

可測基数ノート

でいぐ

2023 年 2 月 15 日

概要

本稿は可測基数についてのノートである。

目次

| | |
|---------------------|---|
| 1 可測基数の初歩 | 1 |
| 2 正規フィルター | 6 |
| 3 宇宙 V の超冪と初等埋め込み | 7 |

本稿の内容はほぼ Jech のテキスト [Jec06] を参考に行っている。

1 可測基数の初歩

定義 1.1. S を無限集合とする。 S 上の (一様かつ σ 加法的な確率) 測度とは $\mu: \mathcal{P}(S) \rightarrow [0, 1]$ であって、次を満たすものである：

- (1) $\mu(\emptyset) = 0, \mu(S) = 1$.
- (2) $X \subseteq Y \subseteq S$ なら, $\mu(X) \leq \mu(Y)$.
- (3) (一様性) 任意の $s \in S$ について $\mu(\{s\}) = 0$.
- (4) (σ 加法的性) $X_n, n \in \omega$ が互いに素な S の部分集合たちであれば,

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \omega} X_n\right) = \sum_{n \in \omega} \mu(X_n).$$

測度論で扱う測度は S 上のある σ 加法族を定義域とするものであったが、ここで扱う測度は定義域が $\mathcal{P}(S)$ なことに注意しよう。

定義 1.2. μ を S 上の測度とする。 $A \subseteq S$ が原子であるとは、 $\mu(A) > 0$ かつ任意の $X \subseteq A$ に対して $\mu(X) = 0$ または $\mu(X) = \mu(A)$ となるものである。原子が存在しない測度を原子なしの測度という。

定義 1.3. (1) 基数 κ が可測基数であるとは、 κ 上の κ 完備な非単項超フィルターが存在することを言う。

(2) 基数 κ が実数値可測基数であるとは、 κ 上の κ 加法的測度が存在することを言う。

S 上の非単項超フィルターを考えることと、 S 上の値域が $\{0, 1\}$ である (つまり、2 値である) 測度を考えることは同じである。

実際、非単項超フィルター U に対して

$$\mu(X) = \begin{cases} 1 & (X \in U) \\ 0 & (X \notin U) \end{cases}$$

で定義される測度を対応される写像と、2 値測度 μ に対して非単項超フィルター

$$U = \mu^{-1}\{1\}$$

を対応させる写像は互いの逆写像である。

また、この対応において、超フィルターが κ 完備なものと測度が κ 加法的なことが対応する。よって、可測基数は実数値可測基数である。

定義 1.4. 集合 S 上のイデアル I で σ 飽和的であるとは、 I に属さない S の部分集合族で互いに素なものはどれも、族の濃度が可算であることを意味する。

S 上の測度 μ から来るイデアル $I_\mu = \mu^{-1}\{0\}$ は必ず σ 飽和的である。なぜなら、 \mathcal{A} が I に属さない (すなわち μ の測度が正な) 部分集合で互いに素なものとしよう。このとき正の自然数 n に対して $\mu(A) > 1/n$ を満たす $A \in \mathcal{A}$ は n 個しかない。よって、 \mathcal{A} は有限集合の可算和であるから、たかだか可算濃度を持つ。

補題 1.5. 可測基数は到達不能基数である。

証明. κ を可測基数とする。

κ の正則性を示す。 κ 上の κ 完備な非単項超フィルター U を取る。 κ が特異だとすると、 κ の共終列 $\langle \lambda_i : i < \text{cf}(\kappa) \rangle$ でおおのの λ_i は κ 未満なものが取れる。今、 $\kappa = \bigcup_{i < \text{cf}(\kappa)} \lambda_i$ である。左辺 κ は U に属するが、右辺はおおのの λ_i が U の意味で小さく、その $\text{cf}(\kappa) < \kappa$ 個の和集合だから U の意味で小さい。矛盾した。なお、ここで、おおのの λ_i が小さいのは各 1 点集合が小さく、 λ_i はその $\lambda_i < \kappa$ 個の和集合として書けるからである。

κ の強極限性を示す。背理法で、ある $\lambda < \kappa$ について、 $2^\lambda \geq \kappa$ だと仮定する。集合 $S \subseteq \{0, 1\}^\lambda$ で $|S| = \kappa$ となるものを取る。集合 S 上の κ 完備な非単項超フィルター U を取る。各 $\alpha \in \lambda$ について集合 $X_\alpha \subseteq S$ を

$$\{f \in S : f(\alpha) = 0\} \text{ もしくは } \{f \in S : f(\alpha) = 1\}$$

で U に属する方とする。集合 X を

$$X = \bigcap_{\alpha < \lambda} X_\alpha$$

で定めると $X \in U$ であるが、明らかに X は 1 点集合である。これは U の非単項性に矛盾。 \square

補題 1.6. (1) κ を次を満たす最小の基数とする：非単項 σ 完備な超フィルターが存在する。 U をそのような超フィルターの一つとする。このとき、 U は κ 完備である。

(2) κ を次を満たす最小の基数とする： κ 上の測度が存在する。 μ をそのような測度とする。このとき測度 0 集合のイデアル I_μ は κ 完備である。

(3) κ を次を満たす最小の基数とする： κ 上の σ 完備かつ σ 飽和的イデアルが存在する。 I をそのようなイデアルとする。このとき I は κ 完備である。

証明. (1). U が κ 完備でないとは定する. すると κ の分割 $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}$ があって, $\gamma < \kappa$ かつ各 X_α は U の意味で小さい. 関数 $f: \kappa \rightarrow \gamma$ を次で定める:

$$f(x) = \alpha \iff x \in X_\alpha.$$

つまり, 各入力 $x < \kappa$ について, x が何番目のピースに属しているかを返す関数である. γ 上の超フィルター D を

$$D = \{Z \subseteq \gamma : f^{-1}(Z) \in U\}$$

で定める. U が σ 完備なので, D も σ 完備である. D は非単項でもある: なぜなら, 各 $\alpha < \gamma$ について $f^{-1}\{\alpha\} = X_\alpha \notin U$ より $\alpha \notin D$ だからである. したがって, D は γ 上の単項 σ -完備な超フィルターだが, $\gamma < \kappa$ より, これは κ の最小性に矛盾.

(2). I_μ が κ 完備ではないとは定する. すると測度 0 集合の族 $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}$ で, $\gamma < \kappa$ かつ, それらの和集合 $X = \bigcup_{\alpha < \gamma} X_\alpha$ は測度正なものとれる. X_α たちは互いに素であると仮定しても良い. $f: X \rightarrow \gamma$ を

$$f(x) = \alpha \iff x \in X_\alpha$$

と定め, γ 上の測度 ν を

$$\nu(Z) = \frac{\mu(f^{-1}(Z))}{\mu(X)}$$

と定める. ν は σ 加法的である. また, ν は一様である, なぜなら, 各 $\alpha < \gamma$ について $\nu(\{\alpha\}) = \frac{\mu(X_\alpha)}{\mu(X)} = 0$ だからである. これは κ の最小性に反する.

(3) の証明は (1) や (2) と同様である. □

μ を集合 S 上の測度とし, I_μ を測度 0 集合のイデアルとすれば, μ が κ 加法的なら, I_μ が κ 完備なことは明らかである. 逆も言える:

補題 1.7. μ を集合 S 上の測度とし, I_μ を測度 0 集合のイデアルとする. このとき, もし I_μ が κ 完備なら, μ は κ 加法的である.

証明. $\gamma < \kappa$ とし, $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}$ を互いに素な S の部分集合の族とする. X_α たちが互いに素なので, そのうちたかだか可算個が正の測度を持つ. よって,

$$\{X_\alpha : \alpha < \gamma\} = \{Y_n : n \in \omega\} \cup \{Z_\alpha : \alpha < \gamma\}$$

と書くことができる. ここに各 Z_α は測度 0 集合. よって,

$$\mu\left(\bigcup_{\alpha < \gamma} X_\alpha\right) = \mu\left(\bigcup_{n \in \omega} Y_n\right) + \mu\left(\bigcup_{\alpha < \gamma} Z_\alpha\right)$$

を得る. μ が σ 加法的なので,

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \omega} Y_n\right) = \sum_{n \in \omega} \mu(Y_n)$$

である. また, I_μ が κ 完備なので,

$$\mu\left(\bigcup_{\alpha < \gamma} Z_\alpha\right) = 0$$

である. 以上より,

$$\mu\left(\bigcup_{\alpha < \gamma} X_\alpha\right) = \sum_{\alpha < \gamma} \mu(X_\alpha)$$

を得る. □

補題 1.8. (1) ある集合上の原子なしの測度が存在するとき, ある基数 $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ 上に測度が存在する.

(2) I を集合 S 上の σ 完備 σ 飽和的イデアルとする. このとき, ある $Z \subseteq S$ に対して $I \upharpoonright Z = \{X \subseteq Z : X \in I\}$ が極大イデアルであるか, または, σ 完備 σ 飽和的イデアルがある $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ 上に存在するかのどちらかが成り立つ.

証明. (1). μ をそのような測度とする. S の測度正な部分集合からなり, 逆向きの包含関係で順序付けられた木 T を構成する. T の根は S である. 各 $X \in T$ について, X の測度正な集合への分割 $X = Y \cup Z, Y \cap Z = \emptyset$ を取り, この 2 つを X の直後の元とする. α が極限順序数のとき T の第 α レベルにはすべての共通部分 $X = \bigcap_{\xi < \alpha} X_\xi$ であって, $\langle X_\xi : \xi < \alpha \rangle$ は $T \upharpoonright \alpha$ の増大鎖で X_ξ は第 ξ レベルの元, X は測度正なものを置く.

T のどの枝も可算である: なぜなら, $\langle X_\xi : \xi < \alpha \rangle$ が枝ならば, $\langle X_\xi \setminus X_{\xi+1} : \xi < \alpha \rangle$ は測度正な集合の互いに素な族となるからである.

同様に, T のどのレベルも可算であることも分かる. よって, T はただだか 2^{\aleph_0} 個の極大枝を持つ (各 $\alpha < \omega_1$ について高さ α の極大枝の個数はただだか 2^{\aleph_0} . よってそれらの ω_1 個の和集合でただだか 2^{\aleph_0} 個となる).

$\{b_\alpha : \alpha < \kappa\}, \kappa \leq 2^{\aleph_0}$ をすべての極大枝 $b = \{X_\xi : \xi < \gamma\}$ であって, $\bigcap_{\xi < \gamma} X_\xi$ が非空なものの枚挙とする. 各 $\alpha < \kappa$ について $Z_\alpha = \bigcap b_\alpha$ とおく. $\{Z_\alpha : \alpha < \kappa\}$ は S の測度 0 集合への分割となる (Z_α が測度 0 でないとすると, 一個高さを上げることができ枝の極大性に反する; また, 互いの異なる極大枝 b_α と b_β はどこかで枝分かれしているはずだから, 後続ステップでの構成の仕方より, $X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$ を得る; 覆っていることは $s \in S$ を任意にとるとき, s が入っている集合を根から追跡することにより, ある X_α に s が入っていることがわかるからよい). あとは $f: S \rightarrow \kappa$ を $f(x) = \alpha \iff x \in Z_\alpha$ とおき, κ 上の測度 ν を $\nu(Z) = \mu(f^{-1}(Z))$ とおけば, ν は一様な σ 加法的測度である.

(2). (1) と同様である. □

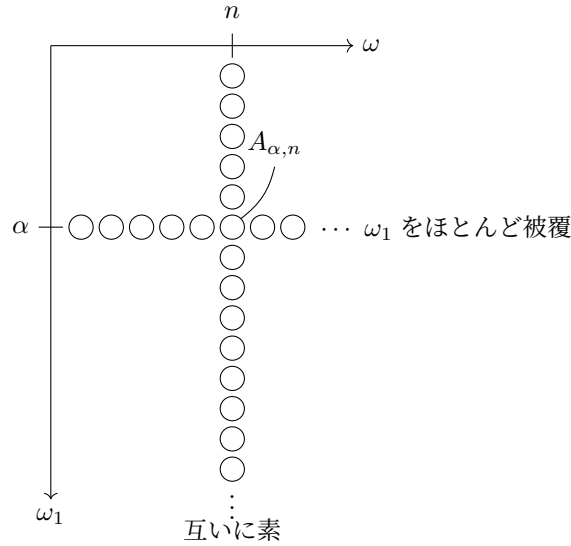
系 1.9. κ が実数値可測基数ならば, κ は可測基数か, $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ である. より一般に, κ が κ 完備 σ 飽和的イデアルを持つと, κ は可測基数であるか, $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ である.

証明. 補題 1.8 の証明より, μ が S 上の原子なしの測度なら, S のただだか 2^{\aleph_0} 個への測度 0 個への分割が存在することがわかる. つまり, μ は $(2^{\aleph_0})^+$ 加法的ではない. したがって, 原子なしの κ 加法的測度を κ が持つとき, $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ である (結論の否定を取ると, $\kappa \geq (2^{\aleph_0})^+$ だが, これと κ 加法性より $(2^{\aleph_0})^+$ 加法性が出るから). 後半の主張も同様. □

補題 1.8 の (1) の主張の結論には「原子なし」が含まれていなかったが, これは実際には「原子なし」と結論付けられる. なぜなら, 原子があると κ は可測基数となるが, 補題 1.5 より, それは $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ と相容れないからだ.

定義 1.10. (\aleph_1, \aleph_0) -Ulam 行列とは, ω_1 の部分集合の族 $\langle A_{\alpha,n} : \alpha \in \omega_1, n \in \omega \rangle$ であって, 次の 2 条件を満たすものである.

- (1) 各 $n \in \omega$ と異なる $\alpha, \beta \in \omega_1$ について $A_{\alpha,n} \cap A_{\beta,n} = \emptyset$ である.
- (2) 各 $\alpha \in \omega_1$ について, 集合 $\omega_1 \setminus \bigcup_{n \in \omega} A_{\alpha,n}$ はただだか可算集合である.



補題 1.11. (\aleph_1, \aleph_0) -Ulam 行列は存在する.

証明. 各 $\xi \in \omega_1$ に対して $f_\xi: \omega \rightarrow \omega_1$ を $\xi \subseteq \text{ran}(f_\xi)$ なるものとする. 集合 $A_{\alpha,n}$ を

$$\xi \in A_{\alpha,n} \iff f_\xi(n) = \alpha$$

と定める.

$\xi \in A_{\alpha,n} \cap A_{\beta,n}$ なら $\alpha = f_\xi(n) = \beta$ となるので, Ulam 行列の条件 (1) が成り立っていることがわかる.

$\alpha \in \omega_1$ とする. $\xi > \alpha$ に対して, f_ξ の取り方より, $f_\xi(n) = \alpha$ となる $n \in \omega$ が存在する. よって,

$$[\alpha + 1, \omega_1) \subseteq \bigcup_{n \in \omega} A_{\alpha,n}$$

なので条件 (2) も成り立っている. □

演習問題 1.12. (\aleph_1, \aleph_0) -Ulam 行列の定義において, 「各行は可算集合を除いてほとんど ω_1 を覆っている」という条件を「各行は ω_1 を (完全に) 覆っている」と変更したバージョンは存在しないことを示せ.

補題 1.13. ω_1 上の σ 完備 σ 飽和的イデアルは存在しない. 特に ω_1 上の測度は存在しない.

証明. そのようなイデアル I が存在したと仮定する. また, $\langle A_{\alpha,n} : \alpha \in \omega_1, n \in \omega \rangle$ を (\aleph_1, \aleph_0) -Ulam 行列とする. I の σ 完備性と Ulam 行列の条件 (2) より, 各 α について自然数 n_α があって, $A_{\alpha,n}$ は I -正である. したがって, 鳩の巣原理より, $W \subseteq \omega_1$, $|W| = \aleph_1$, $n \in \omega$ があって, すべての $\alpha \in W$ について $n_\alpha = n$ である. すると $\{A_{\alpha,n} : \alpha \in W\}$ は互いに素 (by Ulam 行列の条件 (1)) な非可算な I -正集合の族となる. これは I の σ 飽和性に矛盾する. □

以上の ω_1 を一般の後続基数に一般化できる. 証明は同様なので省略する.

定義と補題 1.14. λ を基数とする.

(1) (λ^+, λ) -Ulam 行列とは, λ^+ の部分集合の族 $\langle A_{\alpha,\eta} : \alpha \in \lambda^+, \eta \in \lambda \rangle$ であって, 次の 2 条件を満たすものである.

- (a) 各 $\eta \in \lambda$ と異なる $\alpha, \beta \in \lambda^+$ について $A_{\alpha, \eta} \cap A_{\beta, \eta} = \emptyset$ である.
- (b) 各 $\alpha \in \lambda^+$ について, 集合 $\lambda^+ \setminus \bigcup_{\eta \in \lambda} A_{\alpha, \eta}$ は λ 以下の濃度を持つ.
- (2) (λ^+, λ) -Ulam 行列は存在する.
- (3) λ^+ 上の λ^+ 完備 σ 飽和的イデアルは存在しない.

系 1.15. 任意の実数値可測基数は, 弱到達不能基数である.

証明. κ を実数値可測基数とする. 正則なことは補題 1.5 と同様の証明でよい. 後続基数でないことは, 定義と補題 1.14 から分かる. □

以上より次が結論付けられる: ZFC に「ある集合上の測度が存在する」という命題を加えた公理系の無矛盾性の強さは ZFC より真に強い. なぜなら「ある集合上の測度が存在する」からはその測度が原子ありかなしかに応じて, 到達不能基数か弱到達不能基数のどちらかが出て, どちらも ZFC の無矛盾性を出すからである.

2 正規フィルター

フィルターが**正規**であるとは, それが対角共通部分を取る操作で閉じていることであった. また, κ 上の κ 完備な超フィルター U に対しては, U が正規であることと任意の押し下げ関数 $f: X \rightarrow \kappa$, $X \in U$ に対して, ある $Y \in U$ について f が Y 上で定数関数となることと同値であった.

定理 2.1. 任意の可測基数の上に正規超フィルターが存在する.

証明. U を κ 上の非単項 κ 完備超フィルターとする. $f, g \in \kappa^\kappa$ に対して,

$$f =^* g \iff \{\alpha < \kappa : f(\alpha) = g(\alpha)\} \in U$$

という同値関係を入れる. また,

$$f <^* g \iff \{\alpha < \kappa : f(\alpha) < g(\alpha)\} \in U$$

という擬全順序関係を入れる.

無限下降列 $f_0 >^* f_1 >^* f_2 >^* \dots$ は存在しない. 実際, それがあれば $X_n = \{\alpha : f_n(\alpha) > f_{n+1}(\alpha)\} \in U$ だが, U が σ 完備なので, $X = \bigcap_{n \in \omega} X_n \in U$ であり, 特に X は空でない. $\alpha \in X$ を一つ取ると, 順序数の無限下降列 $f_0(\alpha) > f_1(\alpha) > f_2(\alpha) > \dots$ ができて矛盾である.

したがって, $<^*$ は擬整列順序である.

$f: \kappa \rightarrow \kappa$ を次を満たす (この擬整列順序で) 最小の関数とする: 任意の $\gamma < \kappa$ に対して, $\{\alpha : f(\alpha) > \gamma\} \in U$ である. このような f は少なくとも 1 つ存在する. たとえば対角関数 $d(\alpha) = \alpha$ は条件を満たす.

$D = f(U) = \{X \subseteq \kappa : f^{-1}(X) \in U\}$ とおく. D が κ 上の正規超フィルターであることを示そう.

各 $\gamma < \kappa$ に対して, $f^{-1}\{\gamma\} \notin U$ である ($f^{-1}[\gamma + 1, \kappa) \in U$ だから). よって, $\gamma \notin D$ なので, D は非単項である.

D の正規性を示そう. h を $X \in D$ 上の押し下げ関数とする. h が D のあるメンバー上で定数なことを示さなければいけない. $g \in \kappa^\kappa$ を $g(\alpha) = h(f(\alpha))$ で定義される関数とする. $g(\alpha) < f(\alpha)$ が

すべての $\alpha \in f^{-1}(X)$ で成り立つ. よって, $g <^* f$ である. f の最小性より, ある $\gamma < \kappa$ に対して $Y := \{\alpha : g(\alpha) = \gamma\} \in U$ となる. したがって, D の定義より $f(Y) \in D$ であり, また, h は $f(Y)$ 上で定数 γ を取る. □

3 宇宙 V の超冪と初等埋め込み

定理 3.1. 可測基数が存在することと $V = L$ は両立しない.

証明. 可測基数が存在し, かつ $V = L$ だと仮定する. 最小の可測基数を κ とし, κ 上の非単項 κ 完備超フィルターを U とする. $j: V \rightarrow M$ を U から生じる初等埋め込みとする. 今, $V = L$ を仮定しているので, L の内部モデルとしての最小性により $M = V = L$ である.

$$V \models \kappa \text{ は最小の可測基数}$$

と j の初等性により

$$V \models j(\kappa) \text{ は最小の可測基数}$$

である. よって, $j(\kappa) = \kappa$ とならないといけないが, これは $j(\kappa) > \kappa$ であったことに矛盾. □

定理 3.2. $j: V \rightarrow M$ を非自明な初等埋め込みとする. このとき, 可測基数が存在する.

証明. $\kappa = \text{crit}(j)$ とおく. κ が可測基数なことを示す.

$$D = \{X \subseteq \kappa : \kappa \in j(X)\}$$

とおく. D が非単項 κ 完備超フィルターなことを示す.

主張: $\kappa \in D$.

証明: $\kappa < j(\kappa)$ なのでよい. //

主張: $\emptyset \notin D$.

証明: 初等性より $j(\emptyset) = \emptyset$ なのでよい. //

主張: D は共通部分で閉じている.

証明: $X, Y \in D$ とすると $\kappa \in j(X), j(Y)$. ところが初等性により $j(X \cap Y) = j(X) \cap j(Y)$ なので $\kappa \in j(X \cap Y)$. よって $X \cap Y \in D$. //

主張: D は上に閉じている.

証明: $X \in D$ かつ $X \subseteq Y$ とする. すると初等性より $j(X) \subseteq j(Y)$ である. したがって, $\kappa \in j(X) \subseteq j(Y)$ を得るのでよい. //

主張: D は超フィルターである.

証明: $X \notin D$ とすると $\kappa \notin j(X)$. 初等性より $j(\kappa \setminus X) = j(\kappa) \setminus j(X)$ となり, 右辺に κ が属しているため, $\kappa \in j(\kappa \setminus X)$. つまり, $\kappa \setminus X \in D$ である. //

主張: D は非単項.

証明: $\alpha \in \kappa$ について $j(\{\alpha\}) = \{j(\alpha)\} = \{\alpha\}$ である. 第一の等式は初等性, 第二の等式は臨界点 κ の最小性による. この集合に κ は属さない. //

主張: D は κ 完備.

証明: $\bar{X} = \langle X_i : i < \gamma \rangle$ を D の元からなる列とする. ただし, $\gamma < \kappa$. 今, 初等性により $j(\bar{X}) = \langle j(X_i) : i < j(\gamma) \rangle = \langle j(X_i) : i < \gamma \rangle$ である. したがって, 再び初等性により $\bigcap_{i < \gamma} j(X_i) = j(\bigcap_{i < \gamma} X_i)$ となる. しかし, 仮定より左辺に κ が属しているため, 右辺にも属する. よって, $\bigcap_{i < \gamma} X_i \in D$. //

以上で D が非単項 κ 完備超フィルターなことが示された. \square

参考文献

- [Jec06] Thomas Jech. *Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded*. Springer Monographs in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2006.