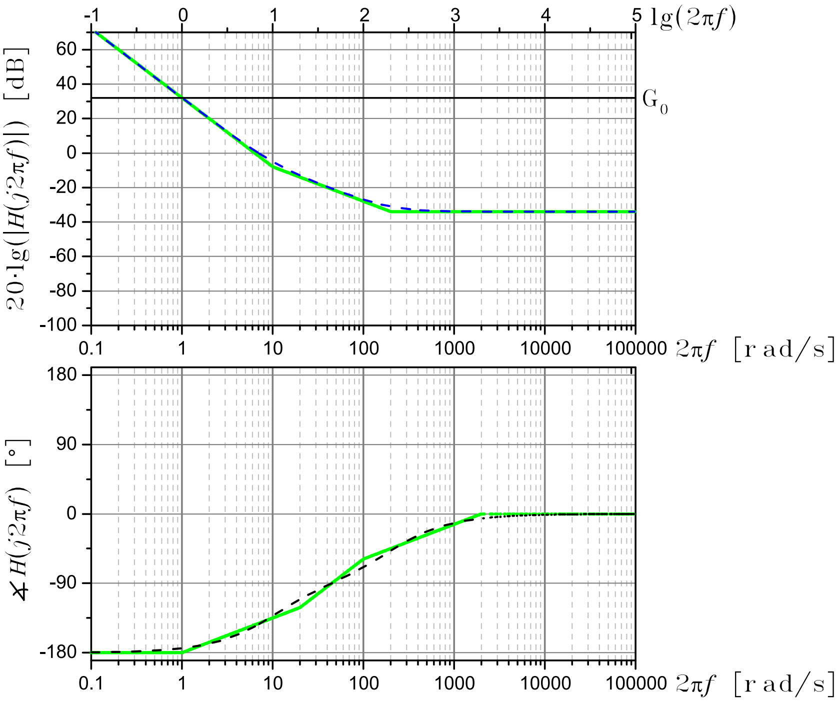
-1 0 1 2 3 4 5 lg(2πf)
20·lg(|H(j2πf)|) [dB]
G0
2πf [rad/s]
∡H(j2πf) [°]
2πf [rad/s]

C.

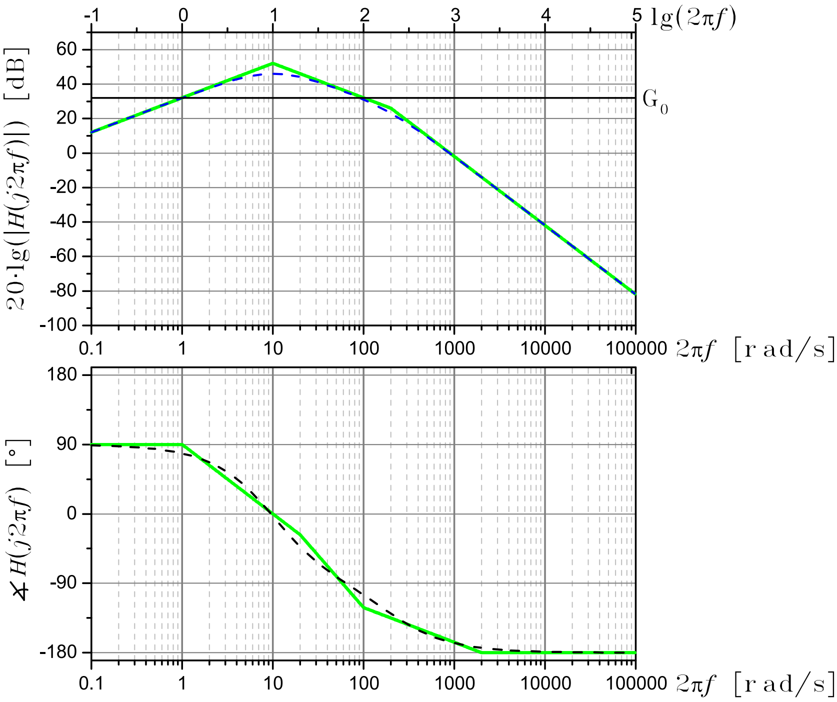


-1 0 1 2 3 4 5 lg(2πf)
20·lg(|H(j2πf)|) [dB]
G0
2πf [rad/s]
∡H(j2πf) [°]
2πf [rad/s]

D.

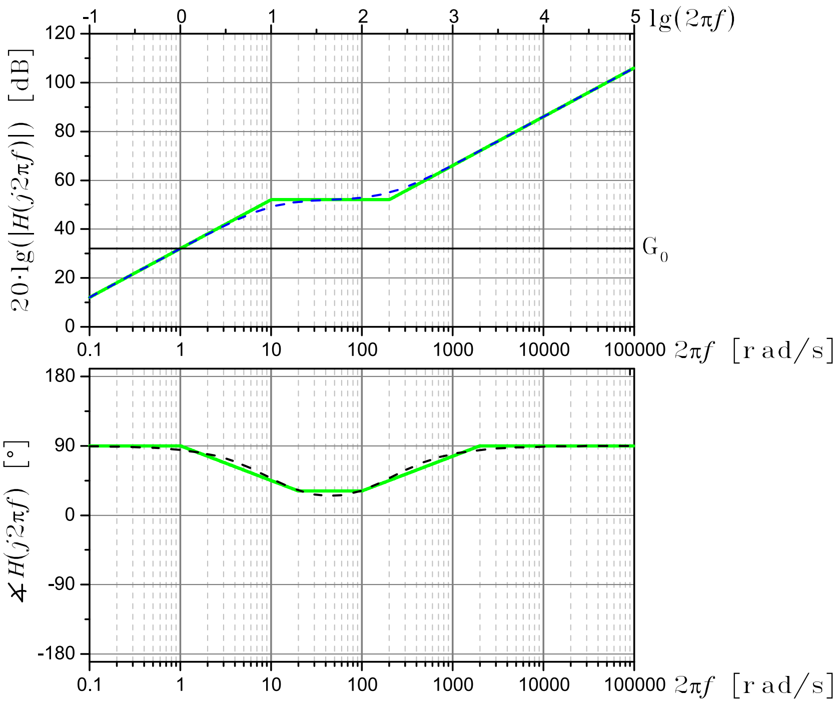

lg(2πf)
G0
20·lg(|H(j2πf)|) [dB]
2πf [rad/s]
∡H(j2πf) [°]
2πf [rad/s]

E.


lg(2πf)
G0
20·lg(|H(j2πf)|) [dB]
2πf [rad/s]
∡H(j2πf) [°]
2πf [rad/s]

F.

Lösung:



Aufgabe 138

Berechnen Sie den Betragsfrequenzgang von

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 2}. \tag{17}$$

Lösung:

Einsetzen von $j2\pi f$ und ausrechnen des Betragsquadrates.

$$H(j2\pi f) = \frac{1}{-4\pi^2 f^2 + 10\pi j f + 2}$$

$$|H(j2\pi f)|^2 = H(j2\pi f)H^*(j2\pi f) = \frac{1}{(-4\pi^2 f^2 + 10j\pi f + 2)(-4\pi^2 f^2 - 10j\pi f + 2)} =$$

$$= \frac{1}{16\pi^4 f^4 + 40j\pi^3 f^3 - 8\pi^2 f^2 - 40j\pi^3 f^3 + 100\pi^2 f^2 + 20j\pi f - 8\pi^2 f^2 - 20j\pi f + 4} =$$

$$= \frac{1}{16\pi^4 f^4 + 84\pi^2 f^2 + 4}$$

$$|H(j2\pi f)| = \frac{1}{\sqrt{16\pi^4 f^4 + 84\pi^2 f^2 + 4}}$$

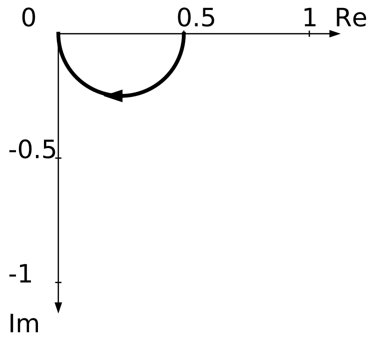
Aufgabe 139

Bestimmen Sie die Ortskurve der Übertragungsfunktion

$$H(f) = \frac{5}{10 + jf}.$$

Lösung:

Übertragungsfunktion in Real- und Imaginärteil trennen. Werte für 0 und ∞ bestimmen. Falls nötig einen weiteren Punkt/Phasenwinkel ausrechnen.



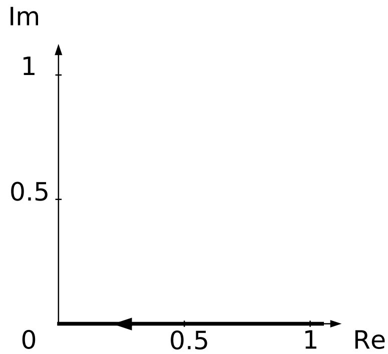
Aufgabe 140

Bestimmen Sie die Ortskurve der Übertragungsfunktion

$$H(f) = \frac{1}{10f}. \tag{18}$$

Lösung:

Übertragungsfunktion in Real- und Imaginärteil trennen. Werte für 0 und ∞ bestimmen. Falls nötig einen weiteren Punkt / Phasenwinkel ausrechnen.



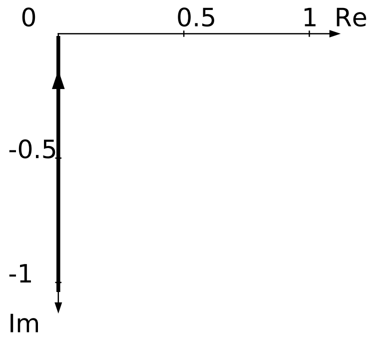
Aufgabe 141

Bestimmen Sie die Ortskurve der Übertragungsfunktion

$$H(f) = \frac{1}{10jf}. \tag{19}$$

Lösung:

Übertragungsfunktion in Real- und Imaginärteil trennen. Werte für 0 und ∞ bestimmen. Falls nötig einen weiteren Punkt / Phasenwinkel ausrechnen.



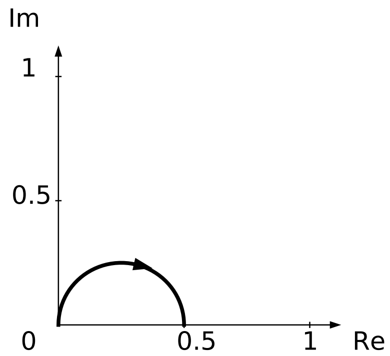
Aufgabe 142

Bestimmen Sie die Ortskurve der Übertragungsfunktion

$$H(f) = \frac{5jf}{2 + 10jf}. \tag{20}$$

Lösung:

Übertragungsfunktion in Real- und Imaginärteil trennen. Werte für 0 und ∞ bestimmen. Falls nötig einen weiteren Punkt / Phasenwinkel ausrechnen.



E Formelsammlung

Laplace-Transformation

Eigenschaften und Rechenregeln

	Zeitbereich	Bildbereich	Konvergenz
Linearität	$c_1\,x_1(t)+c_2\,x_2(t)$	$c_1\,X_1(s)+c_2\,X_2(s)$	$\mathcal{K}_{x_1}\cap\mathcal{K}_{x_2}$
Faltung	$x(t)\,*\,y(t)$	$X(s)\cdot Y(s)$	$\mathcal{K}_x\cap\mathcal{K}_y$
Verschiebung	$x(t-t_0)$	$e^{-st_0}\cdot X(s)$	$\mathcal{K}_x$
Dämpfung	$e^{at}\cdot x(t)$	$X(s-a)$	$\mathcal{K}_x+\mathrm{Re}\{a\}$
lineare Gewichtung	$t\cdot x(t)$	$-\frac{d}{ds}\,X(s)$	$\mathcal{K}_x$
Differentiation	$\frac{d}{dt}\,x(t)$	$s\cdot X(s)$	$\mathcal{K}_x$
Integration	$\int\limits_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{s}\cdot X(s)$	$\mathcal{K}_x\ \cap\ \{\mathrm{Re}\{s\}>0\}$
Skalierung	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}\cdot X\left(\frac{s}{a}\right)$	$a\cdot\mathcal{K}_x$
konj. komplexes Signal	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	$\mathcal{K}_x$

Spezielle Eigenschaften der einseitigen Laplace-Transformation

Verschiebung links	$x(t+t_0)\,,\ t_0>0$	$e^{st_0}\left[X(s)-\int\limits_{0^-}^{t_0} x(t)\cdot e^{-st}\,dt\right]$
Verschiebung rechts	$x(t-t_0)\,,\ t_0>0$	$e^{-st_0}\left[X(s)+\int\limits_{-t_0}^{0^-} x(t)\cdot e^{-st}\,dt\right]$
Differentiation	$\frac{d}{dt}\,x(t)$	$s\cdot X(s)\ -\ x(0^-)$
Anfangswertsatz	$x(0^+)=\lim\limits_{s\to\infty} s\cdot X(s)\,,\quad$ falls $x(0^+)$ existiert	
Endwertsatz	$\lim\limits_{t\to\infty} x(t)\ =\ \lim\limits_{s\to 0} s\cdot X(s)\,,\quad$ falls $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$ existiert	

Korrespondenzen der Laplace-Transformation

Nr.	$x(t)$	$X(s)$	$\mathcal{K}$
1	$\delta(t)$	1	$s\in\mathbb{C}$
2	$\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$
3	$\rho(t)=t\cdot\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$
4	$e^{at}\cdot\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s-a}$	$\mathrm{Re}\{s\}>\mathrm{Re}\{a\}$
5	$\frac{t^m}{m!}\,e^{at}\cdot\varepsilon(t)$	$\frac{1}{(s-a)^{m+1}}$	$\mathrm{Re}\{s\}>\mathrm{Re}\{a\}$
6	$\sin(\omega_0 t)\cdot\varepsilon(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$
7	$\cos(\omega_0 t)\cdot\varepsilon(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$
8	$\sin(\omega_0 t+\varphi_0)\cdot\varepsilon(t)$	$\frac{s\cdot\sin(\varphi_0)+\omega_0\cdot\cos(\varphi_0)}{s^2+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$
9	$\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}	$s\in\mathbb{C}$

Spezielle Korrespondenzen zur Rücktransformation konj. komplexer Polpaare

10	$2\lvert r\rvert e^{\mathrm{Re}\{\alpha\}t}\cos(\mathrm{Im}\{\alpha\}\,t+\sphericalangle r)\,\varepsilon(t)$	$\frac{r}{s-\alpha}+\frac{r^*}{s-\alpha^*}$	$\mathrm{Re}\{s\}>\mathrm{Re}\{\alpha\}$
11	$e^{at}\cdot\frac{\cos(\omega_0 t+\varphi_0)}{\cos(\varphi_0)}\cdot\varepsilon(t)$	$\frac{s-d}{s^2-bs+c}\,,\quad c>\frac{b^2}{4}$	$\mathrm{Re}\{s\}>\frac{b}{2}$
	$a=\frac{b}{2}\ ,\ \ \omega_0=\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}\ ,\ \ \varphi_0=\arctan\left(\frac{2d-b}{\sqrt{4c-b^2}}\right)$		

Fourier-Transformation

Eigenschaften der Fourier-Transformation

	Zeitbereich	Frequenzbereich	
Linearität	$c_1\,x_1(t)+c_2\,x_2(t)$	$c_1\,X_1(f)+c_2\,X_2(f)$	$c_1\,X_1(j\omega)+c_2\,X_2(j\omega)$
Faltung	$x(t)\,*\,y(t)$	$X(f)\cdot Y(f)$	$X(j\omega)\cdot Y(j\omega)$
Multiplikation	$x(t)\,\cdot\,y(t)$	$X(f)\,*\,Y(f)$	$\frac{1}{2\pi}X(j\omega)\,*\,Y(j\omega)$
Verschiebung	$x(t-t_0)$	$X(f)\cdot e^{-j2\pi f t_0}$	$X(j\omega)\cdot e^{-j\omega t_0}$
Modulation	$e^{j2\pi f_0 t}\cdot x(t)$	$X(f-f_0)$	$X(j\,[\omega-\omega_0])$
lineare Gewichtung	$t\cdot x(t)$	$-\frac{1}{j2\pi}\,\frac{d}{df}\,X(f)$	$-\frac{d}{d(j\omega)}X(j\omega)$
Differentiation	$\frac{d}{dt}\,x(t)$	$j2\pi f\cdot X(f)$	$j\omega\cdot X(j\omega)$
Integration	$\int\limits_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{j2\pi f}\,X(f)+$ $\frac{1}{2}\,X(0)\,\delta(f)$	$\frac{1}{j\omega}\,X(j\omega)+$ $\pi\,X(0)\,\delta(\omega)$
Skalierung	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}\cdot X\left(\frac{f}{a}\right)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}\cdot X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
Zeitinversion	$x(-t)$	$X(-f)$	$X(-j\omega)$
konj. komplex	$x^*(t)$	$X^*(-f)$	$X^*(-j\omega)$
Realteil	$x_{\mathrm{R}}(t)$	$X_{\mathrm{g}^*}(f)$	$X_{\mathrm{g}^*}(j\omega)$
Imaginärteil	$j\,x_{\mathrm{I}}(t)$	$X_{\mathrm{u}^*}(f)$	$X_{\mathrm{u}^*}(j\omega)$
Dualität	$X(t)\ \ [X(jt)]$	$x(-f)$	$2\pi\ x(-\omega)$

Korrespondenzen der Fourier-Transformation

Nr.	$x(t)$	$X(f)$	$X(j\omega)$
1	$\delta(t)$	1	1
2	1	$\delta(f)$	$2\pi\ \delta(\omega)$
3	$\mathrm{III}_T(t)$	$\frac{1}{\lvert T\rvert}\,\mathrm{III}_{\frac{1}{T}}(f)$	$\frac{2\pi}{\lvert T\rvert}\,\mathrm{III}_{\frac{2\pi}{T}}(\omega)$
4	$\varepsilon(t)$	$\frac{1}{2}\,\delta(f)+\frac{1}{j2\pi f}$	$\pi\ \delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$
5	$\mathrm{sgn}(t)$	$\frac{1}{j\pi f}$	$\frac{2}{j\omega}$
6	$\frac{1}{\pi t}$	$-j\ \mathrm{sgn}(f)$	$-j\ \mathrm{sgn}(\omega)$
7	$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$	$\lvert T\rvert\cdot\mathrm{si}(\pi T f)$	$\lvert T\rvert\cdot\mathrm{si}\left(\frac{T}{2}\,\omega\right)$
8	$\mathrm{si}\left(\pi\,\frac{t}{T}\right)$	$\lvert T\rvert\cdot\mathrm{rect}(Tf)$	$\lvert T\rvert\cdot\mathrm{rect}\left(\frac{T}{2\pi}\,\omega\right)$
9	$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$	$\lvert T\rvert\cdot\mathrm{si}^2(\pi T f)$	$\lvert T\rvert\cdot\mathrm{si}^2\left(\frac{T}{2}\,\omega\right)$
10	$\mathrm{si}^2\left(\pi\,\frac{t}{T}\right)$	$\lvert T\rvert\cdot\Lambda(Tf)$	$\lvert T\rvert\cdot\Lambda\left(\frac{T}{2\pi}\,\omega\right)$
11	$e^{j2\pi f_0 t}$	$\delta(f-f_0)$	$2\pi\ \delta(\omega-\omega_0)$
12	$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}\left[\,\delta(f+f_0)+\delta(f-f_0)\,\right]$	$\pi\left[\,\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\,\right]$
13	$\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}\,j\left[\,\delta(f+f_0)-\delta(f-f_0)\,\right]$	$\pi j\left[\,\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)\,\right]$
14	$e^{-a^2t^2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{a}\ e^{-\frac{\pi^2 f^2}{a^2}}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{a}\ e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}$
15	$e^{-\frac{\lvert t\rvert}{T}}$	$\frac{2T}{1+(2\pi T f)^2}$	$\frac{2T}{1+(T\omega)^2}$

Trigonometrische Formeln

Summen und Differenzen im Argument:

$$\sin(\alpha\pm\beta)\ =\sin(\alpha)\ \cos(\beta)\ \pm\cos(\alpha)\ \sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos(\alpha)\ \cos(\beta)\ \mp\sin(\alpha)\ \sin(\beta)$$

Verdopplung und Halbierung des Arguments:

$$\sin(2\alpha)\ =2\sin(\alpha)\ \cos(\alpha)$$
$$\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)$$
$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\ =\pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$$
$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\ =\pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$$

Summen und Differenzen von Funktionen:

$$\sin(\alpha)\pm\sin(\beta)\ \ =2\sin\left(\frac{\alpha\pm\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha\mp\beta}{2}\right)$$
$$\cos(\alpha)\pm\sin(\alpha)\ =\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\pm\alpha\right)$$
$$\cos(\alpha)+\cos(\beta)=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\cos(\alpha)-\cos(\beta)=-2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Produkte und Potenzen von Funktionen:

$$\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)\ =\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$
$$\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$$
$$\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)\ =\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$$
$$\sin^2(\alpha)=\frac{1}{2}[1-\cos(2\alpha)]$$
$$\cos^2(\alpha)=\frac{1}{2}[1+\cos(2\alpha)]$$

Distributionen

Operationen mit Distributionen:

$$\langle\,\psi(t-t_0),\phi(t)\rangle\ =\ \ \langle\,\psi(t),\phi(t+t_0)\rangle$$
$$\langle\,\psi(at),\phi(t)\rangle\ \ =\ \ \frac{1}{\lvert a\rvert}\,\langle\,\psi(t),\phi\left(\frac{t}{a}\right)\rangle$$
$$\langle\,\psi^{(k)}(t),\phi(t)\rangle\ \ =(-1)^k\,\langle\,\psi(t),\phi^{(k)}(t)\rangle$$

Verknüpfungen von Distributionen und Funktionen:

$$\langle\,\psi_1(t)+\psi_2(t),\phi(t)\rangle\ =\langle\,\psi_1(t),\phi(t)\rangle+\langle\,\psi_2(t),\phi(t)\rangle$$
$$\langle\,g(t)\cdot\psi(t),\phi(t)\rangle\ \ =\ \ \ \ \langle\,\psi(t),g(t)\cdot\phi(t)\rangle$$
$$\langle\,\psi_1(t)\,*\,\psi_2(t),\phi(t)\rangle\ =\ \langle\,\psi_1(t),\,\langle\,\psi_2(\tau),\,\phi(\tau+t)\rangle\rangle$$