ウルトラフィルターの空間

筑波大学理工学群数学類 4 年 後藤達哉

2019 年 5 月 28 日

概要

集合 X 上のウルトラフィルターの全体に位相を入れ，それが離散空間 X の Stone-Čech コンパクト化になっていることを見る．その応用として ω 上のウルトラフィルターの個数を決定する．

1　ウルトラフィルターの空間

定義 1. 集合 X 上の**フィルター** $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ とは次の条件を満たすもののことである:

1. $\varnothing \notin \mathcal{F}, X \in \mathcal{F}$,
2. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$,
3. $A \subseteq B \wedge A \in \mathcal{F} \Rightarrow B \in \mathcal{F}$.

定義 2. 集合 X 上のフィルター $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ が**ウルトラフィルター**とは次の同値な条件のどれか (よってすべて) を満たすことである:

1. $\mathcal{F}$ は X 上のフィルター全体の中で包含関係で極大である,
2. $A \subseteq X \Rightarrow A \in \mathcal{F} \vee A^{\mathrm{c}} \in \mathcal{F}$,
3. $A, B \subseteq X \wedge A \cup B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \in \mathcal{F} \vee B \in \mathcal{F}$.

事実 3. 集合 X 上の有限交差性を満たす集合族はウルトラフィルターに拡大できる．

定義 4. 集合 X に対して，X 上のウルトラフィルターの全体の集合を βX と書く．

定義 5. 元 $x \in X$ に対して $p_x = \{A \subseteq X \mid x \in A\}$ とおく．これは X 上のウルトラフィルターであり，よって βX の元である．これを x によって定まる**単項フィルター**という．

定義 6. $A \subseteq X$ に対して $[A] = \{p \in \beta X \mid A \in p\}$ とおく．

補題 7.
1. $[\varnothing] = \varnothing, [X] = \beta X$,
2. $A, B \subseteq X$ に対して
   (a) $[A] \subseteq [B] \iff A \subseteq B$,
   (b) $[A] = [B] \iff A = B$,
   (c) $[A] \cup [B] = [A \cup B]$,
   (d) $[A] \cap [B] = [A \cap B]$,
   (e) $[A^{\mathrm{c}}] = [A]^{\mathrm{c}}$.

証明. ほとんどフィルターの性質とウルトラフィルターの性質より出る.

(a) の $\Rightarrow$ は次のように示せる: $x \in A$ とすると, $p_x \in [A]$ であるが, 仮定より $p_x \in [B]$. よって, $x \in B$. $\square$

定義 8. 補題 7 より，$\mathcal{B} = \{[A] \mid A \subseteq X\}$ は開基の条件を満たす．そこで βX に $\mathcal{B}$ を開基とする位相を入れる．$[A]^{\mathrm{c}} = [A^{\mathrm{c}}]$ なので $[A]$ は clopen となる．よって，βX は 0 次元空間である．

命題 9. βX はコンパクトである．

証明. βX の開被覆で有限部分被覆を持たないものがあるとする．開被覆は開基のメンバーで構成されているとしてよく，よってこの開被覆を $\{[A_\alpha] \mid \alpha \in I\}$ とする．$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in I$ を有限個の添え字としたとき，

$$[A_{\alpha_1}] \cup \cdots \cup [A_{\alpha_n}] \neq \beta X$$

よって

$$[A_{\alpha_1} \cup \cdots \cup A_{\alpha_n}] \neq [X]$$

なので，

$$A_{\alpha_1} \cup \cdots \cup A_{\alpha_n} \neq X$$

である．つまり

$$A^{\mathrm{c}}_{\alpha_1} \cap \cdots \cap A^{\mathrm{c}}_{\alpha_n} \neq \varnothing.$$

これは $\{A^{\mathrm{c}}_\alpha \mid \alpha \in I\}$ が有限交叉性を持つことを意味する．したがってこれはウルトラフィルター $p \in \beta X$ に拡大できる．$\alpha \in I$ であって，$p \in [A_\alpha]$ であるものをとると，$A_\alpha \in p$ かつ $A^{\mathrm{c}}_\alpha \in p$．これは矛盾． $\square$

命題 10. βX はハウスドルフである．

証明. $p, q \in \beta X, p \neq q$ とする．$p \setminus q \neq \varnothing$ としてよい．$A \in p \setminus q$ をとる．このとき $A \in p$ かつ $A^{\mathrm{c}} \in q$．したがって，$p \in [A], q \in [A^{\mathrm{c}}]$．$[A]$ と $[A^{\mathrm{c}}]$ は disjoint な開集合である． $\square$

補題 11. 任意の $x \in X$ に対して p_x は βX の孤立点．だが $\{p_x \mid x \in X\}$ は βX の中で稠密．

証明. 前半) $x \in X$ とする．$p \in \beta X$ に対し，

$$\begin{aligned} p \in [\{x\}] &\iff \{x\} \in p \\ &\iff p = p_x \end{aligned}$$

なので $\{p_x\} = [\{x\}]$ であり，これは開集合である．

後半) βX の非空基本開集合をとり $[A]$ とする．$A \neq \varnothing$ である．$x \in A$ をとる．すると $A \in p_x$，ゆえに $p_x \in [A]$．したがって，$[A] \cap \{p_x \mid x \in X\} \neq \varnothing$． $\square$

$X \ni x \mapsto p_x \in \beta X$ は単射なので，各単項イデアル p_x を x と同一視できる．この同一視で $X \subseteq \beta X$ と思うと X に βX から誘導される位相は離散位相である．

定理 12. K をコンパクトハウスドルフ空間とする．任意の写像 $f : X \to K$ は一意的に連続写像 $\bar{f} : \beta X \to K$ に延長できる．

一般に位相空間 X に対して次を満たす空間 $\hat{X}$ を X の **Stone-Čech** のコンパクト化という:

1. X は $\hat{X}$ に稠密に埋め込まれている，

2. $\hat{X}$ はコンパクトハウスドルフ空間である，
3. 任意のコンパクトハウスドルフ空間 K と連続写像 $f: X \to K$ について、f は連続写像 $\bar{f}: \hat{X} \to K$ に延長できる．

定理 12 よりウルトラフィルターの全体の空間は離散空間の Stone-Čech コンパクト化である．

2　フィルターの収束性

定理 12 を証明するために，位相空間上のフィルターの収束について準備が必要である．

定義 13. 集合 X 上のフィルター $\mathcal{F}$ と写像 $f: X \to Y$ について $\mathcal{F}$ の f による**像フィルター** $f[\mathcal{F}]$ とは

$$f[\mathcal{F}] = \{B \subseteq Y \mid B \supseteq f(A) \text{ for some } A \in \mathcal{F}\}$$

のことである．像フィルター $f[\mathcal{F}]$ は Y 上のフィルターである．ウルトラフィルターの像フィルターは必ずウルトラフィルターである．

定義 14. 位相空間 X の点 $x \in X$ に対してその**近傍系** $\mathcal{N}(x)$ とは x の近傍の全体，すなわち

$$\mathcal{N}(x) = \{A \subseteq X \mid x \in A^\circ\}$$

のことである．各点 x に対して近傍系 $\mathcal{N}(x)$ は X のフィルターである．

定義 15. 位相空間 X 上のフィルター $\mathcal{F}$ が点 x に**収束する**とは

$$\mathcal{F} \supseteq \mathcal{N}(x)$$

を満たすことであると定める．このとき x を $\mathcal{F}$ の**極限点**といい，$\mathcal{F} \to x$ と書く．

なお、単項フィルター p_x は明らかに x に収束することに注意する。

注意 16. 位相空間のフィルターは点列の概念の一般化である．実際，次のように点列 $(x_n \mid n \in \omega)$ からフィルターを作る:

$f: \omega \to X; n \mapsto x_n$ と f を定め，ω 上のフレシェフィルター $\mathcal{F} = \{A \subseteq \omega \mid A \text{ は補有限集合 }\}$ の f による像フィルター $f[\mathcal{F}]$ を考える．このとき

$$\begin{aligned} f[\mathcal{F}] &= \{B \subseteq X \mid \exists A \subseteq \omega, A\text{: cofinite} \land f(A) \subseteq B\} \\ &= \{B \subseteq X \mid \exists n \in \omega, f(\{n, n+1, n+2, \dots\}) \subseteq B\} \\ &= \{B \subseteq X \mid \exists n \in \omega, \forall m \geq n, x_m \in B\} \end{aligned}$$

なので，

$$f[\mathcal{F}] \to a \iff \forall U \subseteq \mathcal{N}(a), \exists n \in \omega, \forall m \geq n, x_m \in U$$

となり，これは点列 $(x_n \mid n \in \omega)$ が a に収束することと全く同等である．

またフィルターが点列の類似概念であることを裏付ける次のような事実も成立する:

- 点 a が集合 $A \subseteq X$ の閉包に属する $\iff$ フィルター$\mathcal{F}$ があり，$\mathcal{F}$ の元はすべて A と交わり，$\mathcal{F} \to a$

- 位相空間の間の写像 $f : X \to Y$ が点 $a \in X$ で連続 $\iff$ X の a に収束する任意のフィルター $\mathcal{F}$ について像フィルター $f[\mathcal{F}]$ は $f(a)$ に収束する

命題 17. 位相空間 X 上のフィルター $\mathcal{F}$ が x に収束するならば，任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して，

$$x \in \overline{A}.$$

証明. x の近傍 U を任意にとると，$U \in \mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{F}$. よって，$\mathcal{F}$ のフィルター性より，$U \cap A \neq \varnothing$. ゆえに $x \in \overline{A}$. □

命題 17 の逆は $\mathcal{F}$ が極大であれば成り立つ:

命題 18. 位相空間 X 上のウルトラフィルター $\mathcal{F}$ と点 $x \in X$ について，

$$x \in \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{A}$$

であれば $\mathcal{F} \to x$.

証明. $U \in \mathcal{N}(x)$ とする．$U \in \mathcal{F}$ を示せばよい．$U \notin \mathcal{F}$ とするとウルトラ性より $U^{\mathrm{c}} \in \mathcal{F}$ である．このとき仮定より，$x \in \overline{U^{\mathrm{c}}} = (U^\circ)^{\mathrm{c}}$ である．一方で U が x の近傍なので $x \in U^\circ$ である．矛盾した． □

命題 19. 位相空間 X において次は同値:

1. X はハウスドルフ，
2. X 上の任意のフィルターについて，その極限点はたかだか一つ．

証明. 1 $\Rightarrow$ 2) X 上のフィルター $\mathcal{F}$ について $\mathcal{F} \to a$ かつ $\mathcal{F} \to b$ とする．$a \neq b$ とすればハウスドルフ性より，

$$\exists U \in \mathcal{N}(x), \exists V \in \mathcal{N}(y), U \cap V = \varnothing.$$

このとき $U, V \in \mathcal{F}$ なのに $U \cap V = \varnothing \notin \mathcal{F}$ となってフィルターの条件に反する．よって $a = b$.

2 $\Rightarrow$ 1) ハウスドルフでないとすると，異なる 2 点 $a, b \in X$ がとれて，

$$\forall U \in \mathcal{N}(a), \forall V \in \mathcal{N}(b), U \cap V \neq \varnothing.$$

このとき $\mathcal{F}$ を次で定義する:

$$\mathcal{F} = \{U \cap V \mid U \in \mathcal{N}(a), V \in \mathcal{N}(b)\}.$$

すると $\mathcal{F}$ はフィルターとなり，$\mathcal{F} \supseteq \mathcal{N}(a), \mathcal{F} \supseteq \mathcal{N}(b)$ である．よって $\mathcal{F}$ は異なる 2 点 a, b に収束する． □

命題 20. 位相空間 X において次は同値:

1. X はコンパクト，
2. X 上の任意のウルトラフィルターについて，その極限点は少なくとも一つある．

証明. 1 $\Rightarrow$ 2) $\mathcal{F}$ を X 上のウルトラフィルターとする．このときコンパクト性より $a \in \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{A}$ が存在する．すると命題 18 より $\mathcal{F} \to a$ である．

2 $\Rightarrow$ 1) $\mathcal{F}$ を有限交叉性を持つ閉集合族とする．$\bigcap \mathcal{F} \neq \varnothing$ を示せばよい．$\mathcal{F}$ はウルトラフィルター$\mathcal{F}'$ に拡大できる．すると 2 を仮定していることから，ある点 $a \in X$ があって，

$$\mathcal{F}' \to a.$$

すなわち

$$\mathcal{N}(a) \subseteq \mathcal{F}'.$$

$\mathcal{F}'$ がフィルターなことから，$\mathcal{F}$ の任意の元 A について

$$V \in \mathcal{N}(a) \Rightarrow V \cap A \neq \varnothing.$$

すなわち

$$a \in \overline{A} = A.$$

よって A を動かして，

$$a \in \bigcap \mathcal{F}.$$

□

3　定理 12 の証明

定理. K をコンパクトハウスドルフ空間とする．任意の写像 $f : X \to K$ は一意的に連続写像 $\bar{f} : \beta X \to K$ に延長できる．

証明. 一意性は βX のハウスドルフ性と $X \subseteq \beta X$ の稠密性よりわかる．そこで存在を示す．

$p \in \beta X$ とする．ウルトラフィルターp の f による像フィルター $f[p]$ は K 上のウルトラフィルターである．K がコンパクトハウスドルフなので $f[p]$ は一意な点 $\lim f[p]$ に収束する．そこで次の定義をする:

$$\begin{aligned} \bar{f} : \beta X &\to K \\ p &\mapsto \lim f[p] \end{aligned}$$

<u>Claim:</u> $\bar{f}$ は f の延長である．すなわち $\bar{f}(p_x) = f(x)$

$\because$) 単項フィルターの像フィルターは明らかに単項フィルターなので $f[p_x] = p_{f(x)}$ は $f(x)$ に収束する．よって $\lim f[p_x] = f(x)$. //

<u>Claim:</u> $\bar{f}$ は連続である

$\because$) $p \in \beta X$ とする．V を $\bar{f}(p)$ in K の近傍とする．K はコンパクトハウスドルフなので特に正則空間．よって $\bar{f}(p)$ の近傍 W で $\overline{W} \subseteq V$ となるものをとれる．W は $\lim f[p]$ の近傍なので，収束の定義より $W \in f[p]$. よって像フィルターの定義より，$A \in p$ があって，$f(A) \subseteq W$. 集合 $[A]$ は p の近傍であり，$q \in [A]$ について $A \in q$ より $f(A) \in f[q]$. よって，

$$\bar{f}(q) = \lim f[q] \in \overline{f(A)} \subseteq \overline{W} \subseteq V.$$

以上より点 p において $\bar{f}$ は連続である． //

□

4　$\beta\omega$ の濃度の決定

定理 12 より ω 上のウルトラフィルターの個数が分かる．ただし，次の事実を使う．

事実 21. $X_i(i \in I)$ を可分な位相空間とし，$|I| \leq \mathfrak{c}$ とする．このとき直積空間 $\prod_{i \in I} X_i$ も可分である．ここに $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$.

定理 22. $|\beta\omega| = 2^{\mathfrak{c}}$.

証明．事実 21 より，$2^{\mathfrak{c}}$ (離散空間 $2 = \{0, 1\}$ のコピーの $\mathfrak{c}$ 個直積) は可分である．そこでその可算稠密集合をとり，$D = \{d_i \mid i \in \omega\}$ とおく．

$f : \omega \to 2^{\mathfrak{c}}$ を $f(i) = d_i$ で定める．$2^{\mathfrak{c}}$ はコンパクトハウスドルフでもあるので，定理 12 より f は連続写像 $\bar{f} : \beta\omega \to 2^{\mathfrak{c}}$ に延長される．$\bar{f}$ の像はコンパクト空間の像なので閉集合であり，その一方で稠密集合 D を含んでいる．よって，$\bar{f}$ の像は全体 $2^{\mathfrak{c}}$ である．つまり $\bar{f}$ は全射であり，$|\beta\omega| \geq 2^{\mathfrak{c}}$ が分かる．

一方で，$\beta\omega \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega))$ であるので $|\beta\omega| \leq 2^{\mathfrak{c}}$ である．以上より $|\beta\omega| = 2^{\mathfrak{c}}$. □

参考文献

[1] Boaz Tsaban “Numbers and Colors – Chapter 3: The Stone–Čech compactification” `http://u.cs.biu.ac.il/~tsaban/RT/Book/Chapter3.pdf`.

[2] 柴田敏男 (1972) 『集合と位相空間』 共立出版.

[3] ω 上のウルトラフィルター全体の濃度 - Togetter `https://togetter.com/li/1275529`.

ウルトラフィルターの全体によって Stone-Čech コンパクト化を構成する話は [1] を参考にした．位相空間の上のフィルターの収束は [2] を参照した．最後の $\beta\omega$ の濃度を決定する議論は [3] の特に iClaymore 氏のツイートによるものである．