メリン変換を用いたある関数の漸近挙動の証明

でぃぐ (@fujidig)

2019 年 9 月 5 日

本稿では次の結果を証明する．

> **定理.**
> $$A(y)=\sum_{k\geqslant 1}\left(-1+\exp\sum_{j\geqslant k}\frac{y^j}{j}\right)$$
> とおく．このとき
> $$A(e^{-x})=\sum_{k\geqslant 1}\left(-1+\exp\sum_{j\geqslant k}\frac{e^{-jx}}{j}\right)$$
> は $x>0$ で $x\to 0$ と近づけたとき
> $$A(e^{-x})\sim e^{-\gamma}\frac{1}{x}\log\frac{1}{x}$$
> となる．

Step 0

本稿で主に使う道具はメリン変換である．関数 $f(x)$ のメリン変換は次で定義される:

$$M[f(x)](s)=\int_0^\infty x^{s-1}f(x)dx.$$

Step 1

まず，内側の和を積分で近似することにより

$$A(e^{-x})\sim\sum_{k\geqslant 1}\left(-1+\exp\int_{kx}^\infty\frac{e^{-u}}{u}du\right) \tag{1}$$

を得る．

正確には

$$A(e^{-x})=\sum_{k\geqslant 1}\left(-1+\exp\int_{kx}^\infty\frac{e^{-u}}{u}du\right)+O(1/x)\quad (x\to 0)$$

となる．

式 (1) の右辺を $\tilde{A}(x)$ と書く.
ここで $E_1(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u} du$ とおくと,

$$\tilde{A}(x) = \sum_{k \geqslant 1} \left(-1 + \exp E_1(x) \right).$$

上の近似を正当化する。

公式 (Euler–Maclaurin の公式). 関数 f について

$$\sum_{j=m}^{n} f(j) - \int_m^n f(t)dt = \frac{f(m) + f(n)}{2} + \int_m^n f'(t)(\{t\} - 1/2)dt.$$

ここに $\{t\}$ は実数 t の小数部分。

$f(t) = \frac{e^{-tx}}{tx}$ に対して Euler–Maclaurin の公式を適用すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}\left(\sum_{j \geqslant k} \frac{e^{-jx}}{j} - \int_{kx}^\infty \frac{e^{-u}}{u} du \right) &= \sum_{j \geqslant k} \frac{e^{-jx}}{jx} - \int_k^\infty \frac{e^{-ux}}{ux} du \\ &= \sum_{j \geqslant k} f(j) - \int_k^\infty f(u)du \\ &= \frac{f(k) + f(\infty)}{2} + \int_k^\infty f'(t)(\{t\} - 1/2)dt \qquad (2) \end{aligned}$$

ここで $f(\infty)$ は 0 であり、

$$\begin{aligned} \left| \int_k^\infty f'(t)(\{t\} - 1/2)dt \right| &\leqslant \frac{1}{2} \int_k^\infty |f'(t)| dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_k^\infty f'(t)dt \qquad (f' \text{ は常に負より}) \\ &= -\frac{1}{2} [f(t)]_{t=k}^\infty \\ &= \frac{1}{2} f(k) \end{aligned}$$

なので式 (2) の絶対値は

$$\left| \frac{f(k) + f(\infty)}{2} + \int_k^\infty f'(t)(\{t\} - 1/2)dt \right| \leqslant f(k) = \frac{e^{-kx}}{kx}.$$

よって

$$\left| \sum_{j \geqslant k} \frac{e^{-jx}}{j} - \int_{kx}^\infty \frac{e^{-u}}{u} du \right| \leqslant \frac{e^{-kx}}{k}.$$

この左辺の絶対値の中身を $\varepsilon(k, x)$ とおく。

すると

$$\begin{aligned}\left|\exp\sum_{j\geqslant k}\frac{e^{-jx}}{j}-\exp\int_{kx}^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}du\right| &= \left(\exp\int_{kx}^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}du\right)|\exp\varepsilon(x,k)-1| \\ &\leqslant \exp E_1(kx)(e|\varepsilon(x,k)|) \\ &\leqslant \exp E_1(kx)\frac{e\cdot e^{-kx}}{k}.\end{aligned}$$

今、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1/x}^{\infty}\exp E_1(kx)\frac{e\cdot e^{-kx}}{k} &\leqslant \sum_{k=1/x}^{\infty}\exp(1)\frac{e\cdot e^{-kx}}{k} \\ &= e^2\sum_{k=1/x}^{\infty}\frac{e^{-kx}}{k} \\ &= e^2\int_{1/x-1}^{\infty}\frac{e^{-ux}}{u}du \\ &= e^2\int_{1-x}^{\infty}\frac{e^{-t}}{t/x}\frac{dt}{x} \\ &= e^2\int_{1-x}^{\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt \\ &\leqslant e^2\int_{1/2}^{\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt \\ &= e^2E_1(1/2) \\ &= O(1).\end{aligned}$$

次に

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{1/x}\exp E_1(kx)\frac{e\cdot e^{-kx}}{k} &= \sum_{k=1}^{1/x}(\exp\int_{kx}^{1}\frac{e^{-u}}{u}du)\exp E_1(1)\frac{e\cdot e^{-kx}}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{1/x}\left(\exp\int_{kx}^{1}\frac{e^{-u}}{u}du\right)\exp E_1(1)\frac{e\cdot e^{-kx}}{k} \\ &= e^{E_1(x)+1}\sum_{k=1}^{1/x}\left(\exp\int_{kx}^{1}\frac{e^{-u}}{u}du\right)\frac{e^{-kx}}{k} \\ &\leqslant e^{E_1(x)+1}\sum_{k=1}^{1/x}\left(\exp\int_{kx}^{1}\frac{1}{u}du\right)\frac{1}{k} \\ &= e^{E_1(x)+1}\sum_{k=1}^{1/x}\frac{1}{kx}\frac{1}{k} \\ &\leqslant e^{E_1(x)+1}\frac{1}{x}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \\ &\leqslant e^{E_1(x)+1}\zeta(2)\frac{1}{x} \\ &= O(1/x)\end{aligned}$$

したがって

$$
\begin{aligned}
|A(e^{-x}) - \tilde{A}(x)| &\leqslant \sum_{k\geqslant 1} \left| \exp \sum_{j\geqslant k} \frac{e^{-jx}}{j} - \int_{kx}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \right| \\
&= O(1/x) \quad (x \to 0)
\end{aligned}
$$

がわかる。

以降 $\tilde{A}(x)$ の漸近挙動を調べる．

次の公式は今後しばしば使う．

> **公式.**
> $$E_1(x) = -\gamma - \log x + \mathrm{Ein}(x) \tag{3}$$
> ただし，$\mathrm{Ein}(x) = \int_0^x \frac{1-e^{-u}}{u} du$.

Step 2

今，$\Re(s) > 1$ としておく．

次のメリン変換の公式を使う:

> **公式.**
> $$M\left[\sum_{k\geqslant 1} f(kx)\right](s) = \zeta(s) M[f](s).$$

すると

$$M[\tilde{A}](s) = \zeta(s) M\left[-1 + \exp E_1(x)\right](s)$$

となる．

この公式では積分と総和の交換をしている．それを正当化する．まず公式の証明を今の場合に限定して見る．

$$
\begin{aligned}
M\left[\sum_{k\geqslant 1}(-1+\exp E_1(kx))\right] &= \int_0^\infty x^{s-1}\left(\sum_{k\geqslant 1}(-1+\exp E_1(kx))\right)dx \\
&= \sum_{k\geqslant 1}\int_0^\infty x^{s-1}(-1+\exp E_1(kx)dx) \qquad (*) \\
&= \sum_{k\geqslant 1}\int_0^\infty \left(\frac{y}{k}\right)^{s-1}(-1+\exp E_1(y))\frac{dy}{k} \\
&= \left(\sum_{k\geqslant 1}k^{-s}\right)\left(\int_0^\infty y^{s-1}(-1+\exp E_1(y))\,dy\right) \\
&= \zeta(s)\int_0^\infty y^{s-1}(-1+\exp E_1(y))\,dy
\end{aligned}
$$

$(*)$ が積分と総和の交換をした部分である．この部分を正当化するには，

$$
\sum_{k\geqslant 1}\int_0^\infty \left|x^{s-1}(-1+\exp E_1(kx))\right|dx
$$

が有限になればよい．

まず上と同じ変形をすることにより

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\geqslant 1}\int_0^\infty \left|x^{s-1}(-1+\exp E_1(kx))\right|dx &= \zeta(s)\int_0^\infty |y^{s-1}|(-1+\exp E_1(y))\,dy \\
&= \zeta(s)\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\int_0^\infty y^{\Re(s)-1}(E_1(y))^n\,dy.
\end{aligned}
$$

ここで $0<y<1$ なら

$$
E_1(y) = -\gamma - \log x + \mathrm{Ein}(y) \leqslant 1-\gamma-\log y = -\log\frac{y}{e^{1-\gamma}}
$$

である．

$c = 1/e^{1-\gamma}$ とおく．すると 0 から 1 までの積分は

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\int_0^1 y^{\Re(s)-1}(E_1(y))^n dy &= \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\int_0^1 y^{\Re(s)-1}(-\log cy)^n dy \\
&= \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\int_0^\infty \left(\frac{e^{-z}}{c}\right)^{\Re(s)-1} z^n \frac{e^{-z}dz}{c} \\
&= \frac{1}{c^{\Re(s)}}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-\Re(s)z}z^n dz \\
&= \frac{1}{c^{\Re(s)}}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-w}\left(\frac{w}{\Re(s)}\right)^n \frac{dw}{\Re(s)} \\
&= \frac{1}{c^{\Re(s)}}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\frac{1}{\Re(s)^{n+1}}\int_0^\infty e^{-w}w^n dw \\
&= \frac{1}{c^{\Re(s)}}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\frac{1}{\Re(s)^{n+1}}\Gamma(n+1) \\
&= \frac{1}{c^{\Re(s)}}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\Re(s)^{n+1}} \\
&= \frac{1}{c^{\Re(s)}}\frac{1}{\Re(s)^2(1-1/\Re(s))}
\end{aligned}$$

次に $y > 1$ なら

$$E_1(y) = \int_y^\infty \frac{e^{-u}}{u}du \leqslant \int_y^\infty e^{-u}du = e^{-y}$$

だから，1 から ∞ までの積分は,

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\int_1^\infty y^{\Re(s)-1}(E_1(y))^n dy &\leqslant \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\int_1^\infty y^{\Re(s)-1}e^{-ny}dy \\
&= \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\int_n^\infty \left(\frac{z}{n}\right)^{\Re(s)-1} e^{-z}\frac{dz}{n} \\
&= \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\frac{1}{n^{\Re(s)}}\int_n^\infty z^{\Re(s)-1}e^{-z}dz \\
&= \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\frac{1}{n^{\Re(s)}}\int_n^\infty z^{\Re(s)-1}e^{-z}dz \\
&\leqslant \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\frac{1}{n^{\Re(s)}}\Gamma(\Re(s)) \\
&\leqslant \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\Gamma(\Re(s)) \\
&= e\Gamma(\Re(s))
\end{aligned}$$

よって,

$$\sum_{k\geqslant 1}\int_0^\infty \left|x^{s-1}\left(-1+\exp E_1(kx)\right)\right| dx \leqslant \zeta(s)\left(\frac{1}{c^{\Re(s)}}\frac{1}{\Re(s)^2(1-1/\Re(s))} + e\Gamma(\Re(s))\right).$$

ゆえに積分と総和の交換は正当化された.

Step 3

メリン変換の定義に戻り，部分積分を行う．引き続き，$\Re(s) > 1$ としておく．すると

$$
\begin{aligned}
M\left[-1+\exp E_1(x)\right](s) &= \int_0^\infty x^{s-1}\left(-1+\exp\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}du\right)dx \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{x^s}{s}\right)'\left(-1+\exp\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}du\right)dx \\
&= -\int_0^\infty \frac{x^s}{s}\left(\exp\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}du\right)\left(-\frac{e^{-x}}{x}\right)dx \\
&= \frac{1}{s}\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\left(\exp\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}du\right)dx \\
&= \frac{1}{s}\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\exp E_1(x)dx \qquad (4)
\end{aligned}
$$

を得る．ここで部分積分の境界項は消えることに注意する．

実際,

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x^s(-1+\exp\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}du) &= \lim_{x\to\infty}\frac{-1+\exp\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}du}{x^{-s}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{(\exp\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}du)(-\frac{e^{-x}}{x})}{-sx^{-s-1}} \qquad (\text{ロピタル}) \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{s}e^{-x}x^s\exp\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}du \\
&= \frac{e^{-\gamma}}{s}\lim_{x\to\infty}e^{-x}x^{s-1}\exp\mathrm{Ein}(x)
\end{aligned}
$$

であり,

$$
\begin{aligned}
|e^{-x}x^{s-1}\exp\mathrm{Ein}(x)| &\leqslant e^{-x}x^{\Re(s)-1}ex \\
&= ee^{-x}x^{\Re(s)} \\
&\to 0 \quad (x\to\infty)
\end{aligned}
$$

なので $x=\infty$ の境界項は消える．

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+0} x^s(-1+\exp\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}du) &= \lim_{x\to+0}x^s\exp\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}du \\
&= e^{-\gamma}\lim_{x\to+0}x^{s-1}\exp\mathrm{Ein}(x) \\
&= e^{-\gamma}(\lim_{x\to+0}x^{s-1})(\lim_{x\to+0}\exp\mathrm{Ein}(x)) \\
&= e^{-\gamma}\cdot 0\cdot 1 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

なので $x=0$ の境界項も消える．

Step 4

式 (3) を Step 3 の式 (4) に代入し，

$$M\left[-1+\exp\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}du\right](s) = \frac{1}{s}\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\exp\left(-\gamma-\log x+\mathrm{Ein}(x)\right)dx$$
$$= \frac{e^{-\gamma}}{s}\int_0^\infty x^{s-2}e^{-x}\exp\mathrm{Ein}(x)dx$$

を得る．

Step 5

Step 4 で得た結果を Step 2 の式に代入する．すると，

$$\begin{aligned}M[\tilde{A}](s) &= \frac{e^{-\gamma}}{s}\zeta(s)\int_0^\infty x^{s-2}e^{-x}\exp\mathrm{Ein}(x)dx\\ &= \frac{e^{-\gamma}}{s}\zeta(s)\left(\int_0^\infty x^{s-2}e^{-x}dx + \int_0^\infty x^{s-2}e^{-x}(-1+\exp\mathrm{Ein}(x))dx\right)\\ &= \frac{e^{-\gamma}}{s}\zeta(s)(\Gamma(s-1)+g(s))\end{aligned}$$

を得る．ここに

$$g(s) = \int_0^\infty x^{s-2}e^{-x}(-1+\exp\mathrm{Ein}(x))dx.$$

Step 6

この step ではガンマ関数の微分の積分表示とその上からの評価を示す．$\Re(s)>0$ とする．

$$\begin{aligned}\int_0^1 |x^{s-1}e^{-x}(\log x)^n|dx &\leqslant \int_0^1 x^{\Re(s)-1}e^{-x}(-\log x)^n dx\\ &\leqslant \int_0^1 x^{\Re(s)-1}(-\log x)^n dx\\ &= \int_0^\infty e^{\Re(s)y}y^n dy \qquad (y=-\log x)\\ &= \frac{1}{\Re(s)^{n+1}}\int_0^\infty e^z z^n dz\\ &= \frac{n!}{\Re(s)^{n+1}}.\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int_1^\infty |x^{s-1}e^{-x}(\log x)^n|dx &\leqslant \int_1^\infty x^{\Re(s)-1}e^{-x}(\log x)^n dx \\
&\leqslant \int_1^\infty x^{\Re(s)-1}e^{-x}((n/e)x^{1/n})^n dx \\
&= (n/e)^n \int_1^\infty x^{\Re(s)}e^{-x}dx \\
&\leqslant (n/e)^n \int_0^\infty x^{\Re(s)}e^{-x}dx \\
&= (n/e)^n \Gamma(\Re(s)+1) \\
&= n!\Gamma(\Re(s)+1) \qquad \text{(Stirling の公式).}
\end{aligned}
$$

以上より

$$
\int_0^\infty |x^{s-1}e^{-x}(\log x)^n|dx \leqslant n!\left(\frac{1}{\Re(s)^{n+1}} + \Gamma(\Re(s)+1)\right)
$$

を得る．

$g(s) = \int_0^\infty x^{s-1}f(x)dx$ の形の関数の微分を考える．形式的に積分記号化の微分を行うと，

$$
\frac{d}{ds}g(s) = \int_0^\infty x^{s-1}f(x)\log x dx \tag{5}
$$

となる．どういう条件の下でこの変形が正当化できるか考える．この式の右辺を $\tilde{g}(s)$ と書くと

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{g(s+h)-g(s)}{h} - \tilde{g}(s)\right| &\leqslant \frac{1}{|h|}\int_0^\infty |x^{s-1}||f(x)||x^h - 1 - h\log x|dx \\
&\leqslant \frac{1}{|h|}\int_{-\infty}^\infty |e^{sy}||f(e^y)||e^{hy} - 1 - hy|dy \\
&\leqslant \frac{1}{|h|}\int_{-\infty}^\infty |e^{sy}||f(e^y)||\sum_{n\geqslant 2}(hy)^n/n!|dy \\
&= \frac{1}{|h|}\sum_{n\geqslant 2}\frac{|h|^n}{n!}\int_{-\infty}^\infty |e^{sy}||f(e^y)||y|^n dy \\
&= \frac{1}{|h|}\sum_{n\geqslant 2}\frac{|h|^n}{n!}\int_0^\infty |x^{s-1}||f(x)||\log x|^n dx \\
&= |h|\sum_{n\geqslant 2}\frac{|h|^{n-2}}{n!}\int_0^\infty |x^{s-1}||f(x)||\log x|^n dx \qquad (\heartsuit)
\end{aligned}
$$

よって，式 (5) が成り立つためには $(\heartsuit)$ が $h \to 0$ で 0 に収束すればよい．

$f(x) = e^{-x}$ の場合を考えると $(\heartsuit)$ は

$$
\begin{aligned}
|h|\sum_{n\geqslant 2}\frac{|h|^{n-2}}{n!}\int_0^\infty |x^{s-1}||f(x)||\log x|^n dx &\leqslant |h|\sum_{n\geqslant 2}\frac{|h|^{n-2}}{n!}n!\left(\frac{1}{\Re(s)^{n+1}}+\Gamma(\Re(s)+1)\right)\\
&= |h|\sum_{n\geqslant 2}|h|^{n-2}\left(\frac{1}{\Re(s)^{n+1}}+\Gamma(\Re(s)+1)\right)\\
&= |h|\left(\frac{1}{\Re(s)^3}\sum_{n\geqslant 0}\frac{|h|^n}{\Re(s)^n}+\Gamma(\Re(s)+1)\sum_{n\geqslant 0}|h|^n\right)\\
&= |h|\left(\frac{1}{\Re(s)^3}\frac{1}{1-|h|/\Re(s)}+\Gamma(\Re(s)+1)\frac{1}{1-|h|}\right)\\
&\to 0 \quad (h\to 0)
\end{aligned}
$$

よって，

$$
\Gamma'(s)=\frac{d}{ds}\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx=\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\log x dx.
$$

Step 7

$g(s)$ が $\Re(s) > 1/2+\varepsilon$ で正則なことを示す．ただし，ε は $0<\varepsilon<1/2$ なる任意の定数．

Step 6 で行った議論より

$$
g(s)=\int_0^\infty x^{s-2}e^{-x}(-1+\exp \mathrm{Ein}(x))dx.
$$

に対して

$$
|h|\sum_{n\geqslant 2}\frac{|h|^{n-2}}{n!}\int_0^\infty |x^{s-2}||e^{-x}||-1+\exp \mathrm{Ein}(x)||\log x|^n dx \tag{6}
$$

が $h\to 0$ で 0 に収束することを示せばよい．

和の中身は

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty |x^{s-2}||e^{-x}||-1+\exp \mathrm{Ein}(x)||\log x|^n dx &\leqslant \sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k!}\int_0^\infty |x^{s-2}||e^{-x}||\,\mathrm{Ein}(x)|^k|\log x|^n dx\\
&\leqslant \sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k!}\int_0^\infty |x^{s+k/2-2}||e^{-x}||\log x|^n dx\\
&\leqslant \sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k!}n!\left(\frac{1}{\Re(s+k/2-1)^{n+1}}+\Gamma(\Re(s+k/2-1)+1)\right)\\
&= n!\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k!}\left(\frac{1}{(\Re(s)+k/2-1)^{n+1}}+\Gamma(\Re(s)+k/2)\right)\\
&\leqslant n!\times(\text{定数})
\end{aligned}
$$

[TODO: 定数をもっと詳しく書く]

式 (6) に代入して

$$
\begin{aligned}
|h| \sum_{n \geqslant 2} \frac{|h|^{n-2}}{n!} \int_0^\infty |x^{s-2}||e^{-x}|| -1 + \exp \mathrm{Ein}(x)|| \log x|^n dx &\leqslant |h| \sum_{n \geqslant 2} \frac{|h|^{n-2}}{n!} n! \times (\text{定数}) \\
&\leqslant (\text{定数})|h| \sum_{n \geqslant 2} |h|^{n-2} \\
&\leqslant (\text{定数})|h|/(1-|h|) \\
&\to 0 \quad (h \to 0).
\end{aligned}
$$

よって，$g(s)$ は $\Re(s) > 1/2 + \varepsilon$ で正則.

Step 8

以上より

$$M[\tilde{A}](s) = \frac{e^{-\gamma}}{s} \zeta(s)(\Gamma(s-1) + g(s))$$

を得る．ここに $g(s)$ は $\Re(s) > 1/2 + \varepsilon$ で正則な関数.

$1/s$ のテイラー展開と $\zeta(s)$ と $\Gamma(s-1)$ のローラン展開は

$$
\begin{aligned}
1/s &= 1 - (s-1) + O((s-1)^2) \quad (s \to 1) \\
\zeta(s) &= \frac{1}{s-1} + \gamma + O(s-1) \quad (s \to 1) \\
\Gamma(s-1) &= \frac{1}{s-1} - \gamma + O(s-1) \quad (s \to 1)
\end{aligned}
$$

なことを使うと，$\Re(s) > 1/2 + \varepsilon$ で $M[\tilde{A}](s)$ は

$$M[\tilde{A}](s) \asymp \frac{e^{-\gamma}}{(s-1)^2} + \frac{e^{-\gamma}(g(1)-1)}{s-1}$$

となる．ここに $\asymp$ は差が正則関数の意味.

Step 9

メリン変換の漸近挙動の対応の定理を使う.

> **定理.** $f(x)$ を $(0, \infty)$ で連続な関数とし，そのメリン変換 $Mf(s)$ は fundamental strip $\langle \alpha, \beta \rangle$ を持つとする． [TODO: fundamental strip の定義] ある $\gamma < \alpha$ について，$Mf(s)$ が $\langle \gamma, \beta \rangle$ に有理型接続できると仮定し，そこで極は有限個で，$\Re(s) = \gamma$ で解析的とする．また，$\eta \in (\alpha, \beta)$ と $r > 1$ が存在して，$\gamma \leqslant \Re(s) \leqslant \eta$ で $|s| \to \infty$ としたとき
>
> $$Mf(s) = O(|s|^{-r})$$
>
> となることを仮定する．このときもし，$s \in \langle \gamma, \alpha \rangle$ について
>
> $$Mf(s) \asymp \sum_{\xi, k \in A} d_{\xi,k} \frac{1}{(s-\xi)^k}$$

ならば

$$f(x) = \sum_{\xi,k\in A} d_{\xi,k}\left(\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}x^{-\xi}(\log x)^k\right) + O(x^{-\gamma})$$

となる．

[TODO: 続きを書く]

[TODO: 定理を適用するためには $g(s)$ の $|s| \to \infty$ の挙動を知る必要がありそう]

[TODO: x を複素数で 0 に近づけるときの話]