$\aleph_1 \leq \mathfrak{s}$ と $\aleph_1 \leq \mathfrak{r}$ の証明

でぃぐ

2022 年 12 月 4 日

目次

1 定義

連続体濃度を $\mathfrak{c}$ と書く．また，自然数の無限集合の全体の集合を $[\omega]^\omega$ と書く．

定義 1.

1. 自然数の無限集合 A, B について A が B を**分割する**とは，

$$|B \cap A| = |B \setminus A| = \aleph_0$$

を満たすことだとする．

2. 自然数の無限集合の集合 $\mathcal{S}, \mathcal{R}$ について
   - $\mathcal{S}$ が **splitting family** $\iff (\forall B \in [\omega]^\omega)(\exists A \in \mathcal{S})(A$ が B を分割する$)$
   - $\mathcal{R}$ が **reaping family** $\iff \neg(\exists A \in [\omega]^\omega)(\forall B \in \mathcal{R})(A$ が B を分割する$)$ $\iff (\forall A \in [\omega]^\omega)(\exists B \in \mathcal{R})(A$ が B を分割しない$)$

   と定める．

3. $\mathfrak{s}$ と $\mathfrak{r}$ を

$$\mathfrak{s} = \min\{|\mathcal{S}| : \mathcal{S} \text{ は splitting family}\}$$
$$\mathfrak{r} = \min\{|\mathcal{R}| : \mathcal{R} \text{ は reaping family}\}$$

と定義する．

$[\omega]^\omega$ それ自体は splitting family でもあるし，reaping family でもある．よって $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{c}$ かつ $\mathfrak{r} \leq \mathfrak{c}$ が分かる．

本稿では，とても簡単な事実であるが，$\aleph_1 \leq \mathfrak{s}$ と $\aleph_1 \leq \mathfrak{r}$ の証明を与える．

2　$\aleph_1 \leq \mathfrak{s}$ の証明

命題 2. $\aleph_1 \leq \mathfrak{s}$.

証明. 自然数の無限集合の集合 $\mathcal{S}$ で高々可算濃度を持つものを任意にとる．$\mathcal{S} = \{A_n : n \in \omega\}$ と枚挙しておく．示すべきことは $\mathcal{S}$ が splitting family でないこと，すなわちある自然数の無限集合 B があって，B はどの A_n にも分割されないことである．帰納法により次のような自然数の無限集合の列 $\langle B_n : n \in \omega \rangle$ を定める．

1. $B_n \subseteq A_n$ あるいは $B_n \subseteq \omega \setminus A_n$.
2. $B_0 \supseteq B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$.

これは取れる．実際，B_n まで取れたとき，B_n が無限集合なので，$B_n \cap A_n$ か $B_n \setminus A_n$ のどちらか一方が無限集合である．すると，無限な方の一方を取り，B_{n+1} と置けばよい．

次に，自然数の列 $\langle b_m : m \in \omega \rangle$ を次を満たすようにとる．

1. $b_0 < b_1 < b_2 < \dots$.
2. $b_m \in B_m$.

これも帰納的に取っていくことができる．

最後に $B = \{b_m : m \in \omega\}$ とおけば，これはどの A_n にも分割されない．実際，$B_n \subseteq A_n$ ならば，B の元は有限個を除いて A_n の元なので，$B \setminus A_n$ は有限集合であるし，$B_n \subseteq \omega \setminus A_n$ ならば，B の元は有限個を除いて $\omega \setminus A_n$ の元なので，$B \cap A_n$ は有限集合であるからだ． □

3　$\aleph_1 \leq \mathfrak{r}$ の証明

3.1　直接証明

命題 3. $\aleph_1 \leq \mathfrak{r}$.

証明. 自然数の無限集合の集合 $\mathcal{R}$ で高々可算濃度を持つものを任意にとる．$\mathcal{R} = \{B_n : n \in \omega\}$ と枚挙しておく．示すべきことは $\mathcal{R}$ が reaping family でないこと，すなわちある自然数の無限集合 A があって，A はどの B_n も分割することである．

各自然数 n, m について次の 2 つの種類の要件を満たす A を構成できたら終わりである．

- (要件 $(0, n, m)$) m 以上の自然数が存在して，それは A に属さないが B_n には属す.
- (要件 $(1, n, m)$) m 以上の自然数が存在して，それは A にも B_n にも属す.

$\pi\colon \omega \to \{0,1\} \times \omega \times \omega$ を全単射とする．A を近似する有限二進列の列 $\langle s_i : i \in \omega \rangle$ を次を満たすように構成する．

1. $s_0 \subseteq s_1 \subseteq s_2 \subseteq \dots$.
2. s_i を延長する任意の A は要件 $\pi(i)$ を満たす.

これが構成できることを見よう．$s_0 = \varnothing$ とおく．s_i まで構成されたとしよう．$\pi(i+1) = (j, n, m)$ とする．$j = 0$ のときは m と s_i の長さより大きくて B_n に属する自然数 k を取り，

s_{i+1} を s_i の延長であって k 桁目が 0 なようにとる．$j=1$ のときは m と s_i の長さより大きくて B_n に属する自然数 k を取り，s_{i+1} を s_i の延長であって k 桁目が 1 なようにとる．これで構成された．

最後に A を s_i $(i \in \omega)$ たちの貼り合わせとして定める．すなわち B を特性関数 χ_A が

$$\chi_A = \bigcup_{i\in\omega} s_i$$

となるようにとる． $\square$

3.2 Baire の範疇定理を使う証明

命題 *3* の別証明．本質的に命題 3 と同じことをする．

自然数の無限集合の集合 $\mathcal{R}$ で高々可算濃度を持つものを任意にとる．$\mathcal{R} = \{B_n : n \in \omega\}$ と枚挙しておく．

$n, m \in \omega$ に対してカントール空間 2^ω の部分集合 $D_{0,n,m}$ と $D_{1,n,m}$ を次で定める：

$$\begin{aligned} D_{0,n,m} &= \{x \in 2^\omega : m \text{ 以上のある桁 } k \text{ において } x(k) = 0 \text{ かつ } k \in B_n\} \\ D_{1,n,m} &= \{x \in 2^\omega : m \text{ 以上のある桁 } k \text{ において } x(k) = 1 \text{ かつ } k \in B_n\} \end{aligned}$$

これらはカントール空間 2^ω の可算個の稠密開集合であるため Baire の範疇定理より共通部分は空でない．共通部分から元を取り，それを特性関数とする A を考えればこれが欲しかったものである． $\square$

3.3 Lebesgue 測度を使う証明

命題 *3* の別証明 *2*．上の証明の通り，$\mathcal{R} = \{B_n : n \in \omega\}$ と $D_{0,n,m}, D_{1,n,m}$ を考える．$D_{0,n,m}$ と $D_{1,n,m}$ はどれも Lebesgue 測度 1 なことがわかる．

実際，

$$\mu(2^\omega \setminus D_{0,n,m}) = \mu\left(\bigcap_{k\geq m, k\in B_n} \{x : x(k) = 1\}\right) = \prod_{k\geq m, k\in B_n} \frac{1}{2} = 0$$

なので $D_{0,n,m}$ は測度 1 である．ここで測度の計算に独立性を使った．$D_{1,n,m}$ も同様に測度 1 であると分かる．

よって，共通部分も測度 1 となり，元がある． $\square$

3.4 補足

3.2 節と 3.3 節のそれぞれの証明から情報を抽出すると，次が従う．証明は省略する．

命題 4. $\mathrm{cov}(\mathsf{meager}), \mathrm{cov}(\mathsf{null}) \leq \mathfrak{r}$ かつ $\mathfrak{s} \leq \mathrm{non}(\mathsf{meager}), \mathrm{non}(\mathsf{null})$.

参考文献

[Bla10] Andreas Blass. “Combinatorial cardinal characteristics of the continuum”. *Handbook of set theory.* Springer, 2010, pp. 395–489.