

# 強制法および連続体仮説の独立性 証明

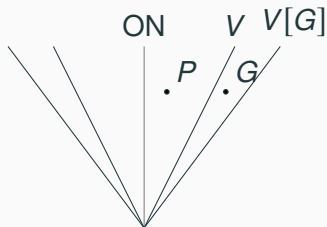
---

でいく

2020 年 1 月 23 日

# 強制法

強制法とは集合論のモデル  $V$  に理想元  $G$  を加えてより大きな集合論のモデル  $V[G]$  を作る技法である。



半順序集合  $(P, \leq)$  は理想元  $G$  の部品となる元  $p$  たちからなる。  $q \leq p$  は部品  $q$  が部品  $p$  より情報量が多いと解釈する。

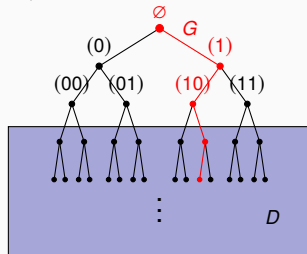
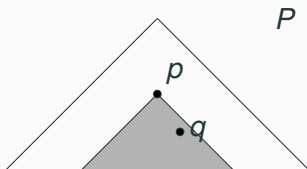
# ジェネリックフィルター

理想元  $G$  とは正確にはジェネリックフィルターのことである。つまり、以下をみたす  $(P, \leq)$  の部分集合である。

1.  $q \in G, q \leq p \Rightarrow p \in G$ .
2.  $p, q \in G \Rightarrow \exists r \in G, r \leq p, q$ .
3.  $D \in V$  かつ  $D \subset P$  が稠密集合ならば  $D \cap G \neq \emptyset$ .

ここに  $D \subset P$  が稠密集合とは  $\forall p \in P, \exists q \in D, q \leq p$  の意味。

$$P = \{0, 1\}^{<\omega}$$



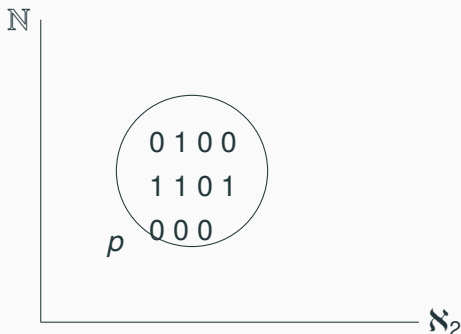
# コーエン強制

強制法を使って，連続体仮説の否定，つまり  $2^{\aleph_0} \geq \aleph_2$  が成り立つモデルを得たい．

半順序集合は

$$P = \{p : p : \aleph_2 \times \mathbb{N} \rightsquigarrow \{0, 1\} \text{ かつ } p \text{ は有限} \}$$

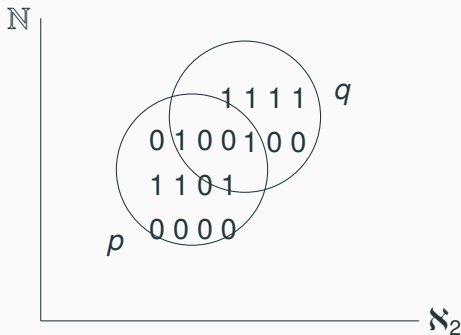
とする．順序  $q \leq p$  は  $q \supset p$  で定義する．



主張:  $g = \bigcup G : \aleph_2 \times \mathbb{N} \rightsquigarrow \{0, 1\}$

以後, この  $P$  に対するジェネリックフィルター  $G$  を固定する.

$g = \bigcup G$  とおくと,  $g$  は  $\aleph_2 \times \mathbb{N}$  から  $\{0, 1\}$  への部分関数となる. フィルターの貼り合わせ条件があるからである.

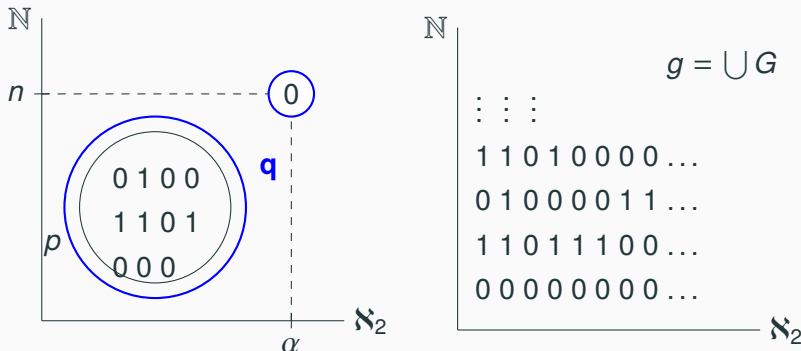


# 主張: $g = \bigcup G : \aleph_2 \times \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$

以下は  $V$  で定義できる  $P$  の稠密集合である:

$$D_{\alpha,n} = \{p \in P : (\alpha, n) \in \text{dom}(p)\} \quad (\text{for } \alpha \in \aleph_2, n \in \mathbb{N})$$

よってジェネリック性より  $D_{\alpha,n}$  と  $G$  は交わる. これより,  
 $g = \bigcup G$  が  $\aleph_2 \times \mathbb{N}$  から  $\{0, 1\}$  への全域関数なことが分かる.



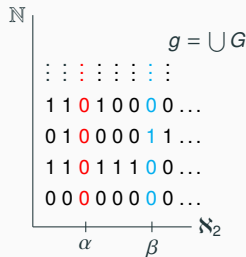
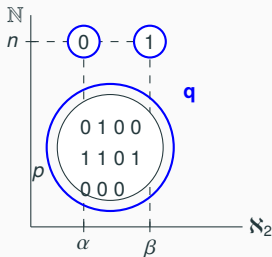
# 主張: 縦で切った切り口は互いに異なる

以下は  $V$  で定義できる  $P$  の稠密集合である:

$$E_{\alpha,\beta} = \{p \in P : \exists n \in \omega, p(\alpha, n) \neq p(\beta, n)\}$$

(for  $\alpha, \beta \in \aleph_2, \alpha \neq \beta$ )

よってジェネリック性より  $E_{\alpha,\beta}$  と  $G$  は交わる. これより, 実数  $x_\alpha : \omega \rightarrow \{0, 1\}$  を  $x_\alpha(n) = g(\alpha, n)$  で定義すると  $\alpha \neq \beta$  ならば  $x_\alpha \neq x_\beta$ .



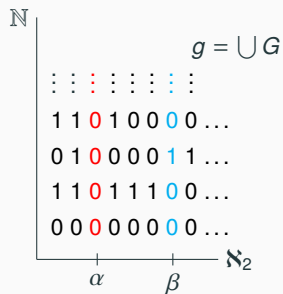
# 連続体仮説の否定の強制

したがって  $V[G]$  の中では  $(\aleph_2)^V = (\aleph_2)^{V[G]}$   
個の互いに異なる実数があるため

$$V[G] \models 2^{\aleph_0} \geq \aleph_2$$

である.

なお,  $(\aleph_2)^V = (\aleph_2)^{V[G]}$  が成り立つのは  
半順序集合  $P$  が可算鎖条件を満たすことによ





# References

---



K. Kunen. *Set Theory*. Studies in logic. College Publications, 2011.