可測基数ノート

でぃぐ

2023 年 1 月 29 日

目次

1 可測基数の初歩

定義 1.1. (1) 基数 κ が**可測基数**であるとは，κ 上の κ-完備な非単項超フィルターが存在することを言う．

(2) 基数 κ が**実数値可測基数**であるとは，κ 上の非自明な κ 完備測度が存在することを言う．

補題 1.2. κ を次を満たす最小の基数とする：非単項 σ-完備な超フィルターが存在する．U をそのような超フィルターの一つとする．このとき，U は κ-完備である．

証明. U が κ-完備でないと仮定する．すると κ の分割 $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}$ があって，$\gamma < \kappa$ かつ各 X_α は U の意味で小さい．$f\colon \kappa \to \gamma$ を次で定める：

$$f(x) = \alpha \iff x \in X_\alpha.$$

つまり，各入力 $x < \kappa$ について，x が何番目のピースに属しているかを返す関数である．γ 上の超フィルター D を

$$D = \{Z \subseteq \gamma : f^{-1}(Z) \in U\}$$

で定める．U が σ 完備なので，D も σ 完備である．D は非単項でもある：なぜなら，各 $\alpha < \gamma$ について $f^{-1}\{\alpha\} = X_\alpha \notin U$ より $\alpha \notin D$ だからである．したがって，D は γ 上の単項 σ-完備な超フィルターだが，$\gamma < \kappa$ より，これは κ の最小性に矛盾． □

補題 1.3. 可測基数は到達不能基数である．

証明．κ を可測基数とする．

κ の正則性を示す．κ 上の κ-完備な非単項超フィルター U を取る．κ が特異だとすると，κ の共終列 $\langle \lambda_i : i < \mathrm{cf}(\kappa) \rangle$ でおのおのの λ_i は κ 未満なものが取れる．今，$\kappa = \bigcup_{i<\mathrm{cf}(\kappa)} \lambda_i$ である．左辺 κ は U に属するが，右辺はおのおのの λ_i が U の意味で小さく，その $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$ 個の和集合だから U の意味で小さい．矛盾した．なお，ここで，おのおのの λ_i が小さいのは各 1 点集合が小さく，λ_i はその $\lambda_i < \kappa$ 個の和集合として書けるからである．

κ の強極限性を示す．背理法で，ある $\lambda < \kappa$ について，$2^\lambda \geq \kappa$ だと仮定する．集合 $S \subseteq \{0,1\}^\lambda$ で $|S| = \kappa$ となるものを取る．集合 S 上の κ-完備な非単項超フィルター U を取る．各 $\alpha \in \lambda$ について集合 $X_\alpha \subseteq S$ を

$$\{f \in S : f(\alpha) = 0\} \text{ もしくは } \{f \in S : f(\alpha) = 1\}$$

で U に属する方とする．集合 X を

$$X = \bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha$$

で定めると $X \in U$ であるが，明らかに X は 1 点集合である．これは U の非単項性に矛盾．□

2 Ulam の定理の証明

3 正規フィルター

4 可測基数の存在と実数値可測基数の存在の無矛盾等価性

5 ジェネリック超冪