メリン変換を用いたある関数の漸近挙動の証明

でぃぐ (@fujidig)

2019 年 9 月 8 日

本稿では次の結果を証明する．

> **定理.**
> $$A(y) = \sum_{k\geqslant 1}\left(-1 + \exp\sum_{j\geqslant k}\frac{y^j}{j}\right)$$
> とおく．このとき
> $$A(e^{-x}) = \sum_{k\geqslant 1}\left(-1 + \exp\sum_{j\geqslant k}\frac{e^{-jx}}{j}\right)$$
> は $x > 0$ で $x \to 0$ と近づけたとき
> $$A(e^{-x}) \sim e^{-\gamma}\frac{1}{x}\log\frac{1}{x}$$
> となる．

Step 0

本稿で主に使う道具はメリン変換である．関数 $f(x)$ のメリン変換は次で定義される:

$$M[f(x)](s) = \int_0^\infty x^{s-1}f(x)dx.$$

Step 1

まず，内側の和を積分で近似することにより

$$A(e^{-x}) \sim \sum_{k\geqslant 1}\left(-1 + \exp\int_{kx}^\infty \frac{e^{-u}}{u}du\right) \tag{1}$$

を得る．

正確には

$$A(e^{-x}) = \sum_{k\geqslant 1}\left(-1 + \exp\int_{kx}^\infty \frac{e^{-u}}{u}du\right) + O(1/x) \quad (x \to 0)$$

となる．

式 (1) の右辺を $\tilde{A}(x)$ と書く．
ここで $E_1(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u} du$ とおくと，

$$\tilde{A}(x) = \sum_{k \geqslant 1} \left(-1 + \exp E_1(x)\right).$$

上の近似を正当化する．

公式 (Euler–Maclaurin の公式)**.** 関数 f について

$$\sum_{j=m}^{n} f(j) - \int_m^n f(t)dt = \frac{f(m)+f(n)}{2} + \int_m^n f'(t)(\{t\}-1/2)dt.$$

ここに $\{t\}$ は実数 t の小数部分．

$f(t) = \frac{e^{-tx}}{tx}$ に対して Euler–Maclaurin の公式を適用すると

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x}\left(\sum_{j \geqslant k} \frac{e^{-jx}}{j} - \int_{kx}^\infty \frac{e^{-u}}{u} du\right) &= \sum_{j \geqslant k} \frac{e^{-jx}}{jx} - \int_k^\infty \frac{e^{-ux}}{ux} du \\
&= \sum_{j \geqslant k} f(j) - \int_k^\infty f(u) du \\
&= \frac{f(k)+f(\infty)}{2} + \int_k^\infty f'(t)(\{t\}-1/2)dt \qquad (2)
\end{aligned}$$

ここで $f(\infty)$ は 0 であり，

$$\begin{aligned}
\left|\int_k^\infty f'(t)(\{t\}-1/2)dt\right| &\leqslant \frac{1}{2}\int_k^\infty |f'(t)|dt \\
&= -\frac{1}{2}\int_k^\infty f'(t)dt \qquad (f' \text{ は常に負より}) \\
&= -\frac{1}{2}[f(t)]_{t=k}^\infty \\
&= \frac{1}{2} f(k)
\end{aligned}$$

なので式 (2) の絶対値は

$$\left|\frac{f(k)+f(\infty)}{2} + \int_k^\infty f'(t)(\{t\}-1/2)dt\right| \leqslant f(k) = \frac{e^{-kx}}{kx}.$$

よって

$$\left|\sum_{j \geqslant k} \frac{e^{-jx}}{j} - \int_{kx}^\infty \frac{e^{-u}}{u} du\right| \leqslant \frac{e^{-kx}}{k}.$$

この左辺の絶対値の中身を $\varepsilon(k, x)$ とおく．

すると

$$\left|\exp \sum_{j \geqslant k} \frac{e^{-jx}}{j} - \exp \int_{kx}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du\right| = \left(\exp \int_{kx}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du\right) |\exp \varepsilon(x,k) - 1|$$
$$\leqslant \exp E_1(kx)(e|\varepsilon(x,k)|)$$
$$\leqslant \exp E_1(kx) \frac{e \cdot e^{-kx}}{k}.$$

今,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1/x}^{\infty} \exp E_1(kx) \frac{e \cdot e^{-kx}}{k} &\leqslant \sum_{k=1/x}^{\infty} \exp(1) \frac{e \cdot e^{-kx}}{k} \\
&= e^2 \sum_{k=1/x}^{\infty} \frac{e^{-kx}}{k} \\
&= e^2 \int_{1/x-1}^{\infty} \frac{e^{-ux}}{u} du \\
&= e^2 \int_{1-x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t/x} \frac{dt}{x} \\
&= e^2 \int_{1-x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \\
&\leqslant e^2 \int_{1/2}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \\
&= e^2 E_1(1/2) \\
&= O(1).
\end{aligned}$$

次に

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{1/x} \exp E_1(kx) \frac{e \cdot e^{-kx}}{k} &= \sum_{k=1}^{1/x} (\exp \int_{kx}^{1} \frac{e^{-u}}{u} du) \exp E_1(1) \frac{e \cdot e^{-kx}}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{1/x} \left(\exp \int_{kx}^{1} \frac{e^{-u}}{u} du\right) \exp E_1(1) \frac{e \cdot e^{-kx}}{k} \\
&= e^{E_1(1)+1} \sum_{k=1}^{1/x} \left(\exp \int_{kx}^{1} \frac{e^{-u}}{u} du\right) \frac{e^{-kx}}{k} \\
&\leqslant e^{E_1(1)+1} \sum_{k=1}^{1/x} \left(\exp \int_{kx}^{1} \frac{1}{u} du\right) \frac{1}{k} \\
&= e^{E_1(1)+1} \sum_{k=1}^{1/x} \frac{1}{kx} \frac{1}{k} \\
&\leqslant e^{E_1(1)+1} \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \\
&\leqslant e^{E_1(1)+1} \zeta(2) \frac{1}{x} \\
&= O(1/x)
\end{aligned}$$

したがって

$$
\begin{aligned}
|A(e^{-x})-\tilde{A}(x)| &\leqslant \sum_{k\geqslant 1}\left|\exp\sum_{j\geqslant k}\frac{e^{-jx}}{j}-\exp\int_{kx}^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}du\right| \\
&= O(1/x) \qquad (x\to 0)
\end{aligned}
$$

がわかる．

以降 $\tilde{A}(x)$ の漸近挙動を調べる．

次の公式は今後しばしば使う．

公式.

$$
E_1(x) = -\gamma - \log x + \mathrm{Ein}(x) \tag{3}
$$

ただし，$\mathrm{Ein}(x)=\int_0^x \frac{1-e^{-u}}{u}du$.

Step 2

今，$\mathrm{Re}(s)>1$ としておく．

次のメリン変換の公式を使う:

公式.

$$
M\left[\sum_{k\geqslant 1} f(kx)\right](s) = \zeta(s)M[f](s).
$$

すると

$$
M[\tilde{A}](s) = \zeta(s)M\left[-1+\exp E_1(x)\right](s)
$$

となる．

この公式では積分と総和の交換をしている．それを正当化する．まず公式の証明を今の場合に限定して見る．

$$
\begin{aligned}
M\left[\sum_{k\geqslant 1}(-1+\exp E_1(kx))\right] &= \int_0^\infty x^{s-1}\left(\sum_{k\geqslant 1}(-1+\exp E_1(kx))\right)dx \\
&= \sum_{k\geqslant 1}\int_0^\infty x^{s-1}(-1+\exp E_1(kx)dx) \qquad (*) \\
&= \sum_{k\geqslant 1}\int_0^\infty \left(\frac{y}{k}\right)^{s-1}(-1+\exp E_1(y))\frac{dy}{k} \\
&= \left(\sum_{k\geqslant 1}k^{-s}\right)\left(\int_0^\infty y^{s-1}(-1+\exp E_1(y))\,dy\right) \\
&= \zeta(s)\int_0^\infty y^{s-1}(-1+\exp E_1(y))\,dy
\end{aligned}
$$

$(*)$ が積分と総和の交換をした部分である．この部分を正当化するには，

$$
\sum_{k\geqslant 1}\int_0^\infty \left|x^{s-1}(-1+\exp E_1(kx))\right|dx
$$

が有限になればよい．

まず上と同じ変形をすることにより

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\geqslant 1}\int_0^\infty \left|x^{s-1}(-1+\exp E_1(kx))\right|dx &= \zeta(s)\int_0^\infty |y^{s-1}|(-1+\exp E_1(y))\,dy \\
&= \zeta(s)\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\int_0^\infty y^{\mathrm{Re}(s)-1}(E_1(y))^n\,dy.
\end{aligned}
$$

ここで $0<y<1$ なら

$$
E_1(y) = -\gamma - \log x + \mathrm{Ein}(y) \leqslant 1-\gamma-\log y = -\log\frac{y}{e^{1-\gamma}}
$$

である．

$c=1/e^{1-\gamma}$ とおく．すると 0 から 1 までの積分は

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\int_0^1 y^{\mathrm{Re}(s)-1}(E_1(y))^n dy &= \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\int_0^1 y^{\mathrm{Re}(s)-1}(-\log cy)^n dy \\
&= \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\int_0^\infty \left(\frac{e^{-z}}{c}\right)^{\mathrm{Re}(s)-1} z^n \frac{e^{-z}dz}{c} \\
&= \frac{1}{c^{\mathrm{Re}(s)}}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-\mathrm{Re}(s)z} z^n dz \\
&= \frac{1}{c^{\mathrm{Re}(s)}}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-w}\left(\frac{w}{\mathrm{Re}(s)}\right)^n \frac{dw}{\mathrm{Re}(s)} \\
&= \frac{1}{c^{\mathrm{Re}(s)}}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\frac{1}{\mathrm{Re}(s)^{n+1}}\int_0^\infty e^{-w}w^n dw \\
&= \frac{1}{c^{\mathrm{Re}(s)}}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\frac{1}{\mathrm{Re}(s)^{n+1}}\Gamma(n+1) \\
&= \frac{1}{c^{\mathrm{Re}(s)}}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\mathrm{Re}(s)^{n+1}} \\
&= \frac{1}{c^{\mathrm{Re}(s)}}\frac{1}{\mathrm{Re}(s)^2(1-1/\mathrm{Re}(s))}
\end{aligned}
$$

次に $y>1$ なら

$$
E_1(y)=\int_y^\infty \frac{e^{-u}}{u}du \leqslant \int_y^\infty e^{-u}du = e^{-y}
$$

だから，1 から ∞ までの積分は，

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\int_1^\infty y^{\mathrm{Re}(s)-1}(E_1(y))^n dy &\leqslant \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\int_1^\infty y^{\mathrm{Re}(s)-1}e^{-ny}dy \\
&= \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\int_n^\infty \left(\frac{z}{n}\right)^{\mathrm{Re}(s)-1} e^{-z}\frac{dz}{n} \\
&= \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\frac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)}}\int_n^\infty z^{\mathrm{Re}(s)-1}e^{-z}dz \\
&= \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\frac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)}}\int_n^\infty z^{\mathrm{Re}(s)-1}e^{-z}dz \\
&\leqslant \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\frac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)}}\Gamma(\mathrm{Re}(s)) \\
&\leqslant \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\Gamma(\mathrm{Re}(s)) \\
&= e\Gamma(\mathrm{Re}(s))
\end{aligned}
$$

よって，

$$
\sum_{k\geqslant 1}\int_0^\infty \left|x^{s-1}\left(-1+\exp E_1(kx)\right)\right| dx \leqslant \zeta(s)\left(\frac{1}{c^{\mathrm{Re}(s)}}\frac{1}{\mathrm{Re}(s)^2(1-1/\mathrm{Re}(s))}+e\Gamma(\mathrm{Re}(s))\right).
$$

ゆえに積分と総和の交換は正当化された．

Step 3

メリン変換の定義に戻り，部分積分を行う．引き続き，$\mathrm{Re}(s) > 1$ としておく．すると

$$
\begin{aligned}
M\left[-1+\exp E_1(x)\right](s) &= \int_0^\infty x^{s-1}\left(-1+\exp\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}du\right)dx \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{x^s}{s}\right)'\left(-1+\exp\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}du\right)dx \\
&= -\int_0^\infty \frac{x^s}{s}\left(\exp\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}du\right)\left(-\frac{e^{-x}}{x}\right)dx \\
&= \frac{1}{s}\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\left(\exp\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}du\right)dx \\
&= \frac{1}{s}\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\exp E_1(x)dx \qquad (4)
\end{aligned}
$$

を得る．ここで部分積分の境界項は消えることに注意する．

実際，

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x^s(-1+\exp\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}du) &= \lim_{x\to\infty}\frac{-1+\exp\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}du}{x^{-s}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{(\exp\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}du)(-\frac{e^{-x}}{x})}{-sx^{-s-1}} \qquad (\text{ロピタル}) \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{s}e^{-x}x^s\exp\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}du \\
&= \frac{e^{-\gamma}}{s}\lim_{x\to\infty} e^{-x}x^{s-1}\exp\mathrm{Ein}(x)
\end{aligned}
$$

であり，

$$
\begin{aligned}
|e^{-x}x^{s-1}\exp\mathrm{Ein}(x)| &\leqslant e^{-x}x^{\mathrm{Re}(s)-1}ex \\
&= ee^{-x}x^{\mathrm{Re}(s)} \\
&\to 0 \quad (x\to\infty)
\end{aligned}
$$

なので $x=\infty$ の境界項は消える．

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+0} x^s(-1+\exp\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}du) &= \lim_{x\to+0} x^s\exp\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}du \\
&= e^{-\gamma}\lim_{x\to+0} x^{s-1}\exp\mathrm{Ein}(x) \\
&= e^{-\gamma}(\lim_{x\to+0} x^{s-1})(\lim_{x\to+0}\exp\mathrm{Ein}(x)) \\
&= e^{-\gamma}\cdot 0\cdot 1 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

なので $x=0$ の境界項も消える．

Step 4

式 (3) を Step 3 の式 (4) に代入し，

$$
\begin{aligned}
M\left[-1+\exp\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}du\right](s) &= \frac{1}{s}\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\exp\left(-\gamma-\log x+\mathrm{Ein}(x)\right)dx \\
&= \frac{e^{-\gamma}}{s}\int_0^\infty x^{s-2}e^{-x}\exp\mathrm{Ein}(x)dx
\end{aligned}
$$

を得る．

Step 5

Step 4 で得た結果を Step 2 の式に代入する．すると，

$$
\begin{aligned}
M[\tilde{A}](s) &= \frac{e^{-\gamma}}{s}\zeta(s)\int_0^\infty x^{s-2}e^{-x}\exp\mathrm{Ein}(x)dx \\
&= \frac{e^{-\gamma}}{s}\zeta(s)g(s-1)
\end{aligned}
$$

を得る．ここに

$$
g(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{\mathrm{Ein}(x)-x}dx.
$$

Step 6

$\mathrm{Re}(s) > 0$ とする．$g(s) = \int_0^\infty x^{s-1}f(x)dx$ の形の関数の微分を考える．形式的に積分記号化の微分を行うと，

$$
\frac{d}{ds}g(s) = \int_0^\infty x^{s-1}f(x)\log x dx \tag{5}
$$

となる．どういう条件の下でこの変形が正当化できるか考える．この式の右辺を $\tilde{g}(s)$ と書くと

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{g(s+\Delta s)-g(s)}{h}-\tilde{g}(s)\right| &\leqslant \frac{1}{|\Delta s|}\int_0^\infty |x^{s-1}||f(x)||x^{\Delta s}-1-\Delta s\log x|dx \\
&\leqslant \frac{1}{|\Delta s|}\int_{-\infty}^\infty |e^{sy}||f(e^y)||e^{\Delta sy}-1-\Delta sy|dy \\
&\leqslant \frac{1}{|\Delta s|}\int_{-\infty}^\infty |e^{sy}||f(e^y)||\sum_{n\geqslant 2}(\Delta sy)^n/n!|dy \\
&= \frac{1}{|\Delta s|}\sum_{n\geqslant 2}\frac{|\Delta s|^n}{n!}\int_{-\infty}^\infty |e^{sy}||f(e^y)||y|^n dy \\
&= \frac{1}{|\Delta s|}\sum_{n\geqslant 2}\frac{|\Delta s|^n}{n!}\int_0^\infty |x^{s-1}||f(x)||\log x|^n dx \\
&= |\Delta s|\sum_{n\geqslant 2}\frac{|\Delta s|^{n-2}}{n!}\int_0^\infty |x^{s-1}||f(x)||\log x|^n dx \qquad (\heartsuit)
\end{aligned}
$$

よって，式 (5) が成り立つためには $(\heartsuit)$ が $\Delta s \to 0$ で 0 に収束すればよい．

Step 7

$g(s)$ が $\mathrm{Re}(s) > -1$ に有理型接続されることを示す．まず，$\mathrm{Re}(s) > 0$ とすると，部分積分により

$$\begin{aligned}
g(s) &= \int_0^\infty x^{s-1} e^{\mathrm{Ein}(x)-x} dx \\
&= -\frac{1}{s}\int_0^\infty x^s e^{\mathrm{Ein}(x)-x}\left(\frac{1-e^{-x}}{x}-1\right)dx \\
&= \frac{1}{s(s+1)}\int_0^\infty x^{s+1} e^{\mathrm{Ein}(x)-x}\varphi(x)dx \\
&= \frac{1}{s(s+1)}\int_0^\infty x^{s} e^{\mathrm{Ein}(x)-x}\psi(x)dx
\end{aligned}$$

ここに $x\varphi(x) = \psi(x) = x - 2 + 3e^{-x} + \frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}$．

$\mathrm{Re}(s) > -1$ で $\int_0^\infty x^s e^{\mathrm{Ein}(x)-x}\psi(x)dx$ が正則であればよい．つまり，$\mathrm{Re}(s) > 0$ で

$$h(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{\mathrm{Ein}(x)-x}\psi(x)dx$$

が正則であればよい．そうすれば $g(s)$ は $\mathrm{Re}(s) > -1$ で

$$\frac{1}{s(s+1)}h(s+1)$$

と有理型接続される．

Step 6 で行った議論より

$$|\Delta s| \sum_{n\geqslant 2} \frac{|\Delta s|^{n-2}}{n!}\int_0^\infty |x^{s-1}||e^{\mathrm{Ein}(x)-x}||\psi(x)||\log x|^n dx \tag{6}$$

が $\Delta s \to 0$ で 0 に収束することを示せばよい．

中の積分の積分範囲を 0 から 1 にしたものを考える．$|e^{\mathrm{Ein}(x)-x}||\psi(x)|$ はこの範囲で有界だから，上界を c とすると

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |x^{s-1}||e^{\mathrm{Ein}(x)-x}||\psi(x)||\log x|^n dx &\leqslant c\int_0^1 x^{\mathrm{Re}(s)-1}(-\log x)^n dx \\
&= c\int_0^\infty e^{\mathrm{Re}(s)y} y^n dy \qquad (y = -\log x) \\
&= \frac{c}{\mathrm{Re}(s)^{n+1}}\int_0^\infty e^z z^n dz \\
&= \frac{cn!}{\mathrm{Re}(s)^{n+1}}.
\end{aligned}$$

他方で，積分範囲を 1 から ∞ にしたものは，

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty |x^{s-1}||e^{\mathrm{Ein}(x)-x}||\psi(x)||\log x|^n dx &\leqslant \int_1^\infty |x^{s-1}||e^{\mathrm{Ein}(x)-x}||\psi(x)|((n/e)x^{1/n})^n dx \\
&\leqslant \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_1^\infty x^{\mathrm{Re}(s)}|e^{\mathrm{Ein}(x)-x}||\psi(x)|dx \\
&\leqslant \left(\frac{n}{e}\right)^n (\int_1^\infty x^{\mathrm{Re}(s)+1}|e^{\mathrm{Ein}(x)-x}|dx + 7\int_1^\infty x^{\mathrm{Re}(s)}|e^{\mathrm{Ein}(x)-x}|dx) \qquad (7)
\end{aligned}$$

最初の式変形は $\log x \leqslant (n/e)x^{1/n}$ を使った．最後の式変形は $|\psi(x)| \leqslant x+7$ を使った．

ここで

$$\begin{aligned}\int_1^\infty x^t e^{\mathrm{Ein}(x)-x}dx &\leqslant \int_1^\infty x^t e^{1+\log x - x}dx \\ &\leqslant e\int_1^\infty x^{t+1}e^{-x}dx \\ &\leqslant e\Gamma(t+2)\end{aligned}$$

なことを使えば，

$$\begin{aligned}\text{式 }(7) &\leqslant \left(\frac{n}{e}\right)^n e(\Gamma(\mathrm{Re}(s)+3)+7\Gamma(\mathrm{Re}(s)+2)) \\ &\leqslant en!(\Gamma(\mathrm{Re}(s)+3)+7\Gamma(\mathrm{Re}(s)+2))\end{aligned}$$

したがって，式 (6) の評価は

$$\begin{aligned}&|\Delta s|\sum_{n\geqslant 2}\frac{|\Delta s|^{n-2}}{n!}\int_0^\infty |x^{s-1}||e^{\mathrm{Ein}(x)-x}||\psi(x)||\log x|^n dx \\ &\leqslant |\Delta s|\sum_{n\geqslant 2}\frac{|\Delta s|^{n-2}}{n!}n!(\frac{c}{\mathrm{Re}(s)^{n+1}} + e\Gamma(\mathrm{Re}(s)+3)+7e\Gamma(\mathrm{Re}(s)+2)) \\ &= |\Delta s|\sum_{n\geqslant 2}|\Delta s|^{n-2}(\frac{c}{\mathrm{Re}(s)^{n+1}} + e\Gamma(\mathrm{Re}(s)+3)+7e\Gamma(\mathrm{Re}(s)+2)) \\ &= |\Delta s|\left(\frac{c}{\mathrm{Re}(s)^3}\frac{1}{1-|\Delta s|/\mathrm{Re}(s)} + (e\Gamma(\mathrm{Re}(s)+3)+7e\Gamma(\mathrm{Re}(s)+2))\frac{1}{1-|\Delta s|}\right) \\ &\to 0 \quad (\Delta s \to 0)\end{aligned}$$

よって $g(s)$ は $\mathrm{Re}(s) > -1$ に有理型接続される．

Step 8

以上より

$$\begin{aligned}M[\tilde{A}](s) &= \frac{e^{-\gamma}}{s}\zeta(s)g(s-1) \\ &= \frac{e^{-\gamma}}{s}\zeta(s)\frac{1}{(s-1)s}h(s) \\ &= \frac{e^{-\gamma}}{s^2(s-1)}\zeta(s)h(s)\end{aligned}$$

を得る．ここに $h(s)$ は $\mathrm{Re}(s) > 0$ で正則な関数．

$1/s^2, h(s)$ のテイラー展開と $\zeta(s)$ のローラン展開は

$$\begin{aligned}1/s^2 &= 1-2(s-1)+O((s-1)^2) \quad (s\to 1) \\ h(s) &= h(1)+h'(1)(s-1)+O((s-1)^2) \quad (s\to 1) \\ \zeta(s) &= \frac{1}{s-1}+\gamma+O(s-1) \quad (s\to 1)\end{aligned}$$

なことを使うと，$\mathrm{Re}(s) > 0$ で $M[\tilde{A}](s)$ は

$$M[\tilde{A}](s) \asymp \frac{e^{-\gamma}h(1)}{(s-1)^2} + \frac{e^{-\gamma}h(1)(-2+\gamma)+h'(1)}{s-1} \tag{8}$$

と有理型接続される．ここに $\asymp$ は差が正則関数の意味．

$h(1)=1$ を示す．

$$h(1) = \int_0^\infty e^{\mathrm{Ein}(x)-x}\psi(x)dx$$

であるが，$\psi(x)$ の定義をよく見ると

$$e^{\mathrm{Ein}(x)-x}\psi(x) = x\frac{d^2}{dx^2}e^{\mathrm{Ein}(x)-x}$$

であるので，

$$\begin{aligned}
h(1) &= \int_0^\infty x\frac{d^2}{dx^2}e^{\mathrm{Ein}(x)-x}dx \\
&= \left[x\frac{d}{dx}e^{\mathrm{Ein}(x)-x}\right]_{x=0}^\infty - \int_0^\infty \frac{d}{dx}e^{\mathrm{Ein}(x)-x}dx \\
&= \left[x\frac{d}{dx}e^{\mathrm{Ein}(x)-x} - e^{\mathrm{Ein}(x)-x}\right]_{x=0}^\infty \\
&= \left[xe^{\mathrm{Ein}(x)-x}\left(\frac{1-e^{-x}}{x}-1\right) - e^{\mathrm{Ein}(x)-x}\right]_{x=0}^\infty \\
&= 1
\end{aligned}$$

となる．式 (8) に $h(1)=1$ を代入すると

$$M[\tilde{A}](s) \asymp \frac{e^{-\gamma}}{(s-1)^2} + \frac{e^{-\gamma}(-2+\gamma)+h'(1)}{s-1}.$$

Step 9

メリン変換の漸近挙動の対応の定理を使う．

定義． 実数 $a<b$ について $\langle a,b\rangle = \{s\in\mathbb{C} \mid a<\mathrm{Re}(s)<b\}$ とおく．メリン変換 $Mf(s)$ の値が $\langle a,b\rangle$ 内で存在するような最大の $\langle a,b\rangle$ をこのメリン変換の fundamental strip という．

> **定理．** $f(x)$ を $(0,\infty)$ で連続な関数とし，そのメリン変換 $Mf(s)$ は fundamental strip $\langle\alpha,\beta\rangle$ を持つとする．ある $\alpha' < \alpha$ について，$Mf(s)$ が $\langle\alpha',\beta\rangle$ に有理型接続できると仮定し，そこで極は有限個で，$\mathrm{Re}(s)=\gamma$ で解析的とする．また，$\eta\in(\alpha,\beta)$ と $r>1$ が存在して，$\alpha'\leqslant\mathrm{Re}(s)\leqslant\eta$ で $|s|\to\infty$ としたとき
>
> $$Mf(s) = O(|s|^{-r})$$
>
> となることを仮定する．このときもし，$s\in\langle\alpha',\alpha\rangle$ について
>
> $$Mf(s) \asymp \sum_{(\xi,k)\in A} d_{\xi,k}\frac{1}{(s-\xi)^k}$$

ならば

$$f(x) = \sum_{(\xi,k)\in A} d_{\xi,k}\left(\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}x^{-\xi}(\log x)^{k-1}\right) + O(x^{-\alpha'})$$

となる．

定理を $f = \tilde{A}, \alpha = 1, \beta = \infty, \alpha' = 0.501, \eta = 2$ で適用すると

$$\tilde{A}(x) = -e^{-\gamma}x^{-1}\log x + (e^{-\gamma}(-2+\gamma) + h'(1))x^{-1} + O(x^{-0.501})$$

を得る．

ここで定理の $Mf(s)$ が $|s| \to \infty$ で減衰するという仮定を確かめよう．h の定義より

$$|h(s)| \leqslant |h(\mathrm{Re}(s))|$$

であり，$|h(s)|$ はその連続性より $\alpha' \leqslant s \leqslant \eta$ で有界なので $|h(s)|$ は $\alpha' \leqslant \mathrm{Re}(s) \leqslant \eta$ で有界．また，$\zeta(s)$ については $\mathrm{Re}(s) > 1/2$ で $\zeta(s) = O(\mathrm{Im}(s)^{1/2})$ であることが知られている．これについては Paul T Beteman と Harold G Diamond の “Analytic Number Theory: An Introductory Course” を見よ．

よって定理の $Mf(s)$ が減衰することの仮定は確かめられた．

したがって，

$$\tilde{A}(x) \sim e^{-\gamma}\frac{1}{x}\log\frac{1}{x} \quad (x \to 0, x > 0)$$

を得る．よって，

$$A(e^{-x}) \sim e^{-\gamma}\frac{1}{x}\log\frac{1}{x} \quad (x \to 0, x > 0).$$

[TODO: x を複素数で 0 に近づけるときの話]