メリン変換を用いたある関数の漸近挙動の証明

でぃぐ (@fujidig)

2019 年 9 月 4 日

本稿では次の結果を証明する．

定理.

$$A(y)=\sum_{k\geqslant 1}\left(-1+\exp\sum_{j\geqslant k}\frac{y^j}{j}\right)$$

とおく．このとき

$$A(e^{-x})=\sum_{k\geqslant 1}\left(-1+\exp\sum_{j\geqslant k}\frac{e^{-jx}}{j}\right)$$

は $x>0$ で $x\to 0$ と近づけたとき

$$A(e^{-x})\sim e^{-\gamma}\frac{1}{x}\log\frac{1}{x}$$

となる．

Step 0

本稿で主に使う道具はメリン変換である．関数 $f(x)$ のメリン変換は次で定義される:

$$M[f(x)](s)=\int_0^\infty x^{s-1}f(x)dx.$$

Step 1

まず，内側の和を積分で近似することにより

$$A(e^{-x})\sim\sum_{k\geqslant 1}\left(-1+\exp\int_{kx}^\infty\frac{e^{-u}}{u}du\right)$$

を得る [要チェック]．この右辺を $\tilde{A}(x)$ と書く．以降 $\tilde{A}(x)$ の漸近挙動を調べる．

ここで $E_1(x)=\int_x^\infty\frac{e^{-u}}{u}du$ とおくと，

$$\tilde{A}(x)=\sum_{k\geqslant 1}\left(-1+\exp E_1(x)\right).$$

次の公式は今後しばしば使う．

公式.

$$E_1(x) = -\gamma - \log x + \mathrm{Ein}(x) \tag{1}$$

ただし，$\mathrm{Ein}(x) = \int_0^x \frac{1-e^{-u}}{u} du$.

Step 2

今，$\Re(s) > 1$ としておく．
次のメリン変換の公式を使う:

公式.

$$M\left[\sum_{k\geqslant 1} f(kx)\right](s) = \zeta(s) M[f](s).$$

すると

$$M[\tilde{A}](s) = \zeta(s) M\left[-1 + \exp E_1(x)\right](s)$$

となる．
この公式では積分と総和の交換をしている．それを正当化する．まず公式の証明を今の場合に限定して見る．

$$\begin{aligned}
M\left[\sum_{k\geqslant 1}(-1+\exp E_1(kx))\right] &= \int_0^\infty x^{s-1}\left(\sum_{k\geqslant 1}(-1+\exp E_1(kx))\right)dx \\
&= \sum_{k\geqslant 1}\int_0^\infty x^{s-1}(-1+\exp E_1(kx)dx) \qquad (*) \\
&= \sum_{k\geqslant 1}\int_0^\infty \left(\frac{y}{k}\right)^{s-1}(-1+\exp E_1(y))\frac{dy}{k} \\
&= \left(\sum_{k\geqslant 1} k^{-s}\right)\left(\int_0^\infty y^{s-1}(-1+\exp E_1(y))\,dy\right) \\
&= \zeta(s)\int_0^\infty y^{s-1}(-1+\exp E_1(y))\,dy
\end{aligned}$$

$(*)$ が積分と総和の交換をした部分である．この部分を正当化するには,

$$\sum_{k\geqslant 1}\int_0^\infty \left|x^{s-1}(-1+\exp E_1(kx))\right|dx$$

が有限になればよい．

まず上と同じ変形をすることにより

$$\sum_{k\geqslant 1}\int_0^\infty \left|x^{s-1}\left(-1+\exp E_1(kx)\right)\right| dx = \zeta(s)\int_0^\infty |y^{s-1}|\left(-1+\exp E_1(y)\right) dy$$
$$= \zeta(s)\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\int_0^\infty y^{\Re(s)-1}\left(E_1(y)\right)^n dy.$$

ここで $0 < y < 1$ なら

$$E_1(y) = -\gamma - \log x + \mathrm{Ein}(y) \leqslant 1 - \gamma - \log y = -\log\frac{y}{e^{1-\gamma}}$$

である．$c = 1/e^{1-\gamma}$ とおく．すると 0 から 1 までの積分は

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\int_0^1 y^{\Re(s)-1}(E_1(y))^n dy &= \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\int_0^1 y^{\Re(s)-1}(-\log cy)^n dy \\
&= \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\int_0^\infty \left(\frac{e^{-z}}{c}\right)^{\Re(s)-1} z^n \frac{e^{-z}dz}{c} \\
&= \frac{1}{c^{\Re(s)}}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-\Re(s)z} z^n dz \\
&= \frac{1}{c^{\Re(s)}}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-w}\left(\frac{w}{\Re(s)}\right)^n \frac{dw}{\Re(s)} \\
&= \frac{1}{c^{\Re(s)}}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\frac{1}{\Re(s)^{n+1}}\int_0^\infty e^{-w} w^n dw \\
&= \frac{1}{c^{\Re(s)}}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\frac{1}{\Re(s)^{n+1}}\Gamma(n+1) \\
&= \frac{1}{c^{\Re(s)}}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\Re(s)^{n+1}} \\
&= \frac{1}{c^{\Re(s)}}\frac{1}{\Re(s)^2(1-1/\Re(s))}
\end{aligned}$$

次に $y > 1$ なら

$$E_1(y) = \int_y^\infty \frac{e^{-u}}{u} du \leqslant \int_y^\infty e^{-u} du = e^{-y}$$

だから，1 から ∞ までの積分は，

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\int_1^\infty y^{\Re(s)-1}(E_1(y))^n dy &\leqslant \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\int_1^\infty y^{\Re(s)-1}e^{-ny}dy \\ &= \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\int_n^\infty \left(\frac{z}{n}\right)^{\Re(s)-1} e^{-z}\frac{dz}{n} \\ &= \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\frac{1}{n^{\Re(s)}}\int_n^\infty z^{\Re(s)-1}e^{-z}dz \\ &= \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\frac{1}{n^{\Re(s)}}\int_n^\infty z^{\Re(s)-1}e^{-z}dz \\ &\leqslant \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\frac{1}{n^{\Re(s)}}\Gamma(\Re(s)) \\ &\leqslant \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\Gamma(\Re(s)) \\ &= e\Gamma(\Re(s))\end{aligned}$$

よって，

$$\sum_{k\geqslant 1}\int_0^\infty \left|x^{s-1}\left(-1+\exp E_1(kx)\right)\right| dx \leqslant \zeta(s)\left(\frac{1}{c^{\Re(s)}}\frac{1}{\Re(s)^2(1-1/\Re(s))}+e\Gamma(\Re(s))\right).$$

ゆえに積分と総和の交換は正当化された．

Step 3

メリン変換の定義に戻り，部分積分を行う．引き続き，$\Re(s)>1$ としておく．すると

$$\begin{aligned}M\left[-1+\exp E_1(x)\right](s) &= \int_0^\infty x^{s-1}\left(-1+\exp\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}du\right)dx \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{x^s}{s}\right)'\left(-1+\exp\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}du\right)dx \\ &= -\int_0^\infty \frac{x^s}{s}\left(\exp\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}du\right)\left(-\frac{e^{-x}}{x}\right)dx \\ &= \frac{1}{s}\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\left(\exp\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}du\right)dx \\ &= \frac{1}{s}\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\exp E_1(x)dx \end{aligned} \tag{2}$$

を得る．ここで部分積分の境界項は消えることに注意する．

実際,

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x^s(-1+\exp\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}du) &= \lim_{x\to\infty} \frac{-1+\exp\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}du}{x^{-s}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(\exp\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}du)(-\frac{e^{-x}}{x})}{-sx^{-s-1}} && \text{(ロピタル)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{s} e^{-x} x^s \exp\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}du \\
&= \frac{e^{-\gamma}}{s} \lim_{x\to\infty} e^{-x}x^{s-1}\exp\mathrm{Ein}(x)
\end{aligned}
$$

であり,

$$
\begin{aligned}
|e^{-x}x^{s-1}\exp\mathrm{Ein}(x)| &\leqslant e^{-x}x^{\Re(s)-1}ex \\
&= ee^{-x}x^{\Re(s)} \\
&\to 0 \quad (x\to\infty)
\end{aligned}
$$

なので $x=\infty$ の境界項は消える.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+0} x^s(-1+\exp\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}du) &= \lim_{x\to+0} x^s \exp\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}du \\
&= e^{-\gamma}\lim_{x\to+0} x^{s-1}\exp\mathrm{Ein}(x) \\
&= e^{-\gamma}(\lim_{x\to+0} x^{s-1})(\lim_{x\to+0}\exp\mathrm{Ein}(x)) \\
&= e^{-\gamma}\cdot 0\cdot 1 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

なので $x=0$ の境界項も消える.

Step 4

式 (1) を Step 3 の式 (2) に代入し,

$$
\begin{aligned}
M\left[-1+\exp\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}du\right](s) &= \frac{1}{s}\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\exp\left(-\gamma-\log x+\mathrm{Ein}(x)\right)dx \\
&= \frac{e^{-\gamma}}{s}\int_0^\infty x^{s-2}e^{-x}\exp\mathrm{Ein}(x)dx
\end{aligned}
$$

を得る.

Step 5

Step 4 で得た結果を Step 2 の式に代入する．すると，

$$
\begin{aligned}
M[\tilde{A}](s) &= \frac{e^{-\gamma}}{s}\zeta(s)\int_0^\infty x^{s-2}e^{-x}\exp \mathrm{Ein}(x)dx \\
&= \frac{e^{-\gamma}}{s}\zeta(s)\left(\int_0^\infty x^{s-2}e^{-x}dx + \int_0^\infty x^{s-2}e^{-x}(-1+\exp \mathrm{Ein}(x))dx\right) \\
&= \frac{e^{-\gamma}}{s}\zeta(s)(\Gamma(s-1)+g(s))
\end{aligned}
$$

を得る．ここに

$$
g(s) = \int_0^\infty x^{s-2}e^{-x}(-1+\exp \mathrm{Ein}(x))dx.
$$

Step 6

この step ではガンマ関数の微分の積分表示とその上からの評価を示す．$\Re(s) > 0$ とする．

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 |x^{s-1}e^{-x}(\log x)^n|dx &\leqslant \int_0^1 x^{\Re(s)-1}e^{-x}(-\log x)^n dx \\
&\leqslant \int_0^1 x^{\Re(s)-1}(-\log x)^n dx \\
&= \int_0^\infty e^{\Re(s)y}y^n dy \qquad (y = -\log x) \\
&= \frac{1}{\Re(s)^{n+1}}\int_0^\infty e^z z^n dz \\
&= \frac{n!}{\Re(s)^{n+1}}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_1^\infty |x^{s-1}e^{-x}(\log x)^n|dx &\leqslant \int_1^\infty x^{\Re(s)-1}e^{-x}(\log x)^n dx \\
&\leqslant \int_1^\infty x^{\Re(s)-1}e^{-x}((n/e)x^{1/n})^n dx \\
&= (n/e)^n \int_1^\infty x^{\Re(s)}e^{-x}dx \\
&\leqslant (n/e)^n \int_0^\infty x^{\Re(s)}e^{-x}dx \\
&= (n/e)^n\Gamma(\Re(s)+1) \\
&= n!\Gamma(\Re(s)+1) \qquad\qquad (\text{Stirling の公式 }).
\end{aligned}
$$

以上より

$$
\int_0^\infty |x^{s-1}e^{-x}(\log x)^n|dx \leqslant n!\left(\frac{1}{\Re(s)^{n+1}} + \Gamma(\Re(s)+1)\right)
$$

を得る．

$g(s)=\int_0^\infty x^{s-1}f(x)dx$ の形の関数の微分を考える．形式的に積分記号化の微分を行うと，

$$\frac{d}{ds}g(s)=\int_0^\infty x^{s-1}f(x)\log x dx \tag{3}$$

となる．どういう条件の下でこの変形が正当化できるか考える．この式の右辺を $\tilde{g}(s)$ と書くと

$$\begin{aligned}\left|\frac{g(s+h)-g(s)}{h}-\tilde{g}(s)\right| &\leqslant \frac{1}{|h|}\int_0^\infty |x^{s-1}||f(x)||x^h-1-h\log x|dx\\ &\leqslant \frac{1}{|h|}\int_{-\infty}^\infty |e^{sy}||f(e^y)||e^{hy}-1-hy|dy\\ &\leqslant \frac{1}{|h|}\int_{-\infty}^\infty |e^{sy}||f(e^y)||\sum_{n\geqslant 2}(hy)^n/n!|dy\\ &= \frac{1}{|h|}\sum_{n\geqslant 2}\frac{|h|^n}{n!}\int_{-\infty}^\infty |e^{sy}||f(e^y)||y|^n dy\\ &= \frac{1}{|h|}\sum_{n\geqslant 2}\frac{|h|^n}{n!}\int_0^\infty |x^{s-1}||f(x)||\log x|^n dx\\ &= |h|\sum_{n\geqslant 2}\frac{|h|^{n-2}}{n!}\int_0^\infty |x^{s-1}||f(x)||\log x|^n dx \qquad (\heartsuit)\end{aligned}$$

よって，式 (3) が成り立つためには ($\heartsuit$) が $h\to 0$ で 0 に収束すればよい．

$f(x)=e^{-x}$ の場合を考えると ($\heartsuit$) は

$$\begin{aligned}|h|\sum_{n\geqslant 2}\frac{|h|^{n-2}}{n!}\int_0^\infty |x^{s-1}||f(x)||\log x|^n dx &\leqslant |h|\sum_{n\geqslant 2}\frac{|h|^{n-2}}{n!}n!\left(\frac{1}{\Re(s)^{n+1}}+\Gamma(\Re(s)+1)\right)\\ &= |h|\sum_{n\geqslant 2}|h|^{n-2}\left(\frac{1}{\Re(s)^{n+1}}+\Gamma(\Re(s)+1)\right)\\ &= |h|\left(\frac{1}{\Re(s)^3}\sum_{n\geqslant 0}\frac{|h|^n}{\Re(s)^n}+\Gamma(\Re(s)+1)\sum_{n\geqslant 0}|h|^n\right)\\ &= |h|\left(\frac{1}{\Re(s)^3}\frac{1}{1-|h|/\Re(s)}+\Gamma(\Re(s)+1)\frac{1}{1-|h|}\right)\\ &\to 0 \quad (h\to 0)\end{aligned}$$

よって，

$$\Gamma'(s)=\frac{d}{ds}\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx=\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\log x dx.$$

Step 7

$g(s)$ が $\Re(s)>1/2+\varepsilon$ で正則なことを示す．ただし，ε は $0<\varepsilon<1/2$ なる任意の定数．

Step 6 で行った議論より

$$g(s)=\int_0^\infty x^{s-2}e^{-x}(-1+\exp \mathrm{Ein}(x))dx.$$

に対して

$$|h|\sum_{n\geqslant 2}\frac{|h|^{n-2}}{n!}\int_0^\infty |x^{s-2}||e^{-x}||-1+\exp\mathrm{Ein}(x)||\log x|^n dx \tag{4}$$

が $h\to 0$ で 0 に収束することを示せばよい．

和の中身は

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |x^{s-2}||e^{-x}||-1+\exp\mathrm{Ein}(x)||\log x|^n dx &\leqslant \sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k!}\int_0^\infty |x^{s-2}||e^{-x}||\,\mathrm{Ein}(x)|^k|\log x|^n dx\\ &\leqslant \sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k!}\int_0^\infty |x^{s+k/2-2}||e^{-x}||\log x|^n dx\\ &\leqslant \sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k!}n!\left(\frac{1}{\Re(s+k/2-1)^{n+1}}+\Gamma(\Re(s+k/2-1)+1)\right)\\ &= n!\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k!}\left(\frac{1}{(\Re(s)+k/2-1)^{n+1}}+\Gamma(\Re(s)+k/2)\right)\\ &\leqslant n!\times(\text{定数})\end{aligned}$$

[TODO: 定数をもっと詳しく書く]

式 (4) に代入して

$$\begin{aligned}|h|\sum_{n\geqslant 2}\frac{|h|^{n-2}}{n!}\int_0^\infty |x^{s-2}||e^{-x}||-1+\exp\mathrm{Ein}(x)||\log x|^n dx &\leqslant |h|\sum_{n\geqslant 2}\frac{|h|^{n-2}}{n!}n!\times(\text{定数})\\ &\leqslant (\text{定数})|h|\sum_{n\geqslant 2}|h|^{n-2}\\ &\leqslant (\text{定数})|h|/(1-|h|)\\ &\to 0 \quad (h\to 0).\end{aligned}$$

よって，$g(s)$ は $\Re(s)>1/2+\varepsilon$ で正則.

Step 8

以上より

$$M[\tilde{A}](s)=\frac{e^{-\gamma}}{s}\zeta(s)(\Gamma(s-1)+g(s))$$

を得る．ここに $g(s)$ は $\Re(s)>1/2+\varepsilon$ で正則な関数.

$1/s$ のテイラー展開と $\zeta(s)$ と $\Gamma(s-1)$ のローラン展開は

$$\begin{aligned}1/s &= 1-(s-1)+O((s-1)^2) \quad (s\to 1)\\ \zeta(s) &= \frac{1}{s-1}+\gamma+O(s-1) \quad (s\to 1)\\ \Gamma(s-1) &= \frac{1}{s-1}-\gamma+O(s-1) \quad (s\to 1)\end{aligned}$$

なことを使うと，$\Re(s)>1/2+\varepsilon$ で $M[\tilde{A}](s)$ は

$$M[\tilde{A}](s)\asymp \frac{e^{-\gamma}}{(s-1)^2}+\frac{e^{-\gamma}(g(1)-1)}{s-1}$$

となる．ここに $\asymp$ は差が正則関数の意味.

Step 9

メリン変換の漸近挙動の対応の定理を使う．

> **定理.** $f(x)$ を $(0,\infty)$ で連続な関数とし，そのメリン変換 $Mf(s)$ は fundamental strip $\langle \alpha, \beta \rangle$ を持つとする． [TODO: fundamental strip の定義] ある $\gamma < \alpha$ について，$Mf(s)$ が $\langle \gamma, \beta \rangle$ に有理型接続できると仮定し，そこで極は有限個で，$\Re(s) = \gamma$ で解析的とする．また，$\eta \in (\alpha, \beta)$ と $r > 1$ が存在して，$\gamma \leqslant \Re(s) \leqslant \eta$ で $|s| \to \infty$ としたとき
>
> $$Mf(s) = O(|s|^{-r})$$
>
> となることを仮定する．このときもし，$s \in \langle \gamma, \alpha \rangle$ について
>
> $$Mf(s) \asymp \sum_{\xi, k \in A} d_{\xi,k} \frac{1}{(s-\xi)^k}$$
>
> ならば
>
> $$f(x) = \sum_{\xi, k \in A} d_{\xi,k} \left(\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} x^{-\xi} (\log x)^k \right) + O(x^{-\gamma})$$
>
> となる．

[TODO: 続きを書く]
[TODO: 定理を適用するためには $g(s)$ の $|s| \to \infty$ の挙動を知る必要がありそう]
[TODO: x を複素数で 0 に近づけるときの話]