可測基数ノート

でぃぐ

2023 年 3 月 2 日

概要

本稿は可測基数についてのノートである．可測基数のかなり初歩的な話からはじめ，超冪と初等埋め込みという標準的な話題を扱い，最後に応用として峻厳イデアルの存在の無矛盾性証明を行う．

目次

本稿の内容はほぼ Jech のテキスト [Jec06] を参考にしている．

1　可測基数の初歩

可測基数の研究は，Lebesgue 測度を $\mathbb{R}$ の冪集合全体に拡張できるかという問から出発している．本節ではその命題が ZFC の無矛盾性を超えることを示す．

定義 1.1. S を無限集合とする． S 上の (一様かつ σ 加法的な確率) **測度**とは $\mu\colon \mathcal{P}(S) \to [0,1]$ であって，次を満たすものである：

(1) $\mu(\varnothing) = 0, \mu(S) = 1$.
(2) $X \subseteq Y \subseteq S$ なら，$\mu(X) \leq \mu(Y)$.
(3) (一様性) 任意の $s \in S$ について $\mu(\{s\}) = 0$.
(4) (σ 加法性) $X_n, n \in \omega$ が互いに素な S の部分集合たちであれば,

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\omega} X_n\right) = \sum_{n\in\omega} \mu(X_n).$$

測度論で扱う測度は S 上のある σ 加法族を定義域とするものであったが，ここで扱う測度は定義域が $\mathcal{P}(S)$ なことに注意しよう．

定義 1.2. μ を S 上の測度とする．$A \subseteq S$ が**原子**であるとは，$\mu(A) > 0$ かつ任意の $X \subseteq A$ に対して $\mu(X) = 0$ または $\mu(X) = \mu(A)$ となるものである．原子が存在しない測度を原子なしの測度という．

定義 1.3. (1) 基数 κ が**可測基数**であるとは，κ 上の κ 完備な非単項超フィルターが存在することを言う．

(2) 基数 κ が**実数値可測基数**であるとは，κ 上の κ 加法的測度が存在することを言う．

S 上の非単項超フィルターを考えることと，S 上の値域が $\{0,1\}$ である (つまり，2 値である) 測度を考えることは同じである．

実際，非単項超フィルター U に対して

$$\mu(X) = \begin{cases} 1 & (X \in U) \\ 0 & (X \notin U) \end{cases}$$

で定義される測度を対応される写像と，2 値測度 μ に対して非単項超フィルター

$$U = \mu^{-1}\{1\}$$

を対応させる写像は互いの逆写像である．

また，この対応において，超フィルターが κ 完備なことと測度が κ 加法的なことが対応する．よって，可測基数は実数値可測基数である．

定義 1.4. 集合 S 上のイデアル I で **σ 飽和的**であるとは，I に属さない S の部分集合族で互いに素なものはどれも，族の濃度が可算であることを意味する．

S 上の測度 μ から来るイデアル $I_\mu = \mu^{-1}\{0\}$ は必ず σ 飽和的である．なぜなら，$\mathcal{A}$ が I に属さない (すなわち μ の測度が正な) 部分集合の族で互いに素なものとしよう．このとき正の自然数 n に対して $\mu(A) > 1/n$ を満たす $A \in \mathcal{A}$ は n 個しかない．よって，$\mathcal{A}$ は有限集合の可算和であるから，たかだか可算濃度を持つ．

補題 1.5. 実数値可測基数 (および可測基数) は正則基数である．

証明. κ を実数値可測基数とする．κ 上の κ 完備な測度 μ を取る．κ が特異だとすると，κ の共終列 $\langle \lambda_i : i < \mathrm{cf}(\kappa) \rangle$ でおのおのの λ_i は κ 未満なものが取れる．今，$\kappa = \bigcup_{i<\mathrm{cf}(\kappa)} \lambda_i$ である．左辺 κ は測度 1 だが，右辺はおのおのの λ_i が測度 0 で，その $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$ 個の和集合だから測度 0 である．矛盾した．なお，ここで，おのおのの λ_i が測度 0 なのは，各 1 点集合が測度 0 で，λ_i はその $\lambda_i < \kappa$ 個の和集合として書けるからである． □

補題 1.6. 可測基数は到達不能基数である．

証明. κ を可測基数とする．

κ が正則なことは補題 1.5 で示した．

κ の強極限性を示す．背理法で，ある $\lambda < \kappa$ について，$2^\lambda \geq \kappa$ だと仮定する．集合 $S \subseteq \{0,1\}^\lambda$ で $|S| = \kappa$ となるものを取る．集合 S 上の κ 完備な非単項超フィルター U を取る．各 $\alpha \in \lambda$ について集合 $X_\alpha \subseteq S$ を

$$\{f \in S : f(\alpha) = 0\} \text{ もしくは } \{f \in S : f(\alpha) = 1\}$$

で U に属する方とする．集合 X を

$$X = \bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha$$

で定めると $X \in U$ であるが，明らかに X は 1 点集合である．これは U の非単項性に矛盾． □

補題 1.7. (1) κ を次を満たす最小の基数とする：非単項 σ 完備な超フィルターが存在する．U をそのような超フィルターの一つとする．このとき，U は κ 完備である．

(2) κ を次を満たす最小の基数とする: κ 上の測度が存在する．μ をそのような測度とする．このとき測度 0 集合のイデアル I_μ は κ 完備である．

(3) κ を次を満たす最小の基数とする: κ 上の σ 完備かつ σ 飽和的イデアルが存在する．I をそのようなイデアルとする．このとき I は κ 完備である．

証明. (1). U が κ 完備でないと仮定する．すると κ の分割 $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}$ があって，$\gamma < \kappa$ かつ各 X_α は U の意味で小さい．関数 $f\colon \kappa \to \gamma$ を次で定める：

$$f(x) = \alpha \iff x \in X_\alpha.$$

つまり，各入力 $x < \kappa$ について，x が何番目のピースに属しているかを返す関数である．γ 上の超フィルター D を

$$D = \{Z \subseteq \gamma : f^{-1}(Z) \in U\}$$

で定める．U が σ 完備なので，D も σ 完備である．D は非単項でもある：なぜなら，各 $\alpha < \gamma$ について $f^{-1}\{\alpha\} = X_\alpha \notin U$ より $\alpha \notin D$ だからである．したがって，D は γ 上の単項 σ-完備な超フィルターだが，$\gamma < \kappa$ より，これは κ の最小性に矛盾．

(2). I_μ が κ 完備ではないと仮定する．すると測度 0 集合の族 $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}$ で，$\gamma < \kappa$ かつ，それらの和集合 $X = \bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha$ は測度正なものがとれる．X_α たちは互いに素であると仮定しても良い．$f\colon X \to \gamma$ を

$$f(x) = \alpha \iff x \in X_\alpha$$

と定め，γ 上の測度 ν を

$$\nu(Z) = \frac{\mu(f^{-1}(Z))}{\mu(X)}$$

と定める．ν は σ 加法的である．また，ν は一様である，なぜなら，各 $\alpha < \gamma$ について $\nu(\{\alpha\}) = \frac{\mu(X_\alpha)}{\mu(X)} = 0$ だからである．これは κ の最小性に反する．

(3) の証明は (1) や (2) と同様である． □

μ を集合 S 上の測度とし，I_μ を測度 0 集合のイデアルとすれば，μ が κ 加法的なら，I_μ が κ 完備なことは明らかである．逆も言える：

補題 1.8. μ を集合 S 上の測度とし，I_μ を測度 0 集合のイデアルとする．このとき，もし I_μ が κ 完備なら，μ は κ 加法的である．

証明. $\gamma < \kappa$ とし，$\langle X_\alpha : \alpha < \gamma\rangle$ を互いに素な S の部分集合の族とする．X_α たちが互いに素なので，そのうちたかだか可算個が正の測度を持つ．よって，

$$\{X_\alpha : \alpha < \gamma\} = \{Y_n : n \in \omega\} \cup \{Z_\alpha : \alpha < \gamma\}$$

と書くことができる．ここに各 Z_α は測度 0 集合．よって，

$$\mu(\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha) = \mu(\bigcup_{n\in\omega} Y_n) + \mu(\bigcup_{\alpha<\gamma} Z_\alpha)$$

を得る．μ が σ 加法的なので，

$$\mu(\bigcup_{n\in\omega} Y_n) = \sum_{n\in\omega} \mu(Y_n)$$

である．また，I_μ が κ 完備なので，

$$\mu(\bigcup_{\alpha<\gamma} Z_\alpha) = 0$$

である．以上より，

$$\mu(\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha) = \sum_{\alpha<\gamma} \mu(X_\alpha)$$

を得る． □

補題 1.9. (1) ある集合上の原子なしの測度が存在するとき，ある基数 $\kappa \le 2^{\aleph_0}$ 上に測度が存在する．

(2) I を集合 S 上の σ 完備 σ 飽和的イデアルとする．このとき，ある $Z \subseteq S$ に対して $I \restriction Z = \{X \subseteq Z : X \in I\}$ が極大イデアルであるか，または，σ 完備 σ 飽和的イデアルがある $\kappa \le 2^{\aleph_0}$ 上に存在するかのどちらかが成り立つ．

証明. (1)．μ をそのような測度とする．S の測度正な部分集合からなり，逆向きの包含関係で順序付けられた木 T を構成する．T の根は S である．各 $X \in T$ について，X の測度正な集合への分割 $X = Y \cup Z, Y \cap Z = \varnothing$ を取り，この 2 つを X の直後の元とする．α が極限順序数のとき T の第 α レベルにはすべての共通部分 $X = \bigcap_{\xi<\alpha} X_\xi$ であって，$\langle X_\xi : \xi < \alpha\rangle$ は $T \restriction \alpha$ の増大鎖で X_ξ は第 ξ レベルの元，X は測度正なものたちを置く．

T のどの枝も可算である：なぜなら，$\langle X_\xi : \xi < \alpha\rangle$ が枝ならば，$\langle X_\xi \setminus X_{\xi+1} : \xi < \alpha\rangle$ は測度正な集合の互いに素な族となるからである．

同様に，T のどのレベルも可算であることも分かる．よって，T はたかだか $2^{\aleph_0}$ 個の極大枝を持つ (各 $\alpha < \omega_1$ について高さ α の極大枝の個数はたかだか $2^{\aleph_0}$．よってそれらの ω_1 個の和集合でたかだか $2^{\aleph_0}$ 個となる)．

$\{b_\alpha : \alpha < \kappa\}, \kappa \le 2^{\aleph_0}$ をすべての極大枝 $b = \{X_\xi : \xi < \gamma\}$ であって，$\bigcap_{\xi<\gamma} X_\xi$ が非空なものの枚挙とする．各 $\alpha < \kappa$ について $Z_\alpha = \bigcap b_\alpha$ とおく．$\{Z_\alpha : \alpha < \kappa\}$ は S の測度 0 集合への分割となる (Z_α が測度 0 でないとすると，一個高さを上げることができ枝の極大性に反する; また，互いの異なる極大枝 b_α と b_β はどこかで枝分かれしているはずだから，後続ステップでの構成の仕方より，$X_\alpha \cap X_\beta = \varnothing$ を得る; 覆っていることは $s \in S$ を任意に取るとき，s が入っている集合を根から追跡することにより，ある X_α に s が入っていることがわかるからよい)．あとは $f \colon S \to \kappa$ を $f(x) = \alpha \iff x \in Z_\alpha$ とおき，κ 上の測度 ν を $\nu(Z) = \mu(f^{-1}(Z))$ とおけば，ν は一様な σ 加法的測度である．

(2)．(1) と同様である． □

系 1.10. κ が実数値可測基数ならば，κ は可測基数か，$\kappa \le 2^{\aleph_0}$ である．より一般に，κ が κ 完備 σ 飽和的イデアルを持つと，κ は可測基数であるか，$\kappa \le 2^{\aleph_0}$ である．

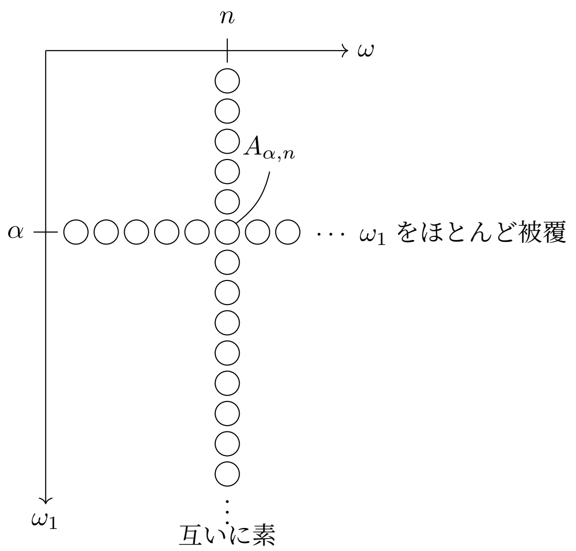
証明. 補題 1.9 の証明より，μ が S 上の原子なしの測度なら，S のたかだか $2^{\aleph_0}$ 個への測度 0 個の分割が存在することがわかる．つまり，μ は $(2^{\aleph_0})^+$ 加法的ではない．したがって，原子なしの κ 加法的測度を κ が持つとき，$\kappa \le 2^{\aleph_0}$ である (結論の否定を取ると，$\kappa \ge (2^{\aleph_0})^+$ だが，これと κ 加法性より $(2^{\aleph_0})^+$ 加法性が出るから)．後半の主張も同様． □

補題 1.9 の (1) の主張の結論には「原子なし」が含まれていなかったが，これは実際には「原子なし」と結論付けられる．なぜなら，原子があると κ は可測基数となるが，補題 1.6 より，それは $\kappa \le 2^{\aleph_0}$ と相容れないからだ．

定義 1.11. $(\aleph_1, \aleph_0)$-Ulam 行列とは，ω_1 の部分集合の族 $\langle A_{\alpha,n} : \alpha \in \omega_1, n \in \omega\rangle$ であって，次の 2 条件を満たすものである．

(1) 各 $n \in \omega$ と異なる $\alpha, \beta \in \omega_1$ について $A_{\alpha,n} \cap A_{\beta,n} = \varnothing$ である．

(2) 各 $\alpha \in \omega_1$ について，集合 $\omega_1 \setminus \bigcup_{n\in\omega} A_{\alpha,n}$ はたかだか可算集合である．



補題 1.12. $(\aleph_1, \aleph_0)$-Ulam 行列は存在する．

証明. 各 $\xi \in \omega_1$ に対して $f_\xi\colon \omega \to \omega_1$ を $\xi \subseteq \operatorname{ran}(f_\xi)$ なるものとする．集合 $A_{\alpha,n}$ を

$$\xi \in A_{\alpha,n} \iff f_\xi(n) = \alpha$$

と定める．

$\xi \in A_{\alpha,n} \cap A_{\beta,n}$ なら $\alpha = f_\xi(n) = \beta$ となるので，Ulam 行列の条件 (1) が成り立っていることがわかる．

$\alpha \in \omega_1$ とする．$\xi > \alpha$ に対して，f_ξ の取り方より，$f_\xi(n) = \alpha$ となる $n \in \omega$ が存在する．よって，

$$[\alpha + 1, \omega_1) \subseteq \bigcup_{n\in\omega} A_{\alpha,n}$$

なので条件 (2) も成り立っている． □

演習問題 1.13. $(\aleph_1, \aleph_0)$-Ulam 行列の定義において，「各行は可算集合を除いてほとんど ω_1 を覆っている」という条件を「各行は ω_1 を (完全に) 覆っている」と変更したバージョンは存在しないことを示せ．

補題 1.14. ω_1 上の σ 完備 σ 飽和的イデアルは存在しない．特に ω_1 上の測度は存在しない．

証明. そのようなイデアル I が存在したと仮定する．また，$\langle A_{\alpha,n} : \alpha \in \omega_1, n \in \omega\rangle$ を $(\aleph_1, \aleph_0)$-Ulam 行列とする．I の σ 完備性と Ulam 行列の条件 (2) より，各 α について自然数 n_α があって，$A_{\alpha,n}$ は I-正である．したがって，鳩の巣原理より，$W \subseteq \omega_1$, $|W| = \aleph_1$, $n \in \omega$ があって，すべての $\alpha \in W$ について $n_\alpha = n$ である．すると $\{A_{\alpha,n} : \alpha \in W\}$ は互いに素 (by Ulam 行列の条件 (1)) な非可算な I-正集合の族となる．これは I の σ 飽和性に矛盾する． □

以上の ω_1 を一般の後続基数に一般化できる．証明は同様なので省略する．

定義と補題 1.15. λ を基数とする．

(1) (λ^+, λ)-Ulam 行列とは，λ^+ の部分集合の族 $\langle A_{\alpha,\eta} : \alpha \in \lambda^+, \eta \in \lambda\rangle$ であって，次の 2 条件を満たすものである．
  (a) 各 $\eta \in \lambda$ と異なる $\alpha, \beta \in \lambda^+$ について $A_{\alpha,\eta} \cap A_{\beta,\eta} = \varnothing$ である．
  (b) 各 $\alpha \in \lambda^+$ について，集合 $\lambda^+ \setminus \bigcup_{\eta\in\lambda} A_{\alpha,\eta}$ は λ 以下の濃度を持つ．

(2) (λ^+, λ)-Ulam 行列は存在する．

(3) λ^+ 上の λ^+ 完備 σ 飽和的イデアルは存在しない．

系 1.16. 任意の実数値可測基数は，弱到達不能基数である．

証明. κ を実数値可測基数とする．正則なことは補題 1.5 で示した．後続基数でないことは，定義と補題 1.15 から分かる． □

以上より次が結論付けられる：ZFC に「ある集合上の測度が存在する」という命題を加えた公理系の無矛盾性の強さは ZFC より真に強い．なぜなら「ある集合上の測度が存在する」からはその測度が原子ありかなしかに応じて，到達不能基数か弱到達不能基数のどちらかが出て，どちらも ZFC の無矛盾性を出すからである．これが Ulam が証明した定理である．

2　正規フィルター

フィルターが**正規**であるとは，それが対角共通部分を取る操作で閉じていることであった．また，κ 上の κ 完備な超フィルター U に対しては，U が正規であることと任意の押し下げ関数 $f\colon X \to \kappa$, $X \in U$ に対して，ある $Y \in U$ について f が Y 上で定数関数となることと同値であった．

定理 2.1. 任意の可測基数の上に正規超フィルターが存在する．

証明. U を κ 上の非単項 κ 完備超フィルターとする．$f, g \in \kappa^\kappa$ に対して，

$$f =^* g \iff \{\alpha < \kappa : f(\alpha) = g(\alpha)\} \in U$$

という同値関係を入れる．また，

$$f <^* g \iff \{\alpha < \kappa : f(\alpha) < g(\alpha)\} \in U$$

という擬全順序関係を入れる．

無限下降列 $f_0 >^* f_1 >^* f_2 >^* \ldots$ は存在しない．実際，それがあれば $X_n = \{\alpha : f_n(\alpha) > f_{n+1}(\alpha))\} \in U$ だが，U が σ 完備なので，$X = \bigcap_{n\in\omega} X_n \in U$ であり，特に X は空でない．$\alpha \in X$ を一つ取ると，順序数の無限下降列 $f_0(\alpha) > f_1(\alpha) > f_2(\alpha) > \ldots$ ができて矛盾である．

したがって，$<^*$ は擬整列順序である．

$f\colon \kappa \to \kappa$ を次を満たす (この擬整列順序で) 最小の関数とする：任意の $\gamma < \kappa$ に対して，$\{\alpha : f(\alpha) > \gamma\} \in U$ である．このような f は少なくとも 1 つ存在する．たとえば対角関数 $d(\alpha) = \alpha$ は条件を満たす．

$D = f(U) = \{X \subseteq \kappa : f^{-1}(X) \in U\}$ とおく．D が κ 上の正規超フィルターなことを示そう．

各 $\gamma < \kappa$ に対して，$f^{-1}\{\gamma\} \notin U$ である ($f^{-1}[\gamma + 1, \kappa) \in U$ だから)．よって，$\gamma \notin D$ なので，D は非単項である．

D の正規性を示そう．h を $X \in D$ 上の押し下げ関数とする．h が D のあるメンバー上で定数なことを示さなければいけない．$g \in \kappa^\kappa$ を $g(\alpha) = h(f(\alpha))$ で定義される関数とする．$g(\alpha) < f(\alpha)$ がすべての $\alpha \in f^{-1}(X)$ で成り立つ．よって，$g <^* f$ である．f の最小性より，ある $\gamma < \kappa$ に対して $Y := \{\alpha : g(\alpha) = \gamma\} \in U$ となる．したがって，D の定義より $f(Y) \in D$ であり，また，h は $f(Y)$ 上で定数 γ を取る． □

3　宇宙 V の超冪と初等埋め込み

本節では，可測基数が存在すれば，内部モデルへの初等埋め込みが存在すること，逆に初等埋め込みがあれば可測基数があることを示す．また，可測基数の存在が $V = L$ と両立しないことを示す．

U を集合 S 上の超フィルターとする．$f, g\colon S \to V$ に対して次の二つの関係を定める：

$$\begin{aligned} f =^* g &\iff \{x \in S : f(x) = g(x)\} \in U, \\ f \in^* g &\iff \{x \in S : f(x) \in g(x)\} \in U. \end{aligned}$$

S を定義域とする関数全体は真クラスをなすため，同値関係 $=^*$ のおのおのの同値類は真クラスになってしまう．そこで Scott のトリックを使って，次のように同値類のようなものを定義する．

$$[f] = \{g : f =^* g \wedge \neg(\exists h)(h = f \wedge \operatorname{rank} h < \operatorname{rank} g)\}$$

こうすると各 $[f]$ は集合となる．$f, g\colon S \to V$ に対して，$[f] \in^* [g] \iff f \in^* g$ と定義する．これは well-defined である．

$\mathrm{Ult} = \mathrm{Ult}_U(V)$ をすべての $[f]$ (ただし $f\colon S \to V$) 全体のなすクラスとする．構造 $\mathrm{Ult} = (\mathrm{Ult}, \in^*)$ を考える．これを宇宙 V の**超冪**という．通常のモデル理論におけるŁoś の定理は宇宙の超冪でも成り立つことが確認できる：

$$\mathrm{Ult} \models \varphi([f_1], \ldots, [f_n]) \iff \{x \in S : \varphi(f_1(x), \ldots, f_n(x))\} \in U.$$

ここに φ は集合論の論理式．特に文を考えると，$(V, \in)$ と $(\mathrm{Ult}, \in^*)$ が初等同値なことが分かる．

また，各 $a \in V$ に対して定数関数 $c_a\colon S \to V; c_a(x) = a$ を考えて，$j(a) = [c_a]$ とおくと

$$\mathrm{Ult} \models \varphi(j(a_1), \ldots, j(a_n)) \iff V \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$$

を得る．つまり，モデル理論で使っていた用語を拝借すると，$j\colon V \to \mathrm{Ult}$ は**初等埋め込み**である．

超冪が well-founded である状況を考察する．set-like であることは常に成り立つ：つまり任意の f について

$$\mathrm{ext}(f) = \{[g] : g \in^* f\}$$

は常に集合である．なぜなら，$g \in^* f$ なる g を考えるとある $h =^* g$ であってすべての $x \in S$ で $h(x) \in f(x)$ となるものをとれる．この h はランクが f 以下である．よって $\mathrm{rank}([g]) \leq \mathrm{rank}(f) + 1$ となるので，$\mathrm{ext}(f)$ は集合である．

補題 3.1. U が σ 完備な超フィルターなら，$(\mathrm{Ult}, \in^*)$ は well-founded である．

証明．Ult の無限 $\in^*$ 下降列がないことを示せば良い．もしあったとする：$[f_0] \ni^* [f_1] \in^* \ni \ldots$．すると各 n について集合

$$X_n := \{x \in S : f_{n+1}(x) \in f_n(x)\}$$

は U に属する．U の σ 完備性より

$$X = \bigcap_{n \in \omega} X_n$$

も U に属し，特に空でない．そこから元 $x \in X$ を一つ取ると，

$$f_0(x) \ni f_1(x) \ni f_2(x) \ni \ldots$$

となり，整楚性公理に反する．　□

Mostowski の崩壊定理は任意の well-founded モデルは推移的モデルと同型なことを主張しているのであった．よって，U が σ 完備なら，あるクラス M と同型なクラス写像 $\pi\colon (\mathrm{Ult}, \in^*) \to (M, \in)$ が存在する．記号の乱用で $\pi([f])$ のことを単に $[f]$ と書く．合成写像 $\pi \circ j$ の方がもとの j より重要であるため，これを単に j と書く．したがって，初等埋め込み $j\colon V \to M$ が得られる．

α が順序数ならば $j(\alpha)$ も順序数であり，初等性と絶対性より $\alpha < \beta \iff j(\alpha) < j(\beta)$ を得る．したがって，任意の順序数について $\alpha \leq j(\alpha)$ を得る．したがって，順序数全体のクラス On は V と M の間で変わらない：$\mathrm{On}^V = \mathrm{On}^M$．すなわち，$M$ は V の内部モデルである．

初等性より $j(0) = 0$ かつすべての $n \in \omega$ について $j(\alpha + 1) = j(\alpha) + 1$ であるので，すべての $n \in \omega$ について $j(n) = n$ である．$j(\omega) = \omega$ は ω の定義可能性と絶対性より分かる．

定義 3.2. 内部モデルへの初等埋め込み $j\colon V \to M$ について，

$$\mathrm{crit}(j) = \min\{\alpha \in \mathrm{On} : \alpha < j(\alpha)\}$$

とおき，j の**臨界点**と呼ぶ．

補題 3.3. (1) 内部モデルへの初等埋め込み $j\colon V \to M$ が非自明，すなわち $j \neq \mathrm{id}$ のとき，臨界点 $\mathrm{crit}(j)$ は存在する．

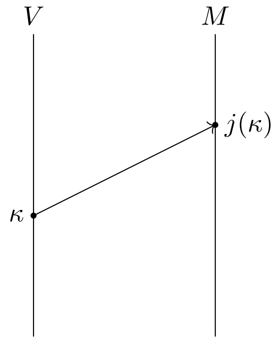
(2) 可測基数 κ とその上の κ 完備非単項超フィルター U について U を使った超冪によって定まる初等埋め込み $j\colon V \to M$ について，その臨界点は κ である．

証明．(1) の証明．$j(x) \neq x$ なるランク最小の x を取る．$y \in x$ なら $\mathrm{rank}(y) < \mathrm{rank}(x)$ なので，x のランク最小性より，$y = j(y)$ を得る．よって，$y = j(y) \in j(x)$ となる．したがって，$x \subseteq j(x)$．したがって，$j(x) \neq x$ であることと合わせると $z \in j(x) \setminus x$ がとれる．もし，$\mathrm{rank}(j(x)) = \mathrm{rank}(x)$ なら $j(z) = z \in j(x)$ となるので，初等性より $z \in x$ を得て，矛盾．よって $\mathrm{rank}(j(x)) > \mathrm{rank}(x)$ である．一方でランクの定義可能性と初等性と絶対性より $\mathrm{rank}(j(x)) = j(\mathrm{rank}(x))$ を得るので，$j(\mathrm{rank}(x)) > \mathrm{rank}(x)$．したがって $\{\alpha \in \mathrm{On} : \alpha < j(\alpha)\}$ が空でないことが証明された．

(2) の証明．$\alpha < \kappa$ として $j(\alpha) = \alpha$ を示す．α に関する超限帰納法で示すことにすれば，任意の $\beta < \alpha$ で $j(\beta) = \beta$ であることを仮定して良い．$[f] \in j(\alpha)$ を取る．すると U の意味でほとんどすべての $x \in S$ で $f(x) < \alpha$．ここで U の κ 完備性より，ある $\beta < \alpha$ が存在して，ほとんどすべての $x \in S$ で $f(x) = \beta$．よって $[f] \in j(\beta)$ である．帰納法の仮定より $[f] \in j(\beta) = \beta$ なので，これで $j(\alpha) = \alpha$ が示された．

次に $j(\kappa) > \kappa$ を示す．対角関数 $d(\alpha) = \alpha$ を考える．$\{\alpha : d(\alpha) < \kappa\} = S \in U$ なので，$[d] < j(\kappa)$ である．次に $\kappa \leq [d]$ を示す．$\beta < \kappa$ を任意にとる．すると $\{\alpha : \beta < d(\alpha)\} = [\beta + 1, \kappa] \in U$ なので，$j(\beta) < [d]$．$j(\beta) = \beta$ は証明済みなので $\beta < [d]$ を得る．これで $\kappa \leq [d]$ が示された．以上より，$\kappa \leq [d] < j(\kappa)$ である．□

内部モデルへの初等埋め込み $j\colon V \to M$ は $j \neq \mathrm{id}$ なら全射ではない．なぜなら，$\mathrm{crit}(j)$ が j の像ではないからである．



定理 3.4 (Scott)**.** 可測基数が存在することと $V = L$ は両立しない．

証明．可測基数が存在し，かつ $V = L$ だと仮定する．最小の可測基数を κ とし，κ 上の非単項 κ 完備超フィルターを U とする．$j\colon V \to M$ を U から生じる初等埋め込みとする．今， $V = L$ を仮定しているので，L の内部モデルとしての最小性により $M = V = L$ である．

$$V \models \kappa \text{ は最小の可測基数}$$

と j の初等性により

$$V \models j(\kappa) \text{ は最小の可測基数}$$

である．よって，$j(\kappa) = \kappa$ とならないといけないが，これは $j(\kappa) > \kappa$ であったことに矛盾． □

定理 3.5. $j\colon V \to M$ を非自明な初等埋め込みとする．このとき，$\mathrm{crit}(j)$ は可測基数である．特に非自明な初等埋め込みが存在するとき可測基数が存在する．

証明．$\kappa = \mathrm{crit}(j)$ とおく．

$$D = \{X \subseteq \kappa : \kappa \in j(X)\}$$

とおく．D が非単項 κ 完備超フィルターなことを示す．

主張: $\kappa \in D$.

証明: $\kappa < j(\kappa)$ なのでよい． //

主張: $\varnothing \notin D$.

証明: 初等性より $j(\varnothing) = \varnothing$ なのでよい． //

主張: D は共通部分で閉じている．

証明: $X, Y \in D$ とすると $\kappa \in j(X), j(Y)$．ところが初等性により $j(X \cap Y) = j(X) \cap j(Y)$ なので $\kappa \in j(X \cap Y)$．よって $X \cap Y \in D$. //

主張: D は上に閉じている．

証明: $X \in D$ かつ $X \subseteq Y$ とする．すると初等性より $j(X) \subseteq j(Y)$ である．したがって，$\kappa \in j(X) \subseteq j(Y)$ を得るのでよい． //

主張: D は超フィルターである．

証明: $X \notin D$ とすると $\kappa \notin j(X)$．初等性より $j(\kappa \setminus X) = j(\kappa) \setminus j(X)$ となり，右辺に κ が属しているため，$\kappa \in j(\kappa \setminus X)$．つまり，$\kappa \setminus X \in D$ である． //

主張: D は非単項．

証明: $\alpha \in \kappa$ について $j(\{\alpha\}) = \{j(\alpha)\} = \{\alpha\}$ である．第一の等式は初等性，第二の等式は臨界点 κ の最小性による．この集合に κ は属さない． //

主張: D は κ 完備．

証明: $\bar{X} = \langle X_i : i < \gamma \rangle$ を D の元からなる列とする．ただし，$\gamma < \kappa$．今，初等性により $j(\bar{X}) = \langle j(X_i) : i < j(\gamma) \rangle = \langle j(X_i) : i < \gamma \rangle$ である．したがって, 再び初等性により $\bigcap_{i<\gamma} j(X_i) = j(\bigcap_{i<\gamma} X_i)$ となる．しかし，仮定より左辺に κ が属しているため，右辺にも属する．よって，$\bigcap_{i<\gamma} X_i \in D$． //

以上で D が非単項 κ 完備超フィルターなことが示された． □

定理 3.5 で作った超フィルターは正規である．実際, 初等埋め込み j により $D = \{X \subseteq \kappa : \kappa \in j(X)\}$ と定義された超フィルター D が正規なことを示そう．f を $X \in D$ 上の押し下げ関数とすると D の定義より，$\kappa \in j(\{\alpha : f(\alpha) < \alpha\})$ なので，$j(f)(\kappa) < \kappa$ である．そこで $\gamma = j(f)(\kappa)$ とおく．このとき $\kappa \in j(\{\alpha : f(\alpha) = \gamma\})$ だから，再び D の定義より，$\{\alpha : f(\alpha) = \gamma\} \in D$ となる．よって，D は正規である．

正規性は次のように超冪の言葉で特徴づけられる．

補題 3.6. D を κ 上の非単項 κ 完備超フィルターとする．このとき次は同値．

(1) D は正規．
(2) $\mathrm{Ult}_D(V)$ において $\kappa = [d]$．ここに d は対角関数．
(3) $D = \{X \subseteq \kappa : \kappa \in j_D(X)\}$．

証明．(1) ならば (2) の証明．$\kappa \leq [d]$ は明らかなので，$[d] \leq \kappa$ を示す．$f \in^* d$ とすると f は押し下げ関数である．よって，仮定 (1) よりある $\gamma < \kappa$ があって，$[f] = \gamma$．

(2) ならば (3) の証明．$X \subseteq \kappa$ とする．

$$\begin{aligned} X \in D &\iff \{\alpha < \kappa : \alpha \in X\} \in D \\ &\iff \{\alpha < \kappa : d(\alpha) \in X\} \in D \\ &\iff [d] \in j_D(X) \text{ (Łoś の定理より)} \\ &\iff \kappa \in j_D(X) \text{ (仮定より)} \end{aligned}$$

より良い．

(3) ならば (1) の証明はこの補題の上の注意より従う． □

補題 3.7. κ を可測基数とする．もし $2^\kappa > \kappa^+$ ならば，どんな κ 上の正規 κ 完備非単項超フィルター D についても集合 $\{\alpha < \kappa : 2^\alpha > \alpha^+\}$ は D に属する．したがって，すべての基数 $\alpha < \kappa$ について $2^\alpha = \alpha^+$ ならば，$2^\kappa = \kappa^+$ である．

証明．D を κ 上の正規 κ 完備非単項超フィルターとし，$M = \mathrm{Ult}_D(V)$ とおく．もし，$\{\alpha < \kappa : 2^\alpha = \alpha^+\} \in D$ なら $[d] = \kappa$ とŁoś の定理より $2^\kappa = \kappa^+$ in M を得る．ところが，補題??より $2^\kappa = (2^\kappa)^M$ かつ $\kappa^+ = \kappa$ なので，V で $2^\kappa = \kappa^+$ である． □

4 ジェネリック超冪

本稿では可測基数を使わず，強制法によるジェネリックフィルターを使った超冪を考える．その応用として，Silver の定理を証明する．

κ を非可算正則基数とし I を κ 上のイデアルとする．I 正値集合のなす半順序集合 $(I^+, \subseteq)$ を考える：

$$I^+ = \{X \subseteq \kappa : X \notin I\}.$$

G を (V, P) ジェネリックフィルターとする．

以下の補題で M **超フィルター**というのは次を満たす $D \subseteq \mathcal{P}^M(\kappa)$ である：

(1) $\varnothing \notin D, \kappa \in D$.

(2) $X, Y \in D$ なら $X \cap Y \in D$.

(3) $X \in D$ かつ $Y \in M$ で $X \subseteq Y$ ならば，$Y \in D$.

(4) $X \in M$ が $X \subseteq \kappa$ であるとき，$X \in D$ または $\kappa \setminus X \in D$.

補題 4.1. (1) G は κ 上の V 超フィルターで I の双対フィルターを拡大するものである.

(2) V で I が κ 完備なら，G は κ 完備 V 超フィルターである.

(3) I が正規ならば，G も正規である.

証明. (1) の証明. X が I の双対フィルターの元ならば，$\{Y \in I^+ : Y \subseteq X\}$ は I^+ の稠密部分集合なので，$X \in G$ を得る．V 超フィルターなことの証明はやさしい.

(2) の証明. $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}, \gamma < \kappa$ を V に属する κ の分割とする．すると $\{Y \in I^+ : Y \subseteq X_\alpha \text{ (for some } \alpha < \gamma)\}$ は I^+ の稠密部分集合である (by I の κ 完備性)．したがって，ある X_α が G に属する.

(3) の証明. $X \in G$ とし $f \in V$ を X 上の押し下げ関数とする．すると $\{Y \in I^+ : f \text{ is constant on } Y\}$ は X の下で稠密である．よって f はある $Y \in G$ の上で定数である. □

これから I は κ 上の κ 完備イデアルとし，全ての一点集合を含むものとする．すると G は κ 上の非単項 κ 完備 M 超フィルターである．$V[G]$ で超冪 $\mathrm{Ult}_G(V)$ を考える．これを**ジェネリック超冪**という．これは ZFC のモデルだが，必ずしも well-founded ではない.

Łoś の定理はジェネリック超冪でも成立する：

$$\mathrm{Ult}_G(V) \models \varphi([f_1], \ldots, [f_n]) \iff \{\alpha \in \kappa : \varphi(f_1(\alpha), \ldots, f_n(\alpha))\} \in G.$$

ここに φ は集合論の論理式で，$f_1, \ldots, f_n \in V$．特に初等埋め込み $j_G \colon V \to \mathrm{Ult}_G(V); j_G(x) = [c_x]$ を得る.

$N = \mathrm{Ult}_G(V)$ とする．N の中の順序数全体 On^N は線形順序付けられたクラスだが, 必ずしも整列しているとは言えない．しかし，次の補題は成り立つ．ここで，$x \in \mathrm{On}^N$ について $\{y \in \mathrm{On}^N : y <^N x\}$ が順序型 α を持つとき，記号の乱用で $x = \alpha$ と書く.

補題 4.2. (1) 各 $\gamma < \kappa$ について，$j(\gamma) = \gamma$．よって On^N は順序型 κ の始切片を持つ.

(2) I が正規ならば，$x \in \mathrm{On}^N$ があって，$x = \kappa$ である．実際，$[d] = \kappa$ である．ただし d は対角関数.

(3) $j(\kappa) \neq \kappa$.

証明. (1) の証明. $j \restriction \gamma$ が $(\gamma, \in)$ と $\{y \in \mathrm{On}^N : y <^N j(\gamma)\}, <^N)$ の間の同型写像であることを示せばよい．$j \restriction \gamma$ の値域が $\{y \in \mathrm{On}^N : y <^N j(\gamma)\}, <^N)$ に含まれることは明らか．順序保存性，単射性は j の初等性より明らか.

全射性を示す．$y \in \mathrm{On}^N$ で $y <^N j(\gamma)$ とする．$y = [f], f \in M, \mathrm{dom}(f) = \kappa$ なる f を取る．すると $[f] <^N j(\gamma)$ より

$$\{\alpha : f(\alpha) < \gamma\} \in G$$

だが，左辺は $\bigcup_{\beta<\gamma}\{\alpha : f(\alpha) = \beta\}$ と書けるため，G の κ 完備性により，ある $\beta < \kappa$ について $\{\alpha : f(\alpha) = \beta\} \in G$ である．よって，$y = [f] = j(\beta)$.

(2) の証明. $j \restriction \kappa$ が κ と $\{y \in \mathrm{On}^N : y <^N [d]\}$ の間の同型となることを示す．$j \restriction \kappa$ の値域が $\{y \in \mathrm{On}^N : y <^N [d]\}$ に収まることは，各 $\alpha \in \kappa$ について $\langle \alpha, \alpha, \alpha, \ldots \rangle \in^* \langle 0, 1, 2, \ldots \rangle$ よりよい．順序保存性，単射性は再び明らかである.

全射性を示す．$[f] \in \mathrm{On}^N$ で $[f] <^N [d]$ なるものをとる．すると f はある G のメンバーの上で押し下げ関数である．G が正規なので，ある集合 $X \in G$ 上で f は定数関数である．その定数 $\alpha < \kappa$ について $j(\alpha) = [f]$ を得る．

(3) の証明．(2) の証明は全射性以外，正規性を使っていない．そこで $\mathrm{ran}(j \restriction \kappa) \subseteq \{y \in \mathrm{On}^N : y <^N [d]\}$ は順序型 κ を持つ．よって，$\{y \in \mathrm{On}^N : y \leq^N [d]\}$ は順序型 $\kappa + 1$ の部分集合を持つ．$[d] < j(\kappa)$ であるため，$\{y \in \mathrm{On}^N : y <^N j(\kappa)\}$ も順序型 $\kappa + 1$ の部分集合を持つ．よって，この集合は順序型 κ を持つことはない． □

定理 4.3 (Silver)**.** κ を特異基数で $\mathrm{cf}(\kappa) = \omega_1$ とする．また，すべての $\lambda < \kappa$ で $2^\lambda = \lambda^+$ と仮定する．このとき $2^\kappa = \kappa^+$．

証明．$(\mathsf{stat}_{\omega_1}, \subseteq)$ を ω_1 の定常集合全体が包含関係で作る半順序集合とする．G を $(V, \mathsf{stat}_{\omega_1})$ ジェネリックフィルターとする．$V[G]$ で議論する．G は ω_1^M 上の正規 σ 完備 M 超フィルターである．$(N, \varepsilon^N) = \mathrm{Ult}_G(V)$ をジェネリック超冪とし，$j \colon V \to N$ を誘導される初等埋め込みとする．

$\langle \kappa_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ を V の中で単調増加連続な基数の列で κ に収束するものとする．e を N の中の基数とし，$e(\alpha) = \kappa_\alpha$ で定められる関数によって表現されるものとする．e^+ を N の中での e の後続基数とする．

$x \in N$ に対して $\mathrm{ext}(x) = \{y \in N : y \mathrel{\varepsilon^N} x\}$ とおく．これは $V[G]$ の集合である．この定義より特に

$$\mathrm{ext}(\mathcal{P}^N(e)) = \{x \in N : N \models \text{“}x \subseteq e\text{”}\}$$

である．

主張 A: $|\mathcal{P}^V(\kappa)| \leq |\mathrm{ext}(\mathcal{P}^N(e))|$.

証明: V の中の $X \subseteq \kappa$ について関数 f_X を $f_X(\alpha) = X \cap \kappa_\alpha$ $(\alpha \in \omega_1)$ と定める．f_X が表現する N の元は，N の中で e の部分集合である．また，$X \neq Y$ なら，関数 f_X と f_Y はゆくゆく異なるので，異なる N の元を表現する． //

主張 B: $|\mathrm{ext}(\mathcal{P}^N(e))| = |\mathrm{ext}(e^+)|$.

証明: V で任意の α について $2^{\kappa_\alpha} = \kappa_\alpha^+$ であることから，Łoś の定理より，N で $2^e = e^+$ が成り立つ．つまり $F \in N$ がとれて，$N \models F \colon 2^e \to e^+$ 全単射 となる．各 $x \in \mathrm{ext}(\mathcal{P}^N(e))$ について $y \in N$ で $N \models y = F(x)$ となる元を割り当てる関数を $\tilde{F} \colon \mathrm{ext}(\mathcal{P}^N(e)) \to \mathrm{ext}(e^+)$ とする．これは全単射であることが確認できるので，主張が示された． //

主張 C: 任意の $a \mathrel{\varepsilon^N} e$ について，$\gamma < \omega_1^V$ が存在して，$a \mathrel{\varepsilon^N} j(\kappa_\gamma)$ である．

証明: $a \mathrel{\varepsilon^N} e$ を任意にとり，関数 f が a を表現するとする．このときある $X \in G$ があって，全ての $\alpha \in X$ で $f(\alpha) < \kappa_\alpha$ である．ここで極限順序数全体の集合は club なので G に属する．よって，上で取った X は全ての元が極限順序数だと仮定して良い．したがって，列 $\langle \kappa_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ を連続で取っていたことから，$f(\alpha) < \kappa_{\gamma(\alpha)}$ が，ある $\gamma(\alpha) < \alpha$ について成り立つ．γ は押し下げ関数だから，ある $\gamma < \omega_1^V$ が存在して，ある $Y \in G$ について，任意の $\alpha \in Y$ で $f(\alpha) < \kappa_\gamma$ となる．つまり $a \mathrel{\varepsilon^N} j(\kappa_\gamma)$ を得る． //

主張 D: $|\mathrm{ext}(e)| \leq \kappa$.

証明: 各 $\gamma < \omega_1^V$ について，$|j(\kappa_\gamma)| \leq |(\kappa_\gamma^{\aleph_1})^V| < \kappa$ である．第一の不等号は $j(\kappa_\gamma)$ の元というのはつねに κ_γ の元を値に取る ω_1 列で表現されるからである．よって，主張 C と合わせて，$|\mathrm{ext}(e)| \leq \kappa$ を得る． //

主張 E: $|\mathrm{ext}(e^+)| \leq \kappa^+$.

証明: もし，$x \mathrel{\varepsilon^N} e^+$ なら，N の中に x から e への単射があるから，主張 B と同じ方法によって，

$\mathrm{ext}(x)$ から $\mathrm{ext}(e)$ への単射を得る．したがって，$\mathrm{ext}(e^+)$ は全順序集合で，どの始切片もサイズたかだか κ を持つので，$\mathrm{ext}(e^+) \leq \kappa^+$ を得る ([Jec06] の Exercise 5.3 を参照). //

主張 A, B, E を組み合わせると

$$|\mathcal{P}^V(\kappa)| \leq |\mathrm{ext}(\mathcal{P}^N(e))| \leq |\mathrm{ext}(e^+)| \leq \kappa^+$$

を得る．これは $V[G]$ での不等式である．ところが，$|P| = 2^{\aleph_1} < \kappa$ であるため，chain condition により，V の全ての κ 以上の基数は $V[G]$ でも基数である．よって

$$|\mathcal{P}^V(\kappa)|^V \leq (\kappa^+)^V$$

を得る．これが欲しかった結論である． □

5 峻厳イデアル

参考文献

[Jec06] Thomas Jech. *Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded.* Springer Monographs in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2006.

[新井 21] 新井敏康. **数学基礎論**. 東京大学出版会, 2021.