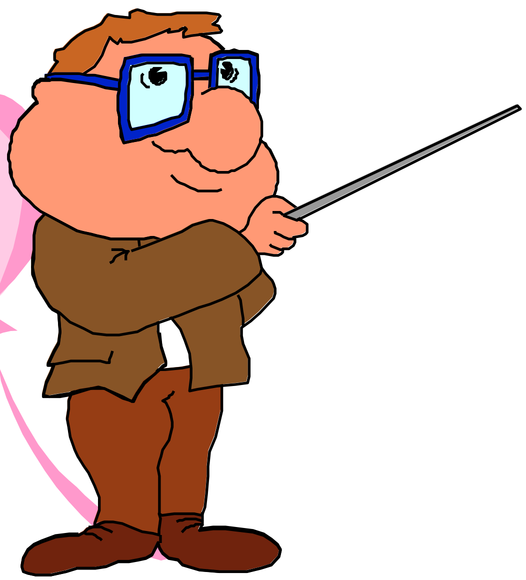
第8章 假设检验

1. 假设检验的原理和步骤

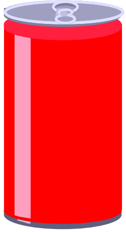
基本概念



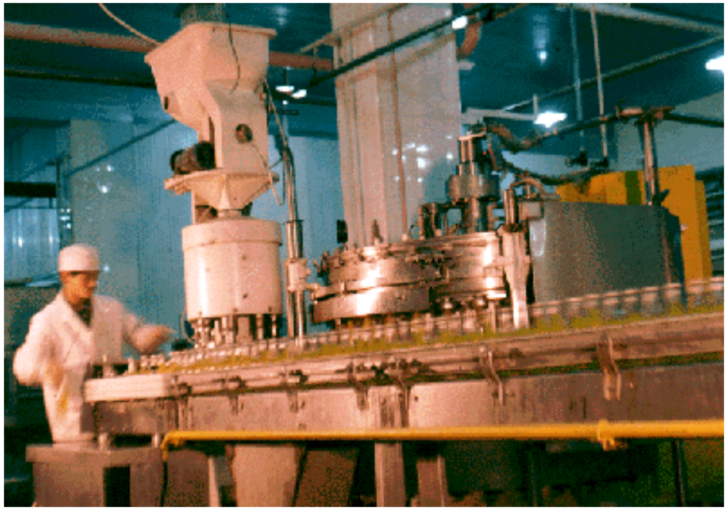
让我们先看一个例子.

基本概念

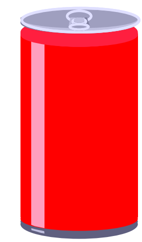
罐装可乐的容量按标准应为355毫升.



生产流水线上罐装可乐不断地封装，然后装箱外运. 怎么知道这批罐装可乐的容量是否合格呢？



基本概念



通常的办法是进行抽样检查.

每隔一定时间，抽查若干罐 . 如每隔1小时，抽查5罐，得5个容量的值X_1，…，X_5，根据这些值来判断生产是否正常.

基本概念

根据样本的信息检验关于总体的某个命题是否正确. 这类问题称作假设检验问题.

什么是假设?(hypothesis)

- 对总体参数的的数值所作的一种陈述
  - 总体参数包括总体均值、比例、方差等
  - 分析之前必需陈述

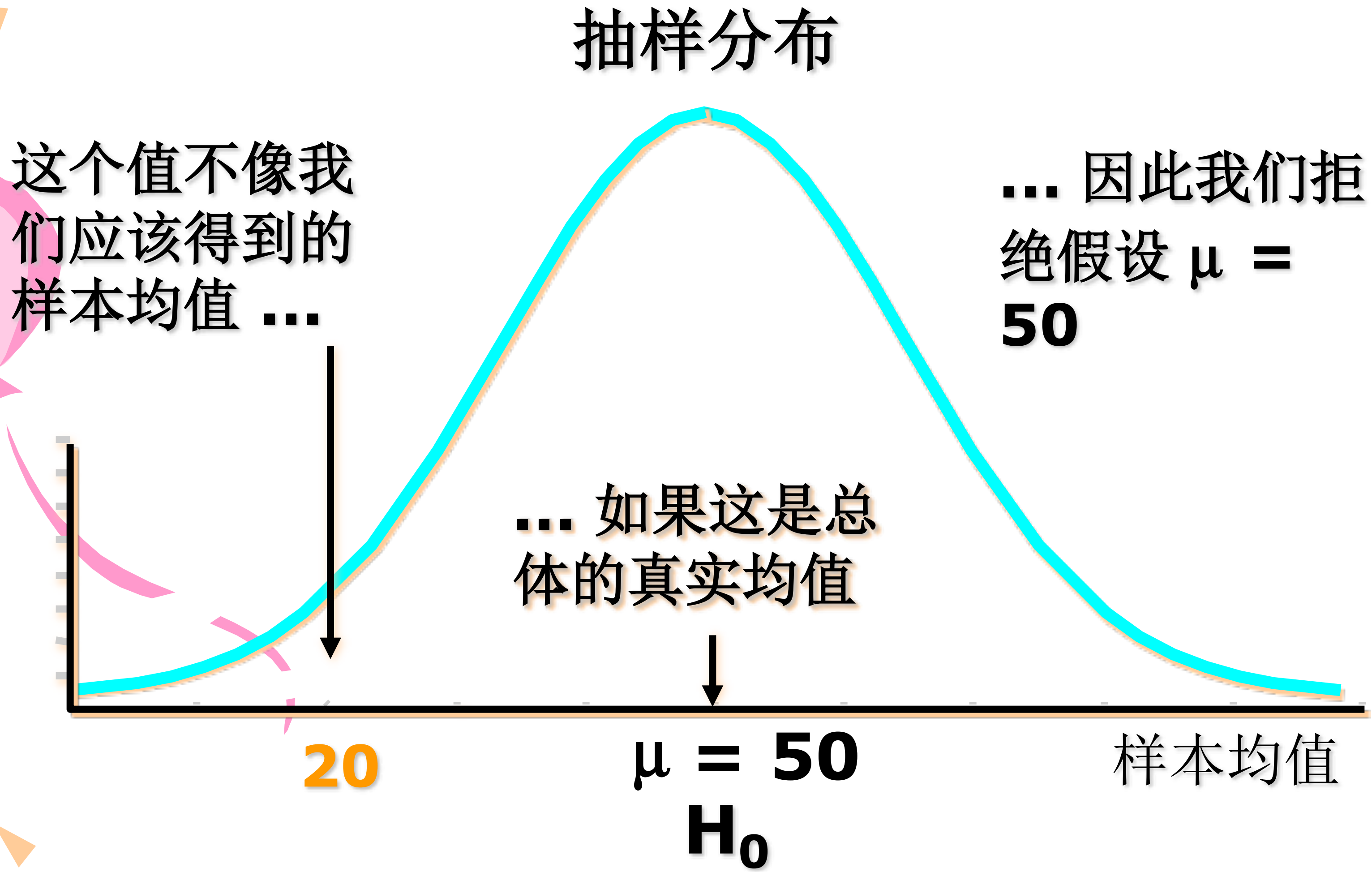
我认为该地区新生婴儿的平均体重为3190克!

什么是假设检验?

(hypothesis testing)

1. 事先对总体参数或分布形式作出某种假设，然后利用样本信息来判断原假设是否成立
2. 有参数假设检验和非参数假设检验
3. 采用逻辑上的反证法，依据统计上的小概率原理

假设检验的基本思想



抽样分布
这个值不像我们应该得到的样本均值 ...
... 因此我们拒绝假设 μ = 50
... 如果这是总体的真实均值
20
μ = 50
H_0
样本均值

假设检验的过程

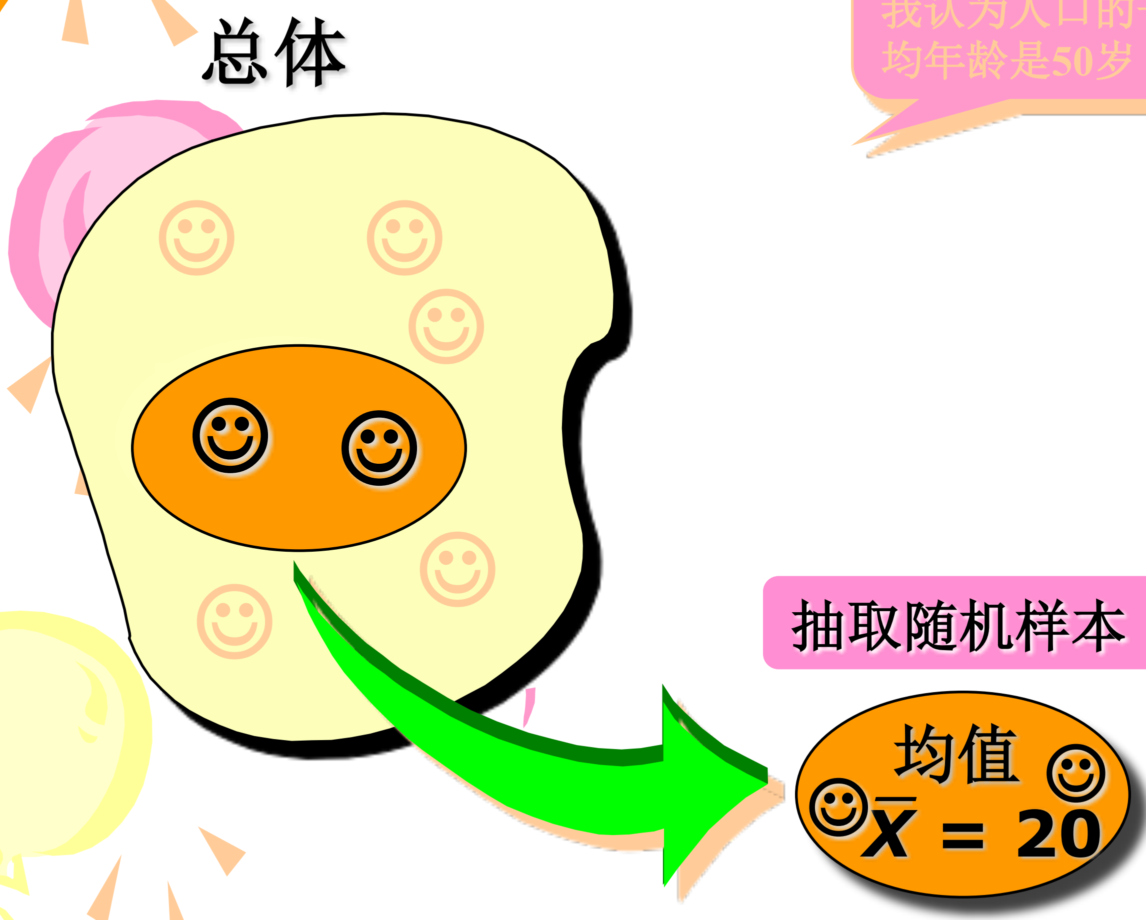
提出假设

我认为人口的平均年龄是50岁

作出决策

拒绝假设!

别无选择.



假设检验的步骤

- 建立虚无假设和备择假设
- 确定适当的检验统计量
- 指定检验中的显著性水平，计算检验统计量的值，建立拒绝虚无假设的规则
- 作出统计决策
  - 将检验统计量的值与拒绝规则所指定的临界值相比较，确定是否拒绝虚无假设
  - （计算p值，利用p值确定是否拒绝虚无假设）

研究假设和虚无假设

- 研究假设 H_1 research hypothesis
  - 又叫备择假设 alternative hypothesis，指待验证的假设，一般假设差异显著
- 虚无假设 H_0 null hypothesis
  - 又叫零假设 zero hypothesis，原假设，与研究假设对立的假设，一般假设差异不显著

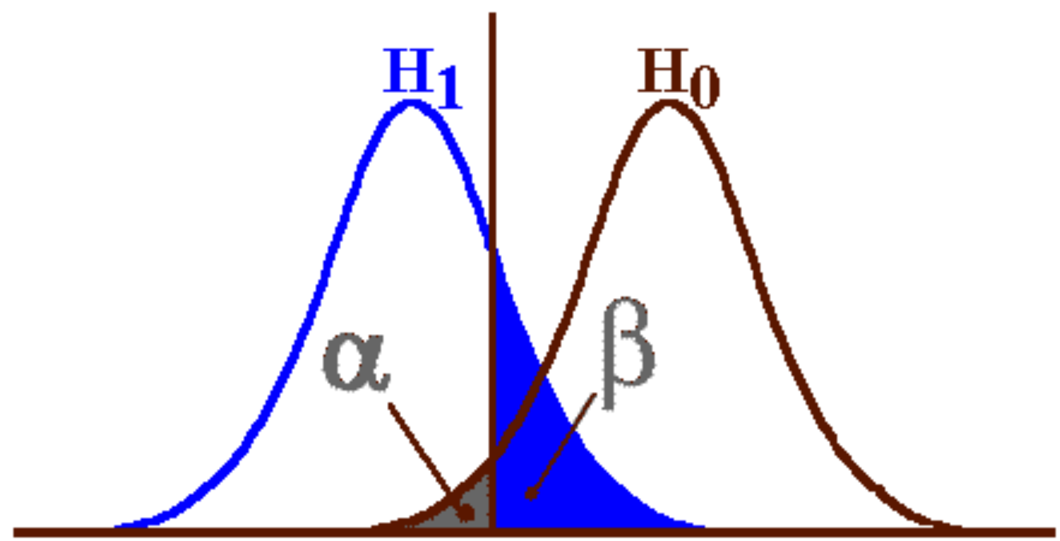
- **H_1： $\mu_1 \neq \mu_0$** **H_0： $\mu_1 = \mu_0$**
- **Z检验**
- **取α=0.05**
- 接受H_0:$\overline{X} \in \left(\mu_0 - 1.96\sigma_0/\sqrt{n}, \mu_0 + 1.96\sigma_0/\sqrt{n}\right)$, 或$|Z| \le 1.96$,

拒绝H_0:$\overline{X} > \mu_0 + 1.96\sigma_0/\sqrt{n}$ 或$\overline{X} < \mu_0 - 1.96\sigma_0/\sqrt{n}$,

或$Z < -1.96$,或$Z > 1.96$

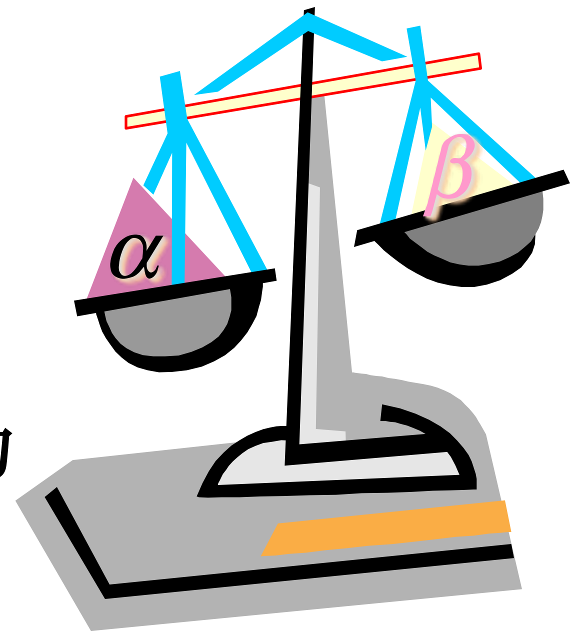
α错误和β错误

- α错误（I型错误）type I error
  - H_0为真时却被拒绝，弃真错误
- β错误（II型错误）type II error
  - H_0为假时却被接受，取伪错误



假设检验中的两类错误

1. **第 I 类错误(弃真错误)**
   - 原假设为真时拒绝原假设
   - 第 I 类错误的概率记为α
     - 被称为显著性水平
2. **第 II 类错误(取伪错误)**
   - 原假设为假时未拒绝原假设
   - 第 II 类错误的概率记为β(Beta)



假设检验中的两类错误(决策结果)

$H0$: 无罪

假设检验就好像一场审判过程

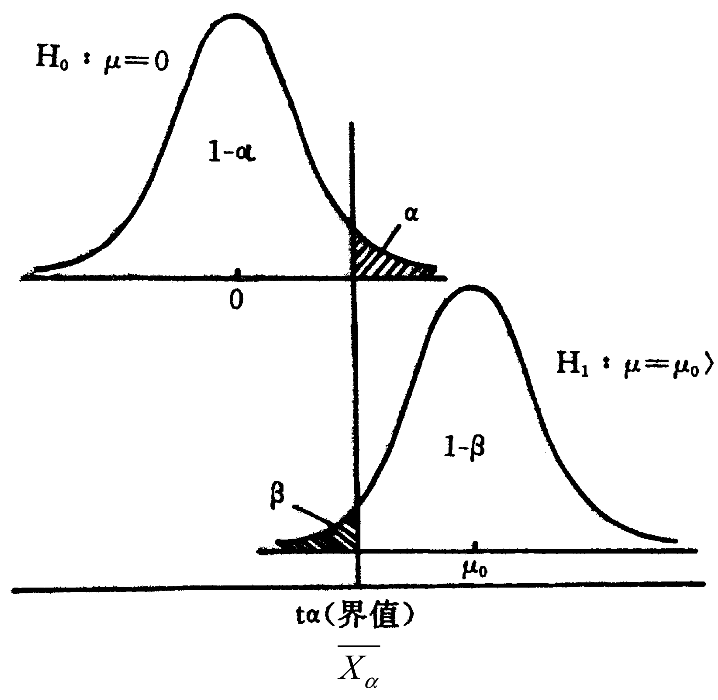
统计检验过程

陪审团审判		
裁决	实际情况	
	无罪	有罪
无罪	正确	错误
有罪	错误	正确

H_0 检验		
决策	实际情况	
	H_0为真	H_0为假
未拒绝H_0	正确决策 $(1-\alpha)$	第Ⅱ类错误(β)
拒绝H_0	第Ⅰ类错误(α)	正确决策 $(1-\beta)$

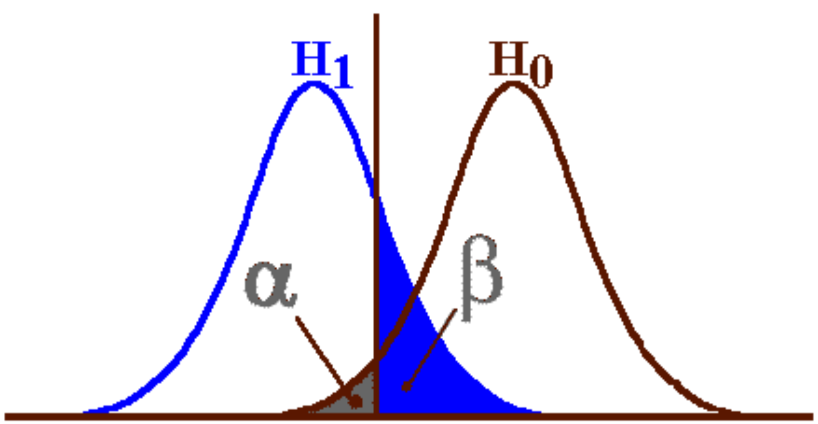
假设检验中各种可能结果的概率

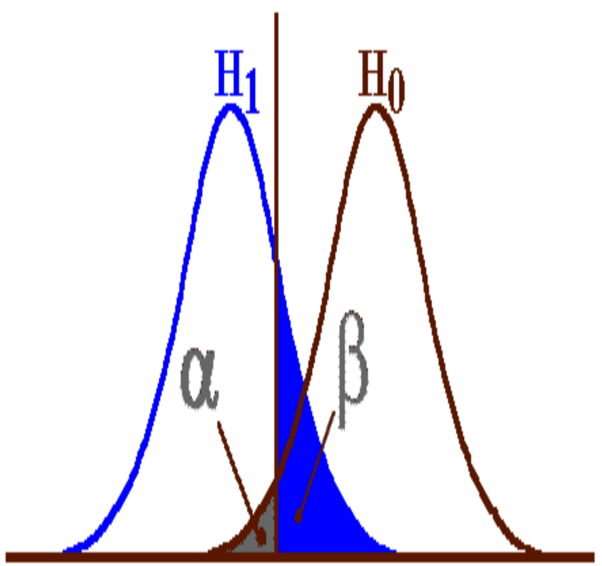
	接受H_0	拒绝H_0，接受H_1
H_0为真	$1-\alpha$(正确决策)	α(弃真错误)
H_0为伪	β(取伪错误)	$1-\beta$(正确决策)



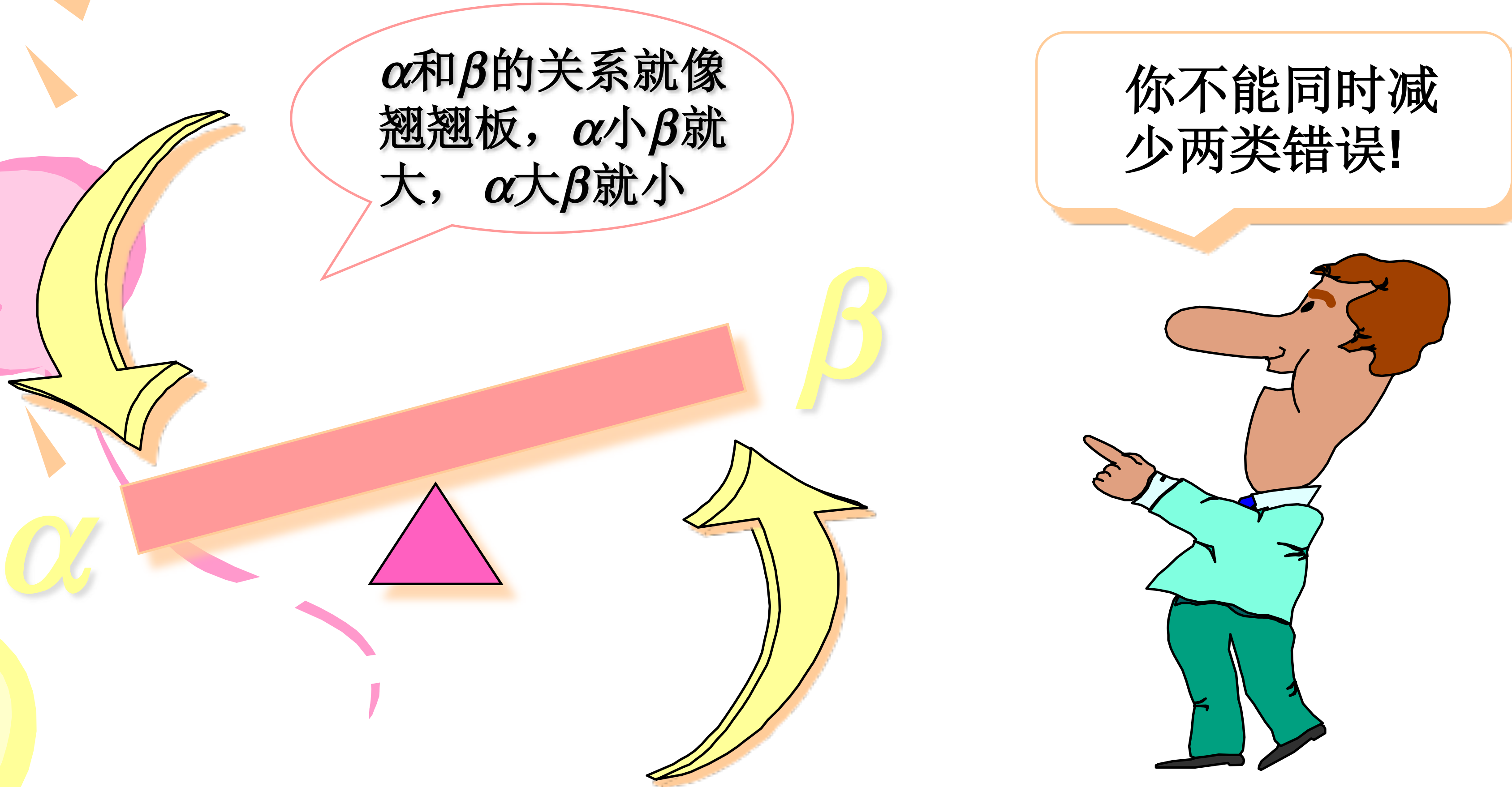
α错误和β错误的关系

- α ＋ β ≠ 1
- 对于固定的样本容量n，α与β不能同时减小
- 减少α与β的一个方法是增大样本容量n



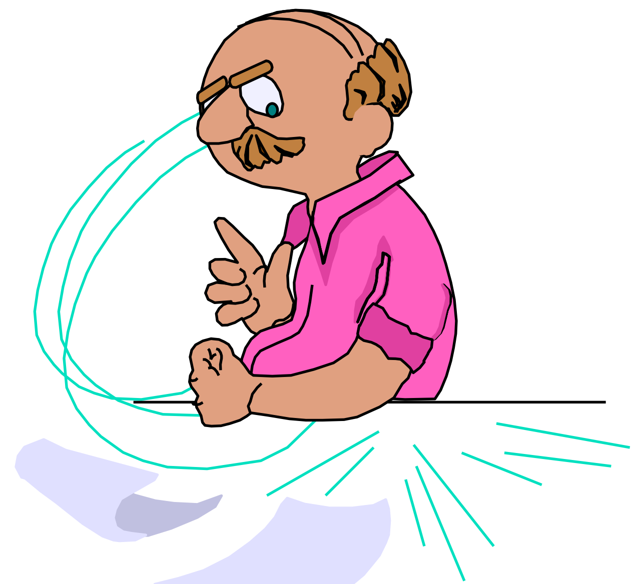


α错误和 β错误的关系



影响 β错误的因素

- **1. 总体参数的真值**
  - 随着假设的总体参数的减少而增大
- **2. 显著性水平 α**
  - 当α减少时增大
- **3. 总体标准差 σ**
  - 当σ增大时增大
- **4. 样本容量 n**
  - 当 n 减少时增大



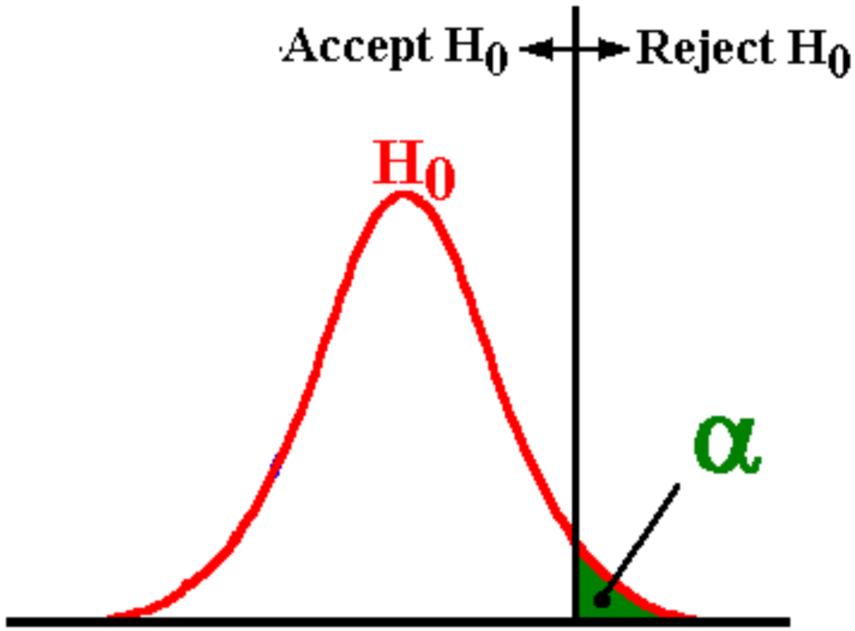
假设检验中的小概率原理

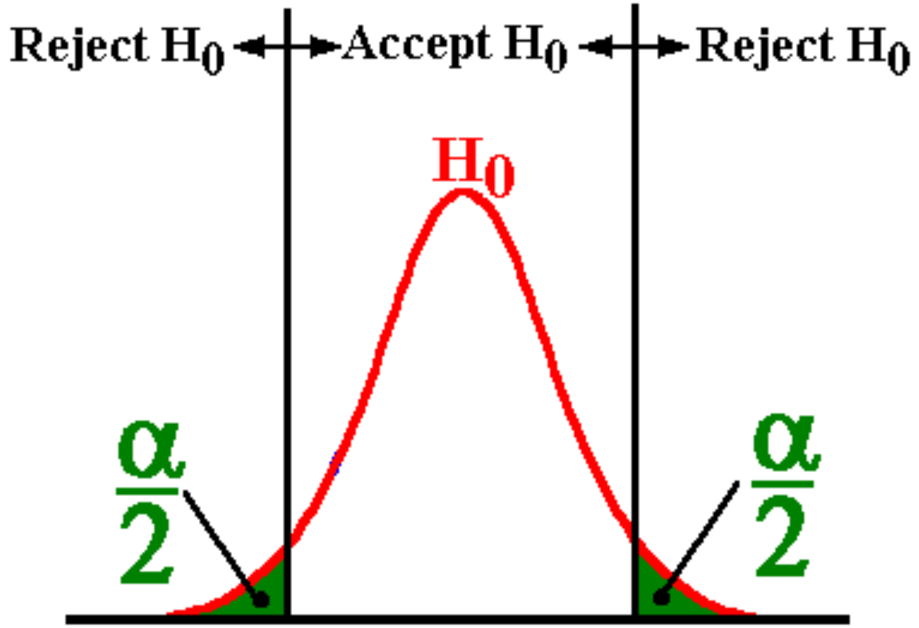
- ➡ 什么是小概率？
- 1. 在一次试验中，一个几乎不可能发生的事件发生的概率
- 2. 在一次试验中小概率事件一旦发生，我们就有理由拒绝原假设
- 3. 小概率由研究者事先确定

显著性水平α(significant level)

- 1. 是一个概率值
- 2. 原假设为真时，拒绝原假设的概率
  - 被称为抽样分布的拒绝域
- 3. 表示为 α(alpha)
  - 常用的 α值有0.01, 0.05, 0.10
- 4. 由研究者事先确定

单侧检验和双侧检验





- 问题的提法
  - 双侧检验：μ和已知常数μ_0是否有显著性差异？
  - 单侧检验：μ是否显著高（低）于已知常数μ_0？
- 建立的假设
  - 双侧检验：H_0：$\mu = \mu_0$　　H_1：$\mu \neq \mu_0$
  - 单侧检验：H_0：$\mu \leq \mu_0$　　H_1：$\mu > \mu_0$

    H_0：$\mu \geq \mu_0$　　H_1：$\mu < \mu_0$
- 拒绝域 **rejection region** （相关概念：临界值）
  - 双侧检验：$Z_{\alpha/2}$
  - 单侧检验：Z_{α}

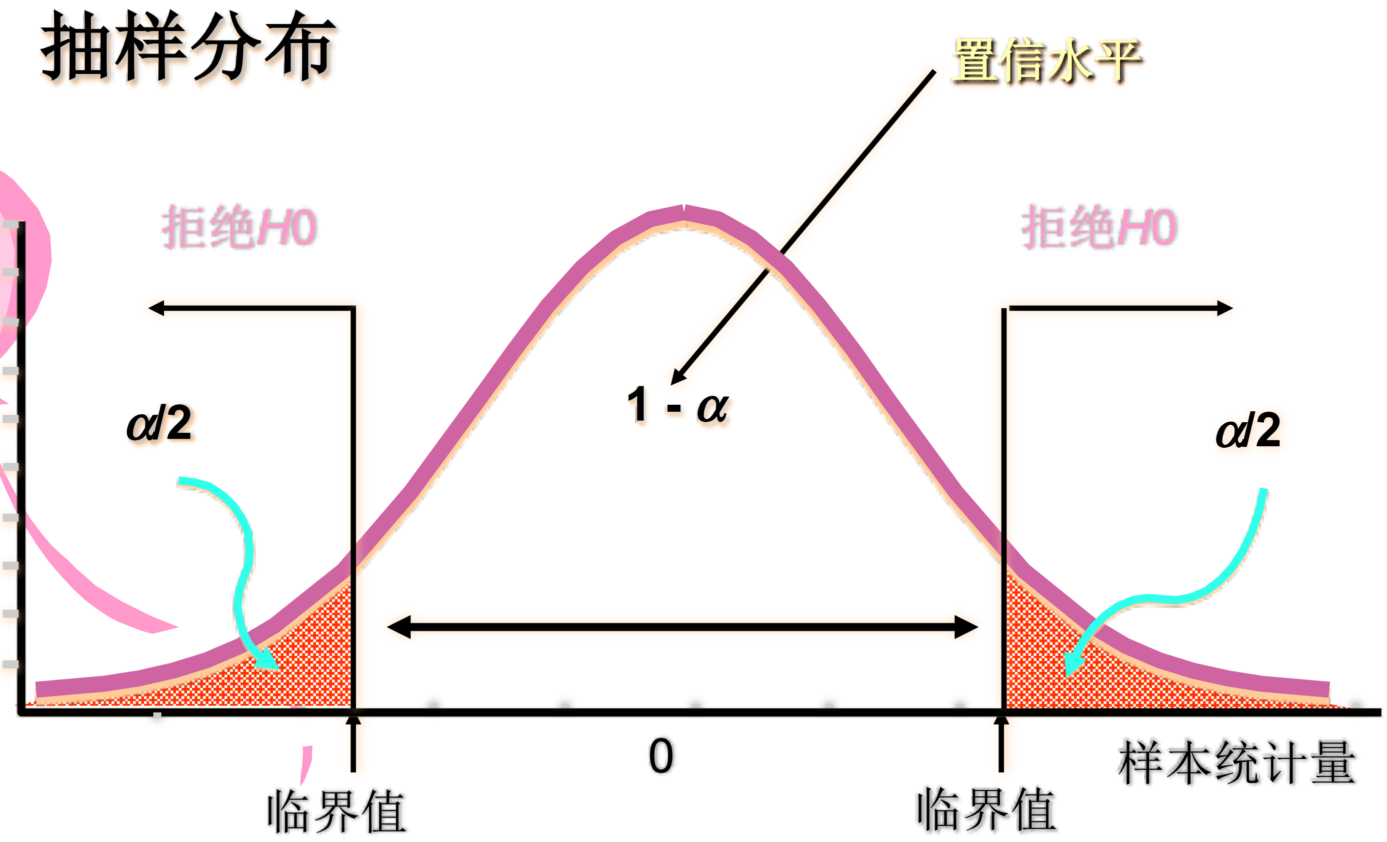
双侧检验与单侧检验 (假设的形式)

假设	双侧检验	单侧检验	
		左侧检验	右侧检验
原假设	$H_0: \mu = \mu_0$	$H_0: \mu \geq \mu_0$	$H_0: \mu \leq \mu_0$
备择假设	$H_1: \mu \neq \mu_0$	$H_1: \mu < \mu_0$	$H_1: \mu > \mu_0$

用单侧检验还是双侧检验？

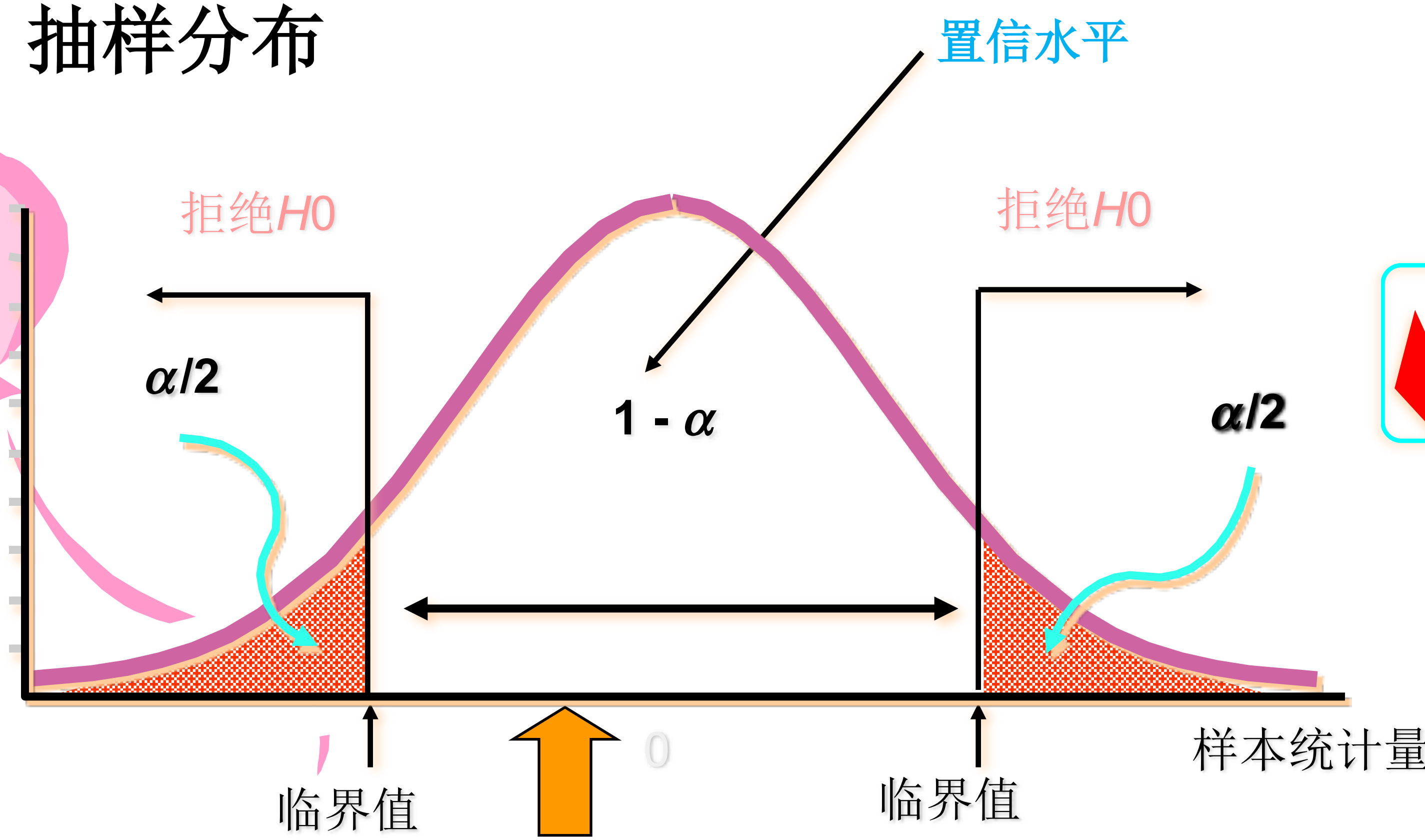
- 做题
  - 根据题意
- 做研究
  - 事先确定
    - 对差异的方向有没有预期？
  - 一般倾向于用双侧检验

显著性水平和拒绝域(双侧检验)



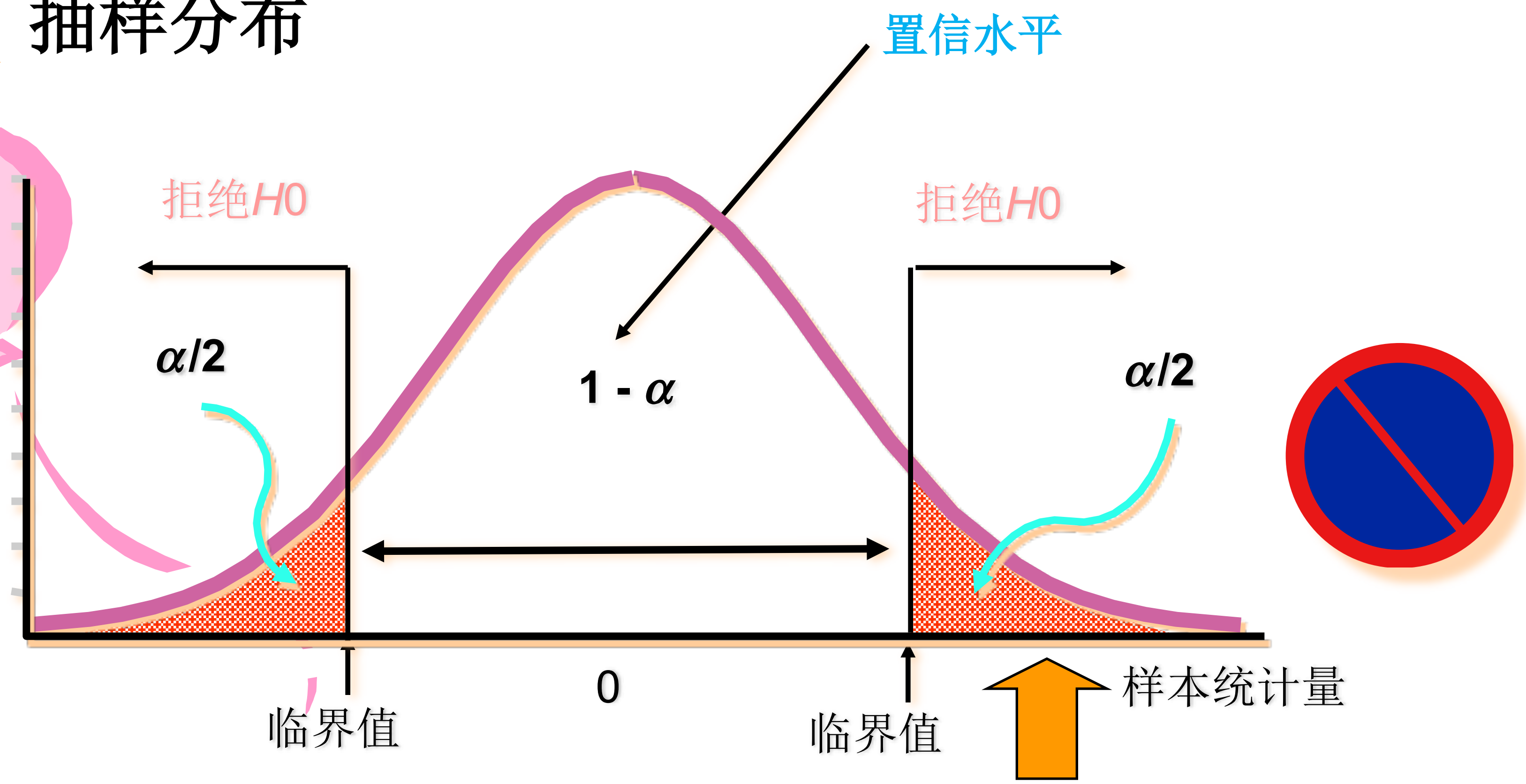
显著性水平和拒绝域(双侧检验)

抽样分布



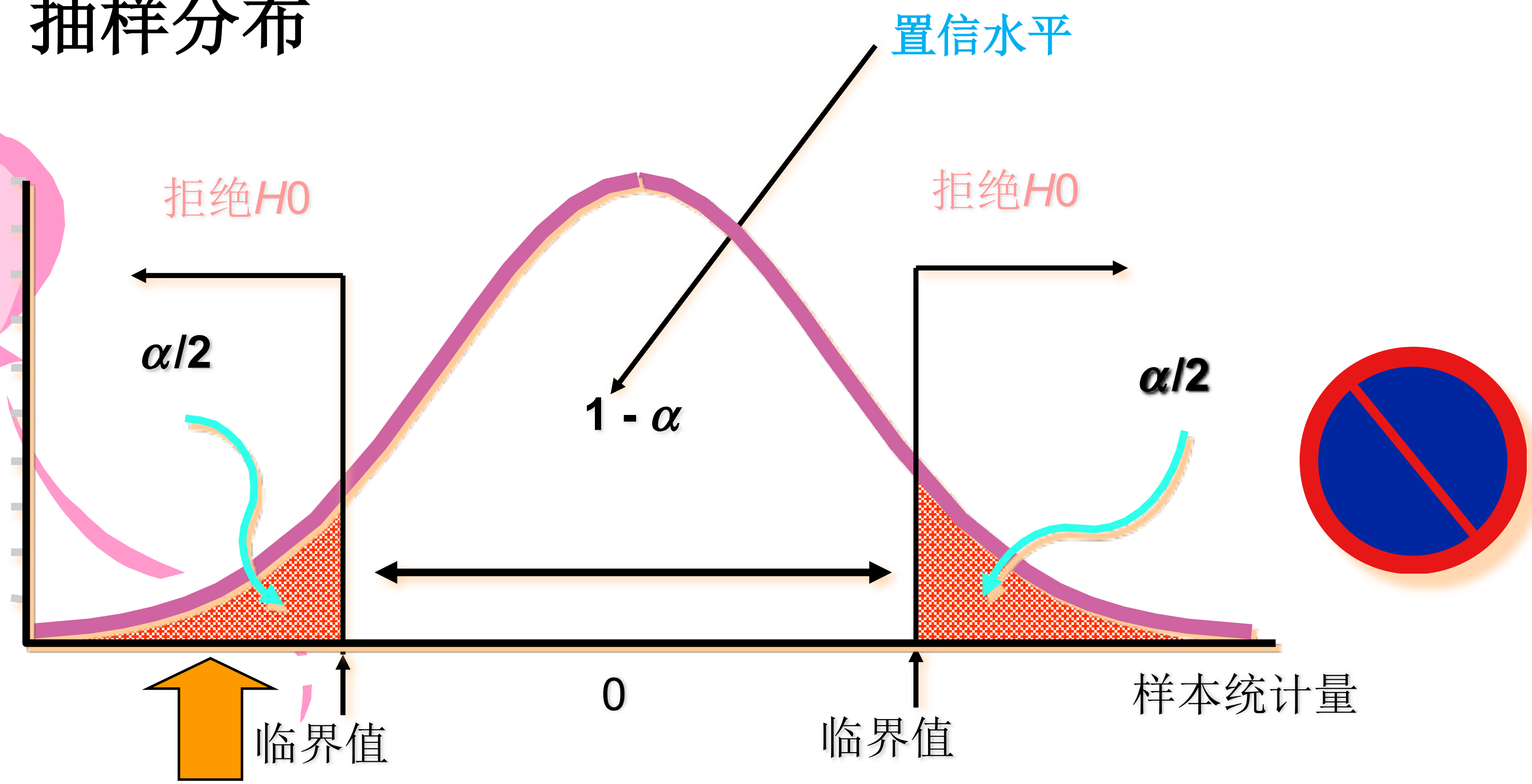
显著性水平和拒绝域(双侧检验)

抽样分布

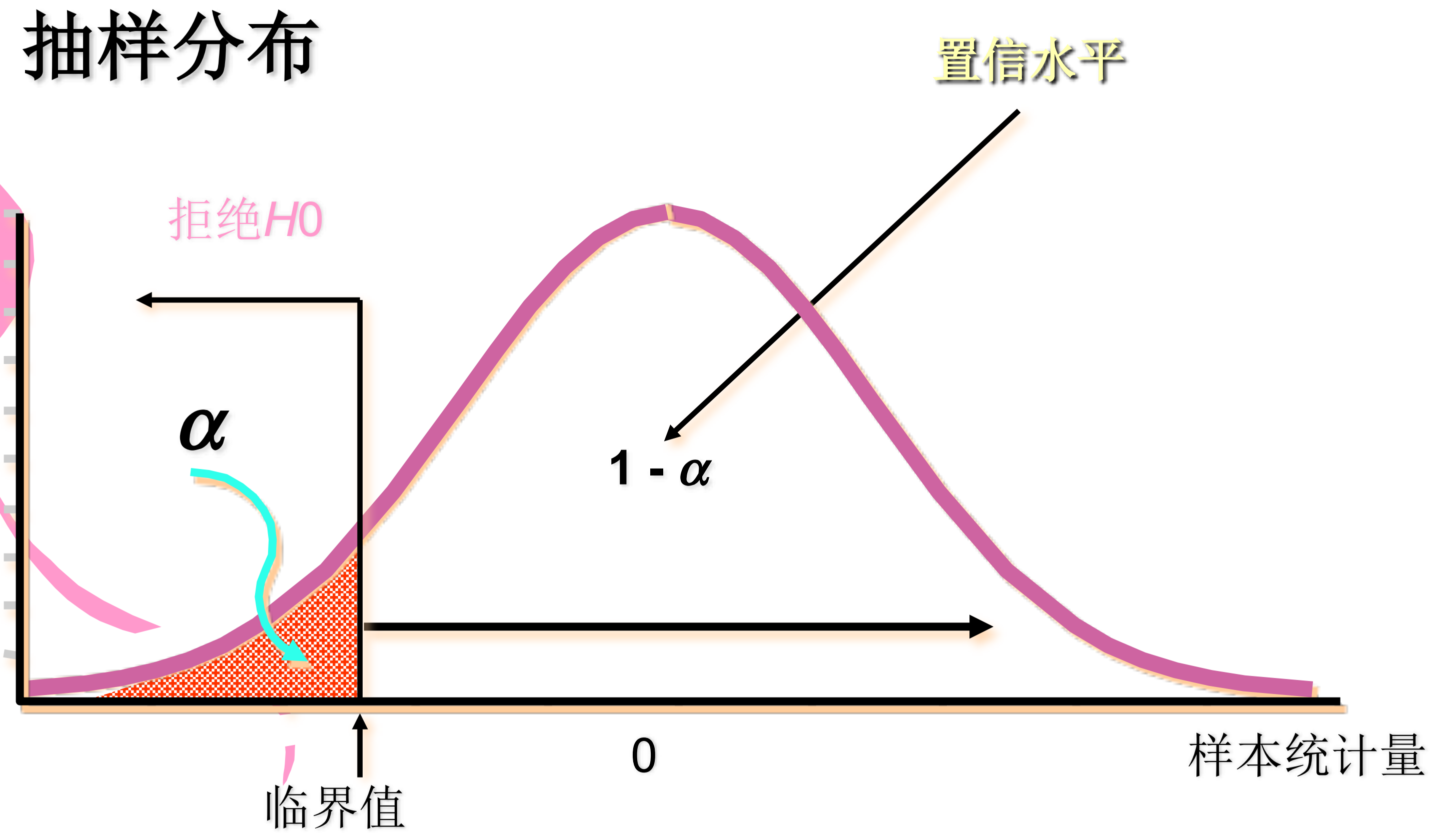


显著性水平和拒绝域(双侧检验)

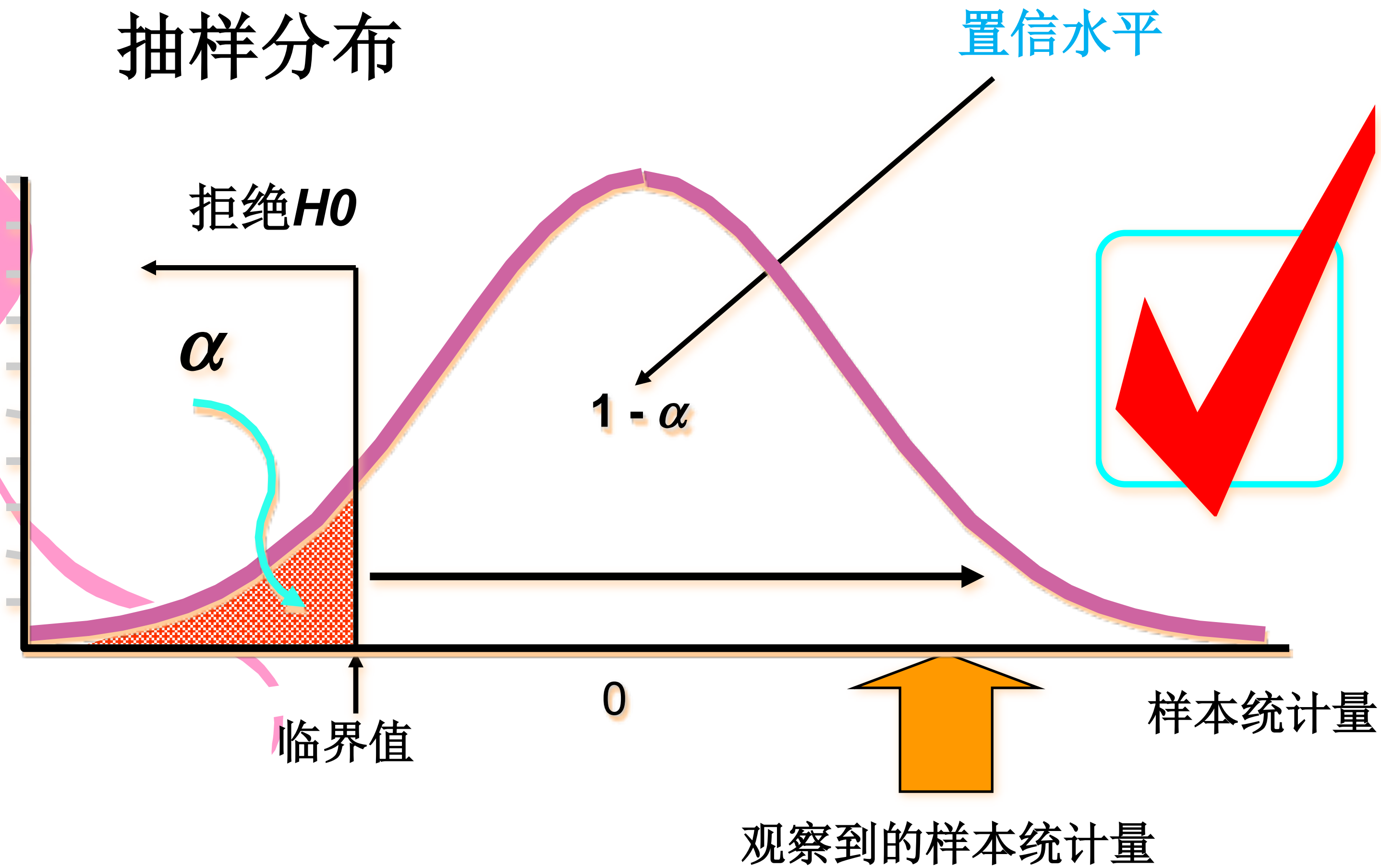
抽样分布



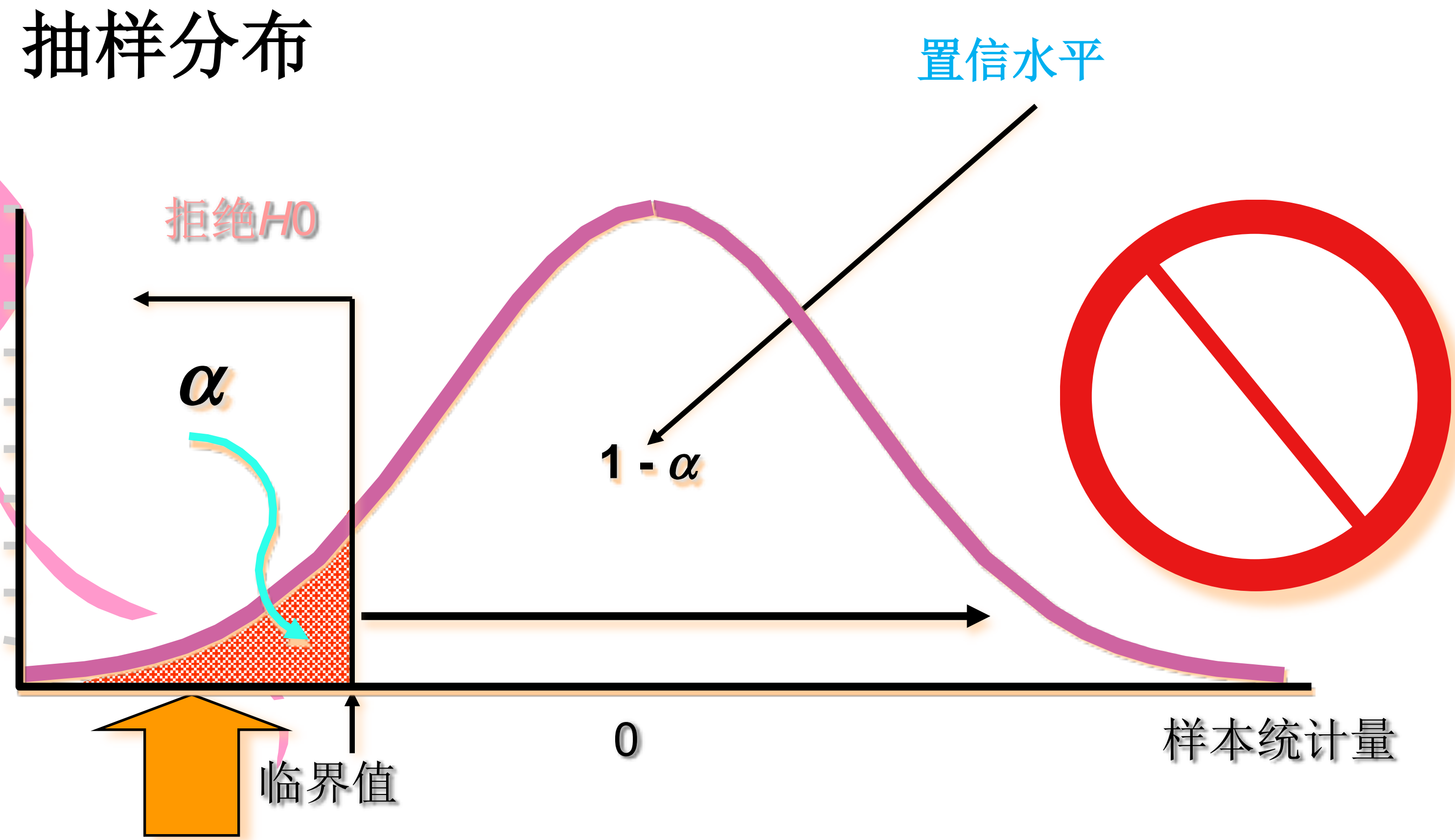
显著性水平和拒绝域(单侧检验)



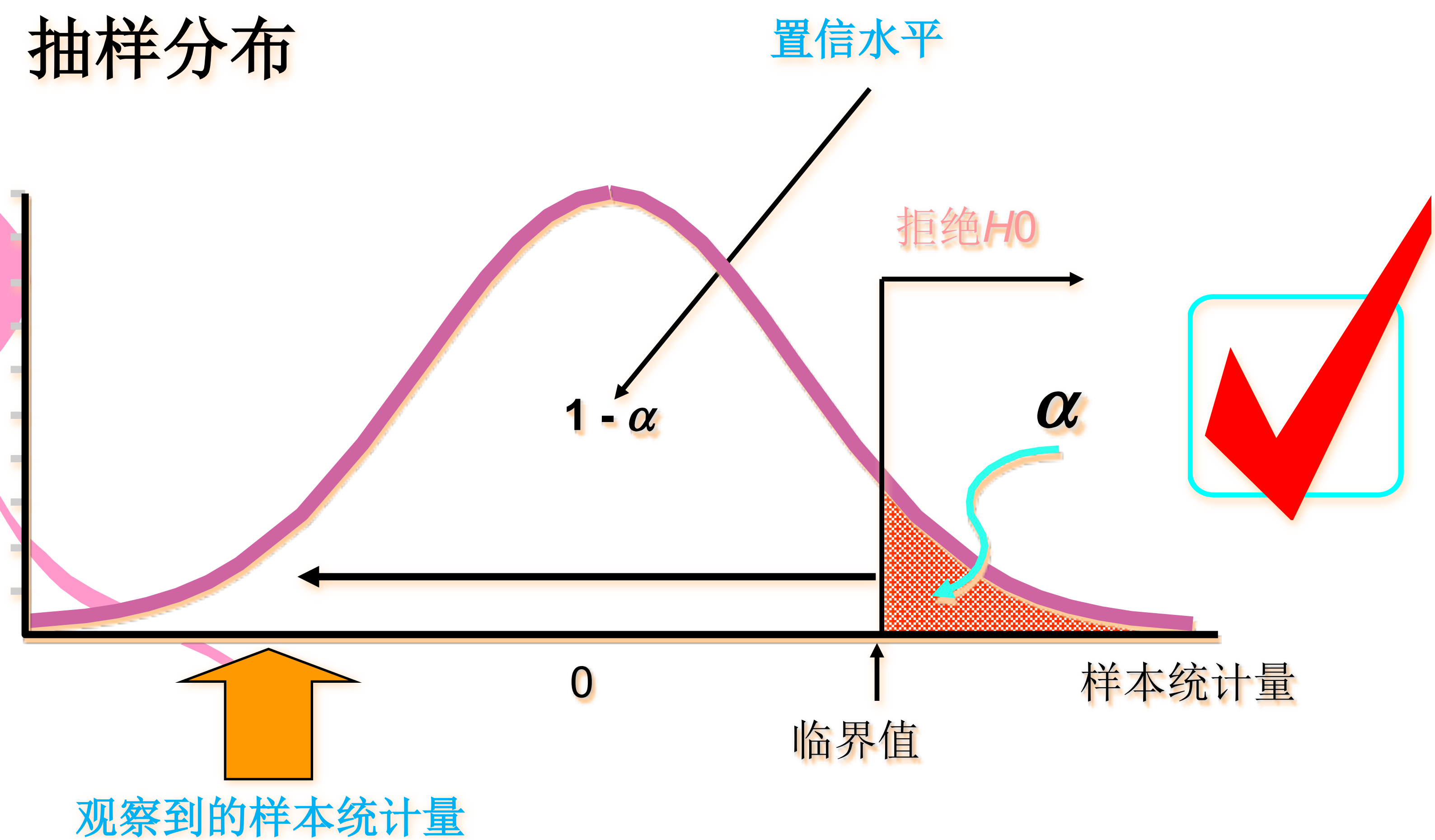
显著性水平和拒绝域(左侧检验)



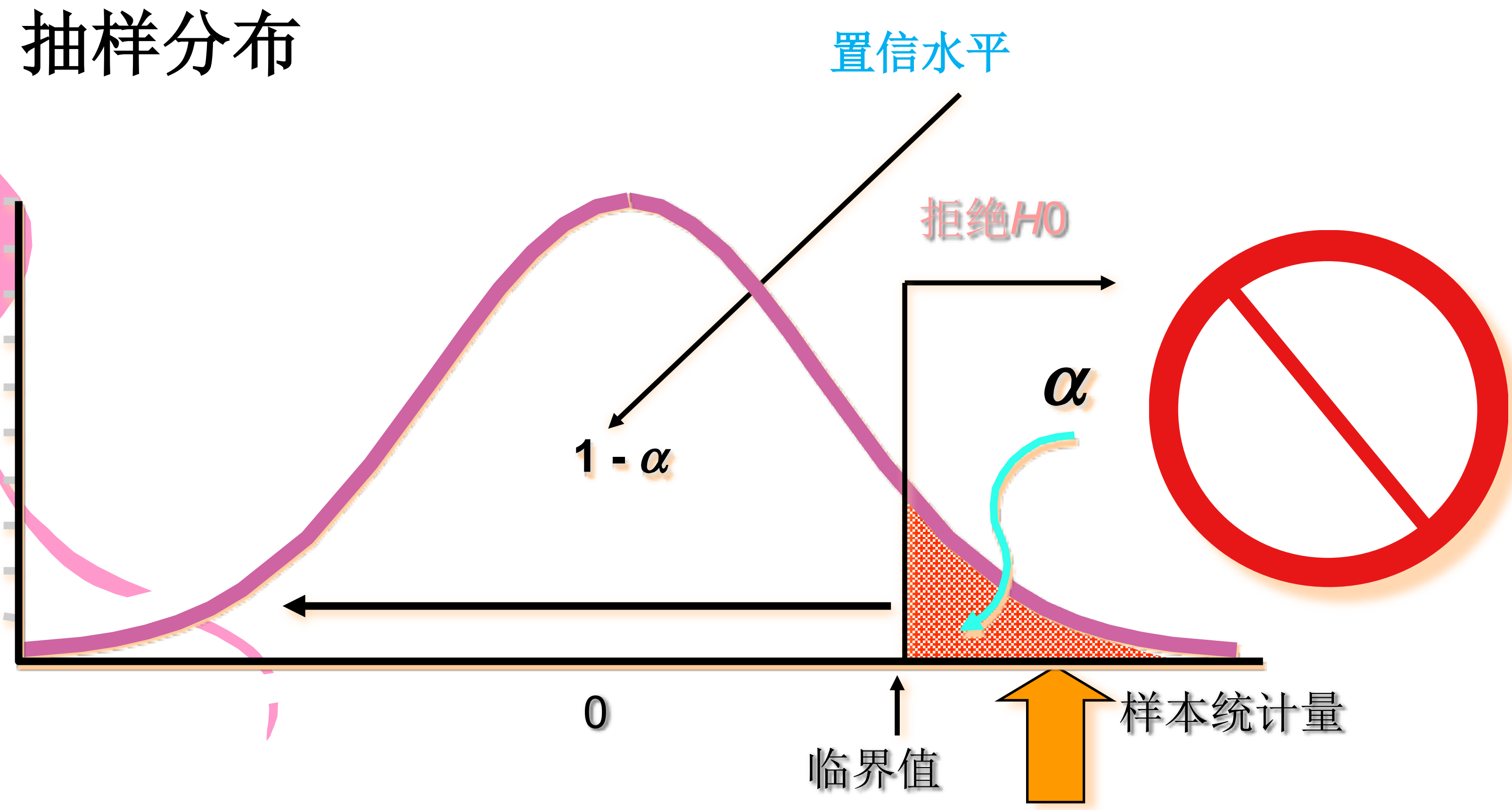
显著性水平和拒绝域(左侧检验)



显著性水平和拒绝域(右侧检验)

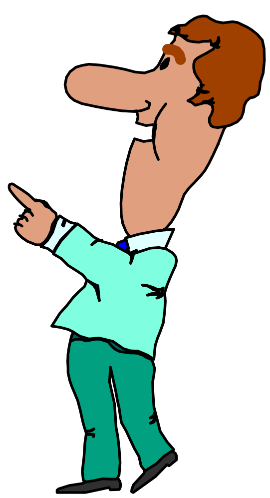


显著性水平和拒绝域(右侧检验)



决策规则

1. 给定显著性水平α，查表得出相应的临界值z_α或$z_{\alpha/2}$，t_α或$t_{\alpha/2}$
2. 将检验统计量的值与α水平的临界值进行比较
3. 作出决策
   - 双侧检验：|统计量| > 临界值，拒绝H_0
   - 左侧检验：统计量 < -临界值，拒绝H_0
   - 右侧检验：统计量 > 临界值，拒绝H_0



假设检验步骤的总结

1. 陈述原假设和备择假设
2. 从所研究的总体中抽出一个随机样本
3. 确定一个适当的检验统计量，并利用样本数据算出其具体数值
4. 确定一个适当的显著性水平，并计算出其临界值，指定拒绝域
5. 将统计量的值与临界值进行比较，作出决策
   - 统计量的值落在拒绝域，拒绝H_0，否则不拒绝H_0

思考题

- 某人怀疑他得了某种疾病，到医院检查
  - 待验证的假设是“有病”还是“没病”？
  - 医生什么时候犯α错误？什么时候犯β错误？
    - 认定实际没病的他“有病”
    - 认定实际有病的他“没病”
- α取多大？
- 能不能直接验证一个假设？
  - 所有天鹅都是白的

有一只天鹅是黑的

- 如果检验结果接受了H_0，我们可以说H_0得到了证明吗

2. 总体均值的显著性检验

2.1 总体正态且总体方差已知

已知样本$x_1, x_2, \cdots x_n$，正态总体$X \sim N(\mu_0, \sigma^2)$，

其均值μ与总体均值μ_0是否有显著差异？　(Z检验)

1　建立假设

$$H_0:\quad \mu = \mu_0$$

$$H_1:\quad \mu \neq \mu_0$$

2　计算统计量　$Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$

3　查临界值$Z_{\frac{\alpha}{2}}$

4　若　$|Z| > Z_{\frac{\alpha}{2}}$，拒绝$H_0$，　$|Z| < Z_{\frac{\alpha}{2}}$，接受$H_0$

例

- 全市统一考试的数学平均分μ_0=62分，标准差σ_0=10.2，一个学校的90名学生该次考试的平均成绩为68分，问该校成绩与全市平均差异是否显著。（取α＝0.05）

解

(1)建立检验假设

$H_0: \mu = 62$

$H_1: \mu \neq 62$

(2)$\mu_0 = 62, \sigma_0 = 10.2, \overline{X} = 68, n = 90,$

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} = \frac{68 - 62}{10.2 / \sqrt{90}} = 5.58$$

(3)由已给出的显著性水平$\alpha = 0.05$,查表得到$Z_{\alpha/2} = 1.96$

(4)显然$|Z| = 5.58 > 1.96$,即拒绝原假设H_0

可以认为该校的学生考试成绩与全市的平均成绩有显著差异。

- 例：
- 有人调查早期教育对儿童智力发展的影响，从受过良好教育的儿童中随机抽取70人进行韦氏儿童智力测验(μ_0=100, σ_0=15)结果$\overline{X}$=103.3，能否认为受过良好早期教育的儿童智力高于一般水平。

解：本题应该用单侧检验

$$H_0: \mu \le \mu_0$$

$$H_1: \mu > \mu_0$$

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} = \frac{103.3 - 100}{15/\sqrt{70}} = 1.84,$$

$Z_\alpha = 1.645$, 而 $Z = 1.84 > 1.645 = Z_\alpha$

拒绝原假设H_0，接受备择假设H_1，即可以认为受过良好早期教育的儿童智力高于一般水平。

2.2总体正态但总体方差未知

已知样本$x_1, x_2, \cdots x_n$来自正态总体$X \sim N(\mu_0, \sigma^2)$,

问样本均值与总体均值之间是否有显著差异？ (t检验)

1 建立假设

$$H_0: \quad \mu = \mu_0$$

$$H_1: \quad \mu \neq \mu_0$$

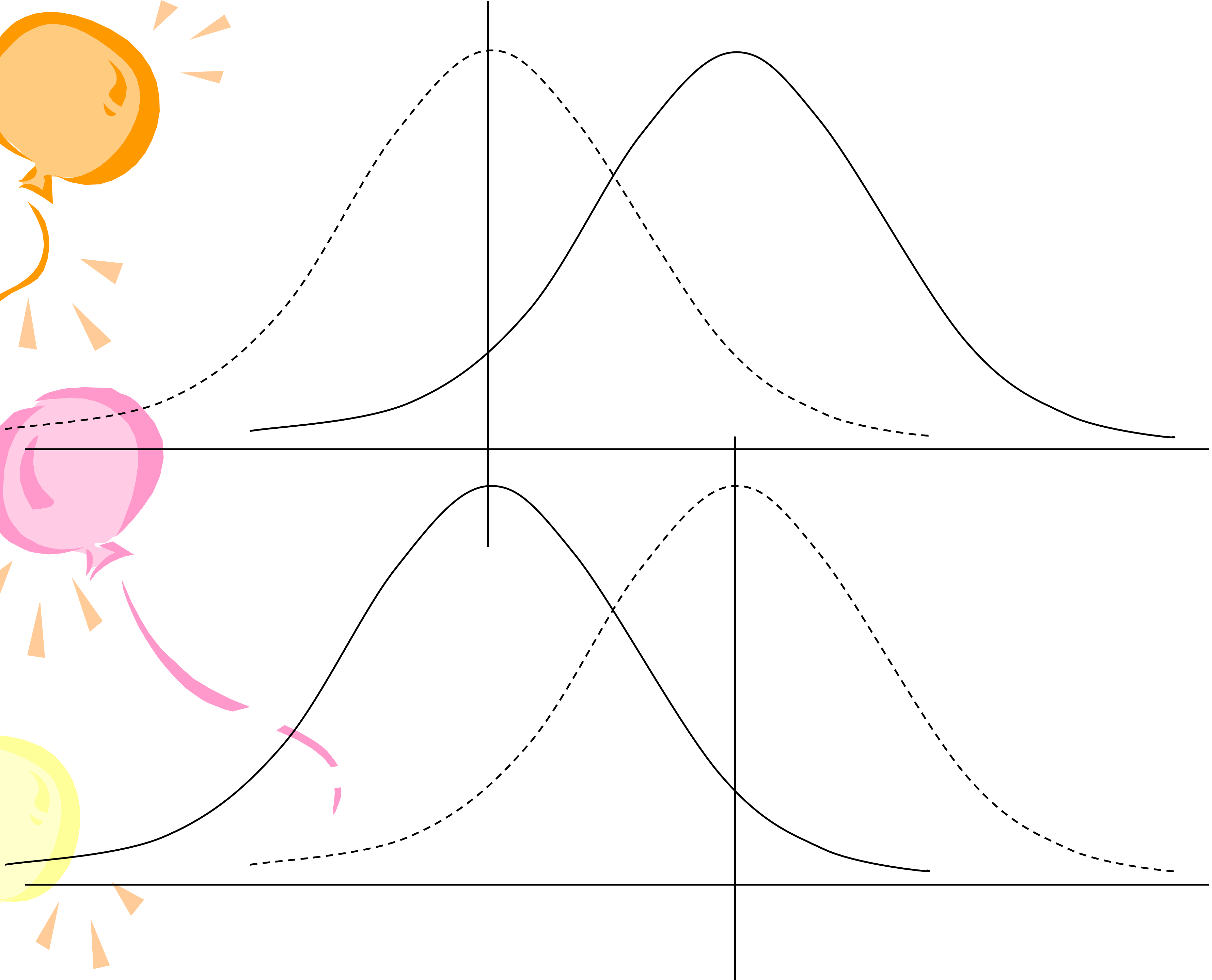
2 计算统计量 $t = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$

3 查临界值$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

4 若 $|t| > t_{\frac{\alpha}{2}}$,拒绝$H_0$, $|t| \leq t_{\frac{\alpha}{2}}$,接受$H_0$

例

学生的学习成绩与教师的教学方法有关。某校一教师采用了一种他认为新式有效的教学方法。经过一学年的教学后，从该教师所教班级中随机抽取了6名学生的考试成绩，分别为48.5, 49.0, 53.5, 49.5, 56.0, 52.5,而在该学年考试中，全年级的总平均分数为52.0，试分析采用这种教学方法与未采用新教学方法的学生成绩有无显著的差异（已知考试成绩服从正态分布，取$\alpha=0.05$）



解：

$\overline{X}=51.5$，$S=2.98$,

(1)建立假设

$H_0:\mu=\mu_0 \qquad H_1:\mu\neq\mu_0$

$$(2)t=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}=\frac{51.5-52.0}{2.98/\sqrt{6}}=-0.41$$

(3)临界值$t_{\frac{\alpha}{2}}(5)=2.571$

(4)$|t|=|-0.41|=0.41<2.571=t_{\frac{\alpha}{2}}(5)$

接受假设H_0，两种教学方法无显著差异

例： 一个汽车制造商声称，某一等级的轮胎的平均寿命在一定的汽车重量和正常行驶条件下大于40000公里，对一个120个轮胎的随机样本作了试验，测得平均值和标准差为 $\overline{X}=41000$，$S=5000$。已知轮胎寿命的公里数近似服从正态分布。该制造商的产品同他所说的标准相符吗？($\alpha=0.05$)

解：这是一个单侧t检验

$$H_0: \mu \le 40000$$

$$H_1: \mu > 40000$$

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{41000 - 40000}{5000/\sqrt{120}} = 2.19$$

查 t 分布表知$t_\alpha(119) = 1.658$,

由于$t > t_\alpha$，因此接受H_1，可以认为

轮胎的平均寿命显著地大于40000公里。

2.3 总体非正态

总体非正态，$n \geq 30$(或$n \geq 50$):

1、总体方差σ_0已知时样本均值$\overline{X}$的分布

$$\mu_{\overline{X}} = \mu_0, SE_{\overline{X}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}}$$

2、总体方差σ_0未知时样本均值$\overline{X}$的分布

$$\mu_{\overline{X}} = \mu_0, SE_{\overline{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}}, t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$$

例：

某省进行数学竞赛，结果分数的分布不是正态，总平均分43.5。其中某县参加竞赛的学生168人，$\overline{X}=45.1$，S=18.7，该县平均分与全省平均分有否显著差异? (α=0.05)

解：$n=168$

$$t=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}=\frac{45.1-43.5}{18.7/\sqrt{168}}=1.11$$

$$t_{0.05/2}(167)=1.97 \qquad \left(Z_{0.05/2}=1.96\right)$$

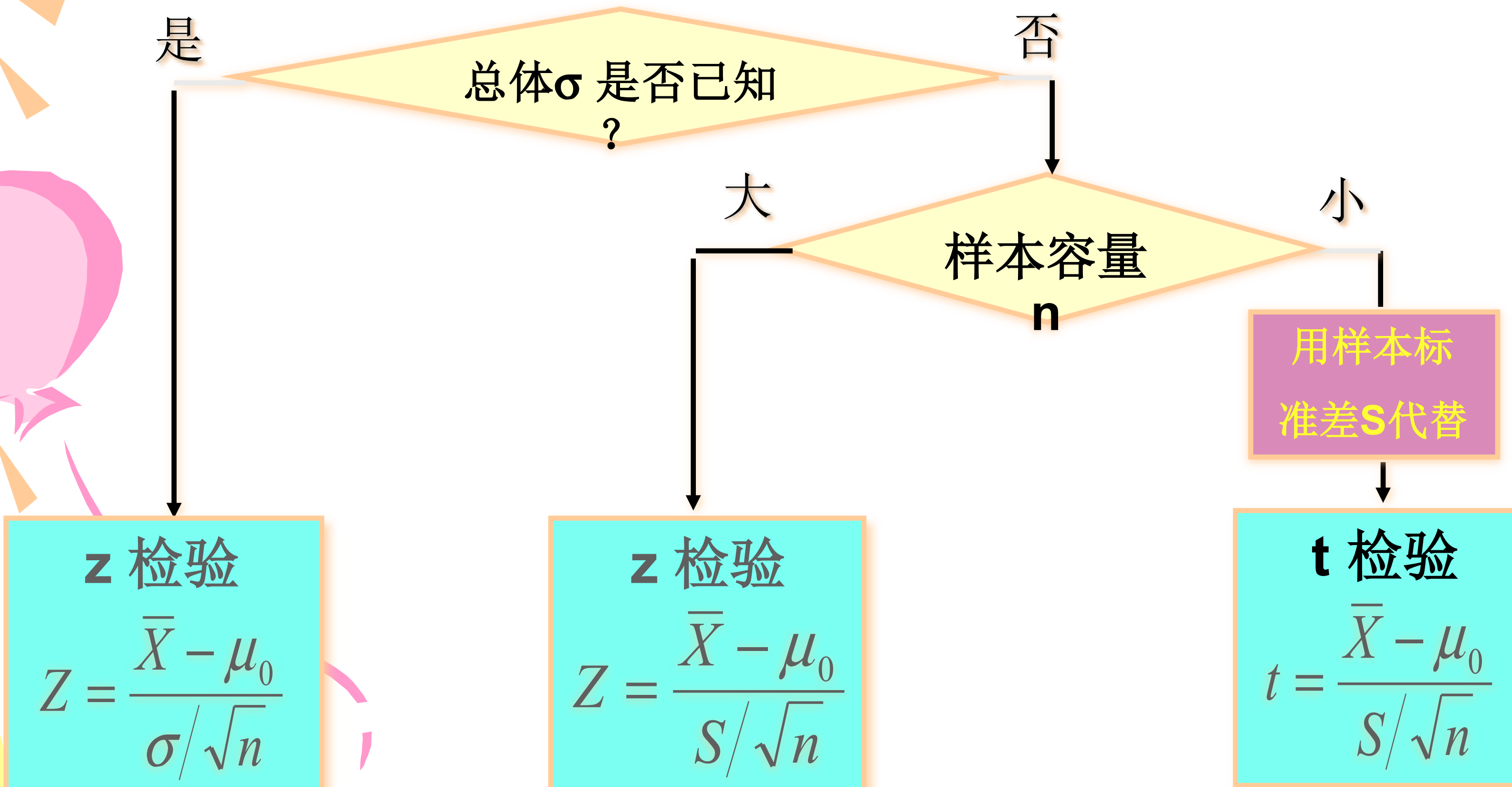
无显著差异

Z检验和t检验

- 两种检验的前提之一
  - 总体正态分布
- 当n≥50时，两种检验的临界值差不多相等，即 $Z_{\alpha/2}$　$t_{\alpha/2}(n)$
  ($Z_{0.05/2}=1.960$, $Z_{0.01/2}=2.576$)

n	30	50	100	150	200	500	1000	5000
$t_{0.05/2}(n)$	2.042	2.009	1.984	1.976	1.972	1.965	1.962	1.960
$t_{0.01/2}(n)$	2.750	2.678	2.626	2.609	2.601	2.586	2.581	2.577

总体均值的检验
(检验统计量)



小结

	假设		总体正态，方差σ^2已知，Z 检验		总体正态，方差σ^2未知，t 检验	
	H_0	H_1	临界值	拒绝 H_0	临界值	拒绝 H_0
双侧检验	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$Z_{\alpha/2}$	$\lvert Z\rvert > Z_{\alpha/2}$	$t_{\alpha/2}(n-1)$	$\lvert t\rvert > t_{\alpha/2}(n-1)$
单侧检验	$\mu \leqslant \mu_0$	$\mu > \mu_0$	Z_α	$Z > Z_\alpha$	$t_\alpha(n-1)$	$t > t_\alpha(n-1)$
	$\mu \geqslant \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$-Z_\alpha$	$Z < -Z_\alpha$	$-t_\alpha(n-1)$	$t < -t_\alpha(n-1)$

注：当总体不是正态分布时，如果样本容量 n≥50，可以考虑用

$Z' = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$ 来做检验

- 思考题1、某市场研究有限公司假定电话调查可在15分钟以内结束。如果调查所需时间超过该值，则需要加收额外费用。假定由35个电话调查所组成的一个样本表明，其样本均值为17分钟，样本标准差为4分钟。取显著性水平$\alpha=0.01$，问是否需要额外收费?

- 思考题2、据美国商业部的经济分析局报道，北加利福尼亚居民年收入的均值为18688美元。一名研究者想对南加利福尼亚州检验H_0：$\mu=18688$，H_1：$\mu\neq18688$，其中μ为南加利福尼亚州居民年收入的均值。假定由400名南加利福尼亚州居民所组成的样本表明，其年收入的样本均值16868美元，样本标准差为14624美元，则假设检验的结论是什么？取显著性水平为0.05。

3. 两总体均值差异的显著性检验

3.1 两总体方差已知

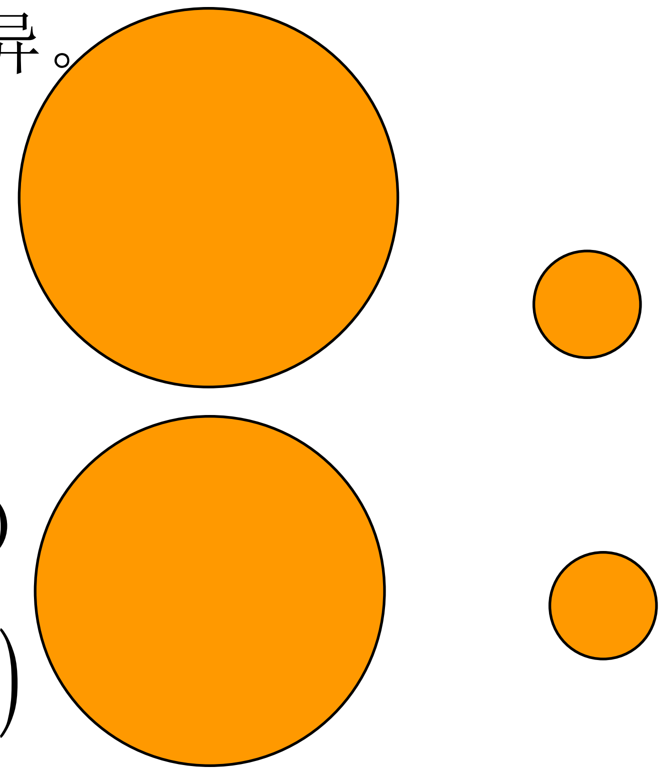
两个正态总体,均值为μ_1,μ_2,两个样本均值为$\overline{X_1},\overline{X_2}$,

由$\overline{X_1}-\overline{X_2}$的差异验证$\mu_1-\mu_2$的差异。

如果两个总体方差已知:

$$X_1 \sim N(\mu_1,\sigma_1^2) \Rightarrow \overline{X_1} \sim N(\mu_1,\frac{\sigma_1^2}{n_1})$$

$$X_2 \sim N(\mu_2,\sigma_2^2) \Rightarrow \overline{X_2} \sim N(\mu_2,\frac{\sigma_2^2}{n_2})$$



那么$\overline{X_1}-\overline{X_2} \sim N\left(\mu_1-\mu_2,\ \ SE^2_{\overline{X_1}-\overline{X_2}}\right)$

在不同条件下标准误$SE_{\overline{X_1}-\overline{X_2}}$的计算方法不同

3.1.1 总体方差已知，独立样本

X，Y独立，则$\sigma^2_{(X\pm Y)} = \sigma^2_X + \sigma^2_Y$，

$\overline{X_1}$与$\overline{X_2}$独立时，$SE^2_{\overline{X_1}-\overline{X_2}} = \sigma^2_{\overline{X_1}-\overline{X_2}} = \sigma^2_{\overline{X_1}} + \sigma^2_{\overline{X_2}} = \dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}$，

$SE_{\overline{X_1}-\overline{X_2}} = \sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}$，而$\overline{X_1} - \overline{X_2} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2,\ SE^2_{\overline{X_1}-\overline{X_2}}\right)$

则$Z = \dfrac{\left(\overline{X_1} - \overline{X_2}\right) - (\mu_1 - \mu_2)}{SE_{\overline{X_1}-\overline{X_2}}}$

当$H_0: \mu_1 = \mu_2$假设成立时，$Z = \dfrac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{SE_{\overline{X_1}-\overline{X_2}}} = \dfrac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$

例：

某地区的六岁儿童中随机抽取男生30人，其平均身高为114cm，抽取女生27人，平均身高112.5cm。根据以往资料，该区六岁男女儿童身高的标准差男童为5cm，女童为6.5cm，问该区六岁男女儿童身高有无显著差异？($\alpha=0.05$)

解：

$$\overline{X_1}=114,\overline{X_2}=112.5,\sigma_1=5,\sigma_2=6.5,\ n_1=30,\ \mathrm{n}_2=27,$$

$$H_0:\mu_1=\mu_2,$$

$$H_1:\mu_1\neq\mu_2,$$

$$Z=\frac{\overline{X_1}-\overline{X_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}=\frac{114-112.5}{\sqrt{\frac{5^2}{30}+\frac{6.5^2}{27}}}=0.97<1.96=Z_{\frac{0.05}{2}},$$

所以，男女儿童的身高差异不显著。

3.1.2 总体方差已知，相关样本

设ρ为两变量之间的相关系数

$$\sigma_{(X-Y)}^2 = \sigma_X^2 - 2\rho\sigma_X\sigma_Y + \sigma_Y^2,$$

$$SE_{\overline{X_1}-\overline{X_2}}^2 = SE_{\overline{X_1}}^2 + SE_{\overline{X_2}}^2 - 2\rho \cdot SE_{\overline{X_1}} \cdot SE_{\overline{X_2}},$$

$$SE_{\overline{X_1}-\overline{X_2}} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} - 2\rho\frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}} \cdot \frac{\sigma_2}{\sqrt{n_2}}} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}},$$

检验统计量为:

$$Z = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}}}$$

附：

$$\sigma_{X-Y}^2=\frac{1}{n}\sum\left((X-Y)-\mu_{X-Y}\right)^2=\frac{1}{n}\sum\left((X-Y)-(\mu_X-\mu_Y)\right)^2$$

$$=\frac{1}{n}\sum\left((X-\mu_X)-(Y-\mu_Y)\right)^2$$

$$=\frac{1}{n}\sum\left((X-\mu_X)^2+(Y-\mu_Y)^2-2(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right)$$

$$=\frac{\sum(X-\mu_X)^2}{n}+\frac{\sum(Y-\mu_Y)^2}{n}-2\frac{\sum(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)}{n}$$

而 $\rho=\dfrac{\sum(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)}{\sqrt{\sum(X-\mu_X)^2\sum(Y-\mu_Y)^2}}=\dfrac{\sum(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)}{n\sqrt{\dfrac{\sum(X-\mu_X)^2}{n}\dfrac{\sum(Y-\mu_Y)^2}{n}}}$

$$=\frac{\sum(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)}{n}\bullet\frac{1}{\sigma_X\sigma_Y}$$

因此 $\sigma_{X-Y}^2=\sigma_X^2+\sigma_Y^2-2\rho\sigma_X\sigma_Y$

- 例：某幼儿园在儿童入园时对49名儿童进行了比奈智力测验($\sigma=16$)，结果平均智商$\overline{X}_1=106$，一年后再对同组被试施测，结果$\overline{X}_2=110$，已知两次测验结果的相关系数$r=0.74$，问能否说随着年龄增长与一年的教育，儿童智商有了显著提高。($\alpha=0.01$)

$$Z=\frac{\overline{X_1}-\overline{X_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}}}$$

解：单侧检验

$H_0: \mu_1 \geq \mu_2,$

$H_1: \mu_1 < \mu_2,$

$$SE_{D_{\overline{X}}}=\sqrt{\frac{16^2+16^2-2\times 0.74\times 16^2}{49}}=1.65,$$

$$Z=\frac{D_{\overline{X}}}{SE_{D_{\overline{X}}}}=\frac{110-106}{1.65}=2.43>2.33=Z_{0.01},$$

即$p<0.01$，可以认为一年后儿童智商有了显著的提高。

3.2两总体方差未知

3.2.1 两总体方差相等独立样本

$D_{\overline{X}}=\overline{X}_1-\overline{X}_2$的标准误为$SE_{D_{\overline{X}}}=\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}$,

两总体方差相等$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma_0^2$

$$SE_{D_{\overline{X}}}=\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}=\sqrt{\sigma_0^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)},$$

σ_0^2未知,用S_1^2和S_2^2的加权平均代替,

$$S_p^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2},\ SE_{D_{\overline{X}}}=\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)},$$

$$t=\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{SE_{D_{\overline{X}}}}=\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}\right)}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

- 例：某校进行一项智力速度测验，共有19名学生参加，其中男生12人，女生7人。测验共200道题目，在规定时间里，答对一题记1分，测验结束后，得到以下的测验成绩
  - 男生12人：83、146、119、104、120、161、134、115、129、99、123
  - 女生7人：70、118、101、85、107、132、94试确定男、女生的平均成绩有无显著的差异（取α＝0.05）

解：$\overline{X}=120, \overline{Y}=101, S_1^2=\frac{1}{12-1}\sum_{i=1}^{12}\left(X_i-\overline{X}\right)^2=445.82,$

$S_2^2=\frac{1}{7-1}\sum_{i=1}^{7}\left(Y_i-\overline{Y}\right)^2=425.33,$

$$t=\frac{\overline{X_1}-\overline{X_2}}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$$

由于S_1^2和S_2^2差不多，可以认为方差相等,

$$t=\frac{120-101}{\sqrt{\frac{(12-1)445.82+(7-1)425.33}{12+7-2}\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{7}\right)}}=1.91$$

$\alpha=0.05, t_{\frac{\alpha}{2}}(17)=2.11$

由$|t|=1.91<2.11=t_{\frac{\alpha}{2}}(17)$，因此

男女生的测验成绩没有显著性差异。

- 实际上正式考试中应该进行方差齐性检验，而不是仅凭感觉来判断。

- **$F=445.82/425.33=1.048<5.41$**
- **$F_{0.05/2}(11,6)=5.41$**

3.2.2 两总体方差不等，独立样本

若两总体方差不等 $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$$SE_{D_{\overline{X}}} = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}},$$

$t' = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{SE_{D_{\overline{X}}}}$ 只是近似t分布，不能将t分布的

$df = n_1 + n_2 - 2$的临界值作为t'的临界值，它的

临界值为$t'_{(\alpha/2)} = \dfrac{SE^2_{\overline{X}_1} \cdot t_{1(\alpha/2)} + SE^2_{\overline{X}_2} \cdot t_{2(\alpha/2)}}{SE^2_{\overline{X}_1} + SE^2_{\overline{X}_2}},$

$t_{1(\alpha/2)}$为$df = n_1 - 1$，α水平下对应的临界值,

$t_{2(\alpha/2)}$为$df = n_2 - 1$，α水平下对应的临界值

3.2.3 两总体方差未知，相关样本，相关系数未知

样本$X_i, Y_i (i=1,2,\ldots,n,)$来自两相关正态总体

$$d_i = X_i - \mathrm{Y}_i, \bar{d} = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{\sum (X_i - Y_i)}{n} = \bar{X} - \bar{Y},$$

$$S_d^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(d_i - \bar{d}\right)^2,$$

$$\mu_{\bar{d}} = \mu_1 - \mu_2, SE_{\bar{d}} = \frac{S_d}{\sqrt{n}},$$

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_d / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

3.2.4 两总体方差未知，相关样本，相关系数已知

$$S_d^2 = S_1^2 + S_2^2 - 2rS_1S_2,$$

$$SE_{D_{\overline{X}}} = \sqrt{\frac{S_1^2 + S_2^2 - 2rS_1S_2}{n}},$$

$$t = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{S_1^2 + S_2^2 - 2rS_1S_2}{n}}} = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_d / \sqrt{n}}$$

3.3 两个非正态总体
n >30或 n >50时用Z'检验

- 独立样本

$$Z=\frac{\overline{X_1}-\overline{X_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\text{或}t=\frac{\overline{X_1}-\overline{X_2}}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}\text{，无需假定}\sigma_1^2=\sigma_2^2$$

- 相关样本

$$Z=\frac{\overline{X_1}-\overline{X_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2r\sigma_1\sigma_2}{n}}}\text{或}t=\frac{\overline{X_1}-\overline{X_2}}{\sqrt{\frac{S_1^2+S_2^2-2rS_1S_2}{n}}}$$

均数

- 样本-总体
  - σ已知
  - σ未知
- 样本-样本
  - σ已知
    - 独立样本
    - 相关样本
  - σ未知
    - 独立样本
      - 等方差假设
      - 不等方差假设（略）
    - 相关样本

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}}$$

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$$

$$Z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

$$Z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}}}$$

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

$$t = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_d / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

$$t = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{S_1^2 + S_2^2 - 2rS_1S_2}{n}}}$$

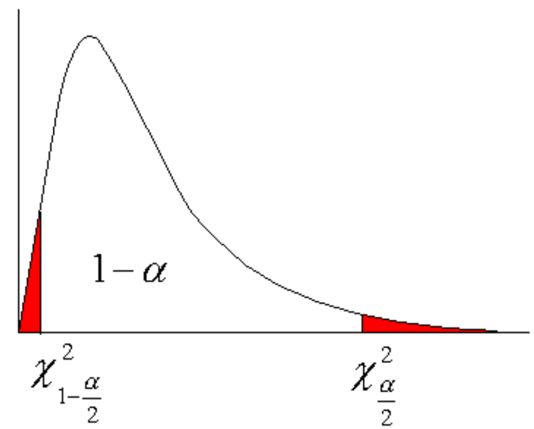
4 方差的差异检验

- 4.1 样本方差与总体方差的差异检验
- 4.2 两个样本方差差异检验

4.1 样本方差与总体方差的差异检验

样本方差和总体方差的比值服从自由度为

$n-1$的χ^2分布，即



$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$$

当$\chi^2>\chi^2_{\alpha/2}$或$\chi^2<\chi^2_{(1-\alpha/2)}$时$S^2$与$\sigma_0^2$差异显著，

当$\chi^2_{(1-\alpha/2)}<\chi^2<\chi^2_{\alpha/2}$时$S^2$与$\sigma_0^2$差异不显著

例

- **全区统考中，全体学生的总方差为18^2，而某校51名学生成绩的方差为12^2，问该校学生成绩的方差与全区方差有无显著差异？（取α＝0.05）**

解：$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$

$$\chi^2=\frac{(51-1)12^2}{18^2}=22.22$$

$$\chi^2_{0.025}(50)=71.4,\ \chi^2_{0.975}(50)=32.4$$

$\chi^2<\chi^2_{0.975}$，因此全市的方差和该校的方差有显著差异

4.2 两个样本方差的差异检验

4.2.1 独立样本

$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$成立时，$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$，

当$F_{(1-\alpha/2)}<F<F_{\alpha/2}$时，两方差差异不显著；

当$F>F_{\alpha/2}$或$F<F_{(1-\alpha/2)}$时，两方差差异显著。

由于$F_{(1-\alpha/2)}=\dfrac{1}{F_{\alpha/2}}$，所以，一般$F=\dfrac{S_{大}^2}{S_{小}^2}$，只要查

$F_{\alpha/2}$即可，如果$F>F_{\alpha/2}$，则差异显著；

如果$F<F_{\alpha/2}$差异不显著。

例

某次教改试验后，从施行两种不同教学方法的班级中随机各抽取10份和9份试卷，得到如下的成绩数据：

试验班：85,76,83,93,78,75,80,79,90,88

对比班：75,86,96,90,62,83,95,70,58

拟比较试验的效果，请先检验方差是否齐性，以便于选取恰当的检验方法(α=0.05)

解：

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1),$$

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{194.5}{37.8} = 5.15$$

$F > F_{\frac{0.05}{2}}(8,9) = 4.10$（双侧检验）

所以，两班成绩的方差差异显著

例

- **随机抽取男生41人，女生31人进行测验，男女的样本标准差分别是7和6。问男女生测验结果的方差是否有显著差异？（α=0.05)**

解：$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$,

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1),$$

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{49}{36} = 1.36 < F_{0.05/2}(40,30) = 2.01$$

所以，男女成绩的方差差异不显著

$$\sigma^2 = \frac{\sum (X - \mu)^2}{N}$$

$$S^2 = \frac{\sum \left(X - \overline{X}\right)^2}{N - 1} = \frac{\sum \left(X - \overline{X}\right)^2}{N} \times \frac{N}{N - 1}$$

两个样本方差的差异检验

4.2.2 相关样本

$$t=\frac{S_1^2-S_2^2}{\sqrt{\frac{4S_1^2S_2^2\left(1-r^2\right)}{n-2}}},$$

$df=n-2,$

r相关系数，

n 样本容量，

S_1^2，S_2^2为样本方差

- 方差
  - 样本-总体
  - 样本-样本

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$$

- 比例
  - 样本-总体
  - 样本-样本

$$Z = \frac{p - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

$$Z = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \qquad \hat{p} = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2}$$

- 相关系数
  - 样本-总体
    - ρ=0
    - ρ≠0

$$t = \frac{r}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}} \sim t(n-2)$$

$$Z = \frac{Z_r - Z_\rho}{\sqrt{\frac{1}{n-3}}}$$

  - 样本-样本

$$Z = \frac{Z_{r_1} - Z_{r_2}}{\sqrt{\frac{1}{n_1-3} + \frac{1}{n_2-3}}}$$