可測基数ノート

でぃぐ

2023 年 2 月 25 日

概要

本稿は可測基数についてのノートである．

目次

本稿の内容はほぼ Jech のテキスト [Jec06] を参考にしている．

1　可測基数の初歩

定義 1.1. S を無限集合とする． S 上の (一様かつ σ 加法的な確率) **測度**とは $\mu\colon \mathcal{P}(S) \to [0,1]$ であって，次を満たすものである：

(1) $\mu(\varnothing) = 0, \mu(S) = 1$.

(2) $X \subseteq Y \subseteq S$ なら， $\mu(X) \leq \mu(Y)$.

(3) (一様性) 任意の $s \in S$ について $\mu(\{s\}) = 0$.

(4) (σ 加法性) $X_n, n \in \omega$ が互いに素な S の部分集合たちであれば，

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\omega} X_n\right) = \sum_{n\in\omega} \mu(X_n).$$

測度論で扱う測度は S 上のある σ 加法族を定義域とするものであったが，ここで扱う測度は定義域が $\mathcal{P}(S)$ なことに注意しよう．

定義 1.2. μ を S 上の測度とする． $A \subseteq S$ が**原子**であるとは， $\mu(A) > 0$ かつ任意の $X \subseteq A$ に対して $\mu(X) = 0$ または $\mu(X) = \mu(A)$ となるものである．原子が存在しない測度を原子なしの測度という．

定義 1.3. (1) 基数 κ が**可測基数**であるとは， κ 上の κ 完備な非単項超フィルターが存在することを言う．

(2) 基数 κ が**実数値可測基数**であるとは， κ 上の κ 加法的測度が存在することを言う．

S 上の非単項超フィルターを考えることと， S 上の値域が $\{0,1\}$ である (つまり，2 値である) 測度を考えることは同じである．

実際，非単項超フィルター U に対して

$$\mu(X) = \begin{cases} 1 & (X \in U) \\ 0 & (X \notin U) \end{cases}$$

で定義される測度を対応される写像と，2 値測度 μ に対して非単項超フィルター

$$U = \mu^{-1}\{1\}$$

を対応させる写像は互いの逆写像である．

また，この対応において，超フィルターが κ 完備なことと測度が κ 加法的なことが対応する．よって，可測基数は実数値可測基数である．

定義 1.4. 集合 S 上のイデアル I で σ **飽和的**であるとは，I に属さない S の部分集合族で互いに素なものはどれも，族の濃度が可算であることを意味する．

S 上の測度 μ から来るイデアル $I_\mu = \mu^{-1}\{0\}$ は必ず σ 飽和的である．なぜなら，$\mathcal{A}$ が I に属さない (すなわち μ の測度が正な) 部分集合の族で互いに素なものとしよう．このとき正の自然数 n に対して $\mu(A) > 1/n$ を満たす $A \in \mathcal{A}$ は n 個しかない．よって，$\mathcal{A}$ は有限集合の可算和であるから，たかだか可算濃度を持つ．

補題 1.5. 可測基数は到達不能基数である．

証明. κ を可測基数とする．

κ の正則性を示す．κ 上の κ 完備な非単項超フィルター U を取る．κ が特異だとすると，κ の共終列 $\langle \lambda_i : i < \mathrm{cf}(\kappa) \rangle$ でおのおのの λ_i は κ 未満なものが取れる．今，$\kappa = \bigcup_{i<\mathrm{cf}(\kappa)} \lambda_i$ である．左辺 κ は U に属するが，右辺はおのおのの λ_i が U の意味で小さく，その $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$ 個の和集合だから U の意味で小さい．矛盾した．なお，ここで，おのおのの λ_i が小さいのは各 1 点集合が小さく，λ_i はその $\lambda_i < \kappa$ 個の和集合として書けるからである．

κ の強極限性を示す．背理法で，ある $\lambda < \kappa$ について，$2^\lambda \geq \kappa$ だと仮定する．集合 $S \subseteq \{0,1\}^\lambda$ で $|S| = \kappa$ となるものを取る．集合 S 上の κ 完備な非単項超フィルター U を取る．各 $\alpha \in \lambda$ について集合 $X_\alpha \subseteq S$ を

$$\{f \in S : f(\alpha) = 0\} \text{ もしくは } \{f \in S : f(\alpha) = 1\}$$

で U に属する方とする．集合 X を

$$X = \bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha$$

で定めると $X \in U$ であるが，明らかに X は 1 点集合である．これは U の非単項性に矛盾． □

補題 1.6. (1) κ を次を満たす最小の基数とする：非単項 σ 完備な超フィルターが存在する．U をそのような超フィルターの一つとする．このとき，U は κ 完備である．

(2) κ を次を満たす最小の基数とする: κ 上の測度が存在する．μ をそのような測度とする．このとき測度 0 集合のイデアル I_μ は κ 完備である．

(3) κ を次を満たす最小の基数とする: κ 上の σ 完備かつ σ 飽和的イデアルが存在する．I をそのようなイデアルとする．このとき I は κ 完備である．

証明．(1)．U が κ 完備でないと仮定する．すると κ の分割 $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}$ があって，$\gamma < \kappa$ かつ各 X_α は U の意味で小さい．関数 $f\colon \kappa \to \gamma$ を次で定める：

$$f(x) = \alpha \iff x \in X_\alpha.$$

つまり，各入力 $x < \kappa$ について，x が何番目のピースに属しているかを返す関数である．γ 上の超フィルター D を

$$D = \{Z \subseteq \gamma : f^{-1}(Z) \in U\}$$

で定める．U が σ 完備なので，D も σ 完備である．D は非単項でもある：なぜなら，各 $\alpha < \gamma$ について $f^{-1}\{\alpha\} = X_\alpha \notin U$ より $\alpha \notin D$ だからである．したがって，D は γ 上の単項 σ-完備な超フィルターだが，$\gamma < \kappa$ より，これは κ の最小性に矛盾．

(2)．I_μ が κ 完備ではないと仮定する．すると測度 0 集合の族 $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}$ で，$\gamma < \kappa$ かつ，それらの和集合 $X = \bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha$ は測度正なものがとれる．X_α たちは互いに素であると仮定しても良い．$f\colon X \to \gamma$ を

$$f(x) = \alpha \iff x \in X_\alpha$$

と定め，γ 上の測度 ν を

$$\nu(Z) = \frac{\mu(f^{-1}(Z))}{\mu(X)}$$

と定める．ν は σ 加法的である．また，ν は一様である，なぜなら，各 $\alpha < \gamma$ について $\nu(\{\alpha\}) = \frac{\mu(X_\alpha)}{\mu(X)} = 0$ だからである．これは κ の最小性に反する．

(3) の証明は (1) や (2) と同様である．　□

μ を集合 S 上の測度とし，I_μ を測度 0 集合のイデアルとすれば，μ が κ 加法的なら，I_μ が κ 完備なことは明らかである．逆も言える：

補題 1.7. μ を集合 S 上の測度とし，I_μ を測度 0 集合のイデアルとする．このとき，もし I_μ が κ 完備なら，μ は κ 加法的である．

証明．$\gamma < \kappa$ とし，$\langle X_\alpha : \alpha < \gamma\rangle$ を互いに素な S の部分集合の族とする．X_α たちが互いに素なので，そのうちたかだか可算個が正の測度を持つ．よって，

$$\{X_\alpha : \alpha < \gamma\} = \{Y_n : n \in \omega\} \cup \{Z_\alpha : \alpha < \gamma\}$$

と書くことができる．ここに各 Z_α は測度 0 集合．よって，

$$\mu(\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha) = \mu(\bigcup_{n\in\omega} Y_n) + \mu(\bigcup_{\alpha<\gamma} Z_\alpha)$$

を得る．μ が σ 加法的なので，

$$\mu(\bigcup_{n\in\omega} Y_n) = \sum_{n\in\omega} \mu(Y_n)$$

である．また，I_μ が κ 完備なので，

$$\mu(\bigcup_{\alpha<\gamma} Z_\alpha) = 0$$

である．以上より，

$$\mu(\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha) = \sum_{\alpha<\gamma} \mu(X_\alpha)$$

を得る．　□

補題 1.8. (1) ある集合上の原子なしの測度が存在するとき，ある基数 $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ 上に測度が存在する．

(2) I を集合 S 上の σ 完備 σ 飽和的イデアルとする．このとき，ある $Z \subseteq S$ に対して $I \restriction Z = \{X \subseteq Z : X \in I\}$ が極大イデアルであるか，または，σ 完備 σ 飽和的イデアルがある $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ 上に存在するかのどちらかが成り立つ．

証明. (1). μ をそのような測度とする．S の測度正な部分集合からなり，逆向きの包含関係で順序付けられた木 T を構成する．T の根は S である．各 $X \in T$ について，X の測度正な集合への分割 $X = Y \cup Z, Y \cap Z = \varnothing$ を取り，この 2 つを X の直後の元とする．α が極限順序数のとき T の第 α レベルにはすべての共通部分 $X = \bigcap_{\xi<\alpha} X_\xi$ であって，$\langle X_\xi : \xi < \alpha\rangle$ は $T \restriction \alpha$ の増大鎖で X_ξ は第 ξ レベルの元，X は測度正なものたちを置く．

T のどの枝も可算である：なぜなら，$\langle X_\xi : \xi < \alpha\rangle$ が枝ならば，$\langle X_\xi \setminus X_{\xi+1} : \xi < \alpha\rangle$ は測度正な集合の互いに素な族となるからである．

同様に，T のどのレベルも可算であることも分かる．よって，T はたかだか $2^{\aleph_0}$ 個の極大枝を持つ (各 $\alpha < \omega_1$ について高さ α の極大枝の個数はたかだか $2^{\aleph_0}$．よってそれらの ω_1 個の和集合でたかだか $2^{\aleph_0}$ 個となる).

$\{b_\alpha : \alpha < \kappa\}, \kappa \leq 2^{\aleph_0}$ をすべての極大枝 $b = \{X_\xi : \xi < \gamma\}$ であって，$\bigcap_{\xi<\gamma} X_\xi$ が非空なものの枚挙とする．各 $\alpha < \kappa$ について $Z_\alpha = \bigcap b_\alpha$ とおく．$\{Z_\alpha : \alpha < \kappa\}$ は S の測度 0 集合への分割となる (Z_α が測度 0 でないとすると，一個高さを上げることができ枝の極大性に反する; また，互いの異なる極大枝 b_α と b_β はどこかで枝分かれしているはずだから，後続ステップでの構成の仕方より，$X_\alpha \cap X_\beta = \varnothing$ を得る; 覆っていることは $s \in S$ を任意に取るとき，s が入っている集合を根から追跡することにより，ある X_α に s が入っていることがわかるからよい)．あとは $f\colon S \to \kappa$ を $f(x) = \alpha \iff x \in Z_\alpha$ とおき，κ 上の測度 ν を $\nu(Z) = \mu(f^{-1}(Z))$ とおけば，ν は一様な σ 加法的測度である．

(2). (1) と同様である．□

系 1.9. κ が実数値可測基数ならば，κ は可測基数か，$\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ である．より一般に，κ が κ 完備 σ 飽和的イデアルを持つと，κ は可測基数であるか，$\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ である．

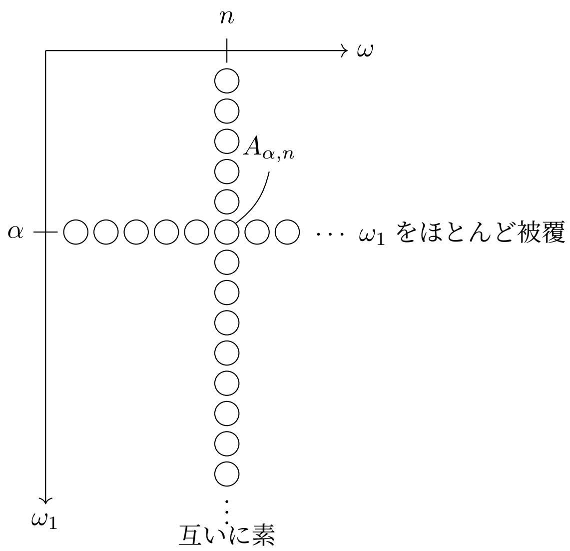
証明. 補題 1.8 の証明より，μ が S 上の原子なしの測度なら，S のたかだか $2^{\aleph_0}$ 個への測度 0 個の分割が存在することがわかる．つまり，μ は $(2^{\aleph_0})^+$ 加法的ではない．したがって，原子なしの κ 加法的測度を κ が持つとき，$\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ である (結論の否定を取ると，$\kappa \geq (2^{\aleph_0})^+$ だが，これと κ 加法性より $(2^{\aleph_0})^+$ 加法性が出るから)．後半の主張も同様. □

補題 1.8 の (1) の主張の結論には「原子なし」が含まれていなかったが，これは実際には「原子なし」と結論付けられる．なぜなら，原子があると κ は可測基数となるが，補題 1.5 より，それは $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ と相容れないからだ．

定義 1.10. $(\aleph_1, \aleph_0)$-Ulam 行列とは，ω_1 の部分集合の族 $\langle A_{\alpha,n} : \alpha \in \omega_1, n \in \omega\rangle$ であって，次の 2 条件を満たすものである．

(1) 各 $n \in \omega$ と異なる $\alpha, \beta \in \omega_1$ について $A_{\alpha,n} \cap A_{\beta,n} = \varnothing$ である．

(2) 各 $\alpha \in \omega_1$ について，集合 $\omega_1 \setminus \bigcup_{n\in\omega} A_{\alpha,n}$ はたかだか可算集合である．



補題 1.11. $(\aleph_1, \aleph_0)$-Ulam 行列は存在する．

証明．各 $\xi \in \omega_1$ に対して $f_\xi \colon \omega \to \omega_1$ を $\xi \subseteq \mathrm{ran}(f_\xi)$ なるものとする．集合 $A_{\alpha,n}$ を

$$\xi \in A_{\alpha,n} \iff f_\xi(n) = \alpha$$

と定める．

$\xi \in A_{\alpha,n} \cap A_{\beta,n}$ なら $\alpha = f_\xi(n) = \beta$ となるので，Ulam 行列の条件 (1) が成り立っていることがわかる．

$\alpha \in \omega_1$ とする．$\xi > \alpha$ に対して，f_ξ の取り方より，$f_\xi(n) = \alpha$ となる $n \in \omega$ が存在する．よって，

$$[\alpha + 1, \omega_1) \subseteq \bigcup_{n \in \omega} A_{\alpha,n}$$

なので条件 (2) も成り立っている． □

演習問題 1.12. $(\aleph_1, \aleph_0)$-Ulam 行列の定義において，「各行は可算集合を除いてほとんど ω_1 を覆っている」という条件を「各行は ω_1 を (完全に) 覆っている」と変更したバージョンは存在しないことを示せ．

補題 1.13. ω_1 上の σ 完備 σ 飽和的イデアルは存在しない．特に ω_1 上の測度は存在しない．

証明．そのようなイデアル I が存在したと仮定する．また，$\langle A_{\alpha,n} : \alpha \in \omega_1, n \in \omega \rangle$ を $(\aleph_1, \aleph_0)$-Ulam 行列とする．I の σ 完備性と Ulam 行列の条件 (2) より，各 α について自然数 n_α があって，$A_{\alpha,n}$ は I-正である．したがって，鳩の巣原理より，$W \subseteq \omega_1$, $|W| = \aleph_1$, $n \in \omega$ があって，すべての $\alpha \in W$ について $n_\alpha = n$ である．すると $\{A_{\alpha,n} : \alpha \in W\}$ は互いに素 (by Ulam 行列の条件 (1)) な非可算な I-正集合の族となる．これは I の σ 飽和性に矛盾する． □

以上の ω_1 を一般の後続基数に一般化できる．証明は同様なので省略する．

定義と補題 1.14. λ を基数とする．

(1) (λ^+, λ)-Ulam 行列とは，λ^+ の部分集合の族 $\langle A_{\alpha,\eta} : \alpha \in \lambda^+, \eta \in \lambda \rangle$ であって，次の 2 条件を満たすものである．

(a) 各 $\eta \in \lambda$ と異なる $\alpha, \beta \in \lambda^+$ について $A_{\alpha,\eta} \cap A_{\beta,\eta} = \varnothing$ である．

(b) 各 $\alpha \in \lambda^+$ について，集合 $\lambda^+ \setminus \bigcup_{\eta\in\lambda} A_{\alpha,\eta}$ は λ 以下の濃度を持つ．

(2) (λ^+, λ)-Ulam 行列は存在する．

(3) λ^+ 上の λ^+ 完備 σ 飽和的イデアルは存在しない．

系 1.15. 任意の実数値可測基数は，弱到達不能基数である．

証明. κ を実数値可測基数とする．正則なことは補題 1.5 と同様の証明でよい．後続基数でないことは，定義と補題 1.14 から分かる． □

以上より次が結論付けられる：ZFC に「ある集合上の測度が存在する」という命題を加えた公理系の無矛盾性の強さは ZFC より真に強い．なぜなら「ある集合上の測度が存在する」からはその測度が原子ありかなしかに応じて，到達不能基数か弱到達不能基数のどちらかが出て，どちらも ZFC の無矛盾性を出すからである．

2　正規フィルター

フィルターが**正規**であるとは，それが対角共通部分を取る操作で閉じていることであった．また，κ 上の κ 完備な超フィルター U に対しては，U が正規であることと任意の押し下げ関数 $f\colon X \to \kappa$, $X \in U$ に対して，ある $Y \in U$ について f が Y 上で定数関数となることと同値であった．

定理 2.1. 任意の可測基数の上に正規超フィルターが存在する．

証明. U を κ 上の非単項 κ 完備超フィルターとする．$f, g \in \kappa^\kappa$ に対して，

$$f =^* g \iff \{\alpha < \kappa : f(\alpha) = g(\alpha)\} \in U$$

という同値関係を入れる．また，

$$f <^* g \iff \{\alpha < \kappa : f(\alpha) < g(\alpha)\} \in U$$

という擬全順序関係を入れる．

無限下降列 $f_0 >^* f_1 >^* f_2 >^* \dots$ は存在しない．実際，それがあれば $X_n = \{\alpha : f_n(\alpha) > f_{n+1}(\alpha)\} \in U$ だが，U が σ 完備なので，$X = \bigcap_{n\in\omega} X_n \in U$ であり，特に X は空でない．$\alpha \in X$ を一つ取ると，順序数の無限下降列 $f_0(\alpha) > f_1(\alpha) > f_2(\alpha) > \dots$ ができて矛盾である．

したがって，$<^*$ は擬整列順序である．

$f\colon \kappa \to \kappa$ を次を満たす (この擬整列順序で) 最小の関数とする：任意の $\gamma < \kappa$ に対して，$\{\alpha : f(\alpha) > \gamma\} \in U$ である．このような f は少なくとも 1 つ存在する．たとえば対角関数 $d(\alpha) = \alpha$ は条件を満たす．

$D = f(U) = \{X \subseteq \kappa : f^{-1}(X) \in U\}$ とおく．D が κ 上の正規超フィルターなことを示そう．

各 $\gamma < \kappa$ に対して，$f^{-1}\{\gamma\} \notin U$ である ($f^{-1}[\gamma+1, \kappa) \in U$ だから)．よって，$\gamma \notin D$ なので，D は非単項である．

D の正規性を示そう．h を $X \in D$ 上の押し下げ関数とする．h が D のあるメンバー上で定数なことを示さなければいけない．$g \in \kappa^\kappa$ を $g(\alpha) = h(f(\alpha))$ で定義される関数とする．$g(\alpha) < f(\alpha)$ が

すべての $\alpha \in f^{-1}(X)$ で成り立つ．よって，$g <^* f$ である．f の最小性より，ある $\gamma < \kappa$ に対して $Y := \{\alpha : g(\alpha) = \gamma\} \in U$ となる．したがって，D の定義より $f(Y) \in D$ であり，また，h は $f(Y)$ 上で定数 γ を取る． □

3　宇宙 V の超冪と初等埋め込み

定理 3.1. 可測基数が存在することと $V = L$ は両立しない．

証明．可測基数が存在し，かつ $V = L$ だと仮定する．最小の可測基数を κ とし，κ 上の非単項 κ 完備超フィルターを U とする．$j\colon V \to M$ を U から生じる初等埋め込みとする．今， $V = L$ を仮定しているので，L の内部モデルとしての最小性により $M = V = L$ である．

$$V \models \kappa \text{ は最小の可測基数}$$

と j の初等性により

$$V \models j(\kappa) \text{ は最小の可測基数}$$

である．よって，$j(\kappa) = \kappa$ とならないといけないが，これは $j(\kappa) > \kappa$ であったことに矛盾． □

定理 3.2. $j\colon V \to M$ を非自明な初等埋め込みとする．このとき，可測基数が存在する．

証明．$\kappa = \mathrm{crit}(j)$ とおく．κ が可測基数なことを示す．

$$D = \{X \subseteq \kappa : \kappa \in j(X)\}$$

とおく．D が非単項 κ 完備超フィルターなことを示す．

主張: $\kappa \in D$.

証明: $\kappa < j(\kappa)$ なのでよい． //

主張: $\varnothing \notin D$.

証明: 初等性より $j(\varnothing) = \varnothing$ なのでよい． //

主張: D は共通部分で閉じている．

証明: $X, Y \in D$ とすると $\kappa \in j(X), j(Y)$．ところが初等性により $j(X \cap Y) = j(X) \cap j(Y)$ なので $\kappa \in j(X \cap Y)$．よって $X \cap Y \in D$. //

主張: D は上に閉じている．

証明: $X \in D$ かつ $X \subseteq Y$ とする．すると初等性より $j(X) \subseteq j(Y)$ である．したがって，$\kappa \in j(X) \subseteq j(Y)$ を得るのでよい． //

主張: D は超フィルターである．

証明: $X \notin D$ とすると $\kappa \notin j(X)$．初等性より $j(\kappa \setminus X) = j(\kappa) \setminus j(X)$ となり，右辺に κ が属しているため，$\kappa \in j(\kappa \setminus X)$．つまり，$\kappa \setminus X \in D$ である． //

主張: D は非単項．

証明: $\alpha \in \kappa$ について $j(\{\alpha\}) = \{j(\alpha)\} = \{\alpha\}$ である．第一の等式は初等性，第二の等式は臨界点 κ の最小性による．この集合に κ は属さない． //

主張: D は κ 完備．

証明:　$\bar{X} = \langle X_i : i < \gamma \rangle$ を D の元からなる列とする．ただし，$\gamma < \kappa$.　今，初等性により $j(\bar{X}) = \langle j(X_i) : i < j(\gamma) \rangle = \langle j(X_i) : i < \gamma \rangle$ である．　したがって，再び初等性により $\bigcap_{i<\gamma} j(X_i) = j(\bigcap_{i<\gamma} X_i)$ となる．　しかし，仮定より左辺に κ が属しているため，右辺にも属する．よって，$\bigcap_{i<\gamma} X_i \in D$. //

以上で D が非単項 κ 完備超フィルターなことが示された. □

参考文献

[Jec06] Thomas Jech. *Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded.* Springer Monographs in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2006.