2^I 上の null イデアルと meager イデアルが Baire supported なこと

でぃぐ (@fujidig)

2020/2/17

I を集合として，直積空間 2^I を考える．2^I の null イデアルと meager イデアルは Baire supported なことが知られている [1]．これを示す．

定義 1. 位相空間 X の Baire 集合とは clopen 集合で生成される σ 代数のことである．
$\mathcal{P}(X)$ 上のイデアル I が Baire supported とは

$$\forall A \in I \exists B \in I[A \subseteq B \wedge B \text{ は Baire 集合 }]$$

となることを言う．

1 可算直積測度

まず可算個の確率空間 (X_i, S_i, μ_i) $(i \in \omega)$ の直積確率空間の定義を述べる．

定義 2. $X^{(n)} = \prod_{i \geqslant n} X_i$ とおく．$E = A \times X^{(n)}$ で A は可測な $X_1 \times \cdots \times X_n$ の部分集合に対し，

$$\mu(E) = (\mu_1 \times \cdots \times \mu_n)(A)$$

と定める．これを拡張する一意な完備測度を $\prod_{i \in \omega} X_i$ の測度とする．

定理 3. 2^ω の meager イデアルは Baire supported である．

証明. 2^ω の測度は正則であり，2^ω の開集合は可算個の clopen 集合の共通部分で書けるので OK．2^ω の測度の正則性は，$\mathbb{R}$ のルベーグ測度が正則なことの証明 ([2] の定理 7.6) を修正すればよい． □

2 非可算直積測度

非可算個の確率空間 (X_i, S_i, μ_i) $(i \in I)$ の直積確率空間の定義を述べる．

定義 4. $X = \prod_{i \in I} X_i$ の部分集合 A で $A = \prod_{i \in I} A_i$ の形をしていて，A_i がすべて可測であり有限個を除いて A_i が全体集合 X_i になっているものを可測矩形と呼ぶ．可測矩形で生成される σ 代数 $\mathcal{R}$ を考える．
$A \subseteq X$ と $J \subseteq I$ に対し，A が J シリンダーであるとは

$$x, y \in X, x \upharpoonright J = y \upharpoonright J \Rightarrow (x \in A \Leftrightarrow y \in A)$$

となることを言う．

どんな $A \in \mathcal{R}$ についても，可算な J がとれて，A は J シリンダーとなる．そこで A の測度 $\mu(A)$ を

$$\mu(A) = \mu_{\prod_{j \in J} X_j}(A \upharpoonright J)$$

と定める．ここに $\prod_{j \in J} X_j$ 上の測度は第 1 節で定義したものである．

μ の完備化を改めて μ と書く．

定理 5. 2^I の null イデアルは Baire supported である．

証明. A を 2^I の零集合とする．このとき，完備化の定義より $B \in \mathcal{R}$ があり，$A \subseteq B$ かつ $\mu(B) = 0$．今，可算な $J \subseteq I$ があり，$\mu_{2^J}(B \upharpoonright J) = \mu(B) = 0$. 可算な添え字集合に対しては null イデアルが Baire supported であることは証明済みなので，$C \subseteq 2^J$ で Baire 集合なものがあり，$B \subseteq C$ かつ $\mu_{2^J}(C) = 0$．今，$A \subseteq C \times 2^{I \setminus J}$ で $C \times 2^{I \setminus J}$ は Baire 集合で，$\mu(C \times 2^{I \setminus J}) = 0$．よって示せた． □

3 meager イデアル

2^I の meager イデアルが Baire supported であることを示すには 2^I が ccc であることを使う．そこで ccc について軽く触れる．

定義 6. 位相空間 X が ccc とは disjont な開集合の族は必ず可算になることを言う．

補題 7. 位相空間の直積 $X = \prod_{i \in I} X_i$ について，添え字のどの有限部分集合 $J \subseteq I$ についても $\prod_{j \in J} X_j$ が ccc なら X も ccc である．

証明は [3] の Theorem III.2.8 を参照せよ．この補題より，2^I は ccc であることが分かる．

補題 8. X を位相空間とするとき次は同値.

1. X は ccc.
2. X の任意の非空開集合の族 $\mathcal{U}$ に対し，可算な $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ が存在し，$\bigcup \mathcal{U} \subseteq \overline{\bigcup \mathcal{V}}$.

証明は [4] を参照せよ.

補題 9. 2^I において，任意の稠密開集合 D に対して，稠密かつ clopen 集合の可算和で書ける集合 H で $H \subseteq D$ なるものがある．

証明. D を稠密開集合とする．$\mathcal{U} = \{H \subseteq D : H \text{ is clopen}\}$ とおく．すると補題 8 より $\{H_i : i \in \omega\} \subseteq \mathcal{U}$ が存在して，$\bigcup \mathcal{U} \subseteq \overline{\bigcup_{i \in \omega} H_i}$. ここで $H_i \subseteq D$ (for all i) より $\bigcup_{i \in \omega} H_i \subseteq D$. D が開集合なことから $\bigcup \mathcal{U} = D$ なので，$D \subseteq \overline{\bigcup_{i \in \omega} H_i}$. D が稠密なので，これは $\bigcup_{i \in \omega} H_i$ の稠密性を含意する．以上より $\bigcup_{i \in \omega} H_i$ が求めるべき集合である． □

定理 10. 2^I の meager イデアルは Baire supported である．

証明. M を meager 集合とし，$M = \bigcup_{i \in \omega} M_i$, 各 M_i は nowhere dense とする．$D_i = \overline{M_i}^c$ とおくと D_i は稠密開集合．よって補題 9 より clopen 集合の列 H_{ij} があって，$\bigcup_{j \in \omega} H_{ij} \subseteq D_i$ かつ $\bigcup_{j \in \omega} H_{ij}$ は稠密．そこで補集合をとり，$M_i \subseteq \overline{M_i} \subseteq \bigcap_{j \in \omega} H_{ij}^c$. ここで $\bigcap_{j \in \omega} H_{ij}^c$ は nowhere dense である．今和集合をとると，$M = \bigcup_{i \in \omega} M_i \subseteq \bigcup_{i \in \omega} \bigcap_{j \in \omega} H_{ij}^c$. 右辺は meager な Baire 集合である． □

4　謝辞

meager イデアルが Baire supported なことの証明は残響氏の手助けを得た.

参考文献

[1] Kenneth KUNEN. “CHAPTER 20 - Random and Cohen Reals”. In: *Handbook of Set-Theoretic Topology*. Ed. by Kenneth KUNEN and Jerry E. VAUGHAN. Amsterdam: North-Holland, 1984, pp. 887–911.

[2] 伊藤清三. ルベーグ積分入門. 数学選書. 裳華房, 2017.

[3] K. Kunen. *Set Theory*. Studies in logic. College Publications, 2011.

[4] Dan Ma. *Another characterization about CCC spaces — Dan Ma's Topology Blog*. `https://dantopology.wordpress.com/2014/02/28/another-characterization-about-ccc-spaces/`.

[5] P.R. Halmos. *Measure Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1976.