可測基数ノート

でぃぐ

2023 年 3 月 3 日

概要

本稿は可測基数についてのノートである．可測基数のかなり初歩的な話からはじめ，超冪と初等埋め込みという標準的な話題を扱い，最後に応用として峻厳イデアルの存在の無矛盾性証明を行う．

目次

本稿の内容はほぼ Jech のテキスト [Jec06] を参考にしている．

1　可測基数の初歩

可測基数の研究は，$[0,1]$ の Lebesgue 測度を $[0,1]$ の冪集合全体に拡張できるかという問から出発している．本節では ZFC にその命題を付け加えた公理系の無矛盾性が ZFC の無矛盾性を超えることを示す．

定義 1.1. S を無限集合とする． S 上の (一様かつ σ 加法的な確率) **測度**とは $\mu\colon \mathcal{P}(S) \to [0,1]$ であって，次を満たすものである：

(1) $\mu(\varnothing) = 0, \mu(S) = 1$.
(2) $X \subseteq Y \subseteq S$ なら，$\mu(X) \leq \mu(Y)$.
(3) (一様性) 任意の $s \in S$ について $\mu(\{s\}) = 0$.
(4) (σ 加法性) $X_n, n \in \omega$ が互いに素な S の部分集合たちであれば，

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\omega} X_n\right) = \sum_{n\in\omega} \mu(X_n).$$

測度論で扱う測度は S 上のある σ 加法族を定義域とするものであったが，ここで扱う測度は定義域が $\mathcal{P}(S)$ なことに注意しよう．

定義 1.2. μ を S 上の測度とする．$A \subseteq S$ が**原子**であるとは，$\mu(A) > 0$ かつ任意の $X \subseteq A$ に対して $\mu(X) = 0$ または $\mu(X) = \mu(A)$ となるものである．原子が存在しない測度を原子なしの測度という．

定義 1.3. (1) 基数 κ が**可測基数**であるとは，κ 上の κ 完備な非単項超フィルターが存在することを

言う．

(2) 基数 κ が**実数値可測基数**であるとは，κ 上の κ 加法的測度が存在することを言う．

S 上の非単項超フィルターを考えることと，S 上の値域が $\{0,1\}$ である (つまり，2 値である) 測度を考えることは同じである．

実際，非単項超フィルター U に対して

$$\mu(X) = \begin{cases} 1 & (X \in U) \\ 0 & (X \notin U) \end{cases}$$

で定義される測度を対応される写像と，2 値測度 μ に対して非単項超フィルター

$$U = \mu^{-1}\{1\}$$

を対応させる写像は互いの逆写像である．

また，この対応において，超フィルターが κ 完備なことと測度が κ 加法的なことが対応する．よって，可測基数は実数値可測基数である．

定義 1.4. 集合 S 上のイデアル I で **σ 飽和的**であるとは，I に属さない S の部分集合族で互いに素なものはどれも，族の濃度が可算であることを意味する．

S 上の測度 μ から来るイデアル $I_\mu = \mu^{-1}\{0\}$ は必ず σ 飽和的である．なぜなら，$\mathcal{A}$ が I に属さない (すなわち μ の測度が正な) 部分集合の族で互いに素なものとしよう．このとき正の自然数 n に対して $\mu(A) > 1/n$ を満たす $A \in \mathcal{A}$ は n 個しかない．よって，$\mathcal{A}$ は有限集合の可算和であるから，たかだか可算濃度を持つ．

補題 1.5. 実数値可測基数 (および可測基数) は正則基数である．

証明．κ を実数値可測基数とする．κ 上の κ 完備な測度 μ を取る．κ が特異だとすると，κ の共終列 $\langle \lambda_i : i < \mathrm{cf}(\kappa) \rangle$ でおのおのの λ_i は κ 未満なものが取れる．今，$\kappa = \bigcup_{i<\mathrm{cf}(\kappa)} \lambda_i$ である．左辺 κ は測度 1 だが，右辺はおのおのの λ_i が測度 0 で，その $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$ 個の和集合だから測度 0 である．矛盾した．なお，ここで，おのおのの λ_i が測度 0 なのは，各 1 点集合が測度 0 で，λ_i はその $\lambda_i < \kappa$ 個の和集合として書けるからである． □

補題 1.6. 可測基数は到達不能基数である．

証明．κ を可測基数とする．

κ が正則なことは補題 1.5 で示した．

κ の強極限性を示す．背理法で，ある $\lambda < \kappa$ について，$2^\lambda \geq \kappa$ だと仮定する．集合 $S \subseteq \{0,1\}^\lambda$ で $|S| = \kappa$ となるものを取る．集合 S 上の κ 完備な非単項超フィルター U を取る．各 $\alpha \in \lambda$ について集合 $X_\alpha \subseteq S$ を

$$\{f \in S : f(\alpha) = 0\} \text{ もしくは } \{f \in S : f(\alpha) = 1\}$$

で U に属する方とする．集合 X を

$$X = \bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha$$

で定めると $X \in U$ であるが，明らかに X は 1 点集合である．これは U の非単項性に矛盾． □

補題 1.7. (1) κ を次を満たす最小の基数とする：非単項 σ 完備な超フィルターが存在する．U をそのような超フィルターの一つとする．このとき，U は κ 完備である．

(2) κ を次を満たす最小の基数とする: κ 上の測度が存在する．μ をそのような測度とする．このとき測度 0 集合のイデアル I_μ は κ 完備である．

(3) κ を次を満たす最小の基数とする: κ 上の σ 完備かつ σ 飽和的イデアルが存在する．I をそのようなイデアルとする．このとき I は κ 完備である．

証明．(1). U が κ 完備でないと仮定する．すると κ の分割 $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}$ があって，$\gamma < \kappa$ かつ各 X_α は U の意味で小さい．関数 $f\colon \kappa \to \gamma$ を次で定める：

$$f(x) = \alpha \iff x \in X_\alpha.$$

つまり，各入力 $x < \kappa$ について，x が何番目のピースに属しているかを返す関数である．γ 上の超フィルター D を

$$D = \{Z \subseteq \gamma : f^{-1}(Z) \in U\}$$

で定める．U が σ 完備なので，D も σ 完備である．D は非単項でもある：なぜなら，各 $\alpha < \gamma$ について $f^{-1}\{\alpha\} = X_\alpha \notin U$ より $\alpha \notin D$ だからである．したがって，D は γ 上の単項 σ-完備な超フィルターだが，$\gamma < \kappa$ より，これは κ の最小性に矛盾．

(2). I_μ が κ 完備ではないと仮定する．すると測度 0 集合の族 $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}$ で，$\gamma < \kappa$ かつ，それらの和集合 $X = \bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha$ は測度正なものがとれる．X_α たちは互いに素であると仮定しても良い．$f\colon X \to \gamma$ を

$$f(x) = \alpha \iff x \in X_\alpha$$

と定め，γ 上の測度 ν を

$$\nu(Z) = \frac{\mu(f^{-1}(Z))}{\mu(X)}$$

と定める．ν は σ 加法的である．また，ν は一様である，なぜなら，各 $\alpha < \gamma$ について $\nu(\{\alpha\}) = \frac{\mu(X_\alpha)}{\mu(X)} = 0$ だからである．これは κ の最小性に反する．

(3) の証明は (1) や (2) と同様である． □

μ を集合 S 上の測度とし，I_μ を測度 0 集合のイデアルとすれば，μ が κ 加法的なら，I_μ が κ 完備なことは明らかである．逆も言える：

補題 1.8. μ を集合 S 上の測度とし，I_μ を測度 0 集合のイデアルとする．このとき，もし I_μ が κ 完備なら，μ は κ 加法的である．

証明．$\gamma < \kappa$ とし，$\langle X_\alpha : \alpha < \gamma\rangle$ を互いに素な S の部分集合の族とする．X_α たちが互いに素なので，そのうちたかだか可算個が正の測度を持つ．よって，

$$\{X_\alpha : \alpha < \gamma\} = \{Y_n : n \in \omega\} \cup \{Z_\alpha : \alpha < \gamma\}$$

と書くことができる．ここに各 Z_α は測度 0 集合．よって，

$$\mu(\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha) = \mu(\bigcup_{n\in\omega} Y_n) + \mu(\bigcup_{\alpha<\gamma} Z_\alpha)$$

を得る．μ が σ 加法的なので，

$$\mu(\bigcup_{n\in\omega} Y_n) = \sum_{n\in\omega} \mu(Y_n)$$

である．また，I_μ が κ 完備なので，

$$\mu(\bigcup_{\alpha<\gamma} Z_\alpha) = 0$$

である．以上より，

$$\mu(\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha) = \sum_{\alpha<\gamma} \mu(X_\alpha)$$

を得る． □

補題 1.9. (1) ある集合上の原子なしの測度が存在するとき，ある基数 $\kappa \le 2^{\aleph_0}$ 上に測度が存在する．

(2) I を集合 S 上の σ 完備 σ 飽和的イデアルとする．このとき，ある $Z \subseteq S$ に対して $I \upharpoonright Z = \{X \subseteq Z : X \in I\}$ が極大イデアルであるか，または，σ 完備 σ 飽和的イデアルがある $\kappa \le 2^{\aleph_0}$ 上に存在するかのどちらかが成り立つ．

証明. (1)．μ をそのような測度とする．S の測度正な部分集合からなり，逆向きの包含関係で順序付けられた木 T を構成する．T の根は S である．各 $X \in T$ について，X の測度正な集合への分割 $X = Y \cup Z, Y \cap Z = \varnothing$ を取り，この 2 つを X の直後の元とする．α が極限順序数のとき T の第 α レベルにはすべての共通部分 $X = \bigcap_{\xi<\alpha} X_\xi$ であって，$\langle X_\xi : \xi < \alpha\rangle$ は $T \upharpoonright \alpha$ の増大鎖で X_ξ は第 ξ レベルの元，X は測度正なものたちを置く．

T のどの枝も可算である：なぜなら，$\langle X_\xi : \xi < \alpha\rangle$ が枝ならば，$\langle X_\xi \setminus X_{\xi+1} : \xi < \alpha\rangle$ は測度正な集合の互いに素な族となるからである．

同様に，T のどのレベルも可算であることも分かる．よって，T はたかだか $2^{\aleph_0}$ 個の極大枝を持つ (各 $\alpha < \omega_1$ について高さ α の極大枝の個数はたかだか $2^{\aleph_0}$．よってそれらの ω_1 個の和集合でたかだか $2^{\aleph_0}$ 個となる)．

$\{b_\alpha : \alpha < \kappa\}, \kappa \le 2^{\aleph_0}$ をすべての極大枝 $b = \{X_\xi : \xi < \gamma\}$ であって，$\bigcap_{\xi<\gamma} X_\xi$ が非空なものの枚挙とする．各 $\alpha < \kappa$ について $Z_\alpha = \bigcap b_\alpha$ とおく．$\{Z_\alpha : \alpha < \kappa\}$ は S の測度 0 集合への分割となる (Z_α が測度 0 でないとすると，一個高さを上げることができ枝の極大性に反する; また，互いの異なる極大枝 b_α と b_β はどこかで枝分かれしているはずだから，後続ステップでの構成の仕方より，$X_\alpha \cap X_\beta = \varnothing$ を得る; 覆っていることは $s \in S$ を任意に取るとき，s が入っている集合を根から追跡することにより，ある X_α に s が入っていることがわかるからよい)．あとは $f \colon S \to \kappa$ を $f(x) = \alpha \iff x \in Z_\alpha$ とおき，κ 上の測度 ν を $\nu(Z) = \mu(f^{-1}(Z))$ とおけば，ν は一様な σ 加法的測度である．

(2)．(1) と同様である． □

系 1.10. κ が実数値可測基数ならば，κ は可測基数か，$\kappa \le 2^{\aleph_0}$ である．より一般に，κ が κ 完備 σ 飽和的イデアルを持つと，κ は可測基数であるか，$\kappa \le 2^{\aleph_0}$ である．

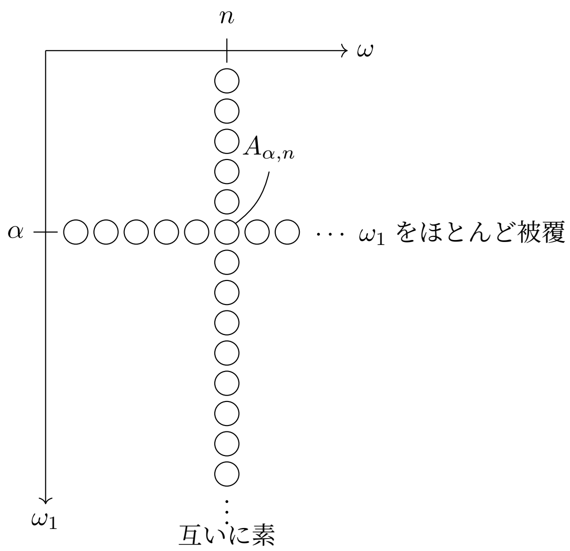
証明. 補題 1.9 の証明より，μ が S 上の原子なしの測度なら，S のたかだか $2^{\aleph_0}$ 個への測度 0 個の分割が存在することがわかる．つまり，μ は $(2^{\aleph_0})^+$ 加法的ではない．したがって，原子なしの κ 加法的測度を κ が持つとき，$\kappa \le 2^{\aleph_0}$ である (結論の否定を取ると，$\kappa \ge (2^{\aleph_0})^+$ だが，これと κ 加法性より $(2^{\aleph_0})^+$ 加法性が出るから)．後半の主張も同様． □

補題 1.9 の (1) の主張の結論には「原子なし」が含まれていなかったが，これは実際には「原子なし」と結論付けられる．なぜなら，原子があると κ は可測基数となるが，補題 1.6 より，それは $\kappa \le 2^{\aleph_0}$ と相容れないからだ．

定義 1.11. $(\aleph_1, \aleph_0)$-Ulam 行列とは，ω_1 の部分集合の族 $\langle A_{\alpha,n} : \alpha \in \omega_1, n \in \omega\rangle$ であって，次の 2 条件を満たすものである．

(1) 各 $n \in \omega$ と異なる $\alpha, \beta \in \omega_1$ について $A_{\alpha,n} \cap A_{\beta,n} = \varnothing$ である．

(2) 各 $\alpha \in \omega_1$ について，集合 $\omega_1 \setminus \bigcup_{n\in\omega} A_{\alpha,n}$ はたかだか可算集合である．



補題 1.12. $(\aleph_1, \aleph_0)$-Ulam 行列は存在する.

証明. 各 $\xi \in \omega_1$ に対して $f_\xi \colon \omega \to \omega_1$ を $\xi \subseteq \mathrm{ran}(f_\xi)$ なるものとする．集合 $A_{\alpha,n}$ を

$$\xi \in A_{\alpha,n} \iff f_\xi(n) = \alpha$$

と定める．

$\xi \in A_{\alpha,n} \cap A_{\beta,n}$ なら $\alpha = f_\xi(n) = \beta$ となるので，Ulam 行列の条件 (1) が成り立っていることがわかる．

$\alpha \in \omega_1$ とする．$\xi > \alpha$ に対して，f_ξ の取り方より，$f_\xi(n) = \alpha$ となる $n \in \omega$ が存在する．よって，

$$[\alpha + 1, \omega_1) \subseteq \bigcup_{n \in \omega} A_{\alpha,n}$$

なので条件 (2) も成り立っている． □

演習問題 1.13. $(\aleph_1, \aleph_0)$-Ulam 行列の定義において,「各行は可算集合を除いてほとんど ω_1 を覆っている」という条件を「各行は ω_1 を (完全に) 覆っている」と変更したバージョンは存在しないことを示せ.

補題 1.14. ω_1 上の σ 完備 σ 飽和的イデアルは存在しない．特に ω_1 上の測度は存在しない.

証明. そのようなイデアル I が存在したと仮定する．また，$\langle A_{\alpha,n} : \alpha \in \omega_1, n \in \omega \rangle$ を $(\aleph_1, \aleph_0)$-Ulam 行列とする．I の σ 完備性と Ulam 行列の条件 (2) より，各 α について自然数 n_α があって，$A_{\alpha,n}$ は I-正である．したがって，鳩の巣原理より，$W \subseteq \omega_1$, $|W| = \aleph_1$, $n \in \omega$ があって，すべての $\alpha \in W$ について $n_\alpha = n$ である．すると $\{A_{\alpha,n} : \alpha \in W\}$ は互いに素 (by Ulam 行列の条件 (1)) な非可算な I-正集合の族となる．これは I の σ 飽和性に矛盾する． □

以上の ω_1 を一般の後続基数に一般化できる．証明は同様なので省略する.

定義と補題 1.15. λ を基数とする.

(1) (λ^+, λ)-Ulam 行列とは，λ^+ の部分集合の族 $\langle A_{\alpha,\eta} : \alpha \in \lambda^+, \eta \in \lambda \rangle$ であって，次の 2 条件を満たすものである.
   (a) 各 $\eta \in \lambda$ と異なる $\alpha, \beta \in \lambda^+$ について $A_{\alpha,\eta} \cap A_{\beta,\eta} = \varnothing$ である.
   (b) 各 $\alpha \in \lambda^+$ について，集合 $\lambda^+ \setminus \bigcup_{\eta \in \lambda} A_{\alpha,\eta}$ は λ 以下の濃度を持つ.

(2) (λ^+, λ)-Ulam 行列は存在する．

(3) λ^+ 上の λ^+ 完備 σ 飽和的イデアルは存在しない．

系 1.16. 任意の実数値可測基数は，弱到達不能基数である．

証明．κ を実数値可測基数とする．正則なことは補題 1.5 で示した．後続基数でないことは，定義と補題 1.15 から分かる． □

以上より次が結論付けられる：ZFC に「ある集合上の測度が存在する」という命題を加えた公理系の無矛盾性の強さは ZFC より真に強い．なぜなら「ある集合上の測度が存在する」からはその測度が原子ありかなしかに応じて，到達不能基数か弱到達不能基数のどちらかが出て，どちらも ZFC の無矛盾性を出すからである．これが Ulam が証明した定理である．

2 正規フィルター

κ の部分集合の列 $(X_\alpha : \alpha < \kappa)$ についてその**対角共通部分** $\triangle_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ というのは

$$\mathop{\triangle}_{\alpha<\kappa} X_\alpha = \{\beta < \kappa : (\forall \alpha < \beta)(\beta \in X_\alpha)\}$$

で定まっていた．その双対概念として，

$$\mathop{\triangledown}_{\alpha<\kappa} X_\alpha = \{\beta < \kappa : (\exists \alpha < \beta)(\beta \in X_\alpha)\}$$

を**対角和集合**という．

フィルターが**正規**であるとは，それが対角共通部分を取る操作で閉じていることであった．イデアルが正規というのは双対フィルターが正規であること，すなわち対角和を取る操作で閉じていることを意味する．$f \colon X \to \kappa$ $(X \subseteq \kappa)$ が**押し下げ関数**であるとは，任意の $\alpha \in X$ について $f(\alpha) < \alpha$ となることであった．

イデアル I に対して集合

$$I^+ = \{A \subseteq \kappa : A \notin I\}$$

の元を I 正値集合ということにする．

補題 2.1. I を κ 上のイデアルとする．次は同値．

(1) I は正規．

(2) 任意の I 正値集合 S_0 と任意の S_0 上の押し下げ関数 f に対して，I 正値集合 $S \subseteq S_0$ があって f は S 上定数．

証明．(1) ならば (2) は Fodor の補題の証明そのままである．

(2) ならば (1) を証明する．I の双対フィルターを F とする．$(X_\alpha : \alpha < \kappa)$ を F の元の列とする．$\triangle_{\alpha<\kappa} X_\alpha \notin F$ だとする．$S = \kappa \setminus \triangle_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ とおく．S は I 正値集合である．$f(\alpha)$ を $\xi < \alpha$ であって，$\alpha \notin X_\xi$ なものとして定める (対角共通部分の定義より取れる)．すると (2) より I 正値集合 $S' \subseteq S$ と $\gamma < \kappa$ がとれて，任意の $\alpha \in S'$ について $f(\alpha) = \gamma$．これは f の定義より $S' \cap X_\gamma = \varnothing$ を意味する．S' が I 正値集合で $X_\gamma \in F$ なのでこれは矛盾． □

したがって，κ 上の超フィルター U に対しては，U が正規であることと任意の押し下げ関数 $f \colon X \to \kappa$, $X \in U$ に対して，ある $Y \in U$ について f が Y 上で定数関数となることと同値である．

補題 2.2. κ を非可算正則基数とし，F を κ 上の正規フィルターで，任意の終切片 $\{\alpha : \alpha_0 < \alpha < \kappa\}$ を持っているものとする．するとすべての club 集合は F の元を持つ．したがって，F の元はすべて定常集合である．

証明. まず極限順序数全体 Lim_κ は F の元であることに注意する：$X_\alpha = \{\xi : \alpha + 1 < \xi < \kappa\}$ の対角共通部分として書けるからである．C を club 集合とし，$C = \{a_\alpha : \alpha < \kappa\}$ を単調増加な枚挙とする．$Y_\alpha = \{\xi : a_\alpha < \xi < \kappa\}$ とおくと $\mathrm{Lim}_\kappa \cap \triangle_{\alpha<\kappa} Y_\alpha \subseteq C$ を得る．なぜなら $\beta \in \mathrm{Lim}_\kappa \cap \triangle_{\alpha<\kappa} Y_\alpha$ とすると

$$\beta = \sup_{\alpha<\beta} a_\alpha \in C$$

であるからである． □

定理 2.3. 任意の可測基数の上に正規超フィルターが存在する．

証明. U を κ 上の非単項 κ 完備超フィルターとする．$f, g \in \kappa^\kappa$ に対して，

$$f =^* g \iff \{\alpha < \kappa : f(\alpha) = g(\alpha)\} \in U$$

という同値関係を入れる．また，

$$f <^* g \iff \{\alpha < \kappa : f(\alpha) < g(\alpha)\} \in U$$

という擬全順序関係を入れる．

無限下降列 $f_0 >^* f_1 >^* f_2 >^* \ldots$ は存在しない．実際，それがあれば $X_n = \{\alpha : f_n(\alpha) > f_{n+1}(\alpha))\} \in U$ だが，U が σ 完備なので，$X = \bigcap_{n\in\omega} X_n \in U$ であり，特に X は空でない．$\alpha \in X$ を一つ取ると，順序数の無限下降列 $f_0(\alpha) > f_1(\alpha) > f_2(\alpha) > \ldots$ ができて矛盾である．

したがって，$<^*$ は擬整列順序である．

$f\colon \kappa \to \kappa$ を次を満たす (この擬整列順序で) 最小の関数とする：任意の $\gamma < \kappa$ に対して，$\{\alpha : f(\alpha) > \gamma\} \in U$ である．このような f は少なくとも 1 つ存在する．たとえば対角関数 $d(\alpha) = \alpha$ は条件を満たす．

$D = f(U) = \{X \subseteq \kappa : f^{-1}(X) \in U\}$ とおく．D が κ 上の正規超フィルターなことを示そう．

各 $\gamma < \kappa$ に対して，$f^{-1}\{\gamma\} \notin U$ である ($f^{-1}[\gamma + 1, \kappa) \in U$ だから)．よって，$\gamma \notin D$ なので，D は非単項である．

D の正規性を示そう．h を $X \in D$ 上の押し下げ関数とする．h が D のあるメンバー上で定数なことを示さなければいけない．$g \in \kappa^\kappa$ を $g(\alpha) = h(f(\alpha))$ で定義される関数とする．$g(\alpha) < f(\alpha)$ がすべての $\alpha \in f^{-1}(X)$ で成り立つ．よって，$g <^* f$ である．f の最小性より，ある $\gamma < \kappa$ に対して $Y := \{\alpha : g(\alpha) = \gamma\} \in U$ となる．したがって，D の定義より $f(Y) \in D$ であり，また，h は $f(Y)$ 上で定数 γ を取る． □

3 宇宙 V の超冪と初等埋め込み

本節では，可測基数が存在すれば，内部モデルへの初等埋め込みが存在すること，逆に初等埋め込みがあれば可測基数があることを示す．また，可測基数の存在が $V = L$ と両立しないことを示す．

U を集合 S 上の超フィルターとする．$f, g\colon S \to V$ に対して次の二つの関係を定める：

$$f =^* g \iff \{x \in S : f(x) = g(x)\} \in U,$$
$$f \in^* g \iff \{x \in S : f(x) \in g(x)\} \in U.$$

S を定義域とする関数全体は真クラスをなすため，同値関係 $=^*$ のおのおのの同値類は真クラスになってしまう．そこで Scott のトリックを使って，次のように同値類のようなものを定義する．

$$[f] = \{g : f =^* g \wedge \neg(\exists h)(h = f \wedge \operatorname{rank} h < \operatorname{rank} g)\}$$

こうすると各 $[f]$ は集合となる．$f, g\colon S \to V$ に対して，$[f] \in^* [g] \iff f \in^* g$ と定義する．これは well-defined である．

$\mathrm{Ult} = \mathrm{Ult}_U(V)$ をすべての $[f]$ (ただし $f\colon S \to V$) 全体のなすクラスとする．構造 $\mathrm{Ult} = (\mathrm{Ult}, \in^*)$ を考える．これを宇宙 V の**超冪**という．通常のモデル理論におけるŁoś の定理は宇宙の超冪でも成り立つことが確認できる：

$$\mathrm{Ult} \models \varphi([f_1], \dots, [f_n]) \iff \{x \in S : \varphi(f_1(x), \dots, f_n(x))\} \in U.$$

ここに φ は集合論の論理式．特に文を考えると，$(V, \in)$ と $(\mathrm{Ult}, \in^*)$ が初等同値なことが分かる．

また，各 $a \in V$ に対して定数関数 $c_a\colon S \to V; c_a(x) = a$ を考えて，$j(a) = [c_a]$ とおくと

$$\mathrm{Ult} \models \varphi(j(a_1), \dots, j(a_n)) \iff V \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$$

を得る．つまり，モデル理論で使っていた用語を拝借すると，$j\colon V \to \mathrm{Ult}$ は**初等埋め込み**である．

超冪が well-founded である状況を考察する．set-like であることは常に成り立つ：つまり任意の f について

$$\mathrm{ext}(f) = \{[g] : g \in^* f\}$$

は常に集合である．なぜなら，$g \in^* f$ なる g を考えるとある $h =^* g$ であってすべての $x \in S$ で $h(x) \in f(x)$ となるものをとれる．この h はランクが f 以下である．よって $\mathrm{rank}([g]) \leq \mathrm{rank}(f) + 1$ となるので，$\mathrm{ext}(f)$ は集合である．

補題 3.1. U が σ 完備な超フィルターなら，$(\mathrm{Ult}, \in^*)$ は well-founded である．

証明．Ult の無限 $\in^*$ 下降列がないことを示せば良い．もしあったとする：$[f_0] \ni^* [f_1] \in^* \ni \dots$. すると各 n について集合

$$X_n := \{x \in S : f_{n+1}(x) \in f_n(x)\}$$

は U に属する．U の σ 完備性より

$$X = \bigcap_{n \in \omega} X_n$$

も U に属し，特に空でない．そこから元 $x \in X$ を一つ取ると，

$$f_0(x) \ni f_1(x) \ni f_2(x) \ni \dots$$

となり，整楚性公理に反する． □

Mostowski の崩壊定理は任意の well-founded モデルは推移的モデルと同型なことを主張しているのであった．よって，U が σ 完備なら，あるクラス M と同型なクラス写像 $\pi\colon (\mathrm{Ult}, \in^*) \to (M, \in)$ が存在する．記号の乱用で $\pi([f])$ のことを単に $[f]$ と書く．合成写像 $\pi \circ j$ の方がもとの j より重要であるため，これを単に j と書く．したがって，初等埋め込み $j\colon V \to M$ が得られる．

α が順序数ならば $j(\alpha)$ も順序数であり，初等性と絶対性より $\alpha < \beta \iff j(\alpha) < j(\beta)$ を得る．したがって，任意の順序数について $\alpha \leq j(\alpha)$ を得る．したがって，順序数全体のクラス On は V と M の間で変わらない：$\mathrm{On}^V = \mathrm{On}^M$．すなわち，$M$ は V の内部モデルである．

初等性より $j(0) = 0$ かつすべての $n \in \omega$ について $j(\alpha + 1) = j(\alpha) + 1$ であるので，すべての $n \in \omega$ について $j(n) = n$ である．$j(\omega) = \omega$ は ω の定義可能性と絶対性より分かる．

定義 3.2. 内部モデルへの初等埋め込み $j\colon V \to M$ について,

$$\mathrm{crit}(j) = \min\{\alpha \in \mathrm{On} : \alpha < j(\alpha)\}$$

とおき, j の**臨界点**と呼ぶ.

補題 3.3. (1) 内部モデルへの初等埋め込み $j\colon V \to M$ が非自明, すなわち $j \neq \mathrm{id}$ のとき, 臨界点 $\mathrm{crit}(j)$ は存在する.

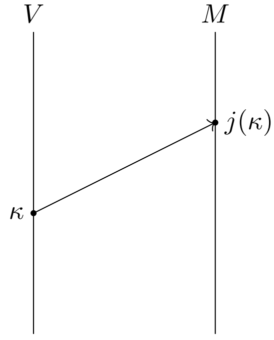
(2) 可測基数 κ とその上の κ 完備非単項超フィルター U について U を使った超冪によって定まる初等埋め込み $j\colon V \to M$ について, その臨界点は κ である.

証明. (1) の証明. $j(x) \neq x$ なるランク最小の x を取る. $y \in x$ なら $\mathrm{rank}(y) < \mathrm{rank}(x)$ なので, x のランク最小性より, $y = j(y)$ を得る. よって, $y = j(y) \in j(x)$ となる. したがって, $x \subseteq j(x)$. したがって, $j(x) \neq x$ であることと合わせると $z \in j(x) \setminus x$ がとれる. もし, $\mathrm{rank}(j(x)) = \mathrm{rank}(x)$ なら $j(z) = z \in j(x)$ となるので, 初等性より $z \in x$ を得て, 矛盾. よって $\mathrm{rank}(j(x)) > \mathrm{rank}(x)$ である. 一方でランクの定義可能性と初等性と絶対性より $\mathrm{rank}(j(x)) = j(\mathrm{rank}(x))$ を得るので, $j(\mathrm{rank}(x)) > \mathrm{rank}(x)$. したがって $\{\alpha \in \mathrm{On} : \alpha < j(\alpha)\}$ が空でないことが証明された.

(2) の証明. $\alpha < \kappa$ として $j(\alpha) = \alpha$ を示す. α に関する超限帰納法で示すことにすれば, 任意の $\beta < \alpha$ で $j(\beta) = \beta$ であることを仮定して良い. $[f] \in j(\alpha)$ を取る. すると U の意味でほとんどすべての $x \in S$ で $f(x) < \alpha$. ここで U の κ 完備性より, ある $\beta < \alpha$ が存在して, ほとんどすべての $x \in S$ で $f(x) = \beta$. よって $[f] \in j(\beta)$ である. 帰納法の仮定より $[f] \in j(\beta) = \beta$ なので, これで $j(\alpha) = \alpha$ が示された.

次に $j(\kappa) > \kappa$ を示す. 対角関数 $d(\alpha) = \alpha$ を考える. $\{\alpha : d(\alpha) < \kappa\} = S \in U$ なので, $[d] < j(\kappa)$ である. 次に $\kappa \leq [d]$ を示す. $\beta < \kappa$ を任意にとる. すると $\{\alpha : \beta < d(\alpha)\} = [\beta + 1, \kappa] \in U$ なので, $j(\beta) < [d]$. $j(\beta) = \beta$ は証明済みなので $\beta < [d]$ を得る. これで $\kappa \leq [d]$ が示された. 以上より, $\kappa \leq [d] < j(\kappa)$ である. □

内部モデルへの初等埋め込み $j\colon V \to M$ は $j \neq \mathrm{id}$ なら全射ではない. なぜなら, $\mathrm{crit}(j)$ が j の像ではないからである.



定理 3.4 (Scott)**.** 可測基数が存在することと $V = L$ は両立しない.

証明. 可測基数が存在し, かつ $V = L$ だと仮定する. 最小の可測基数を κ とし, κ 上の非単項 κ 完備超フィルターを U とする. $j\colon V \to M$ を U から生じる初等埋め込みとする. 今, $V = L$ を仮定しているので, L の内部モデルとしての最小性により $M = V = L$ である.

$$V \models \kappa \text{ は最小の可測基数}$$

と j の初等性により

$$V \models j(\kappa) \text{ は最小の可測基数}$$

である．よって，$j(\kappa) = \kappa$ とならないといけないが，これは $j(\kappa) > \kappa$ であったことに矛盾． □

定理 3.5. $j\colon V \to M$ を非自明な初等埋め込みとする．このとき，$\mathrm{crit}(j)$ は可測基数である．特に非自明な初等埋め込みが存在するとき可測基数が存在する．

証明．$\kappa = \mathrm{crit}(j)$ とおく．

$$D = \{X \subseteq \kappa : \kappa \in j(X)\}$$

とおく．D が非単項 κ 完備超フィルターなことを示す．

主張: $\kappa \in D$.

証明: $\kappa < j(\kappa)$ なのでよい． //

主張: $\varnothing \notin D$.

証明: 初等性より $j(\varnothing) = \varnothing$ なのでよい． //

主張: D は共通部分で閉じている．

証明: $X, Y \in D$ とすると $\kappa \in j(X), j(Y)$．ところが初等性により $j(X \cap Y) = j(X) \cap j(Y)$ なので $\kappa \in j(X \cap Y)$．よって $X \cap Y \in D$. //

主張: D は上に閉じている．

証明: $X \in D$ かつ $X \subseteq Y$ とする．すると初等性より $j(X) \subseteq j(Y)$ である．したがって，$\kappa \in j(X) \subseteq j(Y)$ を得るのでよい． //

主張: D は超フィルターである．

証明: $X \notin D$ とすると $\kappa \notin j(X)$．初等性より $j(\kappa \setminus X) = j(\kappa) \setminus j(X)$ となり，右辺に κ が属しているため，$\kappa \in j(\kappa \setminus X)$．つまり，$\kappa \setminus X \in D$ である． //

主張: D は非単項.

証明: $\alpha \in \kappa$ について $j(\{\alpha\}) = \{j(\alpha)\} = \{\alpha\}$ である．第一の等式は初等性，第二の等式は臨界点 κ の最小性による．この集合に κ は属さない． //

主張: D は κ 完備.

証明: $\bar{X} = \langle X_i : i < \gamma \rangle$ を D の元からなる列とする．ただし，$\gamma < \kappa$．今，初等性により $j(\bar{X}) = \langle j(X_i) : i < j(\gamma) \rangle = \langle j(X_i) : i < \gamma \rangle$ である．したがって, 再び初等性により $\bigcap_{i<\gamma} j(X_i) = j(\bigcap_{i<\gamma} X_i)$ となる．しかし，仮定より左辺に κ が属しているため，右辺にも属する．よって，$\bigcap_{i<\gamma} X_i \in D$. //

以上で D が非単項 κ 完備超フィルターなことが示された． □

定理 3.5 で作った超フィルターは正規である．実際, 初等埋め込み j により $D = \{X \subseteq \kappa : \kappa \in j(X)\}$ と定義された超フィルター D が正規なことを示そう．f を $X \in D$ 上の押し下げ関数とすると D の定義より，$\kappa \in j(\{\alpha : f(\alpha) < \alpha\})$ なので，$j(f)(\kappa) < \kappa$ である．そこで $\gamma = j(f)(\kappa)$ とおく．このとき $\kappa \in j(\{\alpha : f(\alpha) = \gamma\})$ だから，再び D の定義より，$\{\alpha : f(\alpha) = \gamma\} \in D$ となる．よって，D は正規である．

正規性は次のように超冪の言葉で特徴づけられる．

補題 3.6. D を κ 上の非単項 κ 完備超フィルターとする．このとき次は同値.

(1) D は正規.

(2) $\mathrm{Ult}_D(V)$ において $\kappa = [d]$．ここに d は対角関数.

(3) $D = \{X \subseteq \kappa : \kappa \in j_D(X)\}$.

証明．(1) ならば (2) の証明．$\kappa \le [d]$ は明らかなので，$[d] \le \kappa$ を示す．$f \in^* d$ とすると f は押し下げ関数である．よって，仮定 (1) よりある $\gamma < \kappa$ があって，$[f] = \gamma$.

(2) ならば (3) の証明．$X \subseteq \kappa$ とする．

$$\begin{aligned} X \in D &\iff \{\alpha < \kappa : \alpha \in X\} \in D \\ &\iff \{\alpha < \kappa : d(\alpha) \in X\} \in D \\ &\iff [d] \in j_D(X) \text{ (Łoś の定理より)} \\ &\iff \kappa \in j_D(X) \text{ (仮定より)} \end{aligned}$$

より良い．

(3) ならば (1) の証明はこの補題の上の注意より従う． □

次に，V から V への初等埋め込みは存在しないという Kunen の定理を証明する．そのために補題を用意する．

補題 3.7. λ を無限基数で $2^\lambda = \lambda^{\aleph_0}$ なるものとする．このとき関数 $F\colon \lambda^\omega \to \lambda$ が存在して，任意の $A \in [\lambda]^\lambda$ と $\gamma < \lambda$ について，ある $s \in A^\omega$ があって，$F(s) = \gamma$ である．

証明．$\langle (A_\alpha, \gamma_\alpha) : \alpha < 2^\lambda \rangle$ を $[\lambda]^\lambda \times \lambda$ の枚挙とする．α に関する帰納法で，λ^ω の元の列 $\langle s_\alpha : \alpha < 2^\lambda \rangle$ を次のように定める：α ステージにおいて，$s_\alpha \in [A_\alpha]^\lambda$ かつすべての $\beta < \alpha$ について $s_\alpha \neq s_\beta$ である．これは $|A_\alpha^\omega| = \lambda^\omega = 2^\lambda > |\beta|$ より取ることができる．各 $\alpha < 2^\lambda$ について $F(s_\alpha) = \gamma_\alpha$ と定める．列 $\langle s_\alpha : \alpha < 2^\lambda \rangle$ の中に現れない s については $F(s)$ は何でもよい．

この F が条件を満たす．実際, $A \in [\lambda]^\lambda$ と $\gamma < \lambda$ をとると, ある $\alpha < 2^\lambda$ があって, $(A, \gamma) = (A_\alpha, \gamma_\alpha)$ であり，$F(s_\alpha) = \gamma_\alpha$ となる． □

定理 3.8 (Kunen)**.** $j\colon V \to M$ が非自明 (すなわち $j \neq id$) な初等埋め込みとしたとき，$M \neq V$ である．

証明．$j\colon V \to V$ を非自明な初等埋め込みだとして矛盾を導く．$\kappa = \mathrm{crit}(j)$ とおくと κ は可測基数．$\kappa_0 = \kappa, \kappa_{n+1} = j(\kappa_n)$ (for $n \in \omega$) とおくと，どの κ_n も可測基数である．$\lambda = \sup_{n\in\omega} \kappa_n$ とおく．

$j(\langle \kappa_n : n \in \omega \rangle) = \langle j(\kappa_n) : n \in \omega \rangle = \langle \kappa_{n+1} : n \in \omega \rangle$ だから $j(\lambda) = \lambda$ を得る．$G = \{j(\alpha) : \alpha < \lambda\}$ とおく．

λ は可測基数の極限だから強極限である．さらに $\mathrm{cf}(\lambda) = \omega$ なので

$$\begin{aligned} 2^\lambda &= (2^{<\lambda})^{\mathrm{cf}(\lambda)} \text{ (これは一般的に成り立つ等式)} \\ &= \lambda^{\mathrm{cf}(\lambda)} \text{ (強極限性)} \\ &= \lambda^\omega \end{aligned}$$

を得る．補題 3.7 により，$F\colon \lambda^\omega \to \lambda$ がとれて，すべての $A \in [\lambda]^\lambda$ について $F``A^\omega = \lambda$ である．j の初等性と $j(\omega) = \omega$ と $j(\lambda) = \lambda$ により，$j(F)$ も同じ性質を持つ．よって，上の G をここでの A に代入すると，ある $s \in G^\omega$ があって，$(jF)(s) = \kappa$ である．

G の定義より, s はある $t\colon \omega \to \lambda$ を使って, $s(n) = j(t(n))$ (for $n \in \omega$) と表わせる．よって $s = j(t)$ である．したがって，$\kappa = (jF)(s) = (jF)(jt) = j(F(t))$ である．κ は j の像ではないので，これは矛盾． □

補題 3.9. U を κ 上の非単項 κ 完備超フィルターとし，$M = \mathrm{Ult}_U(V)$ とし，$j\colon V \to M$ を誘導される初等埋め込みとする．このとき次が成り立つ．

(1) $M^\kappa \subseteq M$. すなわち M は κ 列を取る操作で閉じている．

(2) $U \notin M$.

(3) $2^\kappa \le (2^\kappa)^M < j(\kappa) < (2^\kappa)^+$.

(4) λ が極限順序数のとき，$\mathrm{cf}(\lambda) = \kappa$ ならば $j(\lambda) > \sup_{\alpha<\lambda} j(\alpha)$; $\mathrm{cf}(\lambda) \neq \kappa$ ならば $j(\lambda) = \sup_{\alpha<\lambda} j(\alpha)$.

(5) $\lambda > \kappa$ が強極限基数かつ $\mathrm{cf}(\lambda) \neq \kappa$ ならば $j(\lambda) = \lambda$.

証明．(1) の証明．$\langle a_\xi : \xi < \kappa\rangle$ を M の元からなる κ 列とする．各 $\xi < \kappa$ について g_ξ を元 a_ξ を表現する関数とする．h を元 κ を表現する関数とする．

関数 F で $[F] = \langle a_\xi : \xi < \kappa\rangle$ となるものを構成する．各 $\alpha < \kappa$ について

$$F(\alpha) = \langle g_\xi(\alpha) : \xi < h(\alpha)\rangle$$

とおく．各 α について，$F(\alpha)$ は $h(\alpha)$ 列なので $[F]$ は κ 列である．$\xi < \kappa$ とする．$[F]$ の ξ 番目の項が a_ξ であることを示したい．$[h] > \xi$ なので，U の意味でほとんどすべての α で $\xi < h(\alpha)$ である．そのような α について， $F(\alpha)$ の ξ 番目の項は $g_\xi(\alpha)$ である．よってŁoś の定理により，$[F]$ の ξ 番目が $[g_\xi]$ であることを得る ($[c_\xi] = \xi$ に注意).

(2) の証明．$U \in M$ と仮定する．写像 $e\colon \kappa^\kappa \to j(\kappa)$ を $e(f) = [f]$ で定める．(1) より $\kappa^\kappa = \kappa^\kappa \cap M = (\kappa^\kappa)^M \in M$ に注意．また仮定 $U \in M$ があるので，$e \in M$ である．e は全射なので，$M \models |j(\kappa)| \le 2^\kappa$ である．これは $j(\kappa)$ が M で到達不能基数なことに矛盾する．

(3) の証明．(1) より $\mathcal{P}(\kappa)^M = \mathcal{P}(\kappa)$ に注意する．よって $M \subseteq V$ より

$$\begin{aligned}2^\kappa &= \min\{\alpha : (\exists f)(f\colon \mathcal{P}(\kappa) \to \alpha \text{ 全射})\}\\ &\le \min\{\alpha : (\exists f \in M)(f\colon \mathcal{P}^M(\kappa) \to \alpha \text{ 全射})\}\\ &= (2^\kappa)^M.\end{aligned}$$

$\kappa < j(\kappa)$ であることと $j(\kappa)$ が M で到達不能基数なことから $(2^\kappa)^M < j(\kappa)$ を得る．最後に，$j(\kappa)$ の元は κ から κ への関数で表現されることから $|j(\kappa))| \le \kappa^\kappa = 2^\kappa$. よって $j(\kappa) < 2^\kappa$.

なお，(3) の主張は $j(\kappa)$ が V では基数でないことを含意している．

(4) の証明．$\mathrm{cf}(\lambda) = \kappa$ として，$\lambda = \sup_{\alpha<\kappa} \lambda_\alpha$ と書く．関数 f を $f(\alpha) = \lambda_\alpha$ とおく．すると Łoś の定理より，任意の α について $j(\lambda_\alpha) < [f]$ であることと $[f] < j(\lambda)$ が分かる．したがって，$\sup_{\alpha<\lambda} j(\alpha) \le [f] < j(\lambda)$.

次に $\mathrm{cf}(\lambda) > \kappa$ として f を任意の κ から λ への関数とする．この f は共終でないので，ある $\alpha < \lambda$ があって $[f] < j(\alpha)$. $f\colon \kappa \to \lambda$ について $[f]$ は $j(\lambda)$ の元すべてを動くのでこれで $j(\lambda) \le \sup_{\alpha<\lambda} j(\alpha)$ が示された．逆向きの不等号は当たり前．

最後に $\mathrm{cf}(\lambda) < \kappa$ として，$\lambda = \sup_{\nu<\gamma} \lambda_\nu$ $(\gamma = \mathrm{cf}(\lambda))$ と書く．すると任意の関数 $f\colon \kappa \to \lambda$ について $g\colon \kappa \to \gamma$ があって，$f(\alpha) \le \lambda_{g(\alpha)}$ (for $\alpha < \kappa$) となる．よって，U の κ 完備性よりある $\nu < \gamma$ について $[f] < j(\lambda_\nu)$ となる．

(5) の証明．各 $\alpha < \lambda$ について α 未満の順序数は関数 $f\colon \kappa \to \alpha$ によって表現されるので，$|j(\alpha)| \le |\alpha^\kappa| \le 2^{|\alpha|\kappa} < \lambda$ を得る．よって (4) より $j(\lambda) = \sup_{\alpha<\lambda} j(\alpha) = \lambda$. □

補題 3.10. κ を可測基数とする．もし $2^\kappa > \kappa^+$ ならば，どんな κ 上の正規 κ 完備非単項超フィルター D についても集合 $\{\alpha < \kappa : 2^\alpha > \alpha^+\}$ は D に属する．したがって，すべての基数 $\alpha < \kappa$ について $2^\alpha = \alpha^+$ ならば，$2^\kappa = \kappa^+$ である．

証明．D を κ 上の正規 κ 完備非単項超フィルターとし，$M = \mathrm{Ult}_D(V)$ とおく．もし，$\{\alpha < \kappa : 2^\alpha =$

$\alpha^+\} \in D$ なら $[d] = \kappa$ とŁoś の定理より $2^\kappa = \kappa^+$ in M を得る．ところが，補題 3.9 より $2^\kappa = (2^\kappa)^M$ かつ $\kappa^+ = (\kappa^+)^M$ である．ここに κ^+ は集合 κ に入る整列順序の上限として書けることを使って，$2^\kappa = (2^\kappa)^M$ により $\kappa^+ = (\kappa^+)^M$ を得る． よって，V で $2^\kappa = \kappa^+$ である． □

補題 3.11. κ を可測基数とする．D を κ 上の正規 κ 完備非単項超フィルターとする．$j \colon V \to M$ を誘導される初等埋め込みとする．$\lambda > \kappa$ を強極限かつ共終数 κ を持つとする．このとき $2^\lambda < j(\lambda)$.

証明. $\mathrm{cf}(\lambda) = \kappa$ より $j(\lambda) > \lambda$ を得る．

実際，$\mathrm{cf}(\lambda) = \kappa$ より $V \models (\exists f)(f \colon \kappa \to \lambda \text{共終})$ である．初等性より，$M \models (\exists f)(f \colon j(\kappa) \to j(\lambda) \text{ 共終})$ であり, 絶対性より $V \models (\exists f)(f \colon j(\kappa) \to j(\lambda) \text{ 共終})$ である．よって, $\mathrm{cf}(j(\lambda)) = \mathrm{cf}(j(\kappa)) = j(\kappa) > \kappa$ となる．したがって，$j(\lambda) = \lambda$ となることはありえない．

今，次の不等式を得る．

$$2^\lambda = \lambda^\kappa \le (\lambda^\kappa)^M \le (\lambda^{j(\kappa)})^M < j(\lambda).$$

一つ目の不等式は強極限かつ $\mathrm{cf}(\lambda) = \kappa$ により $2^\lambda = 2^{<\lambda})^{\mathrm{cf}(\lambda)} = \lambda^{\mathrm{cf}(\lambda)} = \lambda^\kappa$ となるから．二つ目の不等式は補題 3.9 より κ から λ への関数はすべて M に属するからである．最後の不等式は,

$$M \models j(\lambda) \text{ は強極限}$$

なことと，$\lambda, j(\kappa) < j(\lambda)$ なことより従う． □

4 ジェネリック超冪

本稿では可測基数を使わず，強制法によるジェネリックフィルターを使った超冪を考える．その応用として，Silver の定理を証明する．

κ を非可算正則基数とし I を κ 上のイデアルとする．I 正値集合のなす半順序集合 $(I^+, \subseteq)$ を考える：

$$I^+ = \{X \subseteq \kappa : X \notin I\}.$$

G を (V, P) ジェネリックフィルターとする．

以下の補題で M **超フィルター**というのは次を満たす $D \subseteq \mathcal{P}^M(\kappa)$ である：

(1) $\varnothing \notin D, \kappa \in D$.
(2) $X, Y \in D$ なら $X \cap Y \in D$.
(3) $X \in D$ かつ $Y \in M$ で $X \subseteq Y$ ならば，$Y \in D$.
(4) $X \in M$ が $X \subseteq \kappa$ であるとき，$X \in D$ または $\kappa \setminus X \in D$.

補題 4.1. (1) G は κ 上の V 超フィルターで I の双対フィルターを拡大するものである．
(2) V で I が κ 完備なら，G は κ 完備 V 超フィルターである．
(3) I が正規ならば，G も正規である．

証明. (1) の証明．X が I の双対フィルターの元ならば，$\{Y \in I^+ : Y \subseteq X\}$ は I^+ の稠密部分集合なので，$X \in G$ を得る．V 超フィルターなことの証明はやさしい．

(2) の証明．$\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}, \gamma < \kappa$ を V に属する κ の分割とする．すると $\{Y \in I^+ : Y \subseteq X_\alpha \text{ (for some } \alpha < \gamma)\}$ は I^+ の稠密部分集合である (by I の κ 完備性)．したがって，ある X_α が G に属する．

(3) の証明．$X \in G$ とし $f \in V$ を X 上の押し下げ関数とする．すると $\{Y \in I^+ : f \text{ is constant on } Y\}$ は X の下で稠密である．よって f はある $Y \in G$ の上で定数である． □

これから I は κ 上の κ 完備イデアルとし，全ての一点集合を含むものとする．すると G は κ 上の非単項 κ 完備 M 超フィルターである．$V[G]$ で超冪 $\mathrm{Ult}_G(V)$ を考える．これを**ジェネリック超冪**という．これは ZFC のモデルだが，必ずしも well-founded ではない．

Łoś の定理はジェネリック超冪でも成立する：

$$\mathrm{Ult}_G(V) \models \varphi([f_1],\dots,[f_n]) \iff \{\alpha \in \kappa : \varphi(f_1(\alpha),\dots,f_n(\alpha))\} \in G.$$

ここに φ は集合論の論理式で，$f_1,\dots,f_n \in V$．特に初等埋め込み $j_G\colon V \to \mathrm{Ult}_G(V); j_G(x) = [c_x]$ を得る．

$N = \mathrm{Ult}_G(V)$ とする．N の中の順序数全体 On^N は線形順序付けられたクラスだが，必ずしも整列しているとは言えない．しかし，次の補題は成り立つ．ここで，$x \in \mathrm{On}^N$ について $\{y \in \mathrm{On}^N : y <^N x\}$ が順序型 α を持つとき，記号の乱用で $x = \alpha$ と書く．

補題 4.2. (1) 各 $\gamma < \kappa$ について，$j(\gamma) = \gamma$．よって On^N は順序型 κ の始切片を持つ．

(2) I が正規ならば，$x \in \mathrm{On}^N$ があって，$x = \kappa$ である．実際，$[d] = \kappa$ である．ただし d は対角関数．

(3) $j(\kappa) \neq \kappa$.

証明. (1) の証明．$j \restriction \gamma$ が $(\gamma, \in)$ と $\{y \in \mathrm{On}^N : y <^N j(\gamma)\}, <^N)$ の間の同型写像であることを示せばよい．$j \restriction \gamma$ の値域が $\{y \in \mathrm{On}^N : y <^N j(\gamma)\}$ に含まれることは明らか．順序保存性，単射性は j の初等性より明らか．

全射性を示す．$y \in \mathrm{On}^N$ で $y <^N j(\gamma)$ とする．$y = [f], f \in M, \mathrm{dom}(f) = \kappa$ なる f を取る．すると $[f] <^N j(\gamma)$ より

$$\{\alpha : f(\alpha) < \gamma\} \in G$$

だが，左辺は $\bigcup_{\beta<\gamma}\{\alpha : f(\alpha) = \beta\}$ と書けるため，G の κ 完備性により，ある $\beta < \kappa$ について $\{\alpha : f(\alpha) = \beta\} \in G$ である．よって，$y = [f] = j(\beta)$.

(2) の証明．$j \restriction \kappa$ が κ と $\{y \in \mathrm{On}^N : y <^N [d]\}$ の間の同型となることを示す．$j \restriction \kappa$ の値域が $\{y \in \mathrm{On}^N : y <^N [d]\}$ に収まることは，各 $\alpha \in \kappa$ について $\langle \alpha, \alpha, \alpha, \dots \rangle \in^* \langle 0, 1, 2, \dots \rangle$ よりよい．順序保存性，単射性は再び明らかである．

全射性を示す．$[f] \in \mathrm{On}^N$ で $[f] <^N [d]$ なるものをとる．すると f はある G のメンバーの上で押し下げ関数である．G が正規なので，ある集合 $X \in G$ 上で f は定数関数である．その定数 $\alpha < \kappa$ について $j(\alpha) = [f]$ を得る．

(3) の証明．(2) の証明は全射性以外，正規性を使っていない．そこで $\mathrm{ran}(j \restriction \kappa) \subseteq \{y \in \mathrm{On}^N : y <^N [d]\}$ は順序型 κ を持つ．よって，$\{y \in \mathrm{On}^N : y \leq^N [d]\}$ は順序型 $\kappa + 1$ の部分集合を持つ．$[d] < j(\kappa)$ であるため，$\{y \in \mathrm{On}^N : y <^N j(\kappa)\}$ も順序型 $\kappa + 1$ の部分集合を持つ．よって，この集合は順序型 κ を持つことはない． □

定理 4.3 (Silver)**.** κ を特異基数で $\mathrm{cf}(\kappa) = \omega_1$ とする．また，すべての $\lambda < \kappa$ で $2^\lambda = \lambda^+$ と仮定する．このとき $2^\kappa = \kappa^+$.

証明. $(\mathsf{stat}_{\omega_1}, \subseteq)$ を ω_1 の定常集合全体が包含関係で作る半順序集合とする．G を $(V, \mathsf{stat}_{\omega_1})$ ジェネリックフィルターとする．$V[G]$ で議論する．G は ω_1^M 上の正規 σ 完備 M 超フィルターである．$(N, \varepsilon^N) = \mathrm{Ult}_G(V)$ をジェネリック超冪とし，$j\colon V \to N$ を誘導される初等埋め込みとする．

$\langle \kappa_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ を V の中で単調増加連続な基数の列で κ に収束するものとする．e を N の中の基数とし，$e(\alpha) = \kappa_\alpha$ で定められる関数によって表現されるものとする．e^+ を N の中での e の後続基数と

する．

$x \in N$ に対して $\mathrm{ext}(x) = \{y \in N : y \mathrel{\varepsilon^N} x\}$ とおく．これは $V[G]$ の集合である．この定義より特に

$$\mathrm{ext}(\mathcal{P}^N(e)) = \{x \in N : N \models \text{“}x \subseteq e\text{”}\}$$

である．

主張 A: $|\mathcal{P}^V(\kappa)| \leq |\mathrm{ext}(\mathcal{P}^N(e))|$.

証明: V の中の $X \subseteq \kappa$ について関数 f_X を $f_X(\alpha) = X \cap \kappa_\alpha$ $(\alpha \in \omega_1)$ と定める．f_X が表現する N の元は，N の中で e の部分集合である．また，$X \neq Y$ なら，関数 f_X と f_Y はゆくゆく異なるので，異なる N の元を表現する． //

主張 B: $|\mathrm{ext}(\mathcal{P}^N(e))| = |\mathrm{ext}(e^+)|$.

証明: V で任意の α について $2^{\kappa_\alpha} = \kappa_\alpha^+$ であることから，Łoś の定理より，N で $2^e = e^+$ が成り立つ．つまり $F \in N$ がとれて，$N \models F\colon 2^e \to e^+$ 全単射 となる．各 $x \in \mathrm{ext}(\mathcal{P}^N(e))$ について $y \in N$ で $N \models y = F(x)$ となる元を割り当てる関数を $\tilde{F}\colon \mathrm{ext}(\mathcal{P}^N(e)) \to \mathrm{ext}(e^+)$ とする．これは全単射であることが確認できるので，主張が示された． //

主張 C: 任意の $a \mathrel{\varepsilon^N} e$ について，$\gamma < \omega_1^V$ が存在して，$a \mathrel{\varepsilon^N} j(\kappa_\gamma)$ である．

証明: $a \mathrel{\varepsilon^N} e$ を任意にとり，関数 f が a を表現するとする．このときある $X \in G$ があって，全ての $\alpha \in X$ で $f(\alpha) < \kappa_\alpha$ である．ここで極限順序数全体の集合は club なので G に属する．よって，上で取った X は全ての元が極限順序数だと仮定して良い．したがって，列 $\langle \kappa_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ を連続で取っていたことから，$f(\alpha) < \kappa_{\gamma(\alpha)}$ が，ある $\gamma(\alpha) < \alpha$ について成り立つ．γ は押し下げ関数だから，ある $\gamma < \omega_1^V$ が存在して，ある $Y \in G$ について，任意の $\alpha \in Y$ で $f(\alpha) < \kappa_\gamma$ となる．つまり $a \mathrel{\varepsilon^N} j(\kappa_\gamma)$ を得る． //

主張 D: $|\mathrm{ext}(e)| \leq \kappa$.

証明: 各 $\gamma < \omega_1^V$ について，$|j(\kappa_\gamma)| \leq |(\kappa_\gamma^{\aleph_1})^V| < \kappa$ である．第一の不等号は $j(\kappa_\gamma)$ の元というのはつねに κ_γ の元を値に取る ω_1 列で表現されるからである．よって，主張 C と合わせて，$|\mathrm{ext}(e)| \leq \kappa$ を得る． //

主張 E: $|\mathrm{ext}(e^+)| \leq \kappa^+$.

証明: もし，$x \mathrel{\varepsilon^N} e^+$ なら，N の中に x から e への単射があるから，主張 B と同じ方法によって，$\mathrm{ext}(x)$ から $\mathrm{ext}(e)$ への単射を得る．したがって，$\mathrm{ext}(e^+)$ は全順序集合で，どの始切片もサイズたかだか κ を持つので，$\mathrm{ext}(e^+) \leq \kappa^+$ を得る ([Jec06] の Exercise 5.3 を参照). //

主張 A, B, E を組み合わせると

$$|\mathcal{P}^V(\kappa)| \leq |\mathrm{ext}(\mathcal{P}^N(e))| \leq |\mathrm{ext}(e^+)| \leq \kappa^+$$

を得る．これは $V[G]$ での不等式である．ところが，$|P| = 2^{\aleph_1} < \kappa$ であるため，chain condition により，V の全ての κ 以上の基数は $V[G]$ でも基数である．よって

$$|\mathcal{P}^V(\kappa)|^V \leq (\kappa^+)^V$$

を得る．これが欲しかった結論である． □

5 峻厳イデアル

参考文献

[Jec06] Thomas Jech. *Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded.* Springer Monographs in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2006.

[新井 21]　新井敏康. **数学基礎論**. 東京大学出版会, 2021.