HF 上の Δ_1 関係と recursive の同値性

でぃぐ

2019 年 10 月 21 日

命題 1. $f : \omega^k \rightharpoonup \omega$ を部分再帰的関数とする．このとき f は ω^{k+1} の部分集合であるが，これは HF 上 Σ_1 である．

証明．まず初期関数について示す．

zero について: これは論理式 $\varphi(y) \equiv y = 0$ で定義されるのでよい．

射影 $\mathrm{I}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{i}}$ について: これは論理式 $\varphi(\vec{x}, y) \equiv \bigwedge_{j<k}(x_j \in \omega) \wedge y = x_i$ で定義されるのでよい．

後続者 succ について: これは論理式 $\varphi(x, y) \equiv x \in \omega \wedge y = S(x)$ で定義されるのでよい．

次に HF 上 Σ_1 な ω 上の部分関数が合成・原始再帰・最小化で閉じることを示す．

合成について: 関数 $g_0, \ldots, g_{k-1}, h$ が論理式 $\psi_0, \ldots, \psi_{k-1}, \theta$ で定義されるとする．このとき合成関数

$$f(\vec{x}) \simeq h(g_0(\vec{x}), \ldots, g_{k-1}(\vec{x}))$$

は論理式

$$\varphi(\vec{x}, y) \equiv (\exists a_0) \ldots (\exists a_{k-1})(\theta(a_0, \ldots, a_{k-1}, y) \wedge \psi_0(\vec{x}, a_0) \wedge \cdots \wedge \psi_{k-1}(\vec{x}, a_{k-1}))$$

で定義される．よってよい．

原始再帰について: 関数 g, h が論理式 ψ, θ で定義されるとする．このとき次の原始再帰で定義される f を考える:

$$\begin{aligned} f(0, \vec{x}) &\simeq g(\vec{x}), \\ f(n+1, \vec{x}) &\simeq h(n, \vec{x}, f(n, \vec{x})). \end{aligned}$$

すると f は論理式

$$\varphi(n, \vec{x}, y) \equiv (\exists w)(w : n+1 \to \omega \wedge \psi(\vec{x}, w(0)) \wedge (\forall i < n)(\theta(i, \vec{x}, w(i), w(i+1))) \wedge y = w(n))$$

で定義される．よってよい．

最小化について: 関数 g が論理式 ψ で定義されるとする．このとき次の最小化で定義される f を考える:

$$f(\vec{x}) \simeq (\mu z) g(\vec{x}, z).$$

すると f は論理式

$$\varphi(\vec{x}, y) \equiv \psi(\vec{x}, y, 0) \wedge (\forall z < y)(\exists n)(n \neq 0 \wedge \psi(\vec{x}, z, n))$$

で定義される．よってよい． □

系 2. $A \subseteq \omega^k$ について A が recursively enumerable ならば，A は HF 上 Σ_1.

証明. A が recursively enumerable ならある recursive な関数 f があって

$$A = \{\vec{x} \in \omega^k \mid (\exists y \in \omega) f(\vec{x}, y) = 1\}$$

となる．f を定義する Σ_1 論理式 ψ をとれば論理式

$$\varphi(\vec{x}) \equiv (\exists y)\psi(\vec{x}, y, 1)$$

により A は定義される． □

逆を示すために次が重要になる．

補題 3. ω 上の二項関係 E を

$$nEm \iff m \text{ の二進展開の下から } n \text{ 桁目が } 1$$

と定める．そして再帰で $\chi : \omega \to \mathrm{HF}$ を

$$\chi(m) = \{\chi(n) \mid nEm\}$$

とおく．このとき

1. E は recursive.
2. $\chi : (\omega, E) \to (\mathrm{HF}, \in)$ は同型写像.
3. χ の逆写像 χ^{-1} の ω への制限は recursive.

証明. 1 は明らか．2 と 3 を示す．$\Gamma : \mathrm{HF} \to \omega$ を次で再帰的に定める:

$$\Gamma(a) = \sum_{b \in a} 2^{\Gamma(b)}.$$

このとき Γ が χ の逆写像になっていること，すなわち $\Gamma \circ \chi = \mathrm{id}_\omega, \chi \circ \Gamma = \mathrm{id}_{\mathrm{HF}}$ がそれぞれ関係 E と $\in$ に関する帰納法で証明できる．すると χ が同型になっていることは定義より容易にわかる．Γ の定義を見れば，これの ω への制限が recursive なことも明らか． □

命題 4. どんな Δ_0 論理式 φ に対してもある recursive な集合 A があって任意の $\vec{x} \in \omega$ について

$$\mathrm{HF} \models \varphi(\chi(x_0), \ldots, \chi(x_{k-1})) \iff (x_0, \ldots, x_{k-1}) \in A$$

証明. 論理式の複雑さに関する帰納法.

論理式 $x = y$ については $\{(x,y) \in \omega^2 | x = y\}$ でよい．論理式 $x \in y$ については補題 3 の E でよい．

論理結合子の場合は明らか．

$\varphi \equiv (\exists y \in x_0)\psi(\vec{x}, y)$ のときは ψ に対する recursive な集合を B として，

$$A = \{(x_0, \ldots, x_{k-1}) \in \omega^k \mid (\exists y < x_0)(yEx_0 \wedge (\vec{x}, y) \in B)\}$$

とすればよい． □

命題 5. $A \subseteq \omega^k$ が HF 上 Σ_1 ならば，A は recursively enumerable である．

証明. A が論理式 $(\exists y)\varphi(\vec{x}, y)$ で定義されるとする．すると命題 4 より recursive な B がとれて

$$\mathrm{HF} \models \varphi(\vec{x}, y) \iff (\chi^{-1}(x_0), \ldots, \chi^{-1}(x_{k-1}), \chi^{-1}(y)) \in B$$

となる．よって，

$$(x_0, \ldots, x_{k-1}) \in A \iff (\exists y \in \omega)((\chi^{-1}(x_0), \ldots, \chi^{-1}(x_{k-1}), y) \in B)$$

となるので，A は recursively enumerable である． □

系 2 と命題 5 より次が得られる．

定理 6. $A \subseteq \omega^k$ について，HF 上 Σ_1 であることと recursively enumerable であることは同値.

recursively enumerable かつ補集合が recursively enumerable であれば recursive であったのを思い出すと次の系を得る．

系 7. $A \subseteq \omega^k$ について，HF 上 Δ_1 であることと recursive であることは同値.

参考文献

[1] K. Kunen. *The Foundations of Mathematics.* Mathematical logic and foundations. College Publications, 2009.