Davis のゲーム

でぃぐ (@fujidig)

2019 年 12 月 5 日

概要

閉集合から決まる無限ゲームには先手か後手のどちらかに必ず必勝法が存在する．この事実を使って，非可算な解析集合はすべて完全集合を含むことを示す．

1　解析集合について

定義 (ベール空間とカントール空間)**.** 自然数全体の集合 (0 を含める) を ω と書き，$2 = \{0, 1\}$ とおく．

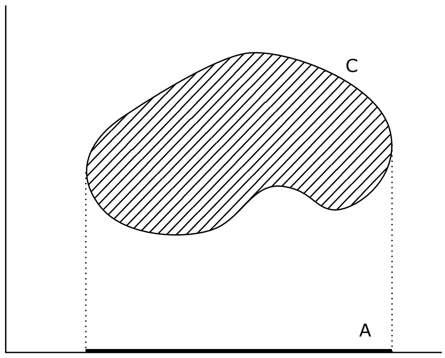
$$\mathcal{N} = \{f : f : \omega \to \omega\}$$
$$\mathcal{C} = \{f : f : \omega \to 2\}$$

とおき，それぞれを直積因子を離散空間 ω または 2 としたチコノフ直積と考えた位相を入れる．$\mathcal{N}$ を**ベール空間**，$\mathcal{C}$ を**カントール空間**という．

定義 (解析集合)**.** $A \subseteq \mathcal{N}$ が**解析集合**とはある閉集合 $C \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ が存在して，

$$A = p(C)$$

となることを言う．ここに $p : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ は第 1 成分への射影．



定義 (完全集合)**.** $A \subseteq \mathcal{N}$ が**完全集合**であるとは，それが閉集合であって孤立点を持たないことを言う．

事実 1. 完全集合は連続体濃度を持つ．

命題 2. 解析集合全体はボレル集合全体を含む．

証明.

$$\Gamma = \{A \subseteq \mathcal{N} : A \text{ と } A \text{ の補集合はともに解析集合 }\}$$

とおく．Γ がボレル集合全体を含むことを示せばよい (明らかに Γ は解析集合全体に含まれるので)．Γ が閉集合全体を含む σ 加法族であればよい．それには次の事実を示せば十分．

1. 閉集合と開集合はすべて解析集合．
2. 解析集合全体は可算和と可算共通部分で閉じている．

(1)．閉集合 C があれば，$C \times \mathcal{N}$ を考えれば，C は解析集合だと分かる．開集合は，閉集合の可算和として書ける ($\mathcal{N}$ は距離付け可能空間だから)．よって (2) より従う．

(2)．可算和について．$P_i\,(i \in \omega)$ たちを解析集合としそれぞれを閉集合 $Q_i \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ の射影とする．$Q = \bigcup_{i\in\omega}(Q_i \times \{i\}) \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N} \times \omega$ とおくと Q も閉集合である．$Q' \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ を

$$(\alpha, \beta) \in Q' \iff (\alpha, \beta^*, \beta(0)) \in Q$$

とおく．ただし β^* は β を数列としてみて 1 つ左にシフトしたもの．このとき Q' も閉集合でその射影は P_i たちの和集合になる．

可算共通部分について．$P_i\,(i \in \omega)$ たちを解析集合としそれぞれを閉集合 $Q_i \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ の射影とする．可算和のときと同様 Q を定める．このとき

$$\begin{aligned}
\alpha \in \bigcap_{i\in\omega} P_i &\iff \forall i \exists \beta((\alpha, \beta) \in Q_i) \\
&\iff \forall i \exists \beta((\alpha, \beta, i) \in Q) \\
&\iff \exists \gamma \forall i((\alpha, (\gamma)_i, i) \in Q) \qquad (*)
\end{aligned}$$

となり，$\forall i((\alpha, (\gamma)_i, i) \in Q)$ の部分は閉な関係であるので，$\bigcap_{i\in\omega} P_i$ は解析集合である．

ただし，ここでは $\mathcal{N}$ の可算個の元は 1 個の $\mathcal{N}$ の元でコードできることを考えて，そのコード γ から i 番目を取り出す関数を $(\gamma)_i$ と書いている．したがって (*) で使っているのは可算選択公理である． □

証明しないが，解析集合全体はボレル集合全体より真に大きい．

2　無限ゲームと Davis のゲーム

定義 (無限ゲーム)．$A \subseteq \mathcal{N}$ とする．二人のプレイヤー I, II が交互に自然数を言うゲームを考える．

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{I} & a_0 & & a_2 & & & \\
 & & \searrow \quad \nearrow & & \searrow & & \cdots \\
\mathrm{II} & & a_1 & & & a_3 &
\end{array}$$

このときプレイ後出来上がる実数 $\alpha = (a_0, a_1, a_2, b_3, \ldots) \in \mathcal{N}$ が A に属していれば I の勝ち，そうでければ II の勝ちとする．

I の戦略とは写像 $f : \bigcup_{n\in\omega} \omega^{2n} \to \omega$ のことである．**II の戦略**とは写像 $g : \bigcup_{n\in\omega} \omega^{2n+1} \to \omega$ のことである．I の戦略 f と II の戦略 g に対して，その**プレイ結果** $f * g$ とは

$$f * g = (a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$$

であって，

$$\begin{aligned}
a_{2n} &= f(a_0, a_1, \ldots, a_{2n-2}, a_{2n-1}) \\
a_{2n+1} &= g(a_0, a_1, \ldots, a_{2n-2}, a_{2n-1}, a_{2n})
\end{aligned}$$

を満たすもののことである．I の戦略 f が**必勝戦略**であるとは，どんな II の戦略 g に対しても $f * g \in A$ となることであり，II の戦略 g が**必勝戦略**であるとは，どんな I の戦略 f に対しても $f * g \notin A$ となることである．

I か II のどちらかに必勝戦略があるとき，A は**決定的**であるという．

事実 3. どんな閉集合 $A \subseteq \mathcal{N}$ も決定的である．

実はどんなボレル集合も決定的なことが言えるが，証明は大変である．

なお，「二人零和有限確定完全情報ゲームは決定的」という有名な事実がある．たとえば，将棋やチェスは決定的である．これは閉集合の決定性が含意する事実である．

定義 (Davis のゲーム)**.** $A \subseteq \mathcal{C}$ とする．二人のプレイヤー I, II がいて，I は有限の長さの二進列を言い，II は 0 か 1 かを言う．

$$\begin{array}{lccccc} \mathrm{I} & s_0 & & s_1 & & \\ & & \searrow \quad \nearrow & & \searrow & \cdots \\ \mathrm{II} & & \varepsilon_0 & & \varepsilon_1 & \end{array}$$

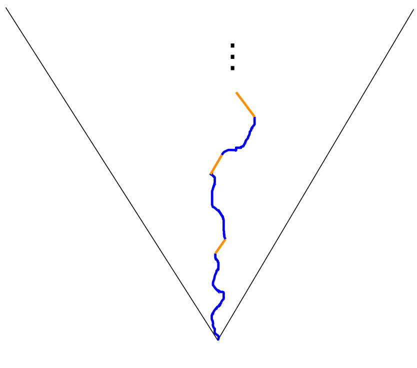
このゲームのルールは次の通り．

1. $s_i \in 2^{<\omega}, \varepsilon_i \in 2$.
2. $s_i {}^\frown (\varepsilon_i) \subseteq s_{i+1}$.

このルールを破ると先に破った方が負けである．このときプレイ後出来上がる二進列 $\alpha = \lim_{i\to\infty} s_i \in \mathcal{C}$ が A に属していれば I の勝ち，そうでければ II の勝ちとするゲーム $G^*(A)$ を考える．

戦略，必勝戦略，決定的などの概念は通常の無限ゲームと同様に定義する．このゲーム $G^*(A)$ を **Davis のゲーム**という．

Davis のゲームは二人で二進列を延長していって無限二進列を構成するゲームだが，II は 1bit しか付け加えらない．これを図示すると次のようになる．



命題 4. Davis のゲーム $G^*(A)$ について，I が必勝戦略を持つことの必要十分条件は A が非空な完全集合を持つこと．

証明. f が I の必勝戦略だとする．このとき

$$B = \{\alpha \in \mathcal{C} : \alpha \text{ はゲーム } G^*(A) \text{ における I が } f \text{ でプレイしたときのプレイ結果である }\}$$

このとき，B は完全集合となる．まず，空でないことは明らか．閉なことは，補集合が開なことを示せばよ

い．α が B に入らないならある番号で f のプレイに沿っていない結果になっている．するとその番号までは同じ任意の実数もやはり f に沿っていない結果になるので B の補集合は開である．II のプレイによって分岐が起こるので B は孤立点を含まないこともわかる．

逆に $C \subseteq A$ が完全集合だとしよう．C は閉集合なのでツリー T の幹として書ける:

$$C = [T] = \{\alpha : \forall n((\alpha(0), \ldots, \alpha(n-1)) \in T)\}.$$

これより I の必勝戦略を構成する．まず，初手 s_0 は $s_0{}^\frown(0)$ と $s_0{}^\frown(1)$ がともに T に入るようなものとする．そのような s_0 は必ず存在する．なぜならそうでないとしたら C が一点集合になるからである．II が ε_0 を打ってきたとき，s_1 は $s_1{}^\frown(0)$ と $s_1{}^\frown(1)$ がともに T に入るよう選ぶ．これも C が完全集合なので可能である．以降同様に戦略を定める．このとき II の戦略によらず，プレイ結果 α は C の元になる．C が T の幹であるからである．□

命題 5. Davis のゲーム $G^*(A)$ について，II が必勝戦略を持つことの必要十分条件は A が可算集合なこと．

証明. A が可算集合であれば対角線論法をすることで II は必勝戦略を持つ．つまり $A = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots\}$ ならば n 回目の手でプレイ結果が α_n と異なるようにする手を打てばよい．

逆に II の必勝戦略 g があるとする．

$$p = (s_0, \varepsilon_0, \ldots, s_{i-1}, \varepsilon_{i-1})$$

を g と整合的でかつルールを守ったプレイ経過だとする．

g は $\alpha \in \mathcal{C}$ を p で**拒否する**とは，次の 2 条件を満たすこととする．

- $\alpha \supseteq s_{i-1}{}^\frown(\varepsilon_{i-1})$.
- どんな s_i で $s_i \supseteq s_{i-1}{}^\frown(\varepsilon_{i-1})$ なものについても g は ε_i であって $\alpha \not\supseteq s_i{}^\frown(\varepsilon_i)$ なものを返す．

各 p について，ちょうど一つ α があって，g は α を p で拒否することに注意する．一つ目の条件より α の最初の方の桁は決まり，それ以降の桁は二つ目の条件より順次決まっていくからである．

したがって二進列 α であって g が α を**ある** p で拒否するようなものは可算個しかない．そこでどんな $\alpha \in A$ もある p で拒否されることを示せばよい．

$\alpha \in A$ とする．背理法で p で α を拒否するような p がないと仮定する．I の戦略を次で決める．まず初手については，g が α を $p = ()$ (空列) で拒否しないことから，s_0 がとれて $g(s_0) = \varepsilon_0$ について $\alpha \supseteq s_0{}^\frown(\varepsilon_0)$ となる．この s_0 を打つ．i 手目まで進んだとき，g が α を $p = (s_0, \varepsilon_0, \ldots, s_{i-1}, \varepsilon_{i-1})$ で拒否しないので，s_i がとれて $g(s_0, \varepsilon_0, \ldots, s_i) = \varepsilon_i$ について $\alpha \supseteq s_i{}^\frown(\varepsilon_i)$ となる．この s_i を打つ．この戦略でプレイすると I が勝ってしまう．これは g が II の必勝戦略であったことに矛盾．□

この二つの命題より，ボレル集合は決定的という結果を認めれば，$\mathcal{C}$ のボレル集合 A は非可算ならば空でない完全集合を持つことがわかる．これは，A から適当にボレル集合 $A^* \subseteq \mathcal{N}$ を作れば Davis のゲーム $G^*(A)$ に対応する (自然数を言い合う) 無限ゲーム $G(A^*)$ を作れるが，それが決定的であるので $G^*(A)$ も決定的で A は空でない完全集合を持つか可算であるかのどちらかが成り立つからである．

この議論を改良すれば「閉集合の決定性」から「解析集合は非可算ならば空でない完全集合を持つ」という結果を導くことができる．仮定は弱くなっているし，結論も強くなっていることに注意しよう．次の節でそれを行う．

3　unfolding trick

定義 (Davis のゲーム (unfold 版))．$C \subseteq \mathcal{C} \times \mathcal{N}$ とする．二人のプレイヤー I, II がいて，I は一つの自然数と任意の有限の長さの二進列とを言い，II は 0 か 1 かを言う．

$$
\begin{array}{llllll}
\mathrm{I} & (m_0, s_0) & & (m_1, s_1) & & \cdots \\
 & & \searrow \quad \nearrow & & \searrow & \\
\mathrm{II} & & \varepsilon_0 & & \varepsilon_1 &
\end{array}
$$

このゲームのルールは次の通り．

1. $m_i \in \omega, s_i \in 2^{<\omega}, \varepsilon_i \in 2$.
2. $s_i{}^\frown(\varepsilon_i) \subseteq s_{i+1}$.

このルールを破ると先に破った方が負けである．ルールを守ってプレイが続いた場合，$\alpha = s_0{}^\frown s_1{}^\frown \dots, \beta = (m_0, m_1, \dots)$ としたとき

$$(\alpha, \beta) \in C$$

ならば I の勝ちであり，そうでないとき II の勝ちである．

このゲームを $G^*_{\mathrm{unfold}}(C)$ と書くことにし，Davis のゲーム (unfold 版) ということにする．

$A = p(C)$ とおく (p は第 1 成分への射影).

通常の Davis ゲームと同様な命題が成り立つ:

命題 6. $G^*_{\mathrm{unfold}}(C)$ について，I が必勝戦略を持つならば A が非空な完全集合を持つ．

証明. 通常の Davis ゲームと同様の証明でできる．□

命題 7. $G^*_{\mathrm{unfold}}(C)$ について，II が必勝戦略を持つならば A は可算集合である．

証明. 通常の Davis ゲームと同様の証明でできる．実際にやってみよう．

II の必勝戦略 g があるとする．

$$p = (m_0, s_0, \varepsilon_0, \dots, m_{i-1}, s_{i-1}, \varepsilon_{i-1}, m_i)$$

を g と整合的でかつルールを守ったプレイ経過だとする．

g は $\alpha \in \mathcal{C}$ を p で**拒否する**とは，次の 2 条件を満たすこととする．

- $\alpha \supseteq s_{i-1}{}^\frown(\varepsilon_{i-1})$.
- どんな s_i で $s_i \supseteq s_{i-1}{}^\frown(\varepsilon_{i-1})$ なものについても g は ε_i であって $\alpha \not\supseteq s_i{}^\frown(\varepsilon_i)$ なものを返す．

各 p について，ちょうど一つ α があって，g は α を p で拒否することに注意する．一つ目の条件より α の最初の方の桁は決まり，それ以降の桁は二つ目の条件より順次決まっていくからである．

したがって二進列 α であって g が α を**ある** p で拒否するようなものは可算個しかない．そこでどんな $\alpha \in A$ もある p で拒否されることを示せばよい．

$\alpha \in A$ とする．背理法で p で α を拒否するような p がないと仮定する．$(\alpha, \beta) \in C$ となる β をとる．I の戦略を次で決める．まず初手については，m_0 は $m_0 = \beta(0)$ とする．g が α を $p = ()$ (空列) で拒否しないこと

から，s_0 がとれて $g(m_0, s_0) = \varepsilon_0$ について $\alpha \supseteq s_0{}^\frown(\varepsilon_0)$ となる．この m_0 と s_0 を打つ．i 手目まで進んだとき，m_i は $m_i = \beta(i)$ とする．g が α を $p = (m_0, s_0, \varepsilon_0, \ldots, m_{i-1}, s_{i-1}, \varepsilon_{i-1}, m_i)$ で拒否しないので，s_i がとれて $g(m_0, s_0, \varepsilon_0, \ldots, m_i, s_i) = \varepsilon_i$ について $\alpha \supseteq s_i{}^\frown(\varepsilon_i)$ となる．この s_i を打つ．この戦略でプレイすると I が勝ってしまう．これは g が II の必勝戦略であったことに矛盾． □

今，C が与えられたとき，$G^*_{\mathrm{unfold}}(C)$ と同等な (自然数を言い合う) 無限ゲーム $G(C^*)$ を作れ，C が閉集合なら C^* も閉集合なようにできる．すると $G(C^*)$ は決定的なのだから $G^*_{\mathrm{unfold}}(C)$ も決定的．したがって，二つの命題より C は非可算なら非空な完全集合を持つ．したがって次が得られた．

定理 8. 解析集合は非可算ならば空でない完全集合を持つ．

系 9. 解析集合は連続体仮説の反例にはなりえない．

証明. 事実 1 よりわかる． □

参考文献

[1] C.A. Rogers and London Mathematical Society. Analytic sets. London Mathematical Society Symposia Series. Academic Press, 1980.

[2] Y.N. Moschovakis. Descriptive Set Theory. Mathematical surveys and monographs. American Mathematical Society, 2009.