

$\aleph_1 \leq \mathfrak{s}$ と $\aleph_1 \leq \mathfrak{r}$ の証明

でいぐ

2022 年 12 月 4 日

目次

1	定義	1
2	$\aleph_1 \leq \mathfrak{s}$ の証明	2
3	$\aleph_1 \leq \mathfrak{r}$ の証明	2
3.1	直接証明	2
3.2	Baire の範疇定理を使う証明	3
3.3	Lebesgue 測度を使う証明	3
3.4	補足	3

1 定義

連続体濃度を \mathfrak{c} と書く。また、自然数の無限集合の全体の集合を $[\omega]^\omega$ と書く。

定義 1. 1. 自然数の無限集合 A, B について A が B を分割するとは,

$$|B \cap A| = |B \setminus A| = \aleph_0$$

を満たすこととする。

2. 自然数の無限集合の集合 \mathcal{S}, \mathcal{R} について

- \mathcal{S} が **splitting family** $\iff (\forall B \in [\omega]^\omega)(\exists A \in \mathcal{S})(A \text{ が } B \text{ を分割する})$
- \mathcal{R} が **reaping family** $\iff \neg(\exists A \in [\omega]^\omega)(\forall B \in \mathcal{R})(A \text{ が } B \text{ を分割する})$
 $\iff (\forall A \in [\omega]^\omega)(\exists B \in \mathcal{R})(A \text{ が } B \text{ を分割しない})$

と定める。

3. \mathfrak{s} と \mathfrak{r} を

$$\begin{aligned}\mathfrak{s} &= \min\{|\mathcal{S}| : \mathcal{S} \text{ は splitting family}\} \\ \mathfrak{r} &= \min\{|\mathcal{R}| : \mathcal{R} \text{ は reaping family}\}\end{aligned}$$

と定義する。

$[\omega]^\omega$ それ自体は splitting family でもあるし, reaping family でもある。よって $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{c}$ かつ $\mathfrak{r} \leq \mathfrak{c}$ が分かる。

本稿では, とても簡単な事実であるが, $\aleph_1 \leq \mathfrak{s}$ と $\aleph_1 \leq \mathfrak{r}$ の証明を与える。

2 $\aleph_1 \leq \mathfrak{s}$ の証明

命題 2. $\aleph_1 \leq \mathfrak{s}$.

証明. 自然数の無限集合の集合 \mathcal{S} で高々可算濃度を持つものを任意にとる. $\mathcal{S} = \{A_n : n \in \omega\}$ と枚挙しておく. 示すべきことは \mathcal{S} が splitting family でないこと, すなわちある自然数の無限集合 B があって, B はどの A_n にも分割されないことである. 帰納法により次のような自然数の無限集合の列 $\langle B_n : n \in \omega \rangle$ を定める.

1. $B_n \subseteq A_n$ あるいは $B_n \subseteq \omega \setminus A_n$.
2. $B_0 \supseteq B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$.

これは取れる. 実際, B_n まで取れたとき, B_n が無限集合なので, $B_n \cap A_n$ か $B_n \setminus A_n$ のどちらか一方が無限集合である. すると, 無限な方の一方を取り, B_{n+1} と置けばよい.

次に, 自然数の列 $\langle b_m : m \in \omega \rangle$ を次を満たすようにとる.

1. $b_0 < b_1 < b_2 < \dots$.
2. $b_m \in B_m$.

これも帰納的に取っていくことができる.

最後に $B = \{b_m : m \in \omega\}$ とおけば, これはどの A_n にも分割されない. 実際, $B_n \subseteq A_n$ ならば, B の元は有限個を除いて A_n の元なので, $B \setminus A_n$ は有限集合であるし, $B_n \subseteq \omega \setminus A_n$ ならば, B の元は有限個を除いて $\omega \setminus A_n$ の元なので, $B \cap A_n$ は有限集合であるからだ. \square

3 $\aleph_1 \leq \mathfrak{r}$ の証明

3.1 直接証明

命題 3. $\aleph_1 \leq \mathfrak{r}$.

証明. 自然数の無限集合の集合 \mathcal{R} で高々可算濃度を持つものを任意にとる. $\mathcal{R} = \{B_n : n \in \omega\}$ と枚挙しておく. 示すべきことは \mathcal{R} が reaping family でないこと, すなわちある自然数の無限集合 A があって, A はどの B_n も分割することである.

各自然数 n, m について次の2つの種類の要件を満たす B を構成できたら終わりである.

- (要件 $(0, n, m)$) m 以上の自然数が存在して, それは A に属さないが B_n には属す.
- (要件 $(1, n, m)$) m 以上の自然数が存在して, それは A にも B_n にも属す.

$\pi: \omega \rightarrow \{0, 1\} \times \omega \times \omega$ を全単射とする. B を近似する有限二進列の列 $\langle s_i : i \in \omega \rangle$ を次を満たすように構成する.

1. $s_0 \subseteq s_1 \subseteq s_2 \subseteq \dots$.
2. s_i を延長する任意の B は要件 $\pi(i)$ を満たす.

これが構成できることを見よう. $s_0 = \emptyset$ とおく. s_i まで構成されたとしよう. $\pi(i+1) = (j, n, m)$ とする. $j = 0$ のときは m と s_i の長さより大きくて B_n に属する自然数 k を取り,

s_{i+1} を s_i の延長であって k 桁目が 0 なるべくとる. $j = 1$ のときは m と s_i の長さより大きくて B_n に属する自然数 k を取り, s_{i+1} を s_i の延長であって k 桁目が 1 なるべくとる. これで構成された.

最後に B を s_i ($i \in \omega$) たちの貼り合わせとして定める. すなわち B を特性関数 χ_B が

$$\chi_B = \bigcup_{i \in \omega} s_i$$

となるようにとる. □

3.2 Baire の範疇定理を使う証明

命題 3 の別証明. 本質的に命題 3 と同じことをする.

自然数の無限集合の集合 \mathcal{R} で高々可算濃度を持つものを任意にとる. $\mathcal{R} = \{B_n : n \in \omega\}$ と枚挙しておく.

$n, m \in \omega$ に対してカントール空間 2^ω の部分集合 $D_{0,n,m}$ と $D_{1,n,m}$ を次で定める:

$$D_{0,n,m} = \{x \in 2^\omega : m \text{ 以上のある桁 } k \text{ において } x(k) = 0 \text{ かつ } k \in B_n\}$$

$$D_{1,n,m} = \{x \in 2^\omega : m \text{ 以上のある桁 } k \text{ において } x(k) = 1 \text{ かつ } k \in B_n\}$$

これらはカントール空間 2^ω の可算個の稠密開集合であるため Baire の範疇定理より共通部分は空でない. 共通部分から元を取り, それを特性関数とする B を考えればこれが欲しかったものである. □

3.3 Lebesgue 測度を使う証明

命題 3 の別証明 2. 上の証明の通り, $\mathcal{R} = \{B_n : n \in \omega\}$ と $D_{0,n,m}, D_{1,n,m}$ を考える. $D_{0,n,m}$ と $D_{1,n,m}$ はどれも Lebesgue 測度 1 なのがわかる.

実際,

$$\mu(2^\omega \setminus D_{0,n,m}) = \mu\left(\bigcap_{k \geq m, k \in B_n} \{x : x(k) = 1\}\right) = \prod_{k \geq m, k \in B_n} \frac{1}{2} = 0$$

なので $D_{0,n,m}$ は測度 1 である. ここで測度の計算に独立性を使った. $D_{1,n,m}$ も同様に測度 1 であると分かる.

よって, 共通部分も測度 1 となり, 元がある. □

3.4 補足

3.2 節と 3.3 節のそれぞれの証明から情報を抽出すると, 次が従う. 証明は省略する.

命題 4. $\text{cov}(\text{meager}), \text{cov}(\text{null}) \leq \mathfrak{r}$ かつ $\mathfrak{s} \leq \text{non}(\text{meager}), \text{non}(\text{null})$.

参考文献

[Bla10] Andreas Blass. “Combinatorial cardinal characteristics of the continuum”. *Handbook of set theory*. Springer, 2010, pp. 395–489.