メリン変換を用いたある関数の漸近挙動の証明

でぃぐ (@fujidig)

2019 年 9 月 7 日

本稿では次の結果を証明する．

定理.

$$A(y) = \sum_{k \geqslant 1} \left(-1 + \exp \sum_{j \geqslant k} \frac{y^j}{j} \right)$$

とおく．このとき

$$A(e^{-x}) = \sum_{k \geqslant 1} \left(-1 + \exp \sum_{j \geqslant k} \frac{e^{-jx}}{j} \right)$$

は $x > 0$ で $x \to 0$ と近づけたとき

$$A(e^{-x}) \sim e^{-\gamma} \frac{1}{x} \log \frac{1}{x}$$

となる．

Step 0

本稿で主に使う道具はメリン変換である．関数 $f(x)$ のメリン変換は次で定義される:

$$M[f(x)](s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x) dx.$$

Step 1

まず，内側の和を積分で近似することにより

$$A(e^{-x}) \sim \sum_{k \geqslant 1} \left(-1 + \exp \int_{kx}^\infty \frac{e^{-u}}{u} du \right) \tag{1}$$

を得る．

正確には

$$A(e^{-x}) = \sum_{k \geqslant 1} \left(-1 + \exp \int_{kx}^\infty \frac{e^{-u}}{u} du \right) + O(1/x) \quad (x \to 0)$$

となる．

式 (1) の右辺を $\tilde{A}(x)$ と書く．
ここで $E_1(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u} du$ とおくと，

$$\tilde{A}(x) = \sum_{k \geqslant 1} \left(-1 + \exp E_1(x)\right).$$

上の近似を正当化する．

公式 (Euler–Maclaurin の公式)**.** 関数 f について

$$\sum_{j=m}^{n} f(j) - \int_m^n f(t)dt = \frac{f(m)+f(n)}{2} + \int_m^n f'(t)(\{t\} - 1/2)dt.$$

ここに $\{t\}$ は実数 t の小数部分．

$f(t) = \frac{e^{-tx}}{tx}$ に対して Euler–Maclaurin の公式を適用すると

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x}\left(\sum_{j \geqslant k} \frac{e^{-jx}}{j} - \int_{kx}^\infty \frac{e^{-u}}{u} du\right) &= \sum_{j \geqslant k} \frac{e^{-jx}}{jx} - \int_k^\infty \frac{e^{-ux}}{ux} du \\
&= \sum_{j \geqslant k} f(j) - \int_k^\infty f(u) du \\
&= \frac{f(k) + f(\infty)}{2} + \int_k^\infty f'(t)(\{t\} - 1/2)dt \qquad (2)
\end{aligned}$$

ここで $f(\infty)$ は 0 であり，

$$\begin{aligned}
\left|\int_k^\infty f'(t)(\{t\} - 1/2)dt\right| &\leqslant \frac{1}{2}\int_k^\infty |f'(t)|dt \\
&= -\frac{1}{2}\int_k^\infty f'(t)dt \qquad (f' \text{ は常に負より}) \\
&= -\frac{1}{2}[f(t)]_{t=k}^\infty \\
&= \frac{1}{2} f(k)
\end{aligned}$$

なので式 (2) の絶対値は

$$\left|\frac{f(k) + f(\infty)}{2} + \int_k^\infty f'(t)(\{t\} - 1/2)dt\right| \leqslant f(k) = \frac{e^{-kx}}{kx}.$$

よって

$$\left|\sum_{j \geqslant k} \frac{e^{-jx}}{j} - \int_{kx}^\infty \frac{e^{-u}}{u} du\right| \leqslant \frac{e^{-kx}}{k}.$$

この左辺の絶対値の中身を $\varepsilon(k, x)$ とおく．

すると

$$
\begin{aligned}
\left|\exp \sum_{j \geqslant k} \frac{e^{-jx}}{j} - \exp \int_{kx}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du\right| &= \left(\exp \int_{kx}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du\right) |\exp \varepsilon(x,k) - 1| \\
&\leqslant \exp E_1(kx)(e|\varepsilon(x,k)|) \\
&\leqslant \exp E_1(kx) \frac{e \cdot e^{-kx}}{k}.
\end{aligned}
$$

今,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1/x}^{\infty} \exp E_1(kx) \frac{e \cdot e^{-kx}}{k} &\leqslant \sum_{k=1/x}^{\infty} \exp(1) \frac{e \cdot e^{-kx}}{k} \\
&= e^2 \sum_{k=1/x}^{\infty} \frac{e^{-kx}}{k} \\
&= e^2 \int_{1/x-1}^{\infty} \frac{e^{-ux}}{u} du \\
&= e^2 \int_{1-x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t/x} \frac{dt}{x} \\
&= e^2 \int_{1-x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \\
&\leqslant e^2 \int_{1/2}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \\
&= e^2 E_1(1/2) \\
&= O(1).
\end{aligned}
$$

次に

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{1/x} \exp E_1(kx) \frac{e \cdot e^{-kx}}{k} &= \sum_{k=1}^{1/x} (\exp \int_{kx}^{1} \frac{e^{-u}}{u} du) \exp E_1(1) \frac{e \cdot e^{-kx}}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{1/x} \left(\exp \int_{kx}^{1} \frac{e^{-u}}{u} du\right) \exp E_1(1) \frac{e \cdot e^{-kx}}{k} \\
&= e^{E_1(x)+1} \sum_{k=1}^{1/x} \left(\exp \int_{kx}^{1} \frac{e^{-u}}{u} du\right) \frac{e^{-kx}}{k} \\
&\leqslant e^{E_1(x)+1} \sum_{k=1}^{1/x} \left(\exp \int_{kx}^{1} \frac{1}{u} du\right) \frac{1}{k} \\
&= e^{E_1(x)+1} \sum_{k=1}^{1/x} \frac{1}{kx} \frac{1}{k} \\
&\leqslant e^{E_1(x)+1} \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \\
&\leqslant e^{E_1(x)+1} \zeta(2) \frac{1}{x} \\
&= O(1/x)
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
|A(e^{-x}) - \tilde{A}(x)| &\leqslant \sum_{k\geqslant 1} \left| \exp \sum_{j\geqslant k} \frac{e^{-jx}}{j} - \exp \int_{kx}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \right| \\
&= O(1/x) \quad (x \to 0)
\end{aligned}
$$

がわかる．

以降 $\tilde{A}(x)$ の漸近挙動を調べる．

次の公式は今後しばしば使う．

> **公式.**
>
> $$E_1(x) = -\gamma - \log x + \mathrm{Ein}(x) \tag{3}$$
>
> ただし，$\mathrm{Ein}(x) = \int_0^x \frac{1-e^{-u}}{u} du$.

Step 2

今，$\Re(s) > 1$ としておく．

次のメリン変換の公式を使う:

> **公式.**
>
> $$M\left[\sum_{k\geqslant 1} f(kx)\right](s) = \zeta(s) M[f](s).$$

すると

$$M[\tilde{A}](s) = \zeta(s) M\left[-1 + \exp E_1(x)\right](s)$$

となる．

この公式では積分と総和の交換をしている．それを正当化する．まず公式の証明を今の場合に限定して見る．

$$
\begin{aligned}
M\left[\sum_{k\geqslant 1}(-1+\exp E_1(kx))\right] &= \int_0^\infty x^{s-1}\left(\sum_{k\geqslant 1}(-1+\exp E_1(kx))\right)dx \\
&= \sum_{k\geqslant 1}\int_0^\infty x^{s-1}(-1+\exp E_1(kx)dx) \qquad (*) \\
&= \sum_{k\geqslant 1}\int_0^\infty \left(\frac{y}{k}\right)^{s-1}(-1+\exp E_1(y))\frac{dy}{k} \\
&= \left(\sum_{k\geqslant 1}k^{-s}\right)\left(\int_0^\infty y^{s-1}(-1+\exp E_1(y))\,dy\right) \\
&= \zeta(s)\int_0^\infty y^{s-1}(-1+\exp E_1(y))\,dy
\end{aligned}
$$

$(*)$ が積分と総和の交換をした部分である．この部分を正当化するには,

$$
\sum_{k\geqslant 1}\int_0^\infty \left|x^{s-1}(-1+\exp E_1(kx))\right|dx
$$

が有限になればよい．

まず上と同じ変形をすることにより

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\geqslant 1}\int_0^\infty \left|x^{s-1}(-1+\exp E_1(kx))\right|dx &= \zeta(s)\int_0^\infty |y^{s-1}|(-1+\exp E_1(y))\,dy \\
&= \zeta(s)\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\int_0^\infty y^{\Re(s)-1}(E_1(y))^n\,dy.
\end{aligned}
$$

ここで $0<y<1$ なら

$$
E_1(y) = -\gamma - \log x + \mathrm{Ein}(y) \leqslant 1-\gamma-\log y = -\log\frac{y}{e^{1-\gamma}}
$$

である．

$c = 1/e^{1-\gamma}$ とおく．すると 0 から 1 までの積分は

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\int_0^1 y^{\Re(s)-1}(E_1(y))^n dy &= \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\int_0^1 y^{\Re(s)-1}(-\log cy)^n dy \\
&= \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\int_0^\infty \left(\frac{e^{-z}}{c}\right)^{\Re(s)-1} z^n \frac{e^{-z}dz}{c} \\
&= \frac{1}{c^{\Re(s)}}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-\Re(s)z}z^n dz \\
&= \frac{1}{c^{\Re(s)}}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-w}\left(\frac{w}{\Re(s)}\right)^n \frac{dw}{\Re(s)} \\
&= \frac{1}{c^{\Re(s)}}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\frac{1}{\Re(s)^{n+1}}\int_0^\infty e^{-w}w^n dw \\
&= \frac{1}{c^{\Re(s)}}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\frac{1}{\Re(s)^{n+1}}\Gamma(n+1) \\
&= \frac{1}{c^{\Re(s)}}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\Re(s)^{n+1}} \\
&= \frac{1}{c^{\Re(s)}}\frac{1}{\Re(s)^2(1-1/\Re(s))}
\end{aligned}$$

次に $y > 1$ なら

$$E_1(y) = \int_y^\infty \frac{e^{-u}}{u}du \leqslant \int_y^\infty e^{-u}du = e^{-y}$$

だから，1 から ∞ までの積分は，

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\int_1^\infty y^{\Re(s)-1}(E_1(y))^n dy &\leqslant \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\int_1^\infty y^{\Re(s)-1}e^{-ny}dy \\
&= \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\int_n^\infty \left(\frac{z}{n}\right)^{\Re(s)-1} e^{-z}\frac{dz}{n} \\
&= \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\frac{1}{n^{\Re(s)}}\int_n^\infty z^{\Re(s)-1}e^{-z}dz \\
&= \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\frac{1}{n^{\Re(s)}}\int_n^\infty z^{\Re(s)-1}e^{-z}dz \\
&\leqslant \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\frac{1}{n^{\Re(s)}}\Gamma(\Re(s)) \\
&\leqslant \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\Gamma(\Re(s)) \\
&= e\Gamma(\Re(s))
\end{aligned}$$

よって，

$$\sum_{k\geqslant 1}\int_0^\infty \left|x^{s-1}\left(-1+\exp E_1(kx)\right)\right| dx \leqslant \zeta(s)\left(\frac{1}{c^{\Re(s)}}\frac{1}{\Re(s)^2(1-1/\Re(s))} + e\Gamma(\Re(s))\right).$$

ゆえに積分と総和の交換は正当化された．

Step 3

メリン変換の定義に戻り，部分積分を行う．引き続き，$\Re(s) > 1$ としておく．すると

$$\begin{aligned}
M\left[-1+\exp E_1(x)\right](s) &= \int_0^\infty x^{s-1}\left(-1+\exp\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}du\right)dx \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{x^s}{s}\right)'\left(-1+\exp\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}du\right)dx \\
&= -\int_0^\infty \frac{x^s}{s}\left(\exp\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}du\right)\left(-\frac{e^{-x}}{x}\right)dx \\
&= \frac{1}{s}\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\left(\exp\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}du\right)dx \\
&= \frac{1}{s}\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\exp E_1(x)dx \qquad (4)
\end{aligned}$$

を得る．ここで部分積分の境界項は消えることに注意する．

実際，

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x^s(-1+\exp\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}du) &= \lim_{x\to\infty}\frac{-1+\exp\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}du}{x^{-s}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{(\exp\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}du)(-\frac{e^{-x}}{x})}{-sx^{-s-1}} \qquad \text{(ロピタル)} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{s}e^{-x}x^s\exp\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}du \\
&= \frac{e^{-\gamma}}{s}\lim_{x\to\infty} e^{-x}x^{s-1}\exp\mathrm{Ein}(x)
\end{aligned}$$

であり，

$$\begin{aligned}
|e^{-x}x^{s-1}\exp\mathrm{Ein}(x)| &\leqslant e^{-x}x^{\Re(s)-1}ex \\
&= ee^{-x}x^{\Re(s)} \\
&\to 0 \quad (x\to\infty)
\end{aligned}$$

なので $x=\infty$ の境界項は消える．

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+0} x^s(-1+\exp\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}du) &= \lim_{x\to+0} x^s\exp\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}du \\
&= e^{-\gamma}\lim_{x\to+0} x^{s-1}\exp\mathrm{Ein}(x) \\
&= e^{-\gamma}(\lim_{x\to+0} x^{s-1})(\lim_{x\to+0}\exp\mathrm{Ein}(x)) \\
&= e^{-\gamma}\cdot 0\cdot 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

なので $x=0$ の境界項も消える．

Step 4

式 (3) を Step 3 の式 (4) に代入し，

$$
\begin{aligned}
M\left[-1+\exp\int_x^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}du\right](s) &= \frac{1}{s}\int_0^{\infty}x^{s-1}e^{-x}\exp\left(-\gamma-\log x+\mathrm{Ein}(x)\right)dx \\
&= \frac{e^{-\gamma}}{s}\int_0^{\infty}x^{s-2}e^{-x}\exp\mathrm{Ein}(x)dx
\end{aligned}
$$

を得る．

Step 5

Step 4 で得た結果を Step 2 の式に代入する．すると，

$$
\begin{aligned}
M[\tilde{A}](s) &= \frac{e^{-\gamma}}{s}\zeta(s)\int_0^{\infty}x^{s-2}e^{-x}\exp\mathrm{Ein}(x)dx \\
&= \frac{e^{-\gamma}}{s}\zeta(s)\left(\int_0^{\infty}x^{s-2}e^{-x}dx+\int_0^{\infty}x^{s-2}e^{-x}(-1+\exp\mathrm{Ein}(x))dx\right) \\
&= \frac{e^{-\gamma}}{s}\zeta(s)(\Gamma(s-1)+g(s))
\end{aligned}
$$

を得る．ここに

$$
g(s)=\int_0^{\infty}x^{s-2}e^{-x}(-1+\exp\mathrm{Ein}(x))dx.
$$

Step 6

この step ではガンマ関数の微分の積分表示とその上からの評価を示す．$\Re(s)>0$ とする．

$$
\begin{aligned}
\int_0^1|x^{s-1}e^{-x}(\log x)^n|dx &\leqslant \int_0^1 x^{\Re(s)-1}e^{-x}(-\log x)^n dx \\
&\leqslant \int_0^1 x^{\Re(s)-1}(-\log x)^n dx \\
&= \int_0^{\infty}e^{\Re(s)y}y^n dy \qquad (y=-\log x) \\
&= \frac{1}{\Re(s)^{n+1}}\int_0^{\infty}e^z z^n dz \\
&= \frac{n!}{\Re(s)^{n+1}}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_1^\infty |x^{s-1}e^{-x}(\log x)^n|dx &\leqslant \int_1^\infty x^{\Re(s)-1}e^{-x}(\log x)^n dx \\
&\leqslant \int_1^\infty x^{\Re(s)-1}e^{-x}((n/e)x^{1/n})^n dx \\
&= (n/e)^n \int_1^\infty x^{\Re(s)}e^{-x}dx \\
&\leqslant (n/e)^n \int_0^\infty x^{\Re(s)}e^{-x}dx \\
&= (n/e)^n \Gamma(\Re(s)+1) \\
&= n!\Gamma(\Re(s)+1) \qquad \text{(Stirling の公式).}
\end{aligned}
$$

以上より

$$
\int_0^\infty |x^{s-1}e^{-x}(\log x)^n|dx \leqslant n!\left(\frac{1}{\Re(s)^{n+1}} + \Gamma(\Re(s)+1)\right)
$$

を得る．

$g(s) = \int_0^\infty x^{s-1}f(x)dx$ の形の関数の微分を考える．形式的に積分記号化の微分を行うと，

$$
\frac{d}{ds}g(s) = \int_0^\infty x^{s-1}f(x)\log x dx \tag{5}
$$

となる．どういう条件の下でこの変形が正当化できるか考える．この式の右辺を $\tilde{g}(s)$ と書くと

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{g(s+h)-g(s)}{h} - \tilde{g}(s)\right| &\leqslant \frac{1}{|h|}\int_0^\infty |x^{s-1}||f(x)||x^h - 1 - h\log x|dx \\
&\leqslant \frac{1}{|h|}\int_{-\infty}^\infty |e^{sy}||f(e^y)||e^{hy} - 1 - hy|dy \\
&\leqslant \frac{1}{|h|}\int_{-\infty}^\infty |e^{sy}||f(e^y)||\sum_{n\geqslant 2}(hy)^n/n!|dy \\
&= \frac{1}{|h|}\sum_{n\geqslant 2}\frac{|h|^n}{n!}\int_{-\infty}^\infty |e^{sy}||f(e^y)||y|^n dy \\
&= \frac{1}{|h|}\sum_{n\geqslant 2}\frac{|h|^n}{n!}\int_0^\infty |x^{s-1}||f(x)||\log x|^n dx \\
&= |h|\sum_{n\geqslant 2}\frac{|h|^{n-2}}{n!}\int_0^\infty |x^{s-1}||f(x)||\log x|^n dx \qquad (\heartsuit)
\end{aligned}
$$

よって，式 (5) が成り立つためには $(\heartsuit)$ が $h \to 0$ で 0 に収束すればよい．

$f(x) = e^{-x}$ の場合を考えると $(\heartsuit)$ は

$$
\begin{aligned}
|h| \sum_{n \geqslant 2} \frac{|h|^{n-2}}{n!} \int_0^\infty |x^{s-1}||f(x)||\log x|^n dx &\leqslant |h| \sum_{n \geqslant 2} \frac{|h|^{n-2}}{n!} n! \left(\frac{1}{\Re(s)^{n+1}} + \Gamma(\Re(s)+1) \right) \\
&= |h| \sum_{n \geqslant 2} |h|^{n-2} \left(\frac{1}{\Re(s)^{n+1}} + \Gamma(\Re(s)+1) \right) \\
&= |h| \left(\frac{1}{\Re(s)^3} \sum_{n \geqslant 0} \frac{|h|^n}{\Re(s)^n} + \Gamma(\Re(s)+1) \sum_{n \geqslant 0} |h|^n \right) \\
&= |h| \left(\frac{1}{\Re(s)^3} \frac{1}{1 - |h|/\Re(s)} + \Gamma(\Re(s)+1) \frac{1}{1-|h|} \right) \\
&\to 0 \quad (h \to 0)
\end{aligned}
$$

よって，

$$
\Gamma'(s) = \frac{d}{ds} \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} \log x dx.
$$

Step 7

$g(s)$ が $\Re(s) > 1/2 + \varepsilon$ で正則なことを示す．ただし，ε は $0 < \varepsilon < 1/2$ なる任意の定数．

Step 6 で行った議論より

$$
g(s) = \int_0^\infty x^{s-2} e^{-x} (-1 + \exp \mathrm{Ein}(x)) dx.
$$

に対して

$$
|h| \sum_{n \geqslant 2} \frac{|h|^{n-2}}{n!} \int_0^\infty |x^{s-2}||e^{-x}||-1 + \exp \mathrm{Ein}(x)||\log x|^n dx \tag{6}
$$

が $h \to 0$ で 0 に収束することを示せばよい．

和の中身は

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty |x^{s-2}||e^{-x}||-1 + \exp \mathrm{Ein}(x)||\log x|^n dx &\leqslant \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k!} \int_0^\infty |x^{s-2}||e^{-x}||\mathrm{Ein}(x)|^k |\log x|^n dx \\
&\leqslant \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k!} \int_0^\infty |x^{s+k/2-2}||e^{-x}||\log x|^n dx \\
&\leqslant \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k!} n! \left(\frac{1}{\Re(s+k/2-1)^{n+1}} + \Gamma(\Re(s+k/2-1)+1) \right) \\
&= n! \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{(\Re(s)+k/2-1)^{n+1}} + \Gamma(\Re(s)+k/2) \right) \\
&\leqslant n! \times (\text{定数})
\end{aligned}
$$

[TODO: 定数をもっと詳しく書く]

式 (6) に代入して

$$
\begin{aligned}
|h|\sum_{n\geqslant 2}\frac{|h|^{n-2}}{n!}\int_0^\infty |x^{s-2}||e^{-x}||-1+\exp\mathrm{Ein}(x)||\log x|^n dx &\leqslant |h|\sum_{n\geqslant 2}\frac{|h|^{n-2}}{n!}n!\times(\text{定数}) \\
&\leqslant (\text{定数})|h|\sum_{n\geqslant 2}|h|^{n-2} \\
&\leqslant (\text{定数})|h|/(1-|h|) \\
&\to 0 \quad (h\to 0).
\end{aligned}
$$

よって，$g(s)$ は $\Re(s) > 1/2+\varepsilon$ で正則．

Step 8

以上より

$$M[\tilde{A}](s) = \frac{e^{-\gamma}}{s}\zeta(s)(\Gamma(s-1)+g(s))$$

を得る．ここに $g(s)$ は $\Re(s) > 1/2+\varepsilon$ で正則な関数．

$1/s$ のテイラー展開と $\zeta(s)$ と $\Gamma(s-1)$ のローラン展開は

$$
\begin{aligned}
1/s &= 1-(s-1)+O((s-1)^2) \quad (s\to 1) \\
\zeta(s) &= \frac{1}{s-1}+\gamma+O(s-1) \quad (s\to 1) \\
\Gamma(s-1) &= \frac{1}{s-1}-\gamma+O(s-1) \quad (s\to 1)
\end{aligned}
$$

なことを使うと，$\Re(s) > 1/2+\varepsilon$ で $M[\tilde{A}](s)$ は

$$M[\tilde{A}](s) \asymp \frac{e^{-\gamma}}{(s-1)^2}+\frac{e^{-\gamma}(g(1)-1)}{s-1}$$

となる．ここに $\asymp$ は差が正則関数の意味．

Step 9

メリン変換の漸近挙動の対応の定理を使う．

> **定理．** $f(x)$ を $(0,\infty)$ で連続な関数とし，そのメリン変換 $Mf(s)$ は fundamental strip $\langle\alpha,\beta\rangle$ を持つとする． [TODO: fundamental strip の定義] ある $\gamma < \alpha$ について，$Mf(s)$ が $\langle\gamma,\beta\rangle$ に有理型接続できると仮定し，そこで極は有限個で，$\Re(s)=\gamma$ で解析的とする．また，$\eta\in(\alpha,\beta)$ と $r > 1$ が存在して，$\gamma\leqslant\Re(s)\leqslant\eta$ で $|s|\to\infty$ としたとき
>
> $$Mf(s) = O(|s|^{-r})$$
>
> となることを仮定する．このときもし，$s\in\langle\gamma,\alpha\rangle$ について
>
> $$Mf(s) \asymp \sum_{(\xi,k)\in A} d_{\xi,k}\frac{1}{(s-\xi)^k}$$

ならば

$$f(x) = \sum_{(\xi,k)\in A} d_{\xi,k} \left(\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} x^{-\xi} (\log x)^{k-1} \right) + O(x^{-\gamma})$$

となる．

定理を $f = \tilde{A}, \alpha = 1, \beta = \infty, \gamma = 1/2 + \varepsilon, \eta = 2$ で適用すると

$$\tilde{A}(x) = -e^{-\gamma} x^{-1} \log x + e^{-\gamma}(g(1) - 1)x^{-1} + O(x^{-(1/2+\varepsilon)})$$

を得る．

したがって，

$$\tilde{A}(x) \sim e^{-\gamma} \frac{1}{x} \log \frac{1}{x} \qquad (x \to 0, x > 0)$$

を得る．よって，

$$A(e^{-x}) \sim e^{-\gamma} \frac{1}{x} \log \frac{1}{x} \qquad (x \to 0, x > 0).$$

[TODO: 定理の $|s| \to \infty$ で減衰するという仮定のチェック]

[TODO: x を複素数で 0 に近づけるときの話]