

可測基数ノート

でいぐ
2023 年 3 月 2 日

概要

本稿は可測基数についてのノートである。可測基数のかなり初歩的な話からはじめ、超冪と初等埋め込みという標準的な話題を扱い、最後に応用として峻厳イデアルの存在の無矛盾性証明を行う。

目次

1 可測基数の初歩	1
2 正規フィルター	6
3 宇宙 V の超冪と初等埋め込み	7
4 ジェネリック超冪	10
5 峻厳イデアル	12

本稿の内容はほぼ Jech のテキスト [Jec06] を参考に行っている。

1 可測基数の初歩

定義 1.1. S を無限集合とする。 S 上の (一様かつ σ 加法的な確率) 測度とは $\mu: \mathcal{P}(S) \rightarrow [0, 1]$ であって、次を満たすものである：

- (1) $\mu(\emptyset) = 0, \mu(S) = 1$.
- (2) $X \subseteq Y \subseteq S$ なら、 $\mu(X) \leq \mu(Y)$.
- (3) (一様性) 任意の $s \in S$ について $\mu(\{s\}) = 0$.
- (4) (σ 加法性) $X_n, n \in \omega$ が互いに素な S の部分集合たちであれば、

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \omega} X_n\right) = \sum_{n \in \omega} \mu(X_n).$$

測度論で扱う測度は S 上のある σ 加法族を定義域とするものであったが、ここで扱う測度は定義域が $\mathcal{P}(S)$ なことに注意しよう。

定義 1.2. μ を S 上の測度とする。 $A \subseteq S$ が原子であるとは、 $\mu(A) > 0$ かつ任意の $X \subseteq A$ に対して $\mu(X) = 0$ または $\mu(X) = \mu(A)$ となるものである。原子が存在しない測度を原子なしの測度という。

定義 1.3. (1) 基数 κ が可測基数であるとは、 κ 上の κ 完備な非単項超フィルターが存在することを言う。

(2) 基数 κ が実数値可測基数であるとは、 κ 上の κ 加法的測度が存在することを言う。

S 上の非単項超フィルターを考えることと、 S 上の値域が $\{0, 1\}$ である (つまり、2 値である) 測度を

考えることは同じである。

実際、非単項超フィルター U に対して

$$\mu(X) = \begin{cases} 1 & (X \in U) \\ 0 & (X \notin U) \end{cases}$$

で定義される測度を対応される写像と、2 値測度 μ に対して非単項超フィルター

$$U = \mu^{-1}\{1\}$$

を対応させる写像は互いの逆写像である。

また、この対応において、超フィルターが κ 完備なものと測度が κ 加法的なことが対応する。よって、可測基数は実数値可測基数である。

定義 1.4. 集合 S 上のイデアル I で σ 飽和的であるとは、 I に属さない S の部分集合族で互いに素なものとは、族の濃度が可算であることを意味する。

S 上の測度 μ から来るイデアル $I_\mu = \mu^{-1}\{0\}$ は必ず σ 飽和的である。なぜなら、 A が I に属さない (すなわち μ の測度が正な) 部分集合の族で互いに素なものとしよう。このとき正の自然数 n に対して $\mu(A) > 1/n$ を満たす $A \in \mathcal{A}$ は n 個しかない。よって、 \mathcal{A} は有限集合の可算和であるから、たかだか可算濃度を持つ。

補題 1.5. 実数値可測基数 (および可測基数) は正則基数である。

証明. κ を実数値可測基数とする。 κ 上の κ 完備な測度 μ を取る。 κ が特異だとすると、 κ の共終列 $\langle \lambda_i : i < \text{cf}(\kappa) \rangle$ でおおおの λ_i は κ 未満なものが取れる。今、 $\kappa = \bigcup_{i < \text{cf}(\kappa)} \lambda_i$ である。左辺 κ は測度 1 だが、右辺はおおおの λ_i が測度 0 で、その $\text{cf}(\kappa) < \kappa$ 個の和集合だから測度 0 である。矛盾した。なお、ここで、おおおの λ_i が測度 0 なのは、各 1 点集合が測度 0 で、 λ_i はその $\lambda_i < \kappa$ 個の和集合として書けるからである。 \square

補題 1.6. 可測基数は到達不能基数である。

証明. κ を可測基数とする。

κ が正則なことは補題 1.5 で示した。

κ の強極限性を示す。背理法で、ある $\lambda < \kappa$ について、 $2^\lambda \geq \kappa$ だと仮定する。集合 $S \subseteq \{0, 1\}^\lambda$ で $|S| = \kappa$ となるものを取る。集合 S 上の κ 完備な非単項超フィルター U を取る。各 $\alpha \in \lambda$ について集合 $X_\alpha \subseteq S$ を

$$\{f \in S : f(\alpha) = 0\} \text{ もしくは } \{f \in S : f(\alpha) = 1\}$$

で U に属する方とする。集合 X を

$$X = \bigcap_{\alpha < \lambda} X_\alpha$$

で定めると $X \in U$ であるが、明らかに X は 1 点集合である。これは U の非単項性に矛盾。 \square

補題 1.7. (1) κ を次を満たす最小の基数とする：非単項 σ 完備な超フィルターが存在する。 U をそのような超フィルターの一つとする。このとき、 U は κ 完備である。

(2) κ を次を満たす最小の基数とする： κ 上の測度が存在する。 μ をそのような測度とする。このとき測度 0 集合のイデアル I_μ は κ 完備である。

(3) κ を次を満たす最小の基数とする： κ 上の σ 完備かつ σ 飽和的イデアルが存在する。 I をそのようなイデアルとする。このとき I は κ 完備である。

証明. (1). U が κ 完備でないとは定する. すると κ の分割 $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}$ があつて, $\gamma < \kappa$ かつ各 X_α は U の意味で小さい. 関数 $f: \kappa \rightarrow \gamma$ を次で定める:

$$f(x) = \alpha \iff x \in X_\alpha.$$

つまり, 各入力 $x < \kappa$ について, x が何番目のピースに属しているかを返す関数である. γ 上の超フィルター D を

$$D = \{Z \subseteq \gamma : f^{-1}(Z) \in U\}$$

で定める. U が σ 完備なので, D も σ 完備である. D は非単項でもある: なぜなら, 各 $\alpha < \gamma$ について $f^{-1}\{\alpha\} = X_\alpha \notin U$ より $\alpha \notin D$ だからである. したがって, D は γ 上の単項 σ -完備な超フィルターだが, $\gamma < \kappa$ より, これは κ の最小性に矛盾.

(2). I_μ が κ 完備ではないとは定する. すると測度 0 集合の族 $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}$ で, $\gamma < \kappa$ かつ, それらの和集合 $X = \bigcup_{\alpha < \gamma} X_\alpha$ は測度正なものがとれる. X_α たちは互いに素であると仮定しても良い. $f: X \rightarrow \gamma$ を

$$f(x) = \alpha \iff x \in X_\alpha$$

と定め, γ 上の測度 ν を

$$\nu(Z) = \frac{\mu(f^{-1}(Z))}{\mu(X)}$$

と定める. ν は σ 加法的である. また, ν は一様である, なぜなら, 各 $\alpha < \gamma$ について $\nu(\{\alpha\}) = \frac{\mu(X_\alpha)}{\mu(X)} = 0$ だからである. これは κ の最小性に反する.

(3) の証明は (1) や (2) と同様である. □

μ を集合 S 上の測度とし, I_μ を測度 0 集合のイデアルとすれば, μ が κ 加法的なら, I_μ が κ 完備なことは明らかである. 逆も言える:

補題 1.8. μ を集合 S 上の測度とし, I_μ を測度 0 集合のイデアルとする. このとき, もし I_μ が κ 完備なら, μ は κ 加法的である.

証明. $\gamma < \kappa$ とし, $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}$ を互いに素な S の部分集合の族とする. X_α たちが互いに素なので, そのうちたかだか可算個が正の測度を持つ. よって,

$$\{X_\alpha : \alpha < \gamma\} = \{Y_n : n \in \omega\} \cup \{Z_\alpha : \alpha < \gamma\}$$

と書くことができる. ここに各 Z_α は測度 0 集合. よって,

$$\mu\left(\bigcup_{\alpha < \gamma} X_\alpha\right) = \mu\left(\bigcup_{n \in \omega} Y_n\right) + \mu\left(\bigcup_{\alpha < \gamma} Z_\alpha\right)$$

を得る. μ が σ 加法的なので,

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \omega} Y_n\right) = \sum_{n \in \omega} \mu(Y_n)$$

である. また, I_μ が κ 完備なので,

$$\mu\left(\bigcup_{\alpha < \gamma} Z_\alpha\right) = 0$$

である. 以上より,

$$\mu\left(\bigcup_{\alpha < \gamma} X_\alpha\right) = \sum_{\alpha < \gamma} \mu(X_\alpha)$$

を得る. □

補題 1.9. (1) ある集合上の原子なしの測度が存在するとき, ある基数 $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ 上に測度が存在する.

(2) I を集合 S 上の σ 完備 σ 飽和的イデアルとする. このとき, ある $Z \subseteq S$ に対して $I \restriction Z = \{X \subseteq Z : X \in I\}$ が極大イデアルであるか, または, σ 完備 σ 飽和的イデアルがある $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ 上に存在するかのどちらかが成り立つ.

証明. (1). μ をそのような測度とする. S の測度正な部分集合からなり, 逆向きの包含関係で順序付けられた木 T を構成する. T の根は S である. 各 $X \in T$ について, X の測度正な集合への分割 $X = Y \cup Z, Y \cap Z = \emptyset$ を取り, この 2 つを X の直後の元とする. α が極限順序数のとき T の第 α レベルにはすべての共通部分 $X = \bigcap_{\xi < \alpha} X_\xi$ であって, $\langle X_\xi : \xi < \alpha \rangle$ は $T \restriction \alpha$ の増大鎖で X_ξ は第 ξ レベルの元, X は測度正なものを置く.

T のどの枝も可算である: なぜなら, $\langle X_\xi : \xi < \alpha \rangle$ が枝ならば, $\langle X_\xi \setminus X_{\xi+1} : \xi < \alpha \rangle$ は測度正な集合の互いに素な族となるからである.

同様に, T のどのレベルも可算であることも分かる. よって, T はたかだか 2^{\aleph_0} 個の極大枝を持つ (各 $\alpha < \omega_1$ について高さ α の極大枝の個数はたかだか 2^{\aleph_0} . よってそれらの ω_1 個の和集合でたかだか 2^{\aleph_0} 個となる).

$\{b_\alpha : \alpha < \kappa\}, \kappa \leq 2^{\aleph_0}$ をすべての極大枝 $b = \{X_\xi : \xi < \gamma\}$ であって, $\bigcap_{\xi < \gamma} X_\xi$ が非空なものの枚挙とする. 各 $\alpha < \kappa$ について $Z_\alpha = \bigcap b_\alpha$ とおく. $\{Z_\alpha : \alpha < \kappa\}$ は S の測度 0 集合への分割となる (Z_α が測度 0 でないとすると, 一個高さを上げることができ枝の極大性に反する; また, 互いの異なる極大枝 b_α と b_β はどこかで枝分かれしているはずだから, 後続ステップでの構成の仕方より, $X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$ を得る; 覆っていることは $s \in S$ を任意にとるとき, s が入っている集合を根から追跡することにより, ある X_α に s が入っていることがわかるからよい). あとは $f: S \rightarrow \kappa$ を $f(x) = \alpha \iff x \in Z_\alpha$ とおき, κ 上の測度 ν を $\nu(Z) = \mu(f^{-1}(Z))$ とおけば, ν は一様な σ 加法的測度である.

(2). (1) と同様である. □

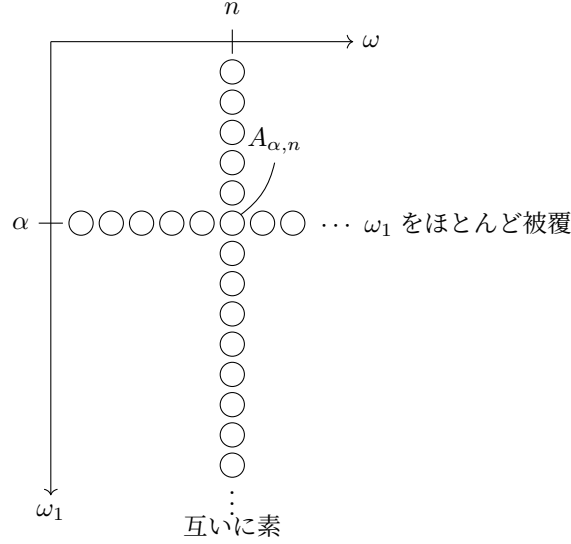
系 1.10. κ が実数値可測基数ならば, κ は可測基数か, $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ である. より一般に, κ が κ 完備 σ 飽和的イデアルを持つと, κ は可測基数であるか, $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ である.

証明. 補題 1.9 の証明より, μ が S 上の原子なしの測度なら, S のたかだか 2^{\aleph_0} 個への測度 0 個の分割が存在することがわかる. つまり, μ は $(2^{\aleph_0})^+$ 加法的ではない. したがって, 原子なしの κ 加法的測度を κ が持つとき, $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ である (結論の否定を取ると, $\kappa \geq (2^{\aleph_0})^+$ だが, これと κ 加法性より $(2^{\aleph_0})^+$ 加法性が出るから). 後半の主張も同様. □

補題 1.9 の (1) の主張の結論には「原子なし」が含まれていなかったが, これは実際には「原子なし」と結論付けられる. なぜなら, 原子があると κ は可測基数となるが, 補題 1.6 より, それは $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ と相容れないからだ.

定義 1.11. (\aleph_1, \aleph_0) -Ulam 行列とは, ω_1 の部分集合の族 $\langle A_{\alpha,n} : \alpha \in \omega_1, n \in \omega \rangle$ であって, 次の 2 条件を満たすものである.

- (1) 各 $n \in \omega$ と異なる $\alpha, \beta \in \omega_1$ について $A_{\alpha,n} \cap A_{\beta,n} = \emptyset$ である.
- (2) 各 $\alpha \in \omega_1$ について, 集合 $\omega_1 \setminus \bigcup_{n \in \omega} A_{\alpha,n}$ はたかだか可算集合である.



補題 1.12. (\aleph_1, \aleph_0) -Ulam 行列は存在する.

証明. 各 $\xi \in \omega_1$ に対して $f_\xi: \omega \rightarrow \omega_1$ を $\xi \subseteq \text{ran}(f_\xi)$ なるものとする. 集合 $A_{\alpha,n}$ を

$$\xi \in A_{\alpha,n} \iff f_\xi(n) = \alpha$$

と定める.

$\xi \in A_{\alpha,n} \cap A_{\beta,n}$ なら $\alpha = f_\xi(n) = \beta$ となるので, Ulam 行列の条件 (1) が成り立っていることがわかる.

$\alpha \in \omega_1$ とする. $\xi > \alpha$ に対して, f_ξ の取り方より, $f_\xi(n) = \alpha$ となる $n \in \omega$ が存在する. よって,

$$[\alpha + 1, \omega_1) \subseteq \bigcup_{n \in \omega} A_{\alpha,n}$$

なので条件 (2) も成り立っている. □

演習問題 1.13. (\aleph_1, \aleph_0) -Ulam 行列の定義において, 「各行は可算集合を除いてほとんど ω_1 を覆っている」という条件を「各行は ω_1 を (完全に) 覆っている」と変更したバージョンは存在しないことを示せ.

補題 1.14. ω_1 上の σ 完備 σ 飽和的イデアルは存在しない. 特に ω_1 上の測度は存在しない.

証明. そのようなイデアル I が存在したと仮定する. また, $\langle A_{\alpha,n} : \alpha \in \omega_1, n \in \omega \rangle$ を (\aleph_1, \aleph_0) -Ulam 行列とする. I の σ 完備性と Ulam 行列の条件 (2) より, 各 α について自然数 n_α があって, $A_{\alpha,n}$ は I -正である. したがって, 鳩の巣原理より, $W \subseteq \omega_1$, $|W| = \aleph_1$, $n \in \omega$ があって, すべての $\alpha \in W$ について $n_\alpha = n$ である. すると $\{A_{\alpha,n} : \alpha \in W\}$ は互いに素 (by Ulam 行列の条件 (1)) な非可算な I -正集合の族となる. これは I の σ 飽和性に矛盾する. □

以上の ω_1 を一般の後続基数に一般化できる. 証明は同様なので省略する.

定義と補題 1.15. λ を基数とする.

(1) (λ^+, λ) -Ulam 行列とは, λ^+ の部分集合の族 $\langle A_{\alpha,\eta} : \alpha \in \lambda^+, \eta \in \lambda \rangle$ であって, 次の 2 条件を満たすものである.

(a) 各 $\eta \in \lambda$ と異なる $\alpha, \beta \in \lambda^+$ について $A_{\alpha,\eta} \cap A_{\beta,\eta} = \emptyset$ である.

(b) 各 $\alpha \in \lambda^+$ について, 集合 $\lambda^+ \setminus \bigcup_{\eta \in \lambda} A_{\alpha,\eta}$ は λ 以下の濃度を持つ.

- (2) (λ^+, λ) -Ulam 行列は存在する.
 (3) λ^+ 上の λ^+ 完備 σ 飽和的イデアルは存在しない.

系 1.16. 任意の実数値可測基数は、弱到達不能基数である.

証明. κ を実数値可測基数とする. 正則なことは補題 1.5 で示した. 後続基数でないことは、定義と補題 1.15 から分かる. \square

以上より次が結論付けられる: ZFC に「ある集合上の測度が存在する」という命題を加えた公理系の無矛盾性の強さは ZFC より真に強い. なぜなら「ある集合上の測度が存在する」からはその測度が原子ありかなしかに応じて、到達不能基数か弱到達不能基数のどちらかが出て、どちらも ZFC の無矛盾性を出すからである.

2 正規フィルター

フィルターが**正規**であるとは、それが対角共通部分を取る操作で閉じていることであった. また、 κ 上の κ 完備な超フィルター U に対しては、 U が正規であることと任意の押し下げ関数 $f: X \rightarrow \kappa$, $X \in U$ に対して、ある $Y \in U$ について f が Y 上で定数関数となることと同値であった.

定理 2.1. 任意の可測基数の上に正規超フィルターが存在する.

証明. U を κ 上の非単項 κ 完備超フィルターとする. $f, g \in \kappa^\kappa$ に対して、

$$f =^* g \iff \{\alpha < \kappa : f(\alpha) = g(\alpha)\} \in U$$

という同値関係を入れる. また、

$$f <^* g \iff \{\alpha < \kappa : f(\alpha) < g(\alpha)\} \in U$$

という擬全順序関係を入れる.

無限下降列 $f_0 >^* f_1 >^* f_2 >^* \dots$ は存在しない. 実際、それがあれば $X_n = \{\alpha : f_n(\alpha) > f_{n+1}(\alpha)\} \in U$ だが、 U が σ 完備なので、 $X = \bigcap_{n \in \omega} X_n \in U$ であり、特に X は空でない. $\alpha \in X$ を一つ取ると、順序数の無限下降列 $f_0(\alpha) > f_1(\alpha) > f_2(\alpha) > \dots$ ができて矛盾である.

したがって、 $<^*$ は擬整列順序である.

$f: \kappa \rightarrow \kappa$ を次を満たす (この擬整列順序で) 最小の関数とする: 任意の $\gamma < \kappa$ に対して、 $\{\alpha : f(\alpha) > \gamma\} \in U$ である. このような f は少なくとも 1 つ存在する. たとえば対角関数 $d(\alpha) = \alpha$ は条件を満たす.

$D = f(U) = \{X \subseteq \kappa : f^{-1}(X) \in U\}$ とおく. D が κ 上の正規超フィルターなことを示そう.

各 $\gamma < \kappa$ に対して、 $f^{-1}\{\gamma\} \notin U$ である ($f^{-1}[\gamma+1, \kappa) \in U$ だから). よって、 $\gamma \notin D$ なので、 D は非単項である.

D の正規性を示そう. h を $X \in D$ 上の押し下げ関数とする. h が D のあるメンバー上で定数なことを示さなければいけない. $g \in \kappa^\kappa$ を $g(\alpha) = h(f(\alpha))$ で定義される関数とする. $g(\alpha) < f(\alpha)$ がすべての $\alpha \in f^{-1}(X)$ で成り立つ. よって、 $g <^* f$ である. f の最小性より、ある $\gamma < \kappa$ に対して $Y := \{\alpha : g(\alpha) = \gamma\} \in U$ となる. したがって、 D の定義より $f(Y) \in D$ であり、また、 h は $f(Y)$ 上で定数 γ を取る. \square

3 宇宙 V の超冪と初等埋め込み

U を集合 S 上の超フィルターとする. $f, g: S \rightarrow V$ に対して次の二つの関係を定める:

$$\begin{aligned} f =^* g &\iff \{x \in S : f(x) = g(x)\} \in U, \\ f \in^* g &\iff \{x \in S : f(x) \in g(x)\} \in U. \end{aligned}$$

S を定義域とする関数全体は真クラスをなすため, 同値関係 $=^*$ のおのおのの同値類は真クラスになってしまう. そこで Scott のトリックを使って, 次のように同値類のようなものを定義する.

$$[f] = \{g : f =^* g \wedge \neg(\exists h)(h = f \wedge \text{rank } h < \text{rank } g)\}$$

こうすると各 $[f]$ は集合となる. $f, g: S \rightarrow V$ に対して, $[f] \in^* [g] \iff f \in^* g$ と定義する. これは well-defined である.

$\text{Ult} = \text{Ult}_U(V)$ をすべての $[f]$ (ただし $f: S \rightarrow V$ 全体のなすクラスとする. 構造 $\text{Ult} = (\text{Ult}, \in^*)$ を考える. これを宇宙 V の超冪という. 通常のモデル理論における Łoś の定理は宇宙の超冪でも成り立つことが確認できる:

$$\text{Ult} \models \varphi([f_1], \dots, [f_n]) \iff \{x \in S : \varphi(f_1(x), \dots, f_n(x))\} \in U.$$

ここに φ は集合論の論理式. 特に文を考えると, (V, \in) と (Ult, \in^*) が初等同値なことが分かる.

また, 各 $a \in V$ に対して定数関数 $c_a: S \rightarrow V; c_a(x) = a$ を考えて, $j(a) = [c_a]$ とおくと

$$\text{Ult} \models \varphi(j(a_1), \dots, j(a_n)) \iff \{x \in S : \varphi(a_1, \dots, a_n)\} \in U.$$

を得る. つまり, モデル理論で使っていた用語を拝借すると, $j: V \rightarrow \text{Ult}$ は初等埋め込みである.

超冪が well-founded である状況を考察する. set-like であることは常に成り立つ: つまり任意の f について

$$\text{ext}(f) = \{[g] : g \in^* f\}$$

は常に集合である. なぜなら, $g \in^* f$ なる g を考えるとある $h =^* g$ であってすべての $x \in S$ で $h(x) \in f(x)$ となるものをとれる. この h はランクが f 以下である. よって $\text{rank}([g]) \leq \text{rank}(f) + 1$ となるので, $\text{ext}(f)$ は集合である.

補題 3.1. U が σ 完備な超フィルターなら, (Ult, \in^*) は well-founded である.

証明. Ult の無限 \in^* 下降列がないことを示せば良い. もしあったとする: $[f_0] \ni^* [f_1] \in^* \ni \dots$ すると各 n について集合

$$X_n := \{x \in S : f_{n+1}(x) \in f_n(x)\}$$

は U に属する. U の σ 完備性より

$$X = \bigcap_{n \in \omega} X_n$$

も U に属し, 特に空でない. そこから元 $x \in X$ を一つ取ると,

$$f_0(x) \ni f_1(x) \ni f_2(x) \ni \dots$$

となり, 整楚性公理に反する. □

Mostowski の崩壊定理は任意の well-founded モデルは推移的モデルと同型なことを主張しているのであった. よって, U が σ 完備なら, あるクラス M と同型なクラス写像 $\pi: (\text{Ult}, \in^*) \rightarrow (M, \in)$ が存

在する．記号の乱用で $\pi([f])$ のことを単に $[f]$ と書く．合成写像 $\pi \circ j$ の方がもとの j より重要であるため、これを単に j と書く．したがって、初等埋め込み $j: V \rightarrow M$ が得られる．

α が順序数ならば $j(\alpha)$ も順序数であり、初等性と絶対性より $\alpha < \beta \iff j(\alpha) < j(\beta)$ を得る．したがって、任意の順序数について $\alpha \leq j(\alpha)$ を得る．したがって、順序数全体のクラス On は V と M の間で変わらない： $\text{On}^V = \text{On}^M$ ．すなわち、 M は V の内部モデルである．

初等性より $j(0) = 0$ かつすべての $n \in \omega$ について $j(\alpha + 1) = j(\alpha) + 1$ であるので、すべての $n \in \omega$ について $j(n) = n$ である． $j(\omega) = \omega$ は ω の定義可能性と絶対性より分かる．

定義 3.2. 内部モデルへの初等埋め込み $j: V \rightarrow M$ について、

$$\text{crit}(j) = \min\{\alpha \in \text{On} : \alpha < j(\alpha)\}$$

とおき、 j の臨界点と呼ぶ．

補題 3.3. (1) 内部モデルへの初等埋め込み $j: V \rightarrow M$ が非自明、すなわち $j \neq \text{id}$ のとき、臨界点 $\text{crit}(j)$ は存在する．

(2) 可測基数 κ とその上の κ 完備非単項超フィルター U について U を使った超冪によって定まる初等埋め込み $j: V \rightarrow M$ について、その臨界点は κ である．

証明. (1) の証明. $j(x) \neq x$ なるランク最小の x を取る． $y \in x$ なら $\text{rank}(y) < \text{rank}(x)$ なので、 x のランク最小性より、 $y = j(y)$ を得る．よって、 $y = j(y) \in j(x)$ となる．したがって、 $x \subseteq j(x)$ ．したがって、 $j(x) \neq x$ であることと合わせると $z \in j(x) \setminus x$ がとれる．もし、 $\text{rank}(j(x)) = \text{rank}(x)$ なら $j(z) = z \in j(x)$ となるので、初等性より $z \in x$ を得て、矛盾．よって $\text{rank}(j(x)) > \text{rank}(x)$ である．一方でランクの定義可能性と初等性と絶対性より $\text{rank}(j(x)) = j(\text{rank}(x))$ を得るので、 $j(\text{rank}(x)) > \text{rank}(x)$ ．したがって $\{\alpha \in \text{On} : \alpha < j(\alpha)\}$ が空でないことが証明された．

(2) の証明. $\alpha < \kappa$ として $j(\alpha) = \alpha$ を示す． α に関する超限帰納法で示すことにすれば、任意の $\beta < \alpha$ で $j(\beta) = \beta$ であることを仮定して良い． $[f] \in j(\alpha)$ を取る．すると U の意味でほとんどすべての $x \in S$ で $f(x) < \alpha$ ．ここで U の κ 完備性より、ある $\beta < \alpha$ が存在して、ほとんどすべての $x \in S$ で $f(x) = \beta$ ．よって $[f] \in j(\beta)$ である．帰納法の仮定より $[f] \in j(\beta) = \beta$ なので、これで $j(\alpha) = \alpha$ が示された．

次に $j(\kappa) > \kappa$ を示す．対角関数 $d(\alpha) = \alpha$ を考える． $\{\alpha : d(\alpha) < \kappa\} = S \in U$ なので、 $[d] < j(\kappa)$ である．次に $\kappa \leq [d]$ を示す． $\beta < \kappa$ を任意にとる．すると $\{\alpha : \beta < d(\alpha)\} = [\beta + 1, \kappa] \in U$ なので、 $j(\beta) < [d]$ ． $j(\beta) = \beta$ は証明済みなので $\beta < [d]$ を得る．これで $\kappa \leq [d]$ が示された．以上より、 $\kappa \leq [d] < j(\kappa)$ である． \square

定理 3.4. 可測基数が存在することと $V = L$ は両立しない．

証明. 可測基数が存在し、かつ $V = L$ だと仮定する．最小の可測基数を κ とし、 κ 上の非単項 κ 完備超フィルターを U とする． $j: V \rightarrow M$ を U から生じる初等埋め込みとする．今、 $V = L$ を仮定しているので、 L の内部モデルとしての最小性により $M = V = L$ である．

$V \models \kappa$ は最小の可測基数

と j の初等性により

$V \models j(\kappa)$ は最小の可測基数

である．よって、 $j(\kappa) = \kappa$ とならないといけないが、これは $j(\kappa) > \kappa$ であったことに矛盾． \square

定理 3.5. $j: V \rightarrow M$ を非自明な初等埋め込みとする. このとき, $\text{crit}(j)$ は可測基数である. 特に非自明な初等埋め込みが存在するとき可測基数が存在する.

証明. $\kappa = \text{crit}(j)$ とおく.

$$D = \{X \subseteq \kappa : \kappa \in j(X)\}$$

とおく. D が非単項 κ 完備超フィルターなことを示す.

主張: $\kappa \in D$.

証明: $\kappa < j(\kappa)$ なのでよい. //

主張: $\emptyset \notin D$.

証明: 初等性より $j(\emptyset) = \emptyset$ なのでよい. //

主張: D は共通部分で閉じている.

証明: $X, Y \in D$ とすると $\kappa \in j(X), j(Y)$. ところが初等性により $j(X \cap Y) = j(X) \cap j(Y)$ なので $\kappa \in j(X \cap Y)$. よって $X \cap Y \in D$. //

主張: D は上に閉じている.

証明: $X \in D$ かつ $X \subseteq Y$ とする. すると初等性より $j(X) \subseteq j(Y)$ である. したがって, $\kappa \in j(X) \subseteq j(Y)$ を得るのでよい. //

主張: D は超フィルターである.

証明: $X \notin D$ とすると $\kappa \notin j(X)$. 初等性より $j(\kappa \setminus X) = j(\kappa) \setminus j(X)$ となり, 右辺に κ が属しているため, $\kappa \in j(\kappa \setminus X)$. つまり, $\kappa \setminus X \in D$ である. //

主張: D は非単項.

証明: $\alpha \in \kappa$ について $j(\{\alpha\}) = \{j(\alpha)\} = \{\alpha\}$ である. 第一の等式は初等性, 第二の等式は臨界点 κ の最小性による. この集合に κ は属さない. //

主張: D は κ 完備.

証明: $\bar{X} = \langle X_i : i < \gamma \rangle$ を D の元からなる列とする. ただし, $\gamma < \kappa$. 今, 初等性により $j(\bar{X}) = \langle j(X_i) : i < j(\gamma) \rangle = \langle j(X_i) : i < \gamma \rangle$ である. したがって, 再び初等性により $\bigcap_{i < \gamma} j(X_i) = j(\bigcap_{i < \gamma} X_i)$ となる. しかし, 仮定より左辺に κ が属しているため, 右辺にも属する. よって, $\bigcap_{i < \gamma} X_i \in D$. //

以上で D が非単項 κ 完備超フィルターなことが示された. \square

定理 3.5 で作った超フィルターは正規である. 実際, 初等埋め込み j により $D = \{X \subseteq \kappa : \kappa \in j(X)\}$ と定義された超フィルター D が正規なことを示そう. f を $X \in D$ 上の押し下げ関数とすると D の定義より, $\kappa \in j(\{\alpha : f(\alpha) < \alpha\})$ なので, $j(f)(\kappa) < \kappa$ である. そこで $\gamma = j(f)(\kappa)$ とおく. このとき $\kappa \in j(\{\alpha : f(\alpha) = \gamma\})$ だから, 再び D の定義より, $\{\alpha : f(\alpha) = \gamma\} \in D$ となる. よって, D は正規である.

正規性は次のように超冪の言葉で特徴づけられる.

補題 3.6. D を κ 上の非単項 κ 完備超フィルターとする. このとき次は同値.

- (1) D は正規.
- (2) $\text{Ult}_D(V)$ において $\kappa = [d]$. ここに d は対角関数.
- (3) $D = \{X \subseteq \kappa : \kappa \in j_D(X)\}$.

証明. (1) ならば (2) の証明. $\kappa \leq [d]$ は明らかなので, $[d] \leq \kappa$ を示す. $f \in {}^*d$ とすると f は押し下げ関数である. よって, 仮定 (1) よりある $\gamma < \kappa$ があって, $[f] = \gamma$.

(2) ならば (3) の証明. $X \subseteq \kappa$ とする.

$$\begin{aligned} X \in D &\iff \{\alpha < \kappa : \alpha \in X\} \in D \\ &\iff \{\alpha < \kappa : d(\alpha) \in X\} \in D \\ &\iff [d] \in j_D(X) \text{ (Łoś の定理より)} \\ &\iff \kappa \in j_D(X) \text{ (仮定より)} \end{aligned}$$

より良い.

(3) ならば (1) の証明はこの補題の上の注意より従う. □

補題 3.7. κ を可測基数とする. もし $2^\kappa > \kappa^+$ ならば, どんな κ 上の正規 κ 完備非単項超フィルター D についても集合 $\{\alpha < \kappa : 2^\alpha > \alpha^+\}$ は D に属する. したがって, すべての基数 $\alpha < \kappa$ について $2^\alpha = \alpha^+$ ならば, $2^\kappa = \kappa^+$ である.

証明. D を κ 上の正規 κ 完備非単項超フィルターとし, $M = \text{Ult}_D(V)$ とおく. もし, $\{\alpha < \kappa : 2^\alpha = \alpha^+\} \in D$ なら $[d] = \kappa$ と Łoś の定理より $2^\kappa = \kappa^+$ in M を得る. ところが, 補題??より $2^\kappa = (2^\kappa)^M$ かつ $\kappa^+ = \kappa$ なので, V で $2^\kappa = \kappa^+$ である. □

4 ジェネリック超冪

κ を非可算正則基数とし I を κ 上のイデアルとする. I 正值集合のなす半順序集合 (I^+, \subseteq) を考える:

$$I^+ = \{X \subseteq \kappa : X \notin I\}.$$

G を (V, P) ジェネリックフィルターとする.

以下の補題で M **超フィルター** というのは次を満たす $D \subseteq \mathcal{P}^M(\kappa)$ である:

- (1) $\emptyset \notin D, \kappa \in D$.
- (2) $X, Y \in D$ なら $X \cap Y \in D$.
- (3) $X \in D$ かつ $Y \in M$ で $X \subseteq Y$ ならば, $Y \in D$.
- (4) $X \in M$ が $X \subseteq \kappa$ であるとき, $X \in D$ または $\kappa \setminus X \in D$.

補題 4.1. (1) G は κ 上の V 超フィルターで I の双対フィルターを拡大するものである.

(2) V で I が κ 完備なら, G は κ 完備 V 超フィルターである.

(3) I が正規ならば, G も正規である.

証明. (1) の証明. X が I の双対フィルターの元ならば, $\{Y \in I^+ : Y \subseteq X\}$ は I^+ の稠密部分集合なので, $X \in G$ を得る. V 超フィルターなことの証明はやさしい.

(2) の証明. $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}, \gamma < \kappa$ を V に属する κ の分割とする. すると $\{Y \in I^+ : Y \subseteq X_\alpha \text{ (for some } \alpha < \gamma)\}$ は I^+ の稠密部分集合である (by I の κ 完備性). したがって, ある X_α が G に属する.

(3) の証明. $X \in G$ とし $f \in V$ を X 上の押し下げ関数とする. すると $\{Y \in I^+ : f \text{ is constant on } Y\}$ は X の下で稠密である. よって f はある $Y \in G$ の上で定数である. □

これから I は κ 上の κ 完備イデアルとし, 全ての一点集合を含むものとする. すると G は κ 上の非単項 κ 完備 M 超フィルターである. $V[G]$ で超冪 $\text{Ult}_G(V)$ を考える. これを**ジェネリック超冪**という. これは ZFC のモデルだが, 必ずしも well-founded ではない.

Łoś の定理はジェネリック超冪でも成立する：

$$\text{Ult}_G(V) \models \varphi([f_1], \dots, [f_n]) \iff \{\alpha \in \kappa : \varphi(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha))\} \in G.$$

ここに φ は集合論の論理式で, $f_1, \dots, f_n \in V$. 特に初等埋め込み $j_G: V \rightarrow \text{Ult}_G(V); j_G(x) = [c_x]$ を得る.

$N = \text{Ult}_G(V)$ とする. N 中の順序数全体 On^N は線形順序付けられたクラスだが, 必ずしも整列しているとは言えない. しかし, 次の補題は成り立つ. ここで, $x \in \text{On}^N$ について $\{y \in \text{On}^N : y <^N x\}$ が順序型 α を持つとき, 記号の乱用で $x = \alpha$ と書く.

補題 4.2. (1) 各 $\gamma < \kappa$ について, $j(\gamma) = \gamma$. よって On^N は順序型 κ の始切片を持つ.

(2) I が正規ならば, $x \in \text{On}^N$ があって, $x = \kappa$ である. 実際, $[d] = \kappa$ である. ただし d は対角関数.

(3) $j(\kappa) \neq \kappa$.

証明. (1) の証明. $j \upharpoonright \gamma$ が (γ, \in) と $\{y \in \text{On}^N : y <^N j(\gamma)\}, <^N\}$ の間の同型写像であることを示せばよい. $j \upharpoonright \gamma$ の値域が $\{y \in \text{On}^N : y <^N j(\gamma)\}, <^N\}$ に含まれることは明らか. 順序保存性, 単射性は j の初等性より明らか.

全射性を示す. $y \in \text{On}^N$ で $y <^N j(\gamma)$ とする. $y = [f], f \in M, \text{dom}(f) = \kappa$ なる f を取る. すると $[f] <^N j(\gamma)$ より

$$\{\alpha : f(\alpha) < \gamma\} \in G$$

だが, 左辺は $\bigcup_{\beta < \gamma} \{\alpha : f(\alpha) = \beta\}$ と書けるため, G の κ 完備性により, ある $\beta < \kappa$ について $\{\alpha : f(\alpha) = \beta\} \in G$ である. よって, $y = [f] = j(\beta)$.

(2) の証明. $j \upharpoonright \kappa$ が κ と $\{y \in \text{On}^N : y <^N [d]\}$ の間の同型となることを示す. $j \upharpoonright \kappa$ の値域が $\{y \in \text{On}^N : y <^N [d]\}$ に収まることは, 各 $\alpha \in \kappa$ について $\langle \alpha, \alpha, \alpha, \dots \rangle \in^* \langle 0, 1, 2, \dots \rangle$ よりよい. 順序保存性, 単射性は再び明らかである.

全射性を示す. $[f] \in \text{On}^N$ で $[f] <^N [d]$ なるものをとる. すると f はある G のメンバーの上で押し下げ関数である. G が正規なので, ある集合 $X \in G$ 上で f は定数関数である. その定数 $\alpha < \kappa$ について $j(\alpha) = [f]$ を得る.

(3) の証明. (2) の証明は全射性以外, 正規性を使っていない. そこで $\text{ran}(j \upharpoonright \kappa) \subseteq \{y \in \text{On}^N : y <^N [d]\}$ は順序型 κ を持つ. よって, $\{y \in \text{On}^N : y \leq^N [d]\}$ は順序型 $\kappa + 1$ の部分集合を持つ. $[d] < j(\kappa)$ であるため, $\{y \in \text{On}^N : y <^N j(\kappa)\}$ も順序型 $\kappa + 1$ の部分集合を持つ. よって, この集合は順序型 κ を持つことはない. \square

定理 4.3 (Silver). κ を特異基数で $\text{cf}(\kappa) = \omega_1$ とする. また, すべての $\lambda < \kappa$ で $2^\lambda = \lambda^+$ と仮定する. このとき $2^\kappa = \kappa^+$.

証明. $(\text{stat}_{\omega_1}, \subseteq)$ を ω_1 の定常集合全体が包含関係で作る半順序集合とする. G を $(V, \text{stat}_{\omega_1})$ ジェネリックフィルターとする. $V[G]$ で議論する. G は ω_1^M 上の正規 σ 完備 M 超フィルターである. $(N, \varepsilon^N) = \text{Ult}_G(V)$ をジェネリック超冪とし, $j: V \rightarrow N$ を誘導される初等埋め込みとする.

$\langle \kappa_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ を V の中で単調増加連続な基数の列で κ に収束するものとする. e を N 中の基数とし, $e(\alpha) = \kappa_\alpha$ で定められる関数によって表現されるものとする. e^+ を N 中での e の後続基数とする.

$x \in N$ に対して $\text{ext}(x) = \{y \in N : y \varepsilon^N x\}$ とおく. これは $V[G]$ の集合である. この定義より特に

$$\text{ext}(\mathcal{P}^N(e)) = \{x \in N : N \models "x \subseteq e"\}$$

である.

主張 A: $|\mathcal{P}^V(\kappa)| \leq |\text{ext}(\mathcal{P}^N(e))|$.

証明: V 中の $X \subseteq \kappa$ について関数 f_X を $f_X(\alpha) = X \cap \kappa_\alpha$ ($\alpha \in \omega_1$) と定める. f_X が表現する N の元は, N の中で e の部分集合である. また, $X \neq Y$ なら, 関数 f_X と f_Y はゆくゆく異なるので, 異なる N の元を表現する. //

主張 B: $|\text{ext}(\mathcal{P}^N(e))| = |\text{ext}(e^+)|$.

証明: V で任意の α について $2^{\kappa_\alpha} = \kappa_\alpha^+$ であることから, Łoś の定理より, N で $2^e = e^+$ が成り立つ. つまり $F \in N$ がとれて, $N \models F: 2^e \rightarrow e^+$ 全単射 となる. 各 $x \in \text{ext}(\mathcal{P}^N(e))$ について $y \in N$ で $N \models y = F(x)$ となる元を割り当てる関数を $\tilde{F}: \text{ext}(\mathcal{P}^N(e)) \rightarrow \text{ext}(e^+)$ とする. これは全単射であることが確認できるので, 主張が示された. //

主張 C: 任意の $a \in^N e$ について, $\gamma < \omega_1^V$ が存在して, $a \in^N j(\kappa_\gamma)$ である.

証明: $a \in^N e$ を任意にとり, 関数 f が a を表現するとする. このときある $X \in G$ があって, 全ての $\alpha \in X$ で $f(\alpha) < \kappa_\alpha$ である. ここで極限順序数全体の集合は club なので G に属する. よって, 上で取った X は全ての元が極限順序数だと仮定して良い. したがって, 列 $\langle \kappa_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ を連続で取っていたことから, $f(\alpha) < \kappa_{\gamma(\alpha)}$ が, ある $\gamma(\alpha) < \alpha$ について成り立つ. γ は押し下げ関数だから, ある $\gamma < \omega_1^V$ が存在して, ある $Y \in G$ について, 任意の $\alpha \in Y$ で $f(\alpha) < \kappa_\gamma$ となる. つまり $a \in^N j(\kappa_\gamma)$ を得る. //

主張 D: $|\text{ext}(e)| \leq \kappa$.

証明: 各 $\gamma < \omega_1^V$ について, $|j(\kappa_\gamma)| \leq |(\kappa_\gamma^{\aleph_1})^V| < \kappa$ である. 第一の不等号は $j(\kappa_\gamma)$ の元というのはつねに κ_γ の元を値に取る ω_1 列で表現されるからである. よって, 主張 C と合わせて, $|\text{ext}(e)| \leq \kappa$ を得る. //

主張 E: $|\text{ext}(e^+)| \leq \kappa^+$.

証明: もし, $x \in^N e^+$ なら, N の中に x から e への単射があるから, 主張 B と同じ方法によって, $\text{ext}(x)$ から $\text{ext}(e)$ への単射を得る. したがって, $\text{ext}(e^+)$ は全順序集合で, どの始切片もサイズたかだか κ を持つので, $\text{ext}(e^+) \leq \kappa^+$ を得る ([Jec06] の Exercise 5.3 を参照).

主張 A, B, E を組み合わせると

$$|\mathcal{P}^V(\kappa)| \leq |\text{ext}(\mathcal{P}^N(e))| \leq |\text{ext}(e^+)| \leq \kappa^+$$

を得る. これは $V[G]$ での不等式である. ところが, $|P| = 2^{\aleph_1} < \kappa$ であるため, chain condition により, V の全ての κ 以上の基数は $V[G]$ でも基数である. よって

$$|\mathcal{P}^V(\kappa)|^V \leq (\kappa^+)^V$$

を得る. これが欲しかった結論である. □

5 峻厳イデアル

参考文献

[Jec06] Thomas Jech. *Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded*. Springer Monographs in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2006.