

# 任意の集合が全順序付けできるが素イデアル定理が成り立たない ZF のモデルの構成

でいぐ (@fujidig)

2019 年 12 月 21 日

概要

## 目次

<b>1</b>	<b>本稿の流れ</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>含意の証明</b>	<b>2</b>
2.1	$AC \Rightarrow BPI$ . . . . .	2
2.2	$BPI \Rightarrow$ コンパクト性定理 . . . . .	2
2.3	コンパクト性定理 $\Rightarrow BPI$ . . . . .	2
2.4	コンパクト性定理 $\Rightarrow OE$ . . . . .	3
2.5	$OE \Rightarrow OP$ . . . . .	3
2.6	$OP \Rightarrow AC^{\text{fin}}$ . . . . .	3
<b>3</b>	<b>ZFA と permutation model</b>	<b>3</b>
3.1	ZFA の公理 . . . . .	3
3.2	Permutation model . . . . .	4
3.3	$A$ のノーマルイデアルから作られる permutation model . . . . .	5
3.4	The basic Fraenkel model . . . . .	5
3.5	The second Fraenkel model . . . . .	6
3.6	The ordered Mostowski model . . . . .	6
<b>4</b>	<b>symmetric model</b>	<b>8</b>
4.1	選択公理の独立性 . . . . .	11
<b>5</b>	<b>OP が言えて OE が言えないモデル</b>	<b>13</b>
5.1	可算普遍均質半順序集合 . . . . .	13

## 1 本稿の流れ

ZF 上次の含意関係がある.

$$\text{AC} \Rightarrow \text{BPI} \Rightarrow \text{OE} \Rightarrow \text{OP} \Rightarrow \text{AC}^{\text{fin}}$$

**AC.** 選択公理.

**素イデアル定理 (BPI).** 任意のブール代数は素イデアルを持つ.

**コンパクト性定理 (BPI と同値).** 一階述語論理の理論  $T$  に対して,  $T$  の任意の有限部分集合がモデルを持てば  $T$  がモデルを持つ.

**Order Extension Principle (OE).** 任意の半順序集合は全順序に拡張できる.

**Ordering Principle (OP).** 任意の集合は全順序付けできる.

**$\text{AC}^{\text{fin}}$ .** 非空な有限集合の族に対する選択公理.

**$\text{AC}_{\omega}^{\text{fin}}$ .** 非空な有限集合の添え字集合が  $\omega$  な族に対する選択公理.

## 2 含意の証明

### 2.1 $\text{AC} \Rightarrow \text{BPI}$

AC と Zorn の補題は同値だった. Zorn の補題を使った BPI の標準的な証明をすればよい. □

### 2.2 $\text{BPI} \Rightarrow \text{コンパクト性定理}$

Henkin 構成 (超冪による証明では AC を使ってしまうことに注意する). □

### 2.3 $\text{コンパクト性定理} \Rightarrow \text{BPI}$

$B$  をブール代数とする. 各  $b \in B$  を定数記号として用意し, それに単項関係記号  $I$  を加えた言語を  $L$  とする.  $L$  理論  $T$  を次の論理式たちの全体とする.

$$\begin{array}{ll} I(c) \rightarrow I(b) & (\text{all } b, c \in B \text{ with } b \leq c) \\ (I(b) \wedge I(c)) \rightarrow I(b + c) & (\text{all } b, c \in B) \\ I(b) \vee I(-b) & (\text{all } b \in B) \end{array}$$

$T$  の任意の有限部分集合はモデルを持つ. 実際,  $T$  の有限部分集合  $T'$  が与えられたとき, そこに現れる定数記号たちから生成されるブール代数を考える. それは有限集合である. そのフィルター全体も有限個であるので極大なものをとればよいからである. よって完全性定理より  $T$  もモデル  $M$  を持つ.  $M$  のうち定数記

号の解釈だけを集めれば  $B$  と全単射の対応がつく．このとき  $M$  の  $I$  の解釈と  $B$  との共通部分は素イデアルである．  $\square$

## 2.4 コンパクト性定理 $\Rightarrow$ OE

$(P, <)$  を半順序集合とする．各  $p \in P$  を定数記号として用意し，それに二項関係記号  $<$  を加えた言語を  $L$  とする． $L$  理論  $T$  を次の論理式たちの全体とする．

$$\begin{array}{ll} \neg(p < p) & (\text{all } p \in P) \\ (p < q \wedge q < r) \rightarrow p < r & (\text{all } p, q, r \in P) \\ p < q \vee q < p & (\text{all } p, q \in P \text{ with } p \neq q) \\ p < q & (\text{all } p, q \in P \text{ with } p < q) \end{array}$$

有限半順序集合は全順序に拡張できるので， $T$  の任意の有限部分集合はモデルを持つ．よって完全性定理より  $T$  もモデル  $M$  を持つ． $M$  のうち定数記号の解釈だけを集めれば  $P$  と全単射の対応がつく．このとき  $M$  の  $<$  の解釈の  $P$  への制限は  $P$  上の全順序で  $<$  を拡張したものになっている．  $\square$

## 2.5 OE $\Rightarrow$ OP

空な関係を半順序だと思えば明らか．  $\square$

## 2.6 OP $\Rightarrow$ AC<sup>fin</sup>

有限集合の族  $(X_i)_{i \in I}$  が与えられたとする．和集合  $\bigcup_{i \in I} X_i$  を全順序付けする．すると各  $X_i$  は有限集合なのでこの順序に関する最小元  $x_i$  がとれる． $(x_i)_{i \in I}$  は  $\prod_{i \in I} X_i$  の元である．  $\square$

# 3 ZFA と permutation model

## 3.1 ZFA の公理

通常集合論 ZF(C) では要素を持たないオブジェクトは空集合ただ一つしかない．これを修正し，要素を持たないオブジェクト (アトム) を空集合以外にも許した公理系を ZFA という．

集合論の言語  $L = \{\in\}$  に定数記号  $0, A$  を加えた言語  $L' = \{\in, 0, A\}$  を ZFA の言語という． $A$  はアトムの全体の集合を意味する．

ZFA の公理は基本的に ZF の公理に以下の公理を加えたものである．

$$\begin{array}{ll} \neg \exists x (x \in 0) & \text{空集合の公理} \\ (\forall x)(x \in A \leftrightarrow (x \neq 0 \wedge \neg \exists y (y \in x))) & \text{アトムの公理} \end{array}$$

ただし ZF の公理の一部は次のように修正する．

$$\begin{array}{ll} (\forall x \text{ set})(\forall y \text{ set})((\forall z)(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y) & \text{外延性公理} \\ (\forall x \text{ set} \neq 0)(\exists y \in x)(y \cap x = 0) & \text{基礎の公理} \end{array}$$

ただし  $(\forall x \text{ set})$  は  $(\forall x \notin A)$  の略記である．

事実. ZFC が無矛盾なら ZFA+AC+( $A$  は可算無限) も無矛盾である. [TODO]

ZF のときと同様 ZFA の中で累積階層を定義できる.  $S$  を集合とする (ただし集合とはアトムでないオブジェクトのこと).

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^0(S) &= S \\ \mathcal{P}^{\alpha+1}(S) &= \mathcal{P}^\alpha(S) \cup \mathcal{P}(\mathcal{P}^\alpha(S)) \\ \mathcal{P}^\alpha(S) &= \bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{P}^\beta(S) \text{ } (\alpha \text{ limit})\end{aligned}$$

そしてクラス  $\mathcal{P}^\infty(S)$  を次で定義する.

$$\mathcal{P}^\infty(S) = \bigcup_{\alpha \in \text{On}} \mathcal{P}^\alpha(S)$$

すると

$$\mathcal{P}^\infty(A) = V$$

と言える ( $V$  はすべてのオブジェクト全体のクラス).

$\mathcal{P}^\infty(0)$  を kernel という.

### 3.2 Permutation model

$\text{Aut}(A)$  を  $A$  から  $A$  への全単射全体のなす群とする.  $\pi \in \text{Aut}(A)$  を  $V$  から  $V$  への写像に拡大することができる. すなわちランクに関する再帰で

$$\pi(x) = \{\pi(y) : y \in x\}$$

と定める.

$G \subseteq \text{Aut}(A)$  を部分群とする.

各  $x \in V$  について

$$\text{sym}_G(x) = \{\pi \in G : \pi x = x\}$$

とおく.

このとき  $G$  の部分群の集合  $\mathcal{F}$  が  $G$  のノーマルフィルターであるとは次を満たすこととする.

1.  $G \in \mathcal{F}$ .
2.  $H \in \mathcal{F}$  かつ  $H \subseteq K$  かつ  $K$  が  $G$  の部分群ならば  $K \in \mathcal{F}$ .
3.  $H, K \in \mathcal{F}$  ならば  $H \cap K \in \mathcal{F}$ .
4.  $H \in \mathcal{F}$  かつ  $\pi \in G$  ならば  $\pi H \pi^{-1} \in \mathcal{F}$ .
5. 各  $a \in A$  について  $\text{sym}_G(a) \in \mathcal{F}$ .

$G \subseteq \text{Aut}(A)$  とその上のノーマルフィルター  $\mathcal{F}$  を固定する.  $x \in V$  が **symmetric** とは  $\text{sym}_G(x) \in \mathcal{F}$  のこととする.

$\mathcal{V}$  を継承的に symmetric なオブジェクトの全体のクラスとする. すなわち

$$\mathcal{V} = \{x : x \subseteq \mathcal{V} \text{ かつ } x \text{ が symmetric}\}$$

と定義する.

$\mathcal{V}$  を permutation model という.

定理.  $\mathcal{V}$  は ZFA の推移的モデルであって kernel を含み,  $A \in \mathcal{V}$  である. [TODO]

### 3.3 $A$ のノーマルイデアルから作られる permutation model

permutation model は多くの場合  $A$  のノーマルイデアルから作られる.  $G \subseteq \text{Aut}(A)$  を群とする.  $I \subseteq \mathcal{P}(A)$  が  $A$  上のノーマルイデアルであるとは以下の 5 条件を満たすこと.

1.  $0 \in I$ .
2.  $F \subseteq E \in I \Rightarrow F \in I$ .
3.  $E, F \in I \Rightarrow E \cup F \in I$ .
4.  $\pi \in G, E \in I \Rightarrow \pi^*E \in I$ .
5.  $a \in A \Rightarrow \{a\} \in I$ .

$\mathcal{F}$  を  $\text{fix}(E)$  for  $E \in I$  から生成されるフィルターとする. すると  $\mathcal{F}$  はノーマルフィルターとなり, permutation model  $\mathcal{V}$  を定める.

このとき  $x$  が symmetric なのはある  $E \in I$  があって

$$\text{fix}(E) \subseteq \text{sym}(x)$$

となるときである. これを満たす  $E$  を  $x$  のサポートという.

permutation model を作るときは常に ZFA+AC で作業する.

今  $V$  の中でどんな元  $x$  もある順序数との間の全単射  $f$  がとれるが, 特に  $x$  が kernel の元なら  $f$  も kernel の中にあるので, どの  $x \in \mathcal{P}^\infty(0)$  も  $\mathcal{V}$  で整列できる. よって次が言える.

$$x \in \mathcal{V} \text{ が整列可能} \iff \exists y \in \mathcal{P}^\infty(0), \exists f, f : x \rightarrow y \text{ 単射.}$$

そのような  $f$  を考えると片側が kernel の元なので

$$\text{sym}(f) = \text{fix}(x)$$

である. よって

$$(\mathcal{V} \models x \text{ が整列可能}) \iff \text{fix}(x) \in \mathcal{F} \quad (*)$$

となる. 実際,  $\mathcal{V}$  において  $x$  が整列可能なら,  $f \in \mathcal{V}$  と  $y \in \mathcal{P}^\infty(0)$  がとれて  $f : x \rightarrow y$  全単射.  $f \in \mathcal{V}$  より  $f$  は symmetric なので  $\text{sym}(f) \in \mathcal{F}$ . ゆえに  $\text{fix}(x) \in \mathcal{F}$ . 逆に  $\text{fix}(x) \in \mathcal{F}$  とする.  $V$  では AC は成り立つのだから  $f : x \rightarrow \alpha$  全単射 ( $\alpha \in \text{On}, f \in V$  がとれる. すると  $\text{sym}(f) = \text{fix}(x) \in \mathcal{F}$  より  $f$  は symmetric.  $f$  の元が  $\mathcal{V}$  の元なことはすぐ分かるので,  $f \in \mathcal{V}$ . よって  $x$  は  $\mathcal{V}$  において整列可能.

### 3.4 The basic Fraenkel model

$A$  を可算無限とする.  $G = \text{Aut}(A)$  とし,  $I$  を  $A$  のすべての有限部分集合の全体とする. 明らかに  $I$  は  $A$  のノーマルイデアルであるので,  $G$  と  $I$  から得られる permutation model を  $\mathcal{V}$  とする.

$A$  のどんな有限部分集合  $E$  についても  $\pi \in \text{fix}(E)$  で  $\pi \notin \text{fix}(A)$  なものを見つけられる. よって  $\text{fix}(A)$  は  $\mathcal{F}$  に属さない. したがって (\*) より  $A$  は  $\mathcal{V}$  に整列順序を持たない. ゆえに次が得られた.

定理 1.  $\text{Con}(\text{ZF})$  のもとで,

$$\text{ZFA} \not\models \text{AC}.$$

### 3.5 The second Fraenkel model

$A$  を可算無限とする.  $A$  を可算個の disjoint な組たちに分割する:

$$A = \bigcup_{n \in \omega} P_n, P_n = \{a_n, b_n\}, n \in \omega$$

$G \subseteq \text{Aut}(A)$  を組  $P_n$  たちを保存する  $\pi$  全体のなす部分群とする:

$$\pi(\{a_n, b_n\}) = \{a_n, b_n\}, n \in \omega.$$

$I$  を  $A$  の有限集合全体のなすイデアルとする.  $G$  と  $I$  から得られる permutation model を  $\mathcal{V}$  とする.

このとき次が成り立つ.

- (1) 各  $P_n$  は  $\mathcal{V}$  に属する.
- (2)  $\langle P_n : n \in \omega \rangle \in \mathcal{V}$ . よって  $\{P_n : n \in \omega\}$  は  $\mathcal{V}$  において可算.
- (3)  $f \in \mathcal{V}$  で  $\text{dom } f = \omega$  かつ  $f(n) \in P_n$  なものはない.

(1), (2) は  $P_n$  たちがどの  $\pi \in G$  でも不変なことから従う. (3) について. そのような  $f$  があったとして,  $E$  を  $f$  のサポートとする.  $E = \{a_0, b_0, \dots, a_k, b_k\}$  の形と仮定してもよい.  $\pi \in \text{fix } E$  かつ  $a_{k+1}$  と  $b_{k+1}$  を互いに入れ替える  $\pi \in G$  をとる. すると  $E$  が  $f$  のサポートなので  $\pi f = f$ . よって

$$\pi(f(k+1)) = (\pi f)(\pi(k+1)) = f(k+1)$$

だが,

$$\pi(f(k+1)) \neq f(k+1)$$

なので矛盾した.

したがって, 次が得られた.

**定理 2.** ZF の無矛盾性を仮定する. このとき ZFA において二元集合の可算族に対する選択公理は証明できない.

### 3.6 The ordered Mostowski model

$\mathcal{V}$  を群  $G \subseteq \text{Aut}(A)$  とノーマルフィルター  $\mathcal{F}$  によって与えられる permutation model とする.

$C \subseteq \mathcal{V}$  をクラスとする.  $C$  が symmetric であるとは, 次の  $\text{sym}(C)$  が  $\mathcal{F}$  に属することと定める:

$$\text{sym}(C) = \{\pi \in G : \pi " C = C\}.$$

$C_\alpha = C \cap \mathcal{P}^\alpha(A)$  とおくと

$$\begin{aligned} C \text{ が symmetric} &\iff \forall \alpha, C_\alpha \in \mathcal{V} \\ &\iff \forall x \in \mathcal{V}, C \cap x \in \mathcal{V} \end{aligned}$$

が成り立つ.

**補題 3.**  $\mathcal{V}$  を群  $G \subseteq \text{Aut}(A)$  とノーマルイデアル  $I$  によって与えられる permutation model とする. このとき次のクラスは symmetric である:

$$C = \{(E, x) : E \in I, x \in \mathcal{V} \text{ かつ } E \text{ は } x \text{ のサポート}\}.$$

証明.  $\pi \in G$  なら

$$\begin{aligned}\text{fix}(\pi E) &= \pi \text{fix}(E) \pi^{-1} \\ \text{sym}(\pi x) &= \pi \text{sym}(x) \pi^{-1}\end{aligned}$$

が成り立つ. よって

$$E \text{ は } x \text{ のサポート} \iff \pi E \text{ は } \pi x \text{ のサポート}$$

が言える. これより補題が従う. □

$A$  を可算無限とする.  $A$  上の順序  $<$  で  $\mathbb{Q}$  の順序と同型なものをとる.

$$G = \{\pi \in \text{Aut}(A) : \pi \text{ は順序保存}\}$$

とおき,  $I$  を  $A$  の有限部分集合全体とする.

$\mathcal{V}$  を  $G$  と  $I$  によって与えられる permutation model とする.

$\mathcal{V}$  は次を満たすことを示そう.

- (1)  $A$  は  $\mathcal{V}$  において整列できない.
- (2)  $\mathcal{V}$  の線型順序であるような symmetric クラスが存在する.

各有限な  $E \subseteq A$  について  $\text{fix } E \not\subseteq \text{fix } A$  は容易にわかる. よって (1) を得る. (2) を示すためにいくつかの補題を用意する.

**補題 4.** 1.  $E_1, E_2$  がともに  $x$  のサポートならば,  $E_1 \cap E_2$  も  $x$  のサポート.

2. 任意の symmetric な  $x$  は最小のサポートを持つ. クラス  $C = \{(x, E) : E \text{ は } x \text{ の最小のサポート}\}$  は symmetric である.

証明. 1 について. これは次の事実より従う.  $E_1, E_2$  が  $A$  の有限部分集合ならば,

$$\text{fix}(E_1 \cap E_2) = [\text{fix}(E_1) \cap \text{fix}(E_2)].$$

ただし  $[-]$  は生成される部分群を表す. この事実は  $A$  に  $\mathbb{Q}$  の順序を入れていることから証明できる.

2 について.  $x$  のすべてのサポートの共通部分をとればよい. これが再びサポートになることは 1 よりわかる. 後半の主張は,  $E$  が  $x$  の最小のサポートなら,  $\pi(E)$  が  $\pi(x)$  の最小のサポートになることからわかる. □

**補題 5.** 1.  $E$  が  $x$  のサポートかつ  $\pi(E) = E$  ならば  $\pi(x) = x$ .

2. symmetric class  $F$  が存在して,  $\mathcal{V}$  から  $\text{On} \times I$  への単射である.

証明. 1 について.  $\pi \in G$  はすべて順序保存なので,  $\pi(E) = E$  ならば  $E$  が有限集合なことから,  $\forall a \in E, \pi(a) = a$ . すなわち  $\pi \in \text{fix}(E)$ .

2 について.  $x \in \mathcal{V}$  について

$$\text{orb}(x) = \{\pi(x) : \pi \in G\}$$

とおく. 各  $x$  について  $\text{sym}(\text{orb}(x)) = G$  である.

したがって, orbit 全体を順序数で並べたら, その enumeration は symmetric クラスである.

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \text{orb}(x) \text{ の上の enumeration による番号} \\ F_2(x) &= x \text{ の最小のサポート} \\ F(x) &= (F_1(x), F_2(x)) \end{aligned}$$

とおく.  $F$  は symmetric となる.

$F$  が単射なことを示す.  $F(x) = F(y)$  なら  $x$  と  $y$  は同じ orbit に乗っているので,  $y = \pi(x)(\pi \in G)$ .  $E$  を  $x$  の最小サポートとすると  $\pi(E)$  が  $\pi(x)$  の最小サポート. よって  $F_2(x) = F_2(y)$  より  $\pi(E) = E$  で 1 より  $\pi(x) = x$ .  $\square$

$A$  の順序  $<$  は  $\mathcal{V}$  に属する. イデアル  $I$  は全順序集合の有限部分集合からなるので, 辞書式順序で全順序付けできる. よって  $\text{On} \times I$  も辞書式順序で全順序付けできる. symmetric な単射写像  $\mathcal{V} \rightarrow \text{On} \times I$  を得ているので,  $\mathcal{V}$  の全順序  $<$  で symmetric クラスなものが定義できる. したがって  $\mathcal{V}$  の中で任意の集合は全順序付けできる.

以上より次が得られた.

**定理 6.** ZFC の無矛盾性を仮定する. このとき AC は OP から ZFA 上独立である.

## 4 symmetric model

$M$  を ZFC の推移的モデルとし,  $(\mathbb{P}, \leq, 1) \in M$  を半順序集合とする.  $\pi$  が  $P$  上の自己同型であるとはそれが  $P$  から  $P$  への全単射であって,

$$\begin{cases} p \leq q \iff \pi(p) \leq \pi(q) (\forall p, q \in \mathbb{P}) \\ \pi(1) = 1 \end{cases}$$

を満たすことをいう.

$P$  上の自己同型  $\pi$  を次のように  $M^{\mathbb{P}}$  から  $M^{\mathbb{P}}$  への全単射に拡張する.

$$\pi(\dot{x}) = \{(\pi(\dot{y}), \pi(p)) : (\dot{y}, p) \in \dot{x}\}.$$

すると強制関係は

$$p \Vdash \varphi(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \iff \pi(p) \Vdash \varphi(\pi(\dot{x}_1), \dots, \pi(\dot{x}_n))$$

満たすことに注意する (論理式の構成に関する帰納法で示せる).

$\text{Aut}(\mathbb{P})$  を  $\mathbb{P}$  上の自己同型全体のなす群とし,  $\mathcal{G} \subseteq \text{Aut}(\mathbb{P})$  を部分群とする. 各  $\dot{x} \in M^{\mathbb{P}}$  について

$$\text{sym}_{\mathcal{G}}(\dot{x}) = \{\pi \in \mathcal{G} : \pi(\dot{x}) = \dot{x}\}$$

とおく.

$\mathcal{G}$  の部分群の集合  $\mathcal{F}$  が  $\mathcal{G}$  のノーマルフィルターであるとは次を満たすこととする.

1.  $\mathcal{G} \in \mathcal{F}$ .
2.  $H \in \mathcal{F}$  かつ  $H \subseteq K$  かつ  $K$  が  $\mathcal{G}$  の部分群ならば  $K \in \mathcal{F}$ .



3.  $H, K \in \mathcal{F}$  ならば  $H \cap K \in \mathcal{F}$ .
4.  $H \in \mathcal{F}$  かつ  $\pi \in \mathcal{G}$  ならば  $\pi H \pi^{-1} \in \mathcal{F}$ .

$\mathcal{G} \subseteq \text{Aut}(\mathbb{P})$  とその上のノーマルフィルター  $\mathcal{F}$  を固定する.

$\dot{x} \in M^{\mathbb{P}}$  が **symmetric** とは  $\text{sym}_{\mathcal{G}}(\dot{x}) \in \mathcal{F}$  を満たすことをいう.

$\text{HS} \subseteq M^{\mathbb{P}}$  を継承的に symmetric な name の全体とする. すなわち

$$\dot{x} \in \text{HS} \iff \dot{x} \text{ は symmetric かつ } \text{dom}(\dot{x}) \subseteq \text{HS}.$$

各  $x \in M$  について check name  $\check{x}$  は symmetric であり,  $\check{x} \in \text{HS}$  であることに注意する. また,  $\dot{x} \in \text{HS}$  と  $\pi \in \mathcal{G}$  について必ず  $\pi(\dot{x}) \in \text{HS}$  になることにも注意する.

$M$  上の  $\mathbb{P}$ -ジェネリックフィルター  $G$  をとる.

$$N = \{\text{val}(\dot{x}, G) : \dot{x} \in \text{HS}\}$$

とおく.

定義より明らかに  $N \subseteq M[G]$  であり, 任意の check name が  $\text{HS}$  に属することから  $M \subseteq N$  でもある. つまり  $M \subseteq N \subseteq M[G]$ .

**補題.**  $M$  上で定義できる関係  $\Vdash_{M, \mathbb{P}, \mathcal{F}}$  があって, 任意の  $\dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n \in \text{HS}$  について

$$N \models \varphi(\dot{x}_G^1, \dots, \dot{x}_G^n) \iff \exists p \in G, p \Vdash_{M, \mathbb{P}, \mathcal{F}} \varphi(\dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n).$$

**証明.** 通常の強制の再帰的定義において,  $\forall$  の強制の定義を  $\text{HS}$  の元の範囲を動くように修正すればよい. つまり

$$p \Vdash_{M, \mathbb{P}, \mathcal{F}} (\forall \dot{x}) \varphi(\dot{x}) \iff (\forall \dot{x} \in \text{HS}) p \Vdash_{M, \mathbb{P}, \mathcal{F}} \varphi(\dot{x}).$$

□

**命題.**  $N$  は ZF の推移的モデル.

**証明.**  $\text{HS}$  の作り方より  $N$  が推移的なことは容易に確かめられる. したがって, 外延性公理と基礎の公理は成り立つ.

対の公理について.  $x, y \in N$  とする.  $\{x, y\} \in N$  を示す.  $\dot{x}, \dot{y} \in \text{HS}$  で  $\dot{x}_G = x, \dot{y}_G = y$  なものをとる. このとき  $\dot{z} = \{(\dot{x}, 1), (\dot{y}, 1)\}$  とおく. 任意の  $\pi \in \text{sym}(\dot{x}) \cap \text{sym}(\dot{y})$  について  $\pi(\dot{z}) = \dot{z}$  が分かる. よって,  $\text{sym}(\dot{x}) \cap \text{sym}(\dot{y}) \subseteq \text{sym}(\dot{z})$ . したがって  $\text{sym}(\dot{z}) \in \mathcal{F}$ . したがって,  $\dot{z} \in \text{HS}$  である. ゆえに  $\{x, y\} = \dot{z}_G \in N$ .

分出公理について.  $\varphi(x, a)$  を論理式とする.  $X, a \in N$  とし, それらの name を  $\dot{X}, \dot{a} \in \text{HS}$  とする.  $Y = \{x \in X : \varphi^N(x, a)\} \in N$  を示す.

$$\dot{Y} = \{(\dot{x}, p) : \dot{x} \in \text{dom}(\dot{X}) \wedge p \in \mathbb{P} \wedge p \Vdash_{M, \mathbb{P}, \mathcal{F}} \dot{x} \in \dot{X} \wedge \varphi(\dot{x}, \dot{a})\}$$

とおく. すると補題より  $\dot{Y}_G = Y$  が分かる.

また,  $\text{sym}_{\mathcal{G}}(X) \cap \text{sym}_{\mathcal{G}}(p)$  の任意の元  $\pi$  について

$$\begin{aligned}
\pi(\dot{Y}) &= \{(\pi(\dot{x}), \pi(p)) : \dot{x} \in \text{dom}(\dot{X}) \wedge p \in \mathbb{P} \wedge p \Vdash_{M, \mathbb{P}, \mathcal{F}} \dot{x} \in \dot{X} \wedge \varphi(\dot{x}, \dot{a})\} \\
&= \{(\pi(\dot{x}), \pi(p)) : \pi(\dot{x}) \in \text{dom}(\pi(\dot{X})) \wedge \pi(p) \in \mathbb{P} \wedge \pi(p) \Vdash_{M, \mathbb{P}, \mathcal{F}} \pi(\dot{x}) \in \pi(\dot{X}) \wedge \varphi(\pi(\dot{x}), \pi(\dot{a}))\} \\
&= \{(\pi(\dot{x}), \pi(p)) : \pi(\dot{x}) \in \text{dom}(\dot{X}) \wedge \pi(p) \in \mathbb{P} \wedge \pi(p) \Vdash_{M, \mathbb{P}, \mathcal{F}} \pi(\dot{x}) \in \dot{X} \wedge \varphi(\pi(\dot{x}), \dot{a})\} \\
&= \{(\dot{x}, p) : \dot{x} \in \text{dom}(\dot{X}) \wedge p \in \mathbb{P} \wedge p \Vdash_{M, \mathbb{P}, \mathcal{F}} \dot{x} \in \dot{X} \wedge \varphi(\dot{x}, \dot{a})\} \\
&= \dot{Y}
\end{aligned}$$

より  $\dot{Y}$  は symmetric である.  $\text{dom}(\dot{Y})$  に属する name はもともと HS の元なので,  $\dot{Y} \in \text{HS}$ .

和集合公理について.  $A \in N$  を固定する. このとき  $B \in N$  があって,  $\bigcup A \subseteq B$  を示せばよい.  $\dot{A} \in \text{HS}$  で  $\dot{A}_G = A$  なるものをとる. このとき  $\dot{B} = \bigcup \text{dom}(\dot{A})$  とおく. すると  $\dot{B} \in \text{HS}$  かつ  $\bigcup A \subseteq \dot{B}_G$  となっていることが確かめられる. 前者は  $\text{sym}_{\mathcal{G}}(\dot{A}) \subseteq \text{sym}_{\mathcal{G}}(\dot{B})$  であることに注意すればよい.

置換公理について. 置換公理は次の Collection Principle と同値であった:

$$(\forall X)(\exists Y)(\forall x \in X)[(\exists y) \varphi(x, y, a) \rightarrow (\exists y \in Y) \varphi(x, y, a)]$$

よって Collection Principle が  $N$  で成り立つことを示す. その際,  $M$  での Collection Principle を使う.  $\dot{X}, \dot{a} \in \text{HS}$  が与えられたとする. 示すべきことは, HS の元  $\dot{Y}$  が存在して

$$N \models (\forall x \in \dot{X}_G)[(\exists y) \varphi(x, y, \dot{a}_G) \rightarrow (\exists y \in \dot{Y}_G) \varphi(x, y, \dot{a}_G)]. \quad (1)$$

$\mathbb{P} \times \text{dom}(\dot{X})$  に対して  $M$  での Collection Principle を使うことで  $Q \in M$  で  $Q \subseteq \text{HS}$  であり

$$\forall p \in \mathbb{P}, \forall \dot{x} \in \text{dom}(\dot{X}), [(\exists \dot{y} \in \text{HS}) p \Vdash_{M, \mathbb{P}, \mathcal{F}} \varphi(\dot{x}, \dot{y}, \dot{a}) \Rightarrow (\exists \dot{y} \in Q) p \Vdash_{M, \mathbb{P}, \mathcal{F}} \varphi(\dot{x}, \dot{y}, \dot{a})]$$

なものをとれる.

$$\dot{Y} = Q \times \{1\}$$

とおく. 補題を使えば (1) が成り立っていることがわかる.

しかし, このままでは  $\dot{Y}$  が HS の元か分からない. そこで  $Q$  を  $\mathcal{G}$  の元で閉じるように膨らませる. 具体的には

$$\begin{aligned}
Q_0 &= Q \\
Q_{n+1} &= \{\pi(\dot{y}) : \dot{y} \in Q_n, \pi \in \mathcal{G}\} \quad (n \in \omega) \\
Q_\omega &= \bigcup_{n \in \omega} Q_n
\end{aligned}$$

とする. そして  $\dot{Y} = Q_\omega \times \{1\}$  と取り直せば,  $\text{sym}_{\mathcal{G}}(\dot{Y}) = \mathcal{G}$  となり,  $\dot{Y}$  は HS の元になる.

無限公理は  $\omega \in N$  より OK.

べき集合公理について. 示すべきは任意の  $a \in N$  について  $b \in N$  があって  $\mathcal{P}(a) \cap N \subseteq b$  である.  $a \in N$  を任意にとる.  $\dot{a} \in \text{HS}$  を  $\dot{a}_G = a$  なるようにとる.

$$Q = \{\dot{c} \in \text{HS} : \text{dom}(\dot{c}) \subseteq \text{dom}(\dot{a})\}$$

とおき,  $\dot{b} = Q \times \{1\}$  とおく.  $\dot{b} \in \text{HS}$  は  $\text{sym}_{\mathcal{G}}(\dot{a}) \subseteq \text{sym}_{\mathcal{G}}(\dot{b})$  に注意すればよい. 実際, 任意の  $\pi \in \text{sym}_{\mathcal{G}}(\dot{a})$

について

$$\begin{aligned}
\pi(\dot{b}) &= \pi\{\langle \dot{c}, 1 \rangle : \dot{c} \in \text{HS} \wedge \text{dom}(\dot{c}) \subseteq \text{dom}(\dot{a})\} \\
&= \{(\pi\dot{c}, 1) : \dot{c} \in \text{HS} \wedge \text{dom}(\dot{c}) \subseteq \text{dom}(\dot{a})\} \\
&= \{(\pi\dot{c}, 1) : \pi(\dot{c}) \in \pi\text{HS} \wedge \text{dom}(\pi(\dot{c})) \subseteq \text{dom}(\pi(\dot{a}))\} \\
&= \{(\pi\dot{c}, 1) : \pi(\dot{c}) \in \text{HS} \wedge \text{dom}(\pi(\dot{c})) \subseteq \text{dom}(\dot{a})\} \\
&= \{(\dot{c}, 1) : \dot{c} \in \text{HS} \wedge \text{dom}(\dot{c}) \subseteq \text{dom}(\dot{a})\} \\
&= \dot{b}
\end{aligned}$$

より OK.

$\mathcal{P}(a) \cap N \subseteq \dot{b}_G$  を示す.  $d \in \mathcal{P}(a) \cap N$  を固定する.  $\dot{d} \in \text{HS}$  で  $\dot{d}_G = d$  なるものをとる.  $d$  の name を作り替えて

$$\dot{c} = \{(\dot{x}, p) : \dot{x} \in \text{dom}(\dot{a}) \wedge p \Vdash \dot{x} \in \dot{d}\}$$

とする. すると  $\text{sym}_{\mathcal{G}}(\dot{a}) \cap \text{sym}_{\mathcal{G}}(\dot{d}) \subseteq \text{sym}_{\mathcal{G}}(\dot{c})$  が分かり,  $\dot{c} \in \text{HS}$  である. よって  $\dot{c} \in Q$ . また補題より  $\dot{c}_G = \dot{d}_G$  が分かる. よって  $d \in \dot{b}_G$ .  $\square$

#### 4.1 選択公理の独立性

この節ではある symmetric model において選択公理の否定が成り立つことを示す. 実際は, 実数のある部分無限集合  $A$  があり,  $\omega$  から  $A$  への単射が作れないこと (すなわち  $A$  は Dedekind 有限なこと) を示す.

$M$  を ZFC の可算推移的モデルとする.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P} &= \text{Fn}(\omega \times \omega, 2) \\
&= \{p : p \text{ は } \omega \times \omega \text{ から } 2 \text{ への有限な部分関数}\}
\end{aligned}$$

とおく. すなわち  $\mathbb{P}$  は可算個の実数を加える Cohen 強制である.

$\mathcal{G} = \text{Aut}(\omega)$  とおく.  $\pi \in \mathcal{G}$  は次のように  $\mathbb{P}$  上の自己同型を誘導する:

$$\begin{aligned}
\text{dom}(\pi(p)) &= \{(\pi(n), m) : (n, m) \in \text{dom}(p)\}, \\
\pi(p)(\pi(n), m) &= p(n, m).
\end{aligned}$$

これによって  $\mathcal{G} \subseteq \text{Aut}(\mathbb{P})$  と思う. 各有限集合  $e \subseteq \omega$  について

$$\text{fix}(e) = \{\pi \in \mathcal{G} : \forall n \in e, \pi(n) = n\}$$

とおく.  $\mathcal{F}$  を  $\text{fix}(e)$  たちによって生成されるフィルターとする. すなわち

$$\mathcal{F} = \{H \subseteq \mathcal{G} : H \text{ は } \mathcal{G} \text{ の部分群であり, ある有限な } e \subseteq \omega \text{ に対して } \text{fix}(e) \subseteq H\}$$

とおく.  $\mathcal{F}$  は  $\mathcal{G}$  上のノーマルフィルターである.

$M$  上の  $\mathbb{P}$  ジェネリックフィルター  $G$  をとる.  $\mathcal{G}$  と  $\mathcal{F}$  により, symmetric model  $N$  が定まる. この  $N$  で選択公理が成り立たないことを示す.

まず, 強制拡大で付け加わる各実数とその集合の名前を定義する.

$$\begin{aligned}
\dot{x}_n &= \{(\check{m}, p) : m \in \omega, p \in \mathbb{P}, p(n, m) = 1\} \\
\dot{A} &= \{(\dot{x}_n, 1) : n \in \omega\}
\end{aligned}$$

これらの名前を  $G$  で解釈すると

$$\begin{aligned} x_n &= \{m \in \omega : \exists p \in G, p(n, m) = 1\} \\ A &= \{x_n : n \in \omega\} \end{aligned}$$

となる.

$\dot{x}_n$  たちと  $\dot{A}$  は HS に属し, したがって,  $x_n$  たちと  $A$  は  $N$  に属する. なぜならば,  $\pi \in \mathcal{G}, n \in \omega$  に対して

$$\begin{aligned} \pi(\dot{x}_n) &= \{(\pi(\check{m}), \pi(p)) : m \in \omega, p \in \mathbb{P}, p(n, m) = 1\} \\ &= \{(\check{m}, \pi(p)) : m \in \omega, p \in \mathbb{P}, p(n, m) = 1\} \\ &= \{(\check{m}, p) : m \in \omega, p \in \mathbb{P}, (\pi^{-1}(p))(n, m) = 1\} \\ &= \{(\check{m}, p) : m \in \omega, p \in \mathbb{P}, p(\pi(n), m) = 1\} \\ &= \dot{x}_{\pi(n)} \end{aligned}$$

となり,  $\text{sym}(\dot{x}_n) = \text{fix}(\{n\}) \in \mathcal{F}$  となるからである.

$x_n$  たちは互いに異なる実数なことに注意する. よって  $N$  において  $A$  は無限集合である (無限集合であるという性質は  $\Pi_1$  であることに注意する).

$N$  において  $\omega$  から  $A$  への単射  $f$  が存在すると仮定する.  $f$  の name を  $\dot{f} \in \text{HS}$  とする. するとある  $p_0 \in G$  がとれて

$$p_0 \Vdash (\dot{f} : \check{\omega} \rightarrow \dot{A} \text{ 単射}).$$

$\text{fix}(e) \subseteq \text{sym}(\dot{f})$  なる有限集合  $e \subseteq \omega$  をとる.  $e$  が有限集合で  $f$  が単射なので,  $i \in \omega, p \in G, n \in \omega \setminus e$  がとれて

$$p \Vdash \dot{f}(\check{i}) = \dot{x}_n$$

となる.  $p \leq p_0$  としてよい.  $\pi \in \text{fix}(e)$  を  $\pi(p)$  と  $p$  が compatible かつ  $\pi(n) \neq n$  なるようにとる. これは  $n' \notin e$  かつ  $\forall m \in \omega, (n', m) \notin \text{dom}(p)$  なるように  $n' \in \omega$  をとり,  $n$  と  $n'$  を交換しそれ以外は動かさないような  $\pi$  をとればよい.

すると  $\pi \in \text{fix}(e) \subseteq \text{sym}(\dot{f})$  より  $\pi(\dot{f}) = \dot{f}$ . このとき

$$\pi p \Vdash (\pi(\dot{f}))(\pi(\check{i})) = \pi(\dot{x}_n)$$

より

$$\pi p \Vdash \dot{f}(\check{i}) = \dot{x}_{\pi(n)}.$$

すると  $p$  と  $\pi(p)$  の共通の拡大  $q = p \cup \pi(p)$  において

$$q \Vdash \dot{f}(\check{i}) = \dot{x}_n \wedge \dot{f}(\check{i}) = \dot{x}_{\pi(n)}$$

なので

$$q \Vdash \dot{f} \text{ は関数でない.}$$

$q \leq p_0$  だったのでこれは矛盾. □

## 5 OP が言えて OE が言えないモデル

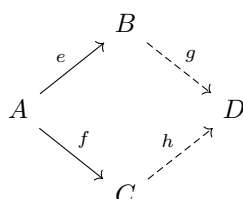
### 5.1 可算普遍均質半順序集合

可算な普遍均質半順序集合  $P$  の存在を証明する。

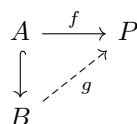
半順序集合  $P$  が普遍的とは任意の有限半順序集合が埋め込めることをいう。半順序集合  $P$  が均質的とは  $P$  の有限部分集合の間の任意の同型が  $P$  上の自己同型に延長できることをいう。

有限半順序集合全体のクラスは次の条件を満たす。

- (融合性)  $A, B, C$  を有限半順序集合とし、埋め込み  $e: A \rightarrow B, f: A \rightarrow C$  があれば、有限半順序集合  $D$  と埋め込み  $g: B \rightarrow D, h: C \rightarrow D$  があり、 $ge = hf$  を満たす。



$P$  が弱均質的とは、 $A, B$  を  $P$  の有限部分集合として、 $A \subseteq B$  かつ  $f: A \rightarrow P$  が埋め込みならば、埋め込み  $g: B \rightarrow P$  で  $f$  を延長するものが存在することをいう。



$P$  が均質的ならば明らかに弱均質的である。実は逆も成り立つ。

**補題 7.** 可算半順序が弱均質的ならば均質的。

証明.  $P$  を弱均質的な可算半順序とし、 $P = \{p_n : n \in \omega\}$  とおく。往復論法により有限集合  $P_n, Q_n \subseteq P$  と  $f_n: P_n \rightarrow Q_n$  同型を帰納的に作っていく。

$A, B \subseteq P$  有限集合と  $f: A \rightarrow B$  同型写像が与えられたとする。

最初のステップは  $P_0 = A, Q_0 = B, f_0 = f$  とする。

$2k$  まで構成できたとする。このとき  $P_{2k}$  にすでに  $p_k$  が入っていれば  $P_{2k+1} = P_{2k}, Q_{2k+1} = Q_{2k}, f_{2k+1} = f_{2k}$  とする。  $p_k$  が  $P_{2k}$  に入っていなければ  $P_{2k}$  と  $P_{2k} \cup \{p_k\}$  に対して弱均質性を使って  $f_{2k}: P_{2k} \rightarrow P$  埋め込みを延長する  $f_{2k+1}: P_{2k} \cup \{p_k\} \rightarrow P$  埋め込みをとる。  $f_{2k+1}$  の終域は  $P$  からその値域に直しておく。  $P_{2k+1} = P_{2k} \cup \{p_k\}, Q_{2k+1} = f_{2k+1}^{-1}(P_{2k+1})$  とおけばよい。この構成により  $p_k \in P_{2k+1}$  が保証される。

$2k+1$  から  $2k+2$  を作る部分も逆向きに同じことをすればよい。そうすれば、 $p_k \in Q_{2k+2}$  が保証される。

構成より  $\bigcup_{n \in \omega} P_n = \bigcup_{n \in \omega} Q_n = P$  であり、 $f^* = \bigcup_{n \in \omega} f_n$  は  $P$  上の自己同型になる。これは与えられた  $f_0 = f$  を延長している。  $\square$

**定理 8.** 可算な普遍均質半順序集合  $P$  が存在する。

証明. 有限半順序集合の鎖  $(P_i : i < \omega)$  を以下を満たすように作る:

もし  $A, B$  が有限半順序で  $A \subseteq B$  かつ埋め込み  $f : A \rightarrow P_i$  for some  $i \in \omega$  があれば,  
 $j > i$  と埋め込み  $g : B \rightarrow P_j$  で  $f$  を延長するものが存在する (2)

これが構成できたとする. このとき  $P = \bigcup_{i \in \omega} P_i$  とおく. 各  $P_i$  は有限なので  $P$  は可算である.  $P$  の普遍性は (2) で  $A = \emptyset$  とすることで得られる. また (2) より  $P$  が弱均質的なこともわかる. 実際,  $f : A \rightarrow P$  が埋め込みならば,  $A$  の有限性よりある  $i$  があって  $f : A \rightarrow P_i$  だからである. 補題 7 より  $P$  は均質的である.

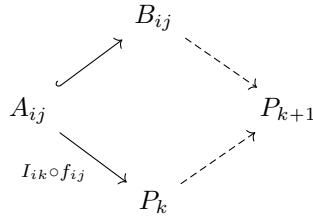
したがって (2) を満たす鎖の存在を示せばよい.  $\mathcal{S}$  を有限半順序集合  $A, B$  で  $A \subseteq B$  なるものの組  $(A, B)$  の可算集合とする. そのような組はすべて同型を除いて  $\mathcal{S}$  に入っているものとする.

全単射  $\pi : \omega \times \omega \rightarrow \omega$  で  $\pi(i, j) \geq i$  for all  $i, j$  なるものをとる.

$P_0$  は有限半順序集合なら何でもよい.

$P_k$  まで定義されたとする.  $(f, A, B)$  で  $(A, B) \in \mathcal{S}$  と  $f : A \rightarrow P_k$  を満たすものをすべて  $((f_{kj}, A_{kj}, B_{kj}) : j < \omega)$  とリストする.

$P_{k+1}$  を融合性を使って構成する.  $k = \pi(i, j)$  とすると  $P_{k+1}$  を  $B_{ij}$  と  $P_k$  の  $A_{ij}$  に関する融合とする.  $P_k \subseteq P_{k+1}$  となるように  $P_{k+1}$  の台集合を取り直す.



ただし図の  $I_{ik}$  は  $P_i$  から  $P_k$  への包含写像.

この構成で (2) が満たされることは明らかであろう. □

**補題 9.**  $(P, <)$  を可算普遍均質半順序集合とし,  $\mathcal{G}$  を  $P$  のすべての自己同型の全体のなす群とする.  $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{P}$  が有限集合ならば,

$$\text{fix}(E_1 \cap E_2) = [\text{fix}(E_1) \cup \text{fix}(E_2)].$$

証明. [TODO] □

構造  $(P, <, <)$  で  $<$  は半順序で,  $<$  は全順序なものを考える. このような構造の同型とは  $<$  と  $<$  をそれぞれ両方向に保つものである. 普遍均質構造を定義でき, 定理 8 と補題 9 について同様のことが成り立つ.

アトム集合  $A$  を可算とし,  $(A, <, <)$  が普遍均質構造となるような  $<$  と  $<$  をとる.  $G$  を  $(A, <, <)$  のすべての同型写像全体とする.  $I$  を  $A$  の有限集合全体からなるノーマルイデアルとする.  $\mathcal{V}$  を  $G$  と  $I$  から定まる permutation model とする.

**命題 10.** この  $\mathcal{V}$  において任意の集合は全順序付けできるが, 全順序に延長できない半順序が存在する.

証明. Mostowski モデルのときのように各  $x \in \mathcal{V}$  は最小のサポートを持ち, 単射で symmetric なクラス写像  $\mathcal{V} \rightarrow \text{On} \times I$  を得る. したがって, 任意の  $x \in \mathcal{V}$  は全順序付けできる.

$A$  の半順序  $<$  が  $\mathcal{V}$  の中で全順序に延長できないことを示そう. 背理法で,  $<^*$  を  $<$  の延長で  $\mathcal{V}$  の元としよう.  $<^*$  のサポートを  $E \subseteq A$  とする.

$a, b, c, d$  を次の条件を満たす  $A$  の元とする

- $a, b, c, d$  はすべて  $<$  と  $<^*$  の両方において  $E$  のどの元よりも大きい.
- $a < b < c < d$ .
- $a < c, d < b$  でありほかの組は比較不能.

$(A, <, <^*)$  が普遍均質なのでこのような  $a, b, c, d$  はとれる.

このとき  $a <^* b$  と  $b <^* a$  の両方が矛盾を導くことを言う.

もし,  $a >^* b$  ならば  $\pi \in \text{fix}(E)$  を  $\pi(a) = b, \pi(b) = c$  なるものとする.  $\pi$  は  $\pi \in \text{fix}(E) \subseteq \text{sym}(<^*)$  より  $<^*$  を保存するので,  $b >^* c$  を得る. 一方で  $a < c$  なので矛盾である.

もし,  $a <^* b$  だとする.  $\pi \in \text{fix}(E)$  を  $\pi(a) = b, \pi(b) = c$  なるものとする. すると  $\pi(a) <^* \pi(b)$  より  $b <^* c$ . また,  $\rho \in \text{fix}(E)$  を  $\rho(a) = c, \rho(b) = d$  なるものとする. すると  $\rho(a) <^* \rho(b)$  より  $c <^* d$ . したがって,  $b <^* c <^* d$  となり,  $d < b$  に矛盾.  $\square$

## 参考文献

- [1] T.J. Jech. *The Axiom of Choice*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2013.
- [2] L.J. Halbeisen. *Combinatorial Set Theory: With a Gentle Introduction to Forcing*. Springer Monographs in Mathematics. Springer London, 2011.
- [3] W. Hodges and S.M.S.W. Hodges. *A Shorter Model Theory*. Cambridge University Press, 1997.
- [4] K. Kunen. *Set Theory*. Studies in logic. College Publications, 2011.
- [5] alg-d. *permutation モデル*. <http://alg-d.com/math/ac/permutation.pdf>.
- [6] alg-d. *symmetric モデル*. <http://alg-d.com/math/ac/symmetric.pdf>.
- [7] Ulrich Felgner and John K Truss. “The independence of the prime ideal theorem from the order-extension principle”. In: *The Journal of Symbolic Logic* 64.1 (1999), pp. 199–215.