三角級数の一意性

fujidig

October 29, 2017

メニュー

- Cantor が証明した三角級数の一意性定理の紹介
  - 定理 1: 三角級数が全ての点で $0 \Rightarrow$ 係数は 0
  - 定理 2: 三角級数が有限個の点を除いた全ての点で $0 \Rightarrow$ 係数は 0
  - 定理 3: 三角級数がある可算閉集合の点を除いた全ての点で $0 \Rightarrow$ 係数は 0
    - 定理 3 を証明するために順序数と Cantor-Bendixson 解析を紹介する
- Cantor 以後の発展

三角級数

$$S \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

の形の無限級数を三角級数という

三角級数の書き換え

$$S \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

は

$$S \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

と書き換えられる

事実

f が 2π 周期の区分的に滑らかな関数なら

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx}.$$

と三角級数に展開できる

ここで

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$$

- 今後とくに断らないときは収束は各点収束とする

Fourier 級数

このように f に対して係数 $\hat{f}(n)$ を定めたときの三角級数

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{inx}$$

を f の Fourier 級数という

注

$$\left(\begin{array}{c}\text{Fourier 級数展開}\\ \text{可能な関数全体}\end{array}\right) \subsetneq \left(\begin{array}{c}\text{三角級数展開}\\ \text{可能な関数全体}\end{array}\right)$$

ex. $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{\log n}$

問題 (1869, Heine)

f が三角級数展開可能ならその展開は一意か？

i.e.

$$f(x) = \sum c_n e^{inx} = \sum d_n e^{inx} (\forall x \in \mathbb{R})$$

$\Rightarrow c_n = d_n (\forall n \in \mathbb{Z})$ **か？**

言い換え

$$\sum \boldsymbol{c_n e^{inx}} = \mathbf{0}(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R})$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{c_n} = \mathbf{0}(\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z})$$ **か？**

$\because$ **移項**

言い換え

答え: Yes (Cantor, 1870)

定理 (1)

$$\sum \boldsymbol{c_n e^{inx}} = \mathbf{0}(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R})$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{c_n} = \mathbf{0}(\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z})$$

注

各点収束以外仮定していないので，これは決して自明なことではない．なお，次のどちらかを仮定すれば自明

- L^2 関数 f の Fourier 級数である
- $\sum c_n e^{inx}$ が一様収束する

定理 1 の証明に必要な道具

- Riemann **の理論**
  - First Lemma
- Cantor-Lebesgue Lemma
- Schwarz's Lemma

Riemannの理論

$S \sim \sum c_n e^{inx}$ を勝手な三角級数で係数が有界なものとする

Riemann が考えたこと: S の形式的二階積分を考える

Riemannの理論

すなわち

$$F_S(x) = \frac{c_0 x^2}{2} - \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{n^2} c_n e^{inx}$$

とおく．
(ただし $\sum'$ は $n \neq 0$ を走る和)

観察

F_S は連続 (Weirstrass の優級数定理より)

Schwarz微分

関数 F **の** Schwarz **微分**:

$$\boldsymbol{D^2F(x) := \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - 2F(x) + F(x-h)}{h^2}}$$

Riemann's First Lemma

$S \sim \sum c_n e^{inx}$ を有界な係数を持つ三角級数とする．

$x \in \mathbb{R}$，$s = \sum c_n e^{inx}$ が存在するとする．

このとき $D^2 F_s(x) = s$

Cantor-Lebesgue Lemma

ある開区間上で

$$\sum c_n e^{inx} = 0$$

ならば， $c_n \to 0(|n| \to \infty)$

後に Lebesgue **は「ある開区間上で」を「ある** Lebesgue **測度正の集合上で」に弱められることを示した**

Schwarz's Lemma

$F : (a, b) \to \mathbb{C}$ が連続かつ
$D^2F(x) = 0 (\forall x)$ なら F は一次関数

定理1の証明

主張:

$$\sum c_n e^{inx} = 0 (\forall x \in \mathbb{R})$$
$$\Rightarrow c_n = 0 (\forall n \in \mathbb{Z})$$

$S \sim \sum c_n e^{inx}$ **とおく．** Cantor-Lebesgue Lemma **より** $c_n \to 0 (|n| \to \infty)$**．とくに** c_n **は有界**

定理1の証明

そこで Riemann's First Lemma より
$D_2 F_S(x) = 0 (\forall x \in \mathbb{R})$．よって
Schwarz's Lemma より F_S は一次関数．
すなわち

$$c_0 \frac{x^2}{2} - \sum{}' \frac{1}{n^2} c_n e^{inx} = ax + b.$$

定理1の証明

$$c_0 \frac{x^2}{2} - \sum{}' \frac{1}{n^2} c_n e^{inx} = ax + b \qquad (*)$$

(*)に $x = \pi, -\pi$ を代入すると $a = 0$.
また，(*)に $x = 0, 2\pi$ を代入すると
$c_0 = 0$.

定理1の証明

よって，

$$\sum{}' \frac{1}{n^2} c_n e^{inx} = b.$$

ゆえに $m \neq 0$ なら

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{2\pi} b e^{-imx} dx \\ &= \int_0^{2\pi} \Big(\sum{}' \frac{1}{n^2} c_n e^{inx}\Big) e^{-imx} dx \\ &= \sum{}' \frac{1}{n^2} c_n \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x} dx \\ &= 2\pi \frac{c_m}{m^2}. \quad \text{よって } c_m = 0 \quad \square \end{aligned}$$

定理2

定理 (2)

有限個を除いたすべての $x \in [0, 2\pi)$ で $\sum c_n e^{inx} = 0$ ならば $c_n = 0 (\forall n \in \mathbb{Z})$ である

証明略

一意性集合の定義

$\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} (\fallingdotseq [0, 2\pi))$ とおく．
$E \subset \mathbb{T}$ が一意性集合 (set of uniqueness) とは

$$\sum c_n e^{inx} = 0 (\forall x \in \mathbb{T} \setminus E) \\ \Rightarrow c_n = 0 (\forall n \in \mathbb{Z})$$

を満たすことと定める

これまでの定理の言い換え

定理 1 を言い換えると，$\varnothing$ は一意性集合
定理 2 を言い換えると，$E \subset \mathbb{T}$ が有限集合なら E は一意性集合

さらなる一般化

閉集合 E に対し，
$E' = \{x \mid x$ は E の集積点$\}$ と書き，E の導集合という

ただし x が E の集積点であるとは，任意の $\epsilon > 0$ に対してある $y \in E$ があって，$x \neq y$ かつ $d(x, y) < \epsilon$ を満たすこと

定理 2 の言い換え:

- **$E \subset \mathbb{T}$ が閉集合で $E' = \varnothing$ なら E は一意性集合**

さらなる一般化

Cantor は次のことに気がついた

- E が閉集合で $E'' = \varnothing$ なら E は一意性集合

もっと一般的に：

- E が閉集合であり，自然数 n が存在し $E^{(n)} = \varnothing$ なら E は一意性集合

ただし $E^{(0)} := E, E^{(n+1)} := (E^{(n)})'$

導集合の例

$$E = \{0\} \cup \{1/n \mid n = 1, 2, 3, \ldots\} \subset \mathbb{R}$$

なら導集合は

$$E' = \{0\}$$

であり，もう一度導集合をとると

$$E'' = \varnothing$$

さらなる一般化

一般に次のことが言えたら，「任意の可算閉集合が一意性集合」という定理が得られたことになる:

- E が可算閉集合ならば，自然数 n が存在し $E^{(n)} = \varnothing$

しかしこれは言えない！

さらなる一般化

しかし番号を自然数で終わらせるのではなく，導集合を取る操作をもっと続ければ可算閉集合 E に対してある“番号”α が存在して $E^{(\alpha)} = \varnothing$ となるのではないかと考えた

さらなる一般化

つまり，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}^{(0)} &:= \boldsymbol{E} \\
\boldsymbol{E}^{(n+1)} &:= (\boldsymbol{E}^{(n)})' \ (\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}) \\
\boldsymbol{E}^{(\omega)} &:= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \boldsymbol{E}^{(n)} \\
\boldsymbol{E}^{(\omega+n+1)} &:= (\boldsymbol{E}^{(\omega+n)})' \ (\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}) \\
\boldsymbol{E}^{(\omega 2)} &:= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \boldsymbol{E}^{(\omega+n)} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

さらなる一般化

同様に $E^{(\omega 2)}, E^{(\omega 3)}, E^{(\omega 4)}, \ldots$ を定義していき，

$$E^{(\omega^2)} = E^{(\omega\omega)} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E^{(\omega n)}$$

さらに $E^{(\omega^2)}, E^{(\omega^3)}, E^{(\omega^4)}, \ldots$ を定義していき，

$$E^{(\omega^\omega)} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E^{(\omega^n)}$$

と定義する．以下さらに続く

さらなる一般化

この考察が Cantor を順序数の発見へと導いた

準備：順序数

- **整列集合**

順序集合 $(X, \leq)$ は条件「任意の空でない部分集合が最小元を持つ」を満たすとき，整列集合という

準備：順序数

例

- 任意の有限全順序集合は整列集合である．n を固定したとき要素数 n の整列集合は互いに同型
- $\mathbb{N}$ は整列集合

準備：順序数

- 整列集合全体を順序同型という同値関係で割った同値類を順序数という
- 順序数に対して「次の順序数」，和，積，ベキ，大小関係が定まる

準備：順序数

- 順序数 α に対して

$$\mathrm{ON}(\alpha) = \{\beta : \text{順序数} \mid \beta < \alpha\}$$

  とおくと $\mathrm{ON}(\alpha)$ は整列集合
- 順序数 α は，$\mathrm{ON}(\alpha)$ が集合として可算のとき，可算順序数という

準備：順序数

- 任意の整列集合 X に対し順序数 α が一意に存在し，$X \simeq \mathrm{ON}(\alpha)$
- 順序数 α について，ある順序数 β があって $\alpha = \beta + 1$ と書けるとき，α を後続順序数といい，そうでないとき極限順序数という

準備：順序数 (超限帰納法)

順序数 α に関する条件 $P(\alpha)$ があるとする．以下を仮定する

- α が順序数で任意の $\beta < \alpha$ について $P(\beta)$ が成り立つなら $P(\alpha)$ が成り立つ

このとき任意の順序数 α について $P(\alpha)$ が成り立つ

Cantor-Bendixon 解析

$E \subset \mathbb{T}$ を閉集合とし，

$$E' = \{x \in E \mid x \text{ は } E \text{ の集積点}\}$$

と定める．
各順序数 α について $E^{(\alpha)}$ を帰納的に定める:

$$E^{(0)} = E$$

$$E^{(\alpha+1)} = (E^{(\alpha)})'$$

$$E^{(\lambda)} = \bigcap_{\alpha<\lambda} E^{(\alpha)}, \lambda : \text{極限順序数}$$

Cantor-Bendixon 解析

$E^{(\alpha)}$ は閉集合の減少列になっている

補題

$\mathbb{T}$ の閉集合の減少列 F_α(α : 順序数) があったら，ある可算順序数 α_0 があって $F_{\alpha_0} = F_{\alpha_0+1}$

証明は $\mathbb{T}$ の第二可算性より

Cantor-Bendixon 解析

補題より，$E \subset \mathbb{T}$ に対して，$E^{(\alpha_0)} = E^{(\alpha_0+1)}$，したがって $E^{(\alpha_0)} = E^{(\beta)} (\forall\beta \geq \alpha_0)$ となる最小の可算順序数 α_0 が存在する．
それを E の Cantor-Bendixon 階数という．
$E^{(\alpha_0)} = E^{(\infty)}$ と書き，E の完全核という

Cantor-Bendixon の定理

E を閉集合とする．すると $E \setminus E^{(\infty)}$ は可算である．
とくに，

$$E\text{が可算} \iff E^{(\infty)} = \emptyset$$

Cantor-Bendixon の定理の証明

一回の操作で取り除かれる点の個数は可算 (証明略) であり，可算集合の可算和が可算であることより，$E \setminus E^{(\infty)}$ は可算．

定理の主張の後半は，空でない孤立点のない閉集合は必ず非可算であること (証明略) より $\square$

定理3

- **可算閉集合は一意性集合**

証明の方針だけ示す．
E を可算閉集合，$S \sim \sum c_n e^{inx}$ が E 以外の点で 0 に収束するとする．
閉集合 F に対し，F の補集合を構成する開区間を F の隣接開区間と呼ぶ．

定理3

α に関する超限帰納法により，$E^{(\alpha)}$ の各隣接開区間で F_S が一次関数であることを示す．

$E^{\alpha_0} = \varnothing$ となる α_0 があり，$\varnothing$ の隣接開区間は $(0, 2\pi)$ なので定理 1 の証明と同様に証明が終わる $\square$

定理3

したがって次の定理が得られた

- 可算閉集合は一意性集合

すなわち $E \subset \mathbb{T}$ が可算閉集合のとき

$$\sum c_n e^{inx} = 0 (\forall x \in \mathbb{T} \setminus E)$$
$$\Rightarrow c_n = 0 (\forall n \in \mathbb{Z})$$

Cantor 以後の発展

- Bernstein (1908) と W.H.Young (1909) は任意の可算集合は一意性集合であることを示した
- 一意性集合は Lebesgue 可測なら Lebesgue 測度 0 だと分かった
- つまり，

$$
\begin{aligned}
&(\text{可算集合全体}) \\
&\quad \subset (\text{可測な一意性集合全体}) \\
&\quad \subset (\text{Lebesgue 測度 } 0 \text{ の集合全体})
\end{aligned}
$$

Cantor 以後の発展

- **さらにこの包含関係は** proper **なことも分かった．つまり，**

$$
\begin{aligned}
&(\textbf{可算集合全体}) \\
&\subsetneq (\textbf{可測な一意性集合全体}) \\
&\subsetneq (\text{Lebesgue }\textbf{測度}\, 0\, \textbf{の集合全体})
\end{aligned}
$$

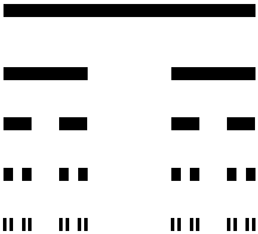
Cantor 以後の発展

- **一意性集合であって非可算な集合として** Cantor **集合がある．これを示したのは** Rajchman **である** (1921-23)
- Lebesgue **測度** 0 **であって一意性集合でない集合の存在を示したのは** Menshov **である** (1916)
- **さらにこれに関して次の驚くべき事実が証明された**

Cantor集合の一般化

Cantor集合は閉区間から初めて左右の比率 1/3 以外を取り除くことを繰り返して残る集合

比率を $1/3$ ではなく $\xi(0 < \xi < 1/2)$ にしたものを E_ξ と書く



Salem-Zygmundの定理

E_ξが一意性集合であるξの条件は？

素朴な予想: ξが小さいほど，E_ξは細い集合になっているので，実数cにより

$$\{\xi \in (0, \frac{1}{2}) \mid E_\xi \text{は一意性集合}\} = (0, c)$$

みたいな形になってそう？

Salem-Zygmundの定理

実は次が成り立つ (Salem-Zygmund, 1950)

$\mathbf{0 < \xi < 1/2}$ **に対し，**

$$E_\xi \text{ が一意性集合} \iff 1/\xi \text{ が Pisot 数}$$

Salem-Zygmundの定理

実数θがPisot数であるとは次を満たすこと

- $\theta > 1$
- **θは代数的整数**
- **θの共役はθ以外すべて絶対値1未満**

Salem-Zygmundの定理

ここにθが代数的整数とはある既約で最高次係数1の整数係数多項式

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

があって$f(\theta) = 0$となること.
θの共役とはこのfの根のこと

Salem-Zygmundの定理

- 正の整数 $n \geq 2$ に対して $E_{1/n}$ はすべて一意性集合
- 有理数 p/q は整数でないとき $E_{q/p}$ は一意性集合でない．
  例: $E_{2/5}$ は一意性集合でない
- $E_{2/(1+\sqrt{5})}$ は一意性集合
- 円周率 π は超越数なので $E_{1/\pi}$ は一意性集合でない

まとめ

- 三角級数の一意性について，例外として認められる点の集合を一意性集合といった
- 一意性集合の十分条件として空集合，有限集合，可算閉集合があることを順に挙げて証明した

まとめ

- とくに可算閉集合についての証明では順序数を導入し Cantor-Bendixon の定理を述べた
- 最後に Cantor 集合の一般化が一意性集合となる必要十分条件を述べる驚くべき定理を紹介した

参考文献

- Alexander S. Kechris “Set Theory and Uniqueness for Trigonometric Series”
- Alexander S. Kechris and Alain Louveau “Descriptive set theory and the structure of sets of uniqueness” Cambridge University Press, 1987

おまけ: Salem-Zygmund の定理の必要性の証明の概略

ここから Salem-Zygmund の定理の必要性，すなわち次の主張の証明の概略を述べよう

- $\theta = 1/\xi$ が Pisot 数でないならば E_ξ は一意性集合でない

Pisot数の性質

Pisot 数 θ は次の性質を持つ:

$$\lim_{n\to\infty}\{\theta^n\} = 0$$

ここに $\{x\}$ は実数 x の小数部分.

これは θ^n のトレース

$$(\theta^{(0)})^n + (\theta^{(1)})^n + \cdots + (\theta^{(k-1)})^n$$

が整数であり，また $(\theta^{(0)})^n$ 以外の項が全部 0 へ行くからである

Pisot数の性質

これを強めた次のことが成り立つ

θ : Pisot **数**, γ : $\mathbb{Q}(\theta)$ **上の整数**

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \{\gamma\theta^n\} < \infty$$

Pisot数の性質

また，逆に次が成り立つ

$$\gamma, \theta \in \mathbb{R}, \gamma \neq 0, \theta > 1 \text{かつ}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{\gamma\theta^n\}^2 < \infty$$

$$\Rightarrow \theta : \text{Pisot数}, \gamma \in \mathbb{Q}(\theta) \qquad (*)$$

$(*)$が証明の鍵になる！

必要性の証明

E が一意性集合でないことを示すためには

$$
\begin{aligned}
&\exists \{c_n\} \subset \mathbb{C}, \\
&[[\forall x \in \mathbb{T} \setminus E, \sum c_n e^{inx} = 0] \\
&\ \wedge [\exists n \in \mathbb{Z}, c_n \neq 0]]
\end{aligned}
$$

を示さなければならない

このような $\{c_n\}$ をどう構成するか？

必要性の証明

実は次が知られている

$E \subset \mathbb{T}, E \neq \mathbb{T}$ を閉集合で，μ を $\mathbb{T}$ 上の確率測度で $\mu(E) = 1$ とする．このとき次は同値

1. $\hat{\mu}(n) \to 0$
2. $\sum \hat{\mu}(n) e^{inx} = 0 \ (\forall x \in \mathbb{T} \setminus E)$

ここで $\hat{\mu}(n) := \int e^{-int} d\mu(t)$

必要性の証明

よって $\mu(E_\xi) = 1, \hat{\mu}(n) \to 0$ を満たす確率測度 μ を見つければよい．

$2^{\mathbb{N}}$ 上のコイントス測度 σ をとり，

$F : 2^{\mathbb{N}} \to E_\xi$ を自然に定まる同相写像としたとき

$$\mu(A) = \sigma(F^{-1}(A \cap E_\xi))$$

と定める．

このとき $\hat{\mu}(n) \to 0$ になることが $(*)$ より確かめられる

おわり

おわり