



# Suslin木を 壊しまくる話

でいぐ

2021年9月19日

第2回すうがく徒のつどい@オンライン

# 目次

- ① Suslin 直線と Suslin 木
- ② 相対化と絶対性
- ③ 1 ステップの強制法
- ④ 2 ステップの強制法
- ⑤ 有限台反復強制法
- ⑥ Suslin 木を壊しまくる話
- ⑦ 関連する話題

# 注意

- ① 本発表では常に ZFC を仮定する。

# 順序数について

本発表では**順序数**を至るところで使う。定義を知らない人は、順序数とは「整列集合を順序同型で同一視したときの代表元」と思おう！

# 順序数について

本発表では順序数を至るところで使う。定義を知らない人は、順序数とは「整列集合を順序同型で同一視したときの代表元」と思おう！

$\omega$  は自然数全体がなす整列集合に対応する順序数である（集合論的にはこれが自然数全体そのものである！）。

$\omega_1$  は濃度が非可算となる最小の順序数である。

$\omega_2$  は濃度が  $\omega_1$  より真に大きな最小の順序数である。

# 順序数について

本発表では順序数を至るところで使う。定義を知らない人は、順序数とは「整列集合を順序同型で同一視したときの代表元」と思おう！

$\omega$  は自然数全体がなす整列集合に対応する順序数である（集合論的にはこれが自然数全体そのものである！）。

$\omega_1$  は濃度が非可算となる最小の順序数である。

$\omega_2$  は濃度が  $\omega_1$  より真に大きな最小の順序数である。

$\omega_1$  に馴染みがない人は、 $\mathbb{R}$  に整列定理で整列順序を入れて、その始切片で非可算になる最小のものに対応するのが  $\omega_1$  と思おう。

# 順序数について

本発表では**順序数**を至るところで使う。定義を知らない人は、順序数とは「整列集合を順序同型で同一視したときの代表元」と思おう！

$\omega$  は自然数全体がなす整列集合に対応する順序数である（集合論的にはこれが自然数全体そのものである！）。

$\omega_1$  は濃度が非可算となる最小の順序数である。

$\omega_2$  は濃度が  $\omega_1$  より真に大きな最小の順序数である。

$\omega_1$  に馴染みがない人は、 $\mathbb{R}$  に整列定理で整列順序を入れて、その始切片で非可算になる最小のものに対応するのが  $\omega_1$  と思おう。

順序数全体のクラスを  $\text{On}$  と書く。

# 基數について

集合  $X$  に対してそれと全単射がつく最小の順序数を  $X$  の濃度と定め,  $|X|$  と書く.

# 基数について

集合  $X$  に対してそれと全単射がつく最小の順序数を  $X$  の濃度と定め,  $|X|$  と書く.

ある集合の濃度になる順序数を 基数 という. すなわち  $\alpha$  が基数なことは,  $\alpha$  より真に小さい順序数と  $\alpha$  との間に全単射が存在しないことを意味する.

# 基数について

集合  $X$  に対してそれと全単射がつく最小の順序数を  $X$  の濃度と定め,  $|X|$  と書く.

ある集合の濃度になる順序数を 基数 という. すなわち  $\alpha$  が基数なことは,  $\alpha$  より真に小さい順序数と  $\alpha$  との間に全単射が存在しないことを意味する.

$\omega, \omega_1, \omega_2$  などは基数であるが, 基数であるという意味を強調したいときは, これらをそれぞれ  $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2$  などと書く.

A photograph of a two-lane asphalt road curving through a hilly landscape. The road is marked with white dashed lines. The surrounding terrain is covered in lush green grass and trees, with distant mountains visible under a clear blue sky.

# 第1節 Suslin 直線と Suslin 木

# 実数直線の特徴づけ

順序集合としての実数直線  $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, <)$  は次の 3 つの性質で特徴づけられる.

- ① 端点のない稠密な全順序,
- ② 順序完備,
- ③ 可分である (すなわち, 可算な稠密集合が存在する).

# 実数直線の特徴づけ

3つ目の条件を ccc に直してもまだ  $\mathbb{R}$  を特徴付けているだろうか？

- ① 端点のない稠密な全順序,
- ② 順序完備,
- ③ ccc を満たす (すなわち, 互いに素な開区間を非可算個は取れない).

# 実数直線の特徴づけ

上の条件で  $\mathbb{R}$  は特徴付けられていないということの証拠を与える順序集合を **Suslin 直線** と呼ぶ。すなわち、次の 4 条件を満たす順序集合を Suslin 直線と言う。

- ① 端点のない稠密な全順序,
- ② 順序完備,
- ③ 可分では**ない**,
- ④ ccc を満たす

# Suslin 直線は存在するか？

「Suslin 直線は存在する」は ZFC 独立な命題である！

# Suslin 直線は存在するか？

「Suslin 直線は存在する」は ZFC 独立な命題である！

すなわち，ZFC が無矛盾であれば「ZFC+Suslin 直線は存在する」も「ZFC+Suslin 直線は存在しない」も無矛盾である。

# Suslin 直線は存在するか？

「Suslin 直線は存在する」は ZFC 独立な命題である！

すなわち，ZFC が無矛盾であれば「ZFC+Suslin 直線は存在する」も「ZFC+Suslin 直線は存在しない」も無矛盾である。

「ZFC+Suslin 直線は存在する」の無矛盾性は Gödel の構成可能宇宙により得られる（なお，Cohen 強制など別の方法でも出来ることが知られている）。

# Suslin 直線は存在するか？

「Suslin 直線は存在する」は ZFC 独立な命題である！

すなわち，ZFC が無矛盾であれば「ZFC+Suslin 直線は存在する」も「ZFC+Suslin 直線は存在しない」も無矛盾である。

「ZFC+Suslin 直線は存在する」の無矛盾性は Gödel の構成可能宇宙により得られる（なお，Cohen 強制など別の方法でも出来ることが知られている）。

「ZFC+Suslin 直線は存在しない」の無矛盾性には反復強制法を使い，本稿で扱う。

# Suslin 直線と Suslin 木

Suslin 直線の存在性を，より組合せ論的に扱いやすい **Suslin 木** の存在性に翻訳することができる．

# 木の定義

$(T, <)$  を順序集合とする。 $t \in T$  に対して  
 $t\downarrow = \{s \in T : s < t\}$ ,  $t\uparrow = \{s \in T : s > t\}$  とおく。

$(T, <)$  は次の条件を満たすとき木という：

任意の  $t \in T$  に対して  $t\downarrow$  が  $<$  に関して整列集合

# 木の高さの定義

$T$  を木,  $t \in T$  とする.  $t$  の高さとは  $t \downarrow$  の順序型のことである.

$T$  の高さ  $\text{height}(T)$  とは

$$\text{height}(T) = \min\{\alpha \in \text{On} : T \text{ の高さ } \alpha \text{ の元が存在しない}\}$$

のことである.

## ccc の定義

$P$  を半順序集合とする。

$x, y \in P$  に対して  $x \perp y$  ( $x$  と  $y$  は両立しない) を  $z \leq x$ かつ  $z \leq y$  となる  $z \in P$  が存在しないこととして定める。

## ccc の定義

$P$  を半順序集合とする。

$x, y \in P$  に対して  $x \perp y$  ( $x$  と  $y$  は両立しない) を  $z \leq x$ かつ  $z \leq y$  となる  $z \in P$  が存在しないこととして定める。

$A \subseteq P$  が反鎖であるとは  $(\forall x, y \in A)(x \perp y)$  のこと。

## ccc の定義

$P$  を半順序集合とする。

$x, y \in P$  に対して  $x \perp y$  ( $x$  と  $y$  は両立しない) を  $z \leq x$ かつ  $z \leq y$  となる  $z \in P$  が存在しないこととして定める。

$A \subseteq P$  が反鎖であるとは  $(\forall x, y \in A)(x \perp y)$  のこと。

$P$  のどの反鎖もたかだか可算なとき  $P$  は ccc を満たすと  
いう。

## ccc の定義

$P$  を半順序集合とする。

$x, y \in P$  に対して  $x \perp y$  ( $x$  と  $y$  は両立しない) を  $z \leq x$ かつ  $z \leq y$  となる  $z \in P$  が存在しないこととして定める。

$A \subseteq P$  が反鎖であるとは  $(\forall x, y \in A)(x \perp y)$  のこと。

$P$  のどの反鎖もたかだか可算なとき  $P$  は ccc を満たすと  
いう。

木  $(T, <)$  は等号付きの逆向きの順序  $\geq$  について ccc のとき  
ccc という。

# ccc の定義

$P$  を半順序集合とする。

$x, y \in P$  に対して  $x \perp y$  ( $x$  と  $y$  は両立しない) を  $z \leq x$ かつ  $z \leq y$  となる  $z \in P$  が存在しないこととして定める。

$A \subseteq P$  が反鎖であるとは  $(\forall x, y \in A)(x \perp y)$  のこと。

$P$  のどの反鎖もたかだか可算なとき  $P$  は ccc を満たすと  
いう。

木  $(T, <)$  は等号付きの逆向きの順序  $\geq$  について ccc のとき  
ccc という。

位相空間  $X$  が ccc というのは、開集合系から空集合を除いた半順序集合  $(\mathcal{O}(X) \setminus \{\emptyset\}, \subseteq)$  が ccc のとき ccc であると言われる。Suslin 直線の定義のときに出てきた ccc はこの意味である。

# Suslin木の定義

木  $T$  が次の 3 条件を満たすとき **Suslin 木** という:

- ①  $T$  の高さは  $\omega_1$
- ②  $T$  は ccc を満たす (すなわち  $T$  の反鎖は必ず可算)
- ③  $T$  の鎖 (全順序部分集合) は必ず可算

# Suslin 直線の存在 iff Suslin 木の存在

## 定理

次は同値:

- ① Suslin 直線が存在する.
- ② Suslin 木が存在する.

(2) ならば (1) の証明はサクラさんの発表で扱われた.

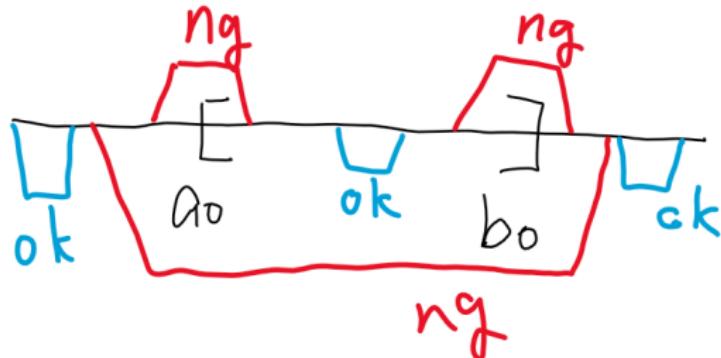
(1) ならば (2) の証明をこれから行おう.

# Suslin 直線が存在すれば Suslin 木も存在する

$(X, <)$  を Suslin 直線とする.  $\alpha < \omega_1$  に関する再帰で  $a_\alpha, b_\alpha \in X$  を次を満たすようにとる.

①  $a_\alpha < b_\alpha$

②  $\xi < \alpha$  ならば  $a_\xi \notin [a_\alpha, b_\alpha]$ かつ  $b_\xi \notin [a_\alpha, b_\alpha]$



# Suslin 直線が存在すれば Suslin 木も存在する

$(X, <)$  を Suslin 直線とする.  $\alpha < \omega_1$  に関する再帰で  $a_\alpha, b_\alpha \in X$  を次を満たすようにとる.

①  $a_\alpha < b_\alpha$

②  $\xi < \alpha$  ならば  $a_\xi \notin [a_\alpha, b_\alpha]$  かつ  $b_\xi \notin [a_\alpha, b_\alpha]$

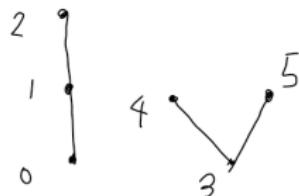
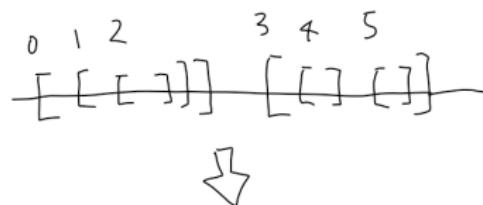
これが可能なことを見る.  $\alpha$  未満まで構成できたとして,  $a_\alpha, b_\alpha$  を構成する.  $A = \{a_\xi : \xi < \alpha\} \cup \{b_\xi : \xi < \alpha\}$  は可算集合. よって  $X$  が可分でなかったことより,  $A$  は  $X$  で稠密でない. すなわち, ある  $(c_\alpha, d_\alpha)$  があり,  $A$  と交わらない.  $X$  の自己稠密性より  $c_\alpha < a_\alpha < b_\alpha < d_\alpha$  なる  $a_\alpha, b_\alpha \in X$  をとれる. これが条件を満たす. //

# Suslin 直線が存在すれば Suslin 木も存在する

$T$  を集合として  $T = \omega_1$  とおき、木の順序  $\sqsubset$  を

$$\xi \sqsubset \alpha : \iff [a_\alpha, b_\alpha] \subseteq (a_\xi, b_\xi)$$

で定める。



# Suslin 直線が存在すれば Suslin 木も存在する

定義:  $\xi \sqsubset \alpha : \iff [a_\alpha, b_\alpha] \subseteq (a_\xi, b_\xi)$ . まず構成より分かる注意として,

$$\xi < \alpha \rightarrow [a_\alpha, b_\alpha] \subseteq (a_\xi, b_\xi) \text{ または } [a_\alpha, b_\alpha] \cap [a_\xi, b_\xi] = \emptyset$$

である.

# Suslin 直線が存在すれば Suslin 木も存在する

定義:  $\xi \sqsubset \alpha : \iff [a_\alpha, b_\alpha] \subseteq (a_\xi, b_\xi)$ . まず構成より分かる注意として,

$$\xi < \alpha \rightarrow [a_\alpha, b_\alpha] \subseteq (a_\xi, b_\xi) \text{ または } [a_\alpha, b_\alpha] \cap [a_\xi, b_\xi] = \emptyset$$

である.

任意の  $\alpha \in T$  について  $\alpha \downarrow$  が全順序なことを言おう.

$\eta, \xi \in \alpha \downarrow$  とすると,  $[a_\eta, b_\eta]$  と  $[a_\xi, b_\xi]$  は交わる (どちらも  $[a_\alpha, b_\alpha]$  を含むから). よって上の注意から,  $\xi < \eta$  なら  $\xi \sqsubset \eta$ ,  $\eta < \xi$  なら  $\eta \sqsubset \xi$  である.

# Suslin 直線が存在すれば Suslin 木も存在する

定義:  $\xi \sqsubset \alpha : \iff [a_\alpha, b_\alpha] \subseteq (a_\xi, b_\xi)$ . まず構成より分かる注意として,

$$\xi < \alpha \rightarrow [a_\alpha, b_\alpha] \subseteq (a_\xi, b_\xi) \text{ または } [a_\alpha, b_\alpha] \cap [a_\xi, b_\xi] = \emptyset$$

である.

任意の  $\alpha \in T$  について  $\alpha \downarrow$  が全順序なことを言おう.

$\eta, \xi \in \alpha \downarrow$  とすると,  $[a_\eta, b_\eta]$  と  $[a_\xi, b_\xi]$  は交わる (どちらも  $[a_\alpha, b_\alpha]$  を含むから). よって上の注意から,  $\xi < \eta$  なら  $\xi \sqsubset \eta$ ,  $\eta < \xi$  なら  $\eta \sqsubset \xi$  である.

$\xi \sqsubset \alpha$  ならば  $\sqsubset$  の定義と上の注意より  $\xi < \alpha$  なので, 任意の  $\alpha \in T$  について  $\alpha \downarrow$  は  $\sqsubset$  は整列している.

# Suslin 直線が存在すれば Suslin 木も存在する

$\sqsubset$  の非反射性、推移性はすぐに分かるので、 $(\omega_1, \sqsubset)$  は木である。

# Suslin 直線が存在すれば Suslin 木も存在する

$\sqsubset$  の非反射性、推移性はすぐに分かるので、 $(\omega_1, \sqsubset)$  は木である。

鎖のサイズが必ず可算なことを示す。 $C = \{\alpha_\mu : \mu < \omega_1\}$  を  
 $\alpha_0 \sqsubset \alpha_1 \sqsubset \dots$  なる鎖とする。すると  
 $(a_{\alpha_\mu}, b_{\alpha_\mu}) \setminus [a_{\alpha_{\mu+1}}, b_{\alpha_{\mu+1}}]$  for  $\mu < \omega_1$  は disjoint な非空開集合。  
これは  $X$  が ccc なことに反する。

# Suslin 直線が存在すれば Suslin 木も存在する

反鎖のサイズが必ず可算なことを示す。 $A \subseteq \omega_1$  を  $\square$  の反鎖とする。すると注意より， $[a_\alpha, b_\alpha]$  for  $\alpha \in A$  は pairwise disjoint である。 $X$  自己稠密より  $[a_\alpha, b_\alpha]$  より小さい開区間をとれる。したがって， $X$ : ccc より  $A$  は可算。

# Suslin 直線が存在すれば Suslin 木も存在する

反鎖のサイズが必ず可算なことを示す。 $A \subseteq \omega_1$  を  $\square$  の反鎖とする。すると注意より， $[a_\alpha, b_\alpha]$  for  $\alpha \in A$  は pairwise disjoint である。 $X$  自己稠密より  $[a_\alpha, b_\alpha]$  より小さい開区間をとれる。したがって， $X$ : ccc より  $A$  は可算。

最後に  $(T, \square)$  の高さ  $\omega_1$  なことを示す。どの鎖も可算なので  $\text{height}(T) \leq \omega_1$  である。どの反鎖も可算なので，特にどのレベルも可算。よって， $|T| = \aleph_1$  より  $\text{height}(T) \geq \omega_1$  である。したがって， $\text{height}(T) = \omega_1$ .  $\square$

# これからの節でやることの概観

Suslin 直線のない ZFC のモデルを作りたい。そのためには、  
Suslin 木のない ZFC のモデルを作ればよい。

# これからの節でやることの概観

Suslin 直線のない ZFC のモデルを作りたい。そのためには、  
Suslin 木のない ZFC のモデルを作ればよい。

まず、ZFC のモデルを強制法で拡大して、任意に持ってきた一つの Suslin 木が拡大した方ではもはや Suslin 木ではなくなっているようにできることを見る。

# これからの節でやることの概観

Suslin 直線のない ZFC のモデルを作りたい。そのためには、  
Suslin 木のない ZFC のモデルを作ればよい。

まず、ZFC のモデルを強制法で拡大して、任意に持ってきた一つの Suslin 木が拡大した方ではもはや Suslin 木ではなくなっているようにできることを見る。

そして強制法を繰り返し使って、Suslin 木が一つもない ZFC のモデルを作る。

## 第2節 相対化と絶対性



# 推移的集合

集合  $X$  は

$$y \in x \text{かつ} x \in X \text{ならば} y \in X$$

を満たすとき**推移的**と言われる。言い換えれば、「 $x \in X$  ならば  $x \subseteq X$ 」ということである。

# 相対化

$\varphi$  を集合論の言語の論理式とする。 $\varphi^M$  を  $\varphi$  の中の全部の  $\forall$  と  $\exists$  を  $M$  で bound した論理式を表す。これを  $\varphi$  の  $M$  への **相対化** という。

# 相対化の例

## 無限公理

$$(\exists x)(\emptyset \in x \wedge (\forall y)(y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x))$$

の  $M$  への相対化は

$$(\exists x \in M)(\emptyset \in x \wedge (\forall y \in M)(y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x))$$

である。

本当は  $\emptyset$  や  $\cup$ ,  $\{x\}$  という部分も相対化しないといけないが, 後のスライドで見るようこれらは絶対的なのでそのままよい.

# 絶対性

$M \subseteq N$  を推移的集合（または推移的クラス）とする。論理式  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  が  $M$  と  $N$  の間で絶対的であるとは

$$(\forall x_1, \dots, x_n \in M)(\varphi^M(x_1, \dots, x_n) \iff \varphi^N(x_1, \dots, x_n))$$

であることを言う。

# 絶対性

$M \subseteq N$  を推移的集合（または推移的クラス）とする。論理式  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  が  $M$  と  $N$  の間で絶対的であるとは

$$(\forall x_1, \dots, x_n \in M)(\varphi^M(x_1, \dots, x_n) \iff \varphi^N(x_1, \dots, x_n))$$

であることを言う。 $\varphi$  が  $M$  と  $N$  の間で上向き絶対的であるとは

$$(\forall x_1, \dots, x_n \in M)(\varphi^M(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \varphi^N(x_1, \dots, x_n))$$

であることを言い、 $\varphi$  が  $M$  と  $N$  の間で下向き絶対的であるとは

$$(\forall x_1, \dots, x_n \in M)(\varphi^M(x_1, \dots, x_n) \leftarrow \varphi^N(x_1, \dots, x_n))$$

であることを言う。

# 絶対性の例

次の概念(を表す論理式)は(推移的な集合 or クラスの間で)  
常に絶対的:

①  $x$  は空集合

②  $x \subseteq y$

③  $z = \{x, y\}$

④  $z = x \cup y$

⑤  $z = x \times y$

などなど.

# 絶対性の例

次の概念(を表す論理式)は ZFC の適当な有限部分を満たす  
推移的集合 or クラスの間で絶対的:

- ①  $x$  は順序数
  - ②  $x$  は自然数
  - ③  $x = \omega$
- などなど.

## 絶対的でない例

「 $y$  は  $x$  の冪集合である」や「 $y = \aleph_x$ 」などは絶対的でない。

「 $x$  は基数である」は下向き絶対的である（が絶対的でない）。

# 上向き絶対性・下向き絶対性

$\psi(x_1, \dots, x_n, y)$  が絶対的な論理式ならば,

- ①  $(\exists y)\varphi(x_1, \dots, x_n, y)$  は上向き絶対的である.
- ②  $(\forall y)\varphi(x_1, \dots, x_n, y)$  は下向き絶対的である.

## 代数や幾何などからの例 (今後出てきません)

このページでは単に絶対的と言ったら ZFC の推移的モデルの間で絶対的であるという意味とする。

# 代数や幾何などからの例 (今後出てきません)

このページでは単に絶対的と言ったら ZFC の推移的モデルの間で絶対的であるという意味とする。

- ① 「 $(R, +, \cdot, 0, 1)$  は可換環である」は絶対的

# 代数や幾何などからの例 (今後出てきません)

このページでは単に絶対的と言ったら ZFC の推移的モデルの間で絶対的であるという意味とする。

- ① 「 $(R, +, \cdot, 0, 1)$  は可換環である」は絶対的
- ② 「 $(X, \mathcal{O})$  は位相空間である」は下向き絶対的 (だが絶対的ではない)

## 代数や幾何などからの例 (今後出てきません)

このページでは単に絶対的と言ったら ZFC の推移的モデルの間で絶対的であるという意味とする。

- ① 「 $(R, +, \cdot, 0, 1)$  は可換環である」は絶対的
- ② 「 $(X, \mathcal{O})$  は位相空間である」は下向き絶対的 (だが絶対的ではない)
- ③ 「可換環  $R$  が体である」 や 「可換環  $R$  が整域である」は絶対的

# 代数や幾何などからの例 (今後出てきません)

このページでは単に絶対的と言ったら ZFC の推移的モデルの間で絶対的であるという意味とする。

- ① 「 $(R, +, \cdot, 0, 1)$  は可換環である」は絶対的
- ② 「 $(X, \mathcal{O})$  は位相空間である」は下向き絶対的 (だが絶対的ではない)
- ③ 「可換環  $R$  が体である」や「可換環  $R$  が整域である」は絶対的
- ④ 「可換環  $R$  が局所環である」は絶対的

# 代数や幾何などからの例 (今後出てきません)

このページでは単に絶対的と言ったら ZFC の推移的モデルの間で絶対的であるという意味とする。

- ① 「 $(R, +, \cdot, 0, 1)$  は可換環である」は絶対的
- ② 「 $(X, \mathcal{O})$  は位相空間である」は下向き絶対的 (だが絶対的ではない)
- ③ 「可換環  $R$  が体である」や「可換環  $R$  が整域である」は絶対的
- ④ 「可換環  $R$  が局所環である」は絶対的
- ⑤ 「 $R$  加群  $M$  が自由である」は上向き絶対的 (だが絶対的ではない)

# 代数や幾何などからの例 (今後出てきません)

このページでは単に絶対的と言ったら ZFC の推移的モデルの間で絶対的であるという意味とする。

- ① 「 $(R, +, \cdot, 0, 1)$  は可換環である」は絶対的
- ② 「 $(X, \mathcal{O})$  は位相空間である」は下向き絶対的 (だが絶対的ではない)
- ③ 「可換環  $R$  が体である」 や 「可換環  $R$  が整域である」は絶対的
- ④ 「可換環  $R$  が局所環である」は絶対的
- ⑤ 「 $R$  加群  $M$  が自由である」は上向き絶対的 (だが絶対的ではない)
- ⑥ 「可換環  $R$  がネーター環である」 や 「可換環  $R$  が PID である」はともに絶対的 (!) [Wof21]

# 重要な例

$\aleph_1$  が絶対的な 2 つのモデルの間で次が成り立つ.

# 重要な例

$\aleph_1$  が絶対的な 2 つのモデルの間で次が成り立つ.

- ① 「 $(T, <)$  は木である」は絶対的

# 重要な例

$\aleph_1$  が絶対的な 2 つのモデルの間で次が成り立つ.

- ① 「 $(T, <)$  は木である」は絶対的
- ② 「半順序集合  $(P, \leq)$  は ccc を満たす」は下向き絶対的

# 重要な例

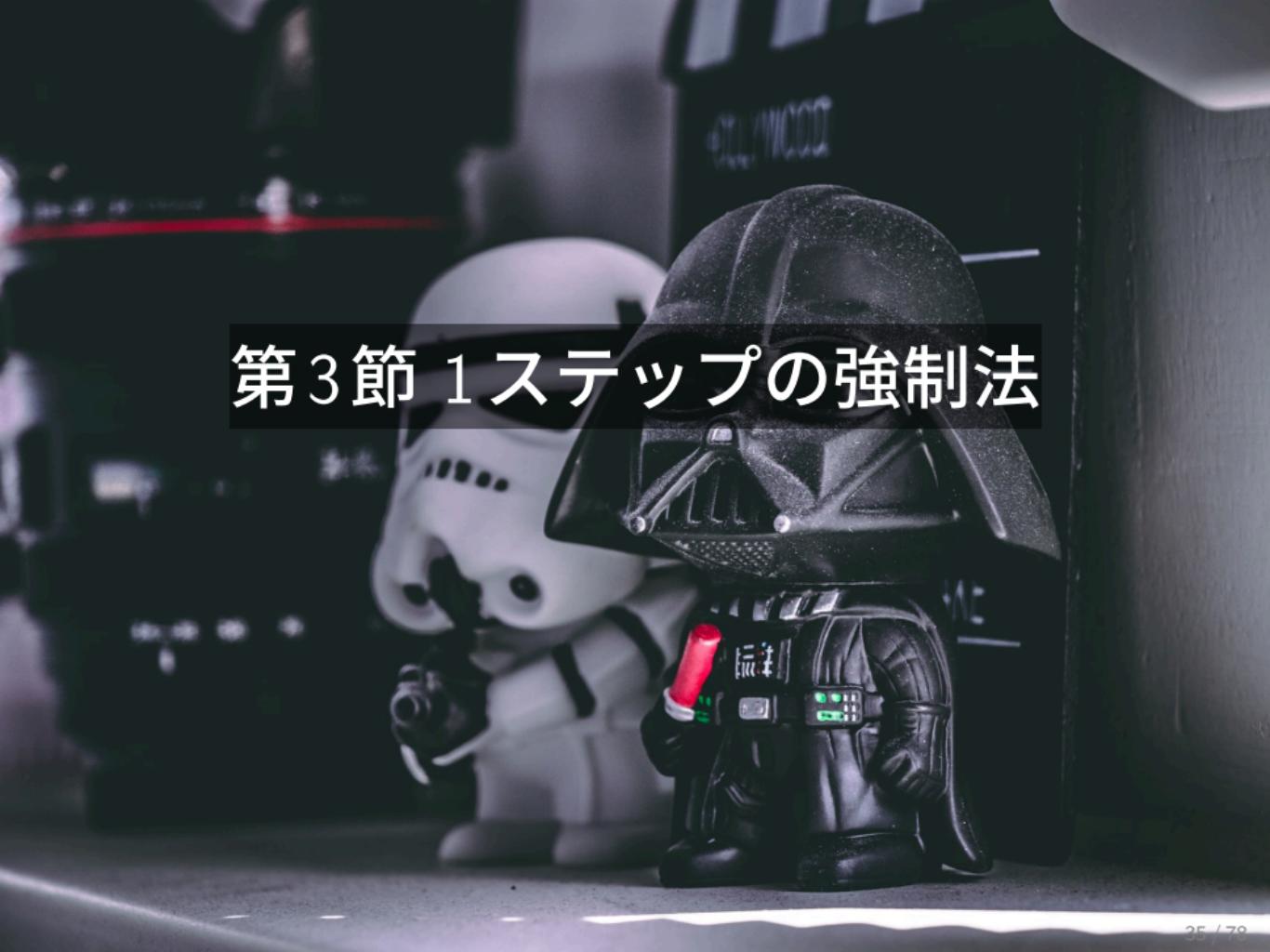
$\aleph_1$  が絶対的な 2 つのモデルの間で次が成り立つ.

- ① 「 $(T, <)$  は木である」 は絶対的
- ② 「半順序集合  $(P, \leq)$  は ccc を満たす」 は下向き絶対的
- ③ 「半順序集合  $(P, \leq)$  の鎖はすべてたかだか可算」 は下向き絶対的

# 重要な例

$\aleph_1$  が絶対的な 2 つのモデルの間で次が成り立つ.

- ① 「 $(T, <)$  は木である」 は絶対的
- ② 「半順序集合  $(P, \leq)$  は ccc を満たす」 は下向き絶対的
- ③ 「半順序集合  $(P, \leq)$  の鎖はすべてたかだか可算」 は下向き絶対的
- ④ 以上から 「 $(T, <)$  が Suslin 木」 は下向き絶対的



## 第3節 1ステップの強制法

# 強制法の概要

強制法は ZFC のモデル  $M$  と  $M$  に属する半順序集合 (強制概念)  $\mathbb{P} \in M$  について  $(M, \mathbb{P})$  ジェネリックフィルター  $G \in \mathbb{P}$  という良い集合を  $M$  に添加してより大きなモデル  $M[G]$  を作る方法である。

集合論の言語  $L = \{\in\}$  の可算な推移的構造を **ctm**  
(countable transitive model) という。

集合論の言語  $L = \{\in\}$  の可算な推移的構造を **ctm** (countable transitive model) という。

ZFC 全部の公理を満たす ctm はとれるとは限らない (常にとれるとしたら第二不完全性定理に抵触!). が, ZFC の任意有限個の公理の ctm はとれる! そして, 実は相対的無矛盾性を示すのなら, それで十分.

集合論の言語  $L = \{\in\}$  の可算な推移的構造を **ctm** (countable transitive model) という。

ZFC 全部の公理を満たす ctm はとれるとは限らない (常にとれるとしたら第二不完全性定理に抵触!). が, ZFC の任意有限個の公理の ctm はとれる! そして, 実は相対的無矛盾性を示すのなら, それで十分.

だが, 面倒なのでこれからは ZFC 全てを満たす ctm を考  
える.

# 強制概念の定義

最大元を持つ半順序集合  $\mathbb{P} = (\mathbb{P}, \leq, 1)$  を強制概念という。

# 強制概念の定義

最大元を持つ半順序集合  $\mathbb{P} = (\mathbb{P}, \leq, 1)$  を強制概念という。

$D \subseteq \mathbb{P}$  は  $(\forall p \in \mathbb{P})(\exists q \in D)(q \leq p)$  を満たすとき稠密集合という。

# ジェネリックフィルターの定義

$M$  を ZFC の ctm,  $\mathbb{P} \in M$  を強制概念とする。次の条件を満たす  $G \subsetneq \mathbb{P}$  を  $(M, \mathbb{P})$  ジェネリックフィルターという:

- ①  $1 \in G$
- ②  $(\forall p \in G)(\forall q \geq p)(q \in G)$
- ③  $(\forall p, q \in G)(\exists r \in G)(r \leq p \text{かつ } r \leq q)$
- ④  $M$  に属するどんな稠密集合  $D \subseteq \mathbb{P}$  についても  
 $D \cap G \neq \emptyset$

# ジェネリックフィルターの定義

$M$  を ZFC の ctm,  $\mathbb{P} \in M$  を強制概念とする。次の条件を満たす  $G \subsetneq \mathbb{P}$  を  $(M, \mathbb{P})$  ジェネリックフィルターという:

- ①  $1 \in G$
- ②  $(\forall p \in G)(\forall q \geq p)(q \in G)$
- ③  $(\forall p, q \in G)(\exists r \in G)(r \leq p \text{かつ } r \leq q)$
- ④  $M$  に属するどんな稠密集合  $D \subseteq \mathbb{P}$  についても  
 $D \cap G \neq \emptyset$

$(M, \mathbb{P})$  ジェネリックフィルターは存在する (が基本的には  $M$  の中には存在しない)。その証明は  $M$  が ctm であることを使つ。

# 名前の定義

$M$  を推移的集合,  $\mathbb{P} \in M$  を強制概念とする.  $\alpha \in \text{On} \cap M$  について  $M_\alpha^\mathbb{P}$  を

- ①  $M_0^\mathbb{P} = \emptyset$
- ②  $M_{\alpha+1}^\mathbb{P} = \mathcal{P}^M(M_\alpha^\mathbb{P} \times \mathbb{P})$
- ③ 極限順序数  $\delta$  に対して  $M_\delta^\mathbb{P} = \bigcup_{\alpha < \delta} M_\alpha^\mathbb{P}$

で定め,

$$M^\mathbb{P} = \bigcup_{\alpha \in \text{On} \cap M} M_\alpha^\mathbb{P}$$

と定める.  $M^\mathbb{P}$  の元を  $M$  に属する  $\mathbb{P}$  名前という.

# 名前の定義がよく分からぬのですが？

$\mathbb{P}$  名前の定義をよく読むと、 $\mathbb{P}$  名前  $\dot{x}$  は  $\mathbb{P}$  名前と  $\mathbb{P}$  の元の組の集合となっている：

$$\dot{x} = \{(\dot{y}, p), (\dot{z}, q), \dots\}$$

誤解を恐れずにいれば  $\mathbb{P}$  名前は「確率付きの集合」であり  $(\dot{y}, p) \in \dot{x}$  とは、確率付き集合  $\dot{x}$  に確率付き集合  $\dot{y}$  を確率  $p$  で入れている、と読める。

後のスライドの名前の例と名前の解釈を読めばまた名前の概念も理解しやすくなるだろう。

## 名前の例

集合の  $\in$  に関する再帰により  $x$  の **チェック名前**  $\check{x}$  を

$$\check{x} = \{(y, 1) : y \in x\}$$

と定める。

# 名前の例

集合の  $\in$  に関する再帰により  $x$  の **チェック名前**  $\check{x}$  を

$$\check{x} = \{(\check{y}, 1) : y \in x\}$$

と定める。たとえば  $2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$  のチェック名前は

$$\begin{aligned}\check{2} &= \{(\check{0}, 1), (\check{1}, 1)\} \\ &= \{(\emptyset, 1), (\{(\emptyset, 1)\}, 1)\} \\ &= \{(\emptyset, 1), (\{(\emptyset, 1)\}, 1)\}\end{aligned}$$

となる。

# ジェネリックフィルターの名前

ジェネリックフィルターの名前  $\dot{G}$  を

$$\dot{G} = \{(\check{p}, p) : p \in \mathbb{P}\}$$

で定める。

# 名前の解釈

$M$  を ZFC の ctm,  $\mathbb{P} \in M$  を強制概念とし,  $G$  を  $(M, \mathbb{P})$  ジェネリックフィルターとする.  $\dot{x}$  のランクに関する再帰で,  $\dot{x}$  の  $G$  における解釈  $\dot{x}_G$  を次で定める:

$$\dot{x}_G = \{\dot{y}_G : (\dot{y}, p) \in \dot{x}, p \in G\}.$$

# 名前の解釈

$M$  を ZFC の ctm,  $\mathbb{P} \in M$  を強制概念とし,  $G$  を  $(M, \mathbb{P})$  ジェネリックフィルターとする.  $\dot{x}$  のランクに関する再帰で,  $\dot{x}$  の  $G$  における解釈  $\dot{x}_G$  を次で定める:

$$\dot{x}_G = \{\dot{y}_G : (\dot{y}, p) \in \dot{x}, p \in G\}.$$

## 例

チェック名前  $\dot{x}$  について  $\dot{x}_G = x$

ジェネリックフィルターの名前  $\dot{G}$  について  $\dot{G}_G = G$ .

# $M[G]$ の定義

$M$  に属する  $\mathbb{P}$  名前を解釈して得られる集合全体の集合を  $M[G]$  とおく：

$$M[G] = \{\dot{x}_G : \dot{x} \in M^{\mathbb{P}}\}.$$

# 強制関係の定義

$\varphi$  を集合論の言語の論理式とする。 $M$  を ZFC の ctm,  
 $\mathbb{P} \in M$  を強制概念とする。 $\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n \in M^{\mathbb{P}}$  とする。

$$\begin{aligned} p \Vdash_{\mathbb{P}, M} \varphi(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \\ \iff (\forall G : (M, \mathbb{P}) \text{ ジェネリックフィルター}) \\ (p \in G \rightarrow M[G] \models \varphi((\dot{x}_1)_G, \dots, (\dot{x}_n)_G)) \end{aligned}$$

と定め、この関係を**強制関係**という。

# 強制法の基本定理

## 定理

$M$  を ZFC の ctm,  $\mathbb{P} \in M$  を強制概念とする.

# 強制法の基本定理

## 定理

$M$  を ZFC の ctm,  $\mathbb{P} \in M$  を強制概念とする.

- ① 任意の  $p \in P$  について,  $p \in G$  となる  $(M, P)$  ジェネリックフィルター  $G$  が存在する

# 強制法の基本定理

## 定理

$M$  を ZFC の ctm,  $\mathbb{P} \in M$  を強制概念とする.

- ① 任意の  $p \in P$  について,  $p \in G$  となる  $(M, P)$  ジェネリックフィルター  $G$  が存在する
- ②  $M[G]$  は ZFC を満たし,  $M \subseteq M[G]$ ,  $G \in M[G]$  を満たす ctm である. また  $M[G]$  はそのような中で最小の ctm である.

# 強制法の基本定理

## 定理

$M$  を ZFC の ctm,  $\mathbb{P} \in M$  を強制概念とする.

- ① 任意の  $p \in P$  について,  $p \in G$  となる  $(M, P)$  ジェネリックフィルター  $G$  が存在する
- ②  $M[G]$  は ZFC を満たし,  $M \subseteq M[G]$ ,  $G \in M[G]$  を満たす ctm である. また  $M[G]$  はそのような中で最小の ctm である.
- ③ (定義可能性補題)  $\Vdash^*$  という関係が具体的に定義できて,  $p \Vdash_{\mathbb{P}, M} \varphi \iff (p \Vdash_{\mathbb{P}}^* \varphi)^M$

# 強制法の基本定理

## 定理

$M$  を ZFC の ctm,  $\mathbb{P} \in M$  を強制概念とする.

- ① 任意の  $p \in P$  について,  $p \in G$  となる  $(M, P)$  ジェネリックフィルター  $G$  が存在する
- ②  $M[G]$  は ZFC を満たし,  $M \subseteq M[G]$ ,  $G \in M[G]$  を満たす ctm である. また  $M[G]$  はそのような中で最小の ctm である.
- ③ (定義可能性補題)  $\Vdash^*$  という関係が具体的に定義できて,  $p \Vdash_{\mathbb{P}, M} \varphi \iff (p \Vdash_{\mathbb{P}}^* \varphi)^M$
- ④ (真理性補題)  $M[G] \models \varphi \iff (\exists p \in G)(p \Vdash_{\mathbb{P}, M} \varphi)$

# 追加で ccc に関する重要な定理

## 定理

$M$  を ZFC の ctm,  $\mathbb{P} \in M$  を  $M$  内で ccc な強制概念とする.  
このとき基数は壊れない. すなわち

$$(\kappa \text{が基数})^M \iff (\kappa \text{が基数})^{M[G]}$$

## 具体例：Cohen 強制

$\mathbb{P} = 2^{<\omega}$  を文字 0 と 1 からなる有限文字列全体のなす集合とする。 $p, q \in \mathbb{P}$  に対して  $q \leq p$  を  $q$  は  $p$  の延長である, と定める。この半順序集合を **Cohen 強制** という。

## 具体例：Cohen 強制

$\mathbb{P} = 2^{<\omega}$  を文字 0 と 1 からなる有限文字列全体のなす集合とする。 $p, q \in \mathbb{P}$  に対して  $q \leq p$  を  $q$  は  $p$  の延長である, と定める。この半順序集合を **Cohen 強制** という。

有限文字列  $s$  の長さを  $\text{lh}(s)$  と書く。各自然数  $n$  について  $D_n = \{p \in \mathbb{P} : \text{lh}(p) \geq n\}$  は稠密集合である。

## 具体例：Cohen 強制

$\mathbb{P} = 2^{<\omega}$  を文字 0 と 1 からなる有限文字列全体のなす集合とする。 $p, q \in \mathbb{P}$  に対して  $q \leq p$  を  $q$  は  $p$  の延長である, と定める。この半順序集合を **Cohen 強制** という。

有限文字列  $s$  の長さを  $\text{lh}(s)$  と書く。各自然数  $n$  について  $D_n = \{p \in \mathbb{P} : \text{lh}(p) \geq n\}$  は稠密集合である。

各有限文字列  $s$  について

$$E_s = \{p \in \mathbb{P} : p \text{ は部分文字列として } s \text{ を含む}\}$$

は稠密集合である。

## 具体例：Cohen 強制

$(M, \mathbb{P})$  ジェネリックフィルター  $G$  をとる。フィルターの元の両立条件があるので、 $G$  の元  $p$  と  $q$  は同じインデックスで違う文字を当てていない。

## 具体例：Cohen 強制

$(M, \mathbb{P})$  ジェネリックフィルター  $G$  をとる。フィルターの元の両立条件があるので、 $G$  の元  $p$  と  $q$  は同じインデックスで違う文字を当てていない。また、 $G$  は各  $D_n$  と交わるため、 $G$  の貼り合わせ  $g = \bigcup G$  は長さ  $\omega$  の 01 列になっている。

## 具体例：Cohen 強制

$(M, \mathbb{P})$  ジェネリックフィルター  $G$  をとる。フィルターの元の両立条件があるので、 $G$  の元  $p$  と  $q$  は同じインデックスで違う文字を当てていない。また、 $G$  は各  $D_n$  と交わるため、 $G$  の貼り合わせ  $g = \bigcup G$  は長さ  $\omega$  の 01 列になっている。

しかも、 $G$  は各  $E_s$  と交わるから、 $g$  にはどんな有限文字列も部分文字列として含む！

## 具体例：Cohen 強制

$(M, \mathbb{P})$  ジェネリックフィルター  $G$  をとる。フィルターの元の両立条件があるので、 $G$  の元  $p$  と  $q$  は同じインデックスで違う文字を当てていない。また、 $G$  は各  $D_n$  と交わるため、 $G$  の貼り合わせ  $g = \bigcup G$  は長さ  $\omega$  の 01 列になっている。

しかも、 $G$  は各  $E_s$  と交わるから、 $g$  にはどんな有限文字列も部分文字列として含む！

この  $g$  を **Cohen 実数** と呼ぶ。

## 具体例：Cohen 強制

$(M, \mathbb{P})$  ジェネリックフィルター  $G$  をとる。フィルターの元の両立条件があるので、 $G$  の元  $p$  と  $q$  は同じインデックスで違う文字を当てていない。また、 $G$  は各  $D_n$  と交わるため、 $G$  の貼り合わせ  $g = \bigcup G$  は長さ  $\omega$  の 01 列になっている。

しかも、 $G$  は各  $E_s$  と交わるから、 $g$  にはどんな有限文字列も部分文字列として含む！

この  $g$  を **Cohen 実数** と呼ぶ。

別に Cohen 実数でなくても、「どんな有限文字列も部分文字列として含む」ような無限文字列はいくらでも作りようがある。だから、これだけだとあまりありがたみはないが、強制法の議論に慣れてもらうために Cohen 強制を紹介した。

## Cohen 強制は Suslin 木を生やす

ちなみに， Cohen 強制法は Suslin 木を生やすという事実が知られている！

# Cohen 強制は Suslin 木を生やす

ちなみに， Cohen 強制法は Suslin 木を生やすという事実が知られている！つまり，  $\mathbb{P}$  を Cohen 強制として  $(M, \mathbb{P})$  ジェネリックフィルター  $G$  について

$M[G] \models$  Suslin 木が存在する.

# Cohen 強制は Suslin 木を生やす

ちなみに， Cohen 強制法は Suslin 木を生やすという事実が知られている！つまり，  $\mathbb{P}$  を Cohen 強制として  $(M, \mathbb{P})$  ジェネリックフィルター  $G$  について

$$M[G] \models \text{Suslin 木が存在する}.$$

この証明をやろうとしたらそれで一回分の講演になるので今回は証明しない。

## 具体例：Suslin 木を一個壊す

この節の内容を使って任意に与えられた Suslin 木を一個壊そう。

## 具体例：Suslin 木を一個壊す

この節の内容を使って任意に与えられた Suslin 木を一個壊そう。

「壊す」の意味は、ジェネリック拡大  $M[G]$  すでにそれが Suslin 木になっていないことである (Suslin 木であることは下向き絶対的だが、絶対的でなかったことを思い出そう！).

# well-pruned の定義

$(T, <)$  を Suslin 木とする。これが **well-pruned** とは  
 $(\forall t \in T)(|t \upharpoonright| = \aleph_1)$  なことを言う。

## well-pruned の定義

$(T, <)$  を Suslin 木とする。これが **well-pruned** とは  
 $(\forall t \in T)(|t \upharpoonright| = \aleph_1)$  なことを言う。

Suslin 木があれば、well-pruned な Suslin 木が存在する (Suslin 木が与えられたとき、それを「刈り込めば」 well-pruned Suslin 木になる)

# well-pruned の定義

$(T, <)$  を Suslin 木とする。これが **well-pruned** とは  
 $(\forall t \in T)(|t \upharpoonright| = \aleph_1)$  なことを言う。

Suslin 木があれば、well-pruned な Suslin 木が存在する (Suslin 木が与えられたとき、それを「刈り込めば」 well-pruned Suslin 木になる)

よって Suslin 木を壊すときは well-pruned な Suslin 木を壊せばよい。

# 具体例：Suslin 木を一個壊す

## 定理

$M$  を ZFC の ctm とする。 $(T, <_T) \in M$  を  
(well-pruned な Suslin 木) $^M$  とする。このときある  $\text{ccc}^M$  な強制概念  $\mathbb{P}_T \in M$  が存在して、任意の  $(M, \mathbb{P}_T)$  ジェネリックフィルター  $G$  について

$$M[G] \models T \text{ は Suslin 木でない.}$$

証明.  $\mathbb{P}_T = T$  で順序は  $T$  の順序の逆  $q \leq_{\mathbb{P}_T} p \iff p \leq_T q$  で入れる。 $T$  が ccc なので  $\mathbb{P}_T$  は ccc である。

各  $\alpha \in (\omega_1)^M$  について

$$D_\alpha = \{p \in \mathbb{P} : \text{height}(p) \geq \alpha\}$$

とおく。

# 具体例：Suslin 木を一個壊す

## 定理

$M$  を ZFC の ctm とする。 $(T, <_T) \in M$  を  
(well-pruned な Suslin 木) $^M$  とする。このときある  $\text{ccc}^M$  な強制概念  $\mathbb{P}_T \in M$  が存在して、任意の  $(M, \mathbb{P}_T)$  ジェネリックフィルター  $G$  について

$$M[G] \models T \text{ は Suslin 木でない.}$$

$T$  が well-pruned なことから、各  $D_\alpha$  は  $\mathbb{P}_T$  の稠密集合となる。今、 $(M, \mathbb{P}_T)$  ジェネリックフィルター  $G$  をとると、すべての  $\alpha$  で  $G \cap D_\alpha \neq \emptyset$  なことから  $G$  は (サイズ  $\aleph_1$ ) $^{M[G]}$  の鎖である。  $\square$



第4節 2ステップの強制法

# $V[G]$ はあります！

強制法をやる上でいちいち  $\text{ctm } M$  をとって色々な条件を  $M$  に相対化するのは面倒。そこである意味方便として  $V$  を集合全体のクラスとして  $(V, \mathbb{P})$  ジェネリックフィルター  $G$  というのを考える。

# $V[G]$ はあります！

強制法をやる上でいちいち  $\text{ctm } M$  をとって色々な条件を  $M$  に相対化するのは面倒。そこである意味方便として  $V$  を集合全体のクラスとして  $(V, \mathbb{P})$  ジェネリックフィルター  $G$  というのを考える。

実際にはそんな  $G$  は存在しないが、あるとして議論しても問題ない。その正当化は実際されている ([渕野 18] を見よ)。

# $V[G]$ はあります！

強制法をやる上でいちいち  $\text{ctm } M$  をとって色々な条件を  $M$  に相対化するのは面倒。そこである意味方便として  $V$  を集合全体のクラスとして  $(V, \mathbb{P})$  ジェネリックフィルター  $G$  というのを考える。

実際にはそんな  $G$  は存在しないが、あるとして議論しても問題ない。その正当化は実際されている ([渕野 18] を見よ)。

というわけで以後  $(V, \mathbb{P})$  ジェネリックフィルターはがんがん取って使っていく。そして、定義可能性補題のところで紹介した  $\Vdash_{\mathbb{P}}^*$  をこれから単に  $\Vdash_{\mathbb{P}}$  と書く。また、 $\mathbb{P}$  の最大元 1 による強制 1  $\Vdash_{\mathbb{P}} \varphi$  を単に  $\Vdash_{\mathbb{P}} \varphi$  と書く。

## 2ステップの強制法

強制概念  $\mathbb{P}$  によりジェネリック拡大  $V[G]$  をとり，その後強制概念  $\mathbb{Q} \in V[G]$  によりもう一度ジェネリック拡大  $V[G][H]$  をとることを考える。

## 2ステップの強制法

強制概念  $\mathbb{P}$  によりジェネリック拡大  $V[G]$  をとり、その後強制概念  $\mathbb{Q} \in V[G]$  によりもう一度ジェネリック拡大  $V[G][H]$  をとることを考える。

実はこれは1回のジェネリック拡大で実現可能である。それを見るために強制概念の2ステップ反復を定義しよう。

## 2ステップの強制法

強制概念  $\mathbb{P}$  によりジェネリック拡大  $V[G]$  をとり、その後強制概念  $\dot{\mathbb{Q}} \in V[G]$  によりもう一度ジェネリック拡大  $V[G][H]$  をとることを考える。

実はこれは1回のジェネリック拡大で実現可能である。それを見るために強制概念の2ステップ反復を定義しよう。

$\mathbb{P}$  を強制概念、 $\dot{\mathbb{Q}} \in V^\mathbb{P}$  を  $\Vdash_{\mathbb{P}}$  “ $\dot{\mathbb{Q}}$ は強制概念”なるものとしよう。このとき

$$\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}} = \{(p, \dot{q}) : p \in \mathbb{P} \text{かつ } \dot{q} \in V^\mathbb{P} \text{かつ } p \Vdash_{\mathbb{P}} \dot{q} \in \dot{\mathbb{Q}}\}$$

とおく。 $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$  の上の順序を

$$(p_1, \dot{q}_1) \leq (p_2, \dot{q}_2) \iff p_1 \leq p_2 \text{かつ } p_1 \Vdash_{\mathbb{P}} \dot{q}_1 \leq \dot{q}_2$$

と定める。

# ジェネリック拡大2回は1回のジェネリック拡大に直せる

## 定理

- ①  $G$  を  $(V, \mathbb{P})$  ジェネリックフィルターとして  $H$  を  $(V[G], \dot{\mathbb{Q}}_G)$  ジェネリックフィルターとする。このとき

$$K = \{(p, \dot{q}) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}} : p \in G \text{かつ } \dot{q}_G \in H\}$$

とおけば  $K$  は  $(V, \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}})$  ジェネリックフィルターである。

# ジェネリック拡大2回は1回のジェネリック拡大に直せる

## 定理

- ①  $G$  を  $(V, \mathbb{P})$  ジェネリックフィルターとして  $H$  を  $(V[G], \dot{\mathbb{Q}}_G)$  ジェネリックフィルターとする。このとき

$$K = \{(p, \dot{q}) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}} : p \in G \text{かつ } \dot{q}_G \in H\}$$

とおけば  $K$  は  $(V, \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}})$  ジェネリックフィルターである。

- ② 逆に  $K$  を  $(V, \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}})$  ジェネリックフィルターとすると  $G = \{p \in \mathbb{P} : (\exists \dot{q})((p, \dot{q}) \in K)\}$  は  $(V, \mathbb{P})$  ジェネリックフィルターであり、 $H = \{\dot{q}_G : (\exists p)((p, \dot{q}) \in K)\}$  は  $(V[G], \dot{\mathbb{Q}}_G)$  ジェネリックフィルターである。

# ccc 強制概念の 2 ステップ反復は ccc

## 定理

$\mathbb{P}$  を ccc 強制概念,  $\dot{\mathbb{Q}} \in V^{\mathbb{P}}$  を  $\Vdash_{\mathbb{P}}$  “ $\dot{\mathbb{Q}}$  は ccc 強制概念” とする. このとき  $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$  も ccc である.

# ccc 強制概念の 2 ステップ反復は ccc

## 定理

$\mathbb{P}$  を ccc 強制概念,  $\dot{\mathbb{Q}} \in V^{\mathbb{P}}$  を  $\Vdash_{\mathbb{P}}$  “ $\dot{\mathbb{Q}}$  は ccc 強制概念” とする. このとき  $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$  も ccc である.

証明. 背理法.  $\langle (p_\alpha, \dot{q}_\alpha) : \alpha < \omega_1 \rangle$  を  $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$  の反鎖とする.

$\Vdash_{\mathbb{P}} \dot{B} = \{\alpha : p_\alpha \in \dot{G}\}$  なる名前  $\dot{B}$  をとる. すると

$\Vdash_{\mathbb{P}}$  “ $\{\dot{q}_\alpha : \alpha \in \dot{B}\}$  は反鎖” である.  $\Vdash_{\mathbb{P}}$  “ $\dot{\mathbb{Q}}$  は ccc” なので,

$\Vdash_{\mathbb{P}} (\exists \beta < \omega_1)(\dot{B} \subseteq \beta)$ . 今  $\mathbb{P}$  が ccc なので  $\gamma < \omega_1$  がとれて,

$\Vdash_{\mathbb{P}} \dot{B} \subseteq \gamma$ . これは  $\gamma$  より大きな  $\alpha$  について  $p_\alpha \Vdash_{\mathbb{P}} \alpha \in \dot{B}$  な  
ことに矛盾.

□



## 第5節 有限台反復強制法

# 反復

前節の2ステップ反復を繰り返せば有限回の反復は扱えるようになる。しかし、たとえば $\omega$ 回の反復はどう定義すればいいだろう？

# 反復

前節の 2 ステップ反復を繰り返せば有限回の反復は扱えるようになる。しかし、たとえば  $\omega$  回の反復はどう定義すればいいだろう？代表的なアイディアは次の 2 つだ：

- ①  $\mathbb{P}_0 \rightarrow \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_2 \rightarrow \dots$  という「完備埋め込み」の列が定まっているのでこれの順極限をとる。
- ②  $\dots \rightarrow \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_0$  という「射影」の列が定まっているのでこれの逆極限をとる

# 反復

前節の 2 ステップ反復を繰り返せば有限回の反復は扱えるようになる。しかし、たとえば  $\omega$  回の反復はどう定義すればいいだろう？代表的なアイディアは次の 2 つだ：

- ①  $\mathbb{P}_0 \rightarrow \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_2 \rightarrow \dots$  という「完備埋め込み」の列が定まっているのでこれの順極限をとる。
- ②  $\dots \rightarrow \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_0$  という「射影」の列が定まっているのでこれの逆極限をとる

**有限台反復**は極限ステップでは常に順極限をとるというアイディアを採用する。

# 列に関する記法

- ① 順序数  $\alpha$  について「長さ  $\alpha$  の列」とは定義域が  $\alpha$  の関数である.
- ② したがって, 長さ  $\alpha$  の列  $x$  について  $x$  の  $\beta$  番目は  $x(\beta)$  で表すことになる.
- ③ 長さ  $\alpha$  の列  $x$  と  $\beta < \alpha$  について  $x \upharpoonright \beta$  で最初の  $\beta$  個で切った長さ  $\beta$  の列を表す.
- ④ 長さ  $\alpha$  の列  $x$  と長さ  $\beta$  の列  $y$  について  $x \frown y$  で両方を連接した長さ  $\alpha + \beta$  の列を表す.
- ⑤ 成分が  $x_0, \dots, x_n$  の長さ有限の列は  $\langle x_0, \dots, x_n \rangle$  で表す.

# 有限台反復

順序数  $\delta$  に対して**有限台反復**  $\langle \mathbb{P}_\alpha, \dot{\mathbb{Q}}_\alpha : \alpha \leq \delta \rangle$  とは次を満たす列である：

# 有限台反復

順序数  $\delta$  に対して **有限台反復**  $\langle \mathbb{P}_\alpha, \dot{\mathbb{Q}}_\alpha : \alpha \leq \delta \rangle$  とは次を満たす列である：

- ① 各  $\mathbb{P}_\alpha$  は強制概念であり，その元はすべて長さ  $\alpha$  の列である.
- ②  $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$  は  $\mathbb{P}_\alpha$  名前であり， $\Vdash_{\mathbb{P}_\alpha} \text{“}\dot{\mathbb{Q}}_\alpha \text{ は強制概念”}$ .
- ③  $\beta < \alpha \leq \delta$  で  $p \in \mathbb{P}_\alpha$  ならば  $p \upharpoonright \beta \in \mathbb{P}_\beta$ .
- ④  $\mathbb{P}_{\alpha+1} = \{p^\frown \langle \dot{q} \rangle : p \in \mathbb{P}_\alpha, \dot{q} \in V^{\mathbb{P}_\alpha}, \Vdash_{\mathbb{P}_\alpha} \dot{q} \in \dot{\mathbb{Q}}_\alpha\}$ .
- ⑤  $\gamma < \delta$  が極限順序数ならば，

$\mathbb{P}_\gamma = \{p : p$  は長さ  $\gamma$  の列であり，すべての  $\alpha < \gamma$  で  $p \upharpoonright \alpha \in \mathbb{P}_\alpha$   
かつ  $\{\beta < \gamma : p(\beta) \neq 1\}$  は有限集合 }

- ⑥  $\beta < \alpha \leq \delta$  について  $1_{\mathbb{P}_\alpha}(\beta) = 1_{\dot{\mathbb{Q}}_\beta}$
- ⑦  $\alpha \leq \delta$  と  $p, p \in \mathbb{P}_\alpha$  について  $p' \leq p$  なのはすべての  
 $\beta < \alpha$  について  $p' \upharpoonright \beta \Vdash_{\mathbb{P}_\beta} \text{“}p'(\beta) \leq_{\dot{\mathbb{Q}}_\beta} p(\beta)$  のとき

# 有限台反復

有限台反復  $\langle \dot{\mathbb{P}}_\alpha, \dot{\mathbb{Q}}_\alpha : \alpha \leq \delta \rangle$  と  $\alpha \leq \delta$  と  $p \in \mathbb{P}_\alpha$  に対して

$$\text{supt}(p) = \{\beta < \gamma : p(\beta) \neq 1\}$$

とおき，これを *p の台* と呼ぶ。 $\text{supt}(p)$  は常に有限集合である！（これが有限台反復と言われるゆえん）

# ccc の保存

## 定理

$\langle \dot{\mathbb{P}}_\alpha, \dot{\mathbb{Q}}_\alpha : \alpha \leq \delta \rangle$  と  $\alpha \leq \delta$  を有限台反復とし、すべての  $\alpha < \delta$  について

$\Vdash_{\dot{\mathbb{P}}_\alpha} \text{“}\dot{\mathbb{Q}}_\alpha \text{ は ccc”}$

と仮定する。このとき  $\mathbb{P}_\delta$  も ccc.

# ccc の保存

## 定理

$\langle \mathbb{P}_\alpha, \dot{\mathbb{Q}}_\alpha : \alpha \leq \delta \rangle$  と  $\alpha \leq \delta$  を有限台反復とし、すべての  $\alpha < \delta$  について

$\Vdash_{\mathbb{P}_\alpha} \text{“}\dot{\mathbb{Q}}_\alpha \text{ は ccc”}$

と仮定する。このとき  $\mathbb{P}_\delta$  も ccc.

証明はデルタシステム補題による。

# 実数などは必ず途中のステージで出てくる

## 定理

$\kappa$  を正則基數,  $\varepsilon < \kappa$  を順序数,  $\langle \dot{\mathbb{P}}_\alpha, \dot{\mathbb{Q}}_\alpha : \alpha \leq \kappa \rangle$  を ccc な有限台反復とする.  $\dot{X} \in V^{\dot{\mathbb{P}}_\kappa}$  を  $\Vdash_{\dot{\mathbb{P}}_\kappa} \dot{X} \subseteq \varepsilon$  なる名前とする. このときある  $\beta < \kappa$  と  $\dot{Y} \in V^{\dot{\mathbb{P}}_\beta}$  があって,  $\Vdash_{\dot{\mathbb{P}}_\kappa} \dot{X} = \dot{Y}$  である.

# 実数などは必ず途中のステージで出てくる

## 定理

$\kappa$  を正則基數,  $\varepsilon < \kappa$  を順序数,  $\langle \dot{\mathbb{P}}_\alpha, \dot{\mathbb{Q}}_\alpha : \alpha \leq \kappa \rangle$  を ccc な有限台反復とする.  $\dot{X} \in V^{\dot{\mathbb{P}}_\kappa}$  を  $\Vdash_{\dot{\mathbb{P}}_\kappa} \dot{X} \subseteq \varepsilon$  なる名前とする. このときある  $\beta < \kappa$  と  $\dot{Y} \in V^{\dot{\mathbb{P}}_\beta}$  があって,  $\Vdash_{\dot{\mathbb{P}}_\kappa} \dot{X} = \dot{Y}$  である.

証明. 各  $\zeta \in \varepsilon$  について,  $A_\zeta$  を集合

$$\{p \in \dot{\mathbb{P}}_\kappa : p \Vdash \zeta \in \dot{X}\}$$

内の極大反鎖とする.  $\dot{\mathbb{P}}_\kappa$  が ccc なので,  $A_\zeta$  は可算である.  $\kappa$  の正則性より  $\beta := \sup\{\text{supt}(p) : \zeta \in \varepsilon, p \in A_\zeta\} < \kappa$  となる. すると

$$\dot{Y} = \{(\check{\zeta}, p) : \zeta \in \varepsilon, p \in A_\zeta\}$$

とおけばこれが所望の名前である. □

$\langle \mathbb{P}_\alpha, \dot{\mathbb{Q}}_\alpha : \alpha \leq \delta \rangle$  を有限台反復とする。 $G$  を  $(V, \mathbb{P}_\delta)$  ジェネリックフィルターとしたとき

$$G_\alpha = \{p \upharpoonright \alpha : p \in G\}$$

とおく。これは  $(V, \mathbb{P}_\alpha)$  ジェネリックフィルターである。

A photograph of a man standing in front of a massive stack of cut tree logs. He is wearing a black knit beanie, dark sunglasses, a red and black plaid long-sleeve shirt, a grey quilted vest, blue jeans, and a black smartwatch. He has a tattoo on his right forearm and is holding a cigarette in his left hand. The logs behind him are piled high, showing various growth rings and some pink markings.

## 第6節 Suslin木を壊しまくる話

# Suslin木を壊しまくる

## 定理

$2^{\aleph_0} = \aleph_1$ かつ $2^{\aleph_1} = \aleph_2$ を仮定. 強制概念 $\mathbb{P}$ が存在し

$\Vdash_{\mathbb{P}}$  “Suslin木は存在しない”.

# Suslin木を壊しまくる

## 定理

$2^{\aleph_0} = \aleph_1$ かつ $2^{\aleph_1} = \aleph_2$ を仮定. 強制概念 $\mathbb{P}$ が存在し

$\Vdash_{\mathbb{P}}$  “Suslin木は存在しない”.

証明.  $\mathbb{P}$ をcccな $\omega_2$ ステップ有限台反復 $\langle \mathbb{P}_\alpha, \dot{\mathbb{Q}}_\alpha : \alpha \leq \omega_2 \rangle$ について $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{\omega_2}$ として得る.  $\alpha$ に関する帰納法で $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ を

$\Vdash_{\mathbb{P}_\alpha}$  “ $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ はcccかつ $|\dot{\mathbb{Q}}_\alpha| \leq \aleph_1$ ”

なるよう構成する. このとき, $\Vdash_{\mathbb{P}_\alpha} 2^{\aleph_1} = \aleph_2$ である  
([Bau83]の補題3.2と3.3を参照).

# Suslin木を壊しまくる

$\pi: \omega_2 \rightarrow \omega_2 \times \omega_2$  を次を満たす全射とする:

$$\pi(\alpha) = (\beta, \gamma) \text{ ならば } \beta \leq \alpha.$$

# Suslin木を壊しまくる

$\pi: \omega_2 \rightarrow \omega_2 \times \omega_2$  を次を満たす全射とする:

$$\pi(\alpha) = (\beta, \gamma) \text{ ならば } \beta \leq \alpha.$$

$\mathbb{P}_\alpha$  まで決まったとする。このとき  $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$  を決める。前スライドの注意より,  $\Vdash_{\mathbb{P}_\alpha} 2^{\aleph_1} = \aleph_2$  なので名前の列  $\langle \dot{T}_\alpha^\gamma : \gamma < \omega_2 \rangle$  をとれて

$\Vdash_{\mathbb{P}_\alpha}$  “ $\langle \dot{T}_\alpha^\gamma : \gamma < \omega_2 \rangle$  は台集合  $\omega_1$  の well-pruned な Suslin 木の枚挙”.

# Suslin木を壊しまくる

$\pi: \omega_2 \rightarrow \omega_2 \times \omega_2$  を次を満たす全射とする:

$$\pi(\alpha) = (\beta, \gamma) \text{ ならば } \beta \leq \alpha.$$

$\mathbb{P}_\alpha$  まで決まったとする。このとき  $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$  を決める。前スライドの注意より,  $\Vdash_{\mathbb{P}_\alpha} 2^{\aleph_1} = \aleph_2$  なので名前の列  $\langle \dot{T}_\alpha^\gamma : \gamma < \omega_2 \rangle$  をとれて

$\Vdash_{\mathbb{P}_\alpha}$  “ $\langle \dot{T}_\alpha^\gamma : \gamma < \omega_2 \rangle$  は台集合  $\omega_1$  の well-pruned な Suslin 木の枚挙”.

$\pi(\alpha) = (\beta, \gamma)$  とする。 $G_\alpha$  を  $(V, \mathbb{P}_\alpha)$  ジェネリックフィルターとする。 $T = (\dot{T}_\beta^\gamma)_{G_\alpha}$  が  $V[G_\alpha]$  で ccc なとき,  $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$  は  $T$  を逆さにした強制概念を表す名前とする。そうでないなら,  $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$  は自明な強制概念の名前とする。

# Suslin木を壊しまくる

これで  $\mathbb{P}$  は構成できた。後は  $\Vdash_{\mathbb{P}}$  “Suslin木は存在しない” を示す。

# Suslin木を壊しまくる

これで  $\mathbb{P}$  は構成できた。後は  $\Vdash_{\mathbb{P}}$  “Suslin木は存在しない” を示す。

$(V, \mathbb{P})$  ジェネリックフィルター  $G$  をとる。 $V[G]$  に well-pruned な Suslin木  $T = (\omega_1, <_T)$  が存在したとする。「実数などは途中のステージで出てくる」定理から、ある  $\beta \in \omega_2$  があって、 $T \in V[G_\beta]$ .

# Suslin木を壊しまくる

これで  $\mathbb{P}$  は構成できた。後は  $\Vdash_{\mathbb{P}}$  “Suslin木は存在しない”を示す。

$(V, \mathbb{P})$  ジェネリックフィルター  $G$  をとる。 $V[G]$  に well-pruned な Suslin木  $T = (\omega_1, <_T)$  が存在したとする。「実数などは途中のステージで出てくる」定理から、ある  $\beta \in \omega_2$  があって、 $T \in V[G_\beta]$ .

すると Suslin木を全部並べていたことから  $T = (\dot{T}_\beta^\gamma)_{G_\beta}$  となる  $\gamma$  がとれる。 $\pi(\alpha) = (\beta, \gamma)$  となる  $\alpha$  をとる。 $T$  は  $V[G]$  で ccc を持つから、 $V[G_\alpha]$  でも ccc を持つ (ccc の下向き絶対性)。よって、 $T$  (を逆さにした強制概念)  $= (\dot{\mathbb{Q}}_\alpha)_{G_\alpha}$  となる。

# Suslin木を壊しまくる

今,  $G_{\alpha+1} = G_\alpha * H$ ,  $H$ はある  $(V[G_\alpha], T)$  ジェネリックフィルターなので,  $V[G_{\alpha+1}]$ において  $T$  はもはや Suslin 木でない (1 個の Suslin 木を壊したときの議論!).

# Suslin木を壊しまくる

今,  $G_{\alpha+1} = G_\alpha * H$ ,  $H$ はある ( $V[G_\alpha]$ ,  $T$ ) ジェネリックフィルターなので,  $V[G_{\alpha+1}]$ において  $T$  はもはや Suslin 木でない (1 個の Suslin 木を壊したときの議論!).

よって,  $T$  は  $V[G]$  でも Suslin 木でない. 矛盾した.

# bookkeeping

Suslin 木を各ステップで「帳簿につけながら」反復した。このようなテクニックを **bookkeeping** という。



## 第7節 関連する話題

# Martin の公理について

反復強制法とそれによる Suslin 木の存在しないモデルの構成は Solovay と Tennenbaum による.

# Martin の公理について

反復強制法とそれによる Suslin 木の存在しないモデルの構成は Solovay と Tennenbaum による。

ところで，Suslin 木を bookkeep し反復するのではなく，ccc でサイズの小さな半順序を bookkeep して反復強制法を行えば興味深い仮説を強制できるのではないかと考えたのが Martin である。その仮説は現在 **Martin の公理** と呼ばれている。Martin の公理からは面白い命題がたくさん導かれる。

# Martin の公理について

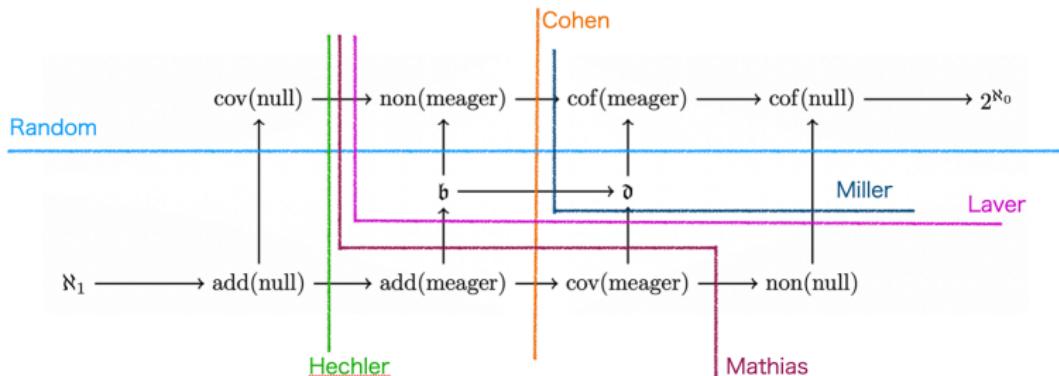
反復強制法とそれによる Suslin 木の存在しないモデルの構成は Solovay と Tennenbaum による.

ところで, Suslin 木を bookkeep し反復するのではなく, ccc でサイズの小さな半順序を bookkeep して反復強制法を行えば興味深い仮説を強制できるのではないかと考えたのが Martin である. その仮説は現在 **Martin の公理** と呼ばれている. Martin の公理からは面白い命題がたくさん導かれる.

また, 反復強制法それ自体も現代の公理的集合論にとって欠かせない重要なツールである.

# 反復強制法と基数不变量

今回は Suslin 木の半順序集合を、各ステップで違うものを取って反復したわけだが、毎回同じ定義を持つ半順序集合で反復しても面白い結果が出てくる。基数不变量の分離は基本的に反復強制法で行われる。



# 参考文献

- [Bau83] James Baumgartner. “Iterated forcing”. In: *Surveys in set theory* (1983), pp. 1–59.
- [Gol92] Martin Goldstern. *Tools for your forcing construction*. Weizmann Science Press of Israel, 1992.
- [Kun11] K. Kunen. *Set Theory*. Studies in Logic: Mathematical. College Publications, 2011.
- [Wof21] Eric Wofsey. *Is the property that a commutative domain is a PID absolute between models of ZFC?* Mathematics Stack Exchange. URL:<https://math.stackexchange.com/q/4231234> (version: 2021-08-23). 2021.
- [新井 21] 新井敏康. *数学基礎論*. 東京大学出版会, 2021.
- [渕野 18] 渕野昌. *Iterated Forcing — a (still quite incomplete) lecture note of a course on iterated forcing*. <https://fuchino.ddo.jp/notes/iterated-forcing-katowice-2018.pdf>. 2018.

写真は Unsplash と写真 AC より。