

可測基数ノート

でいぐ
2023 年 3 月 8 日

概要

本稿は可測基数についてのノートである。可測基数のかなり初歩的な話からはじめ、超冪と初等埋め込みという標準的な話題を扱い、最後に応用として峻厳イデアルの存在の無矛盾性証明を行う。

目次

1	可測基数の初歩	1
2	正規フィルター	6
3	宇宙 V の超冪と初等埋め込み	7
4	ジェネリック超冪	13
5	峻厳イデアル	16

本稿の内容はほぼ Jech のテキスト [Jec06] を参考にしている。

1 可測基数の初歩

可測基数の研究は、 $[0, 1]$ の Lebesgue 測度を $[0, 1]$ の冪集合全体に拡張できるかという問から出発している。本節では ZFC にその命題を付け加えた公理系の無矛盾性が ZFC の無矛盾性を超えることを示す。

定義 1.1. S を無限集合とする。 S 上の (一様かつ σ 加法的な確率) 測度とは $\mu: \mathcal{P}(S) \rightarrow [0, 1]$ であって、次を満たすものである：

- (1) $\mu(\emptyset) = 0, \mu(S) = 1$.
- (2) $X \subseteq Y \subseteq S$ なら、 $\mu(X) \leq \mu(Y)$.
- (3) (一様性) 任意の $s \in S$ について $\mu(\{s\}) = 0$.
- (4) (σ 加法的性) $X_n, n \in \omega$ が互いに素な S の部分集合たちであれば、

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \omega} X_n\right) = \sum_{n \in \omega} \mu(X_n).$$

測度論で扱う測度は S 上のある σ 加法族を定義域とするものであったが、ここで扱う測度は定義域が $\mathcal{P}(S)$ なことに注意しよう。

定義 1.2. μ を S 上の測度とする。 $A \subseteq S$ が原子であるとは、 $\mu(A) > 0$ かつ任意の $X \subseteq A$ に対して $\mu(X) = 0$ または $\mu(X) = \mu(A)$ となるものである。原子が存在しない測度を原子なしの測度という。

定義 1.3. (1) 基数 κ が可測基数であるとは、 κ 上の κ 完備な非単項超フィルターが存在することを

言う.

(2) 基数 κ が**実数値可測基数**であるとは、 κ 上の κ 加法的測度が存在することを言う.

S 上の非単項超フィルターを考えることと、 S 上の値域が $\{0, 1\}$ である (つまり、2 値である) 測度を考えることは同じである.

実際、非単項超フィルター U に対して

$$\mu(X) = \begin{cases} 1 & (X \in U) \\ 0 & (X \notin U) \end{cases}$$

で定義される測度を対応される写像と、2 値測度 μ に対して非単項超フィルター

$$U = \mu^{-1}\{1\}$$

を対応させる写像は互いの逆写像である.

また、この対応において、超フィルターが κ 完備なものと測度が κ 加法的なことが対応する. よって、可測基数は実数値可測基数である.

定義 1.4. 集合 S 上のイデアル I で σ 飽和的であるとは、 I に属さない S の部分集合族で互いに素なものとは、族の濃度が可算であることを意味する.

S 上の測度 μ から来るイデアル $I_\mu = \mu^{-1}\{0\}$ は必ず σ 飽和的である. なぜなら、 A が I に属さない (すなわち μ の測度が正な) 部分集合の族で互いに素なものとしよう. このとき正の自然数 n に対して $\mu(A) > 1/n$ を満たす $A \in \mathcal{A}$ は n 個しかない. よって、 \mathcal{A} は有限集合の可算和であるから、たかだか可算濃度を持つ.

補題 1.5. 実数値可測基数 (および可測基数) は正則基数である.

証明. κ を実数値可測基数とする. κ 上の κ 完備な測度 μ を取る. κ が特異だとすると、 κ の共終列 $\langle \lambda_i : i < \text{cf}(\kappa) \rangle$ でおおおの λ_i は κ 未満なものが取れる. 今、 $\kappa = \bigcup_{i < \text{cf}(\kappa)} \lambda_i$ である. 左辺 κ は測度 1 だが、右辺はおおおの λ_i が測度 0 で、その $\text{cf}(\kappa) < \kappa$ 個の和集合だから測度 0 である. 矛盾した. なお、ここで、おおおの λ_i が測度 0 なのは、各 1 点集合が測度 0 で、 λ_i はその $\lambda_i < \kappa$ 個の和集合として書けるからである. \square

補題 1.6. 可測基数は到達不能基数である.

証明. κ を可測基数とする.

κ が正則なことは補題 1.5 で示した.

κ の強極限性を示す. 背理法で、ある $\lambda < \kappa$ について、 $2^\lambda \geq \kappa$ だと仮定する. 集合 $S \subseteq \{0, 1\}^\lambda$ で $|S| = \kappa$ となるものを取る. 集合 S 上の κ 完備な非単項超フィルター U を取る. 各 $\alpha \in \lambda$ について集合 $X_\alpha \subseteq S$ を

$$\{f \in S : f(\alpha) = 0\} \text{ もしくは } \{f \in S : f(\alpha) = 1\}$$

で U に属する方とする. 集合 X を

$$X = \bigcap_{\alpha < \lambda} X_\alpha$$

で定めると $X \in U$ であるが、明らかに X は 1 点集合である. これは U の非単項性に矛盾. \square

補題 1.7. (1) κ を次を満たす最小の基数とする: 非単項 σ 完備な超フィルターが存在する. U をそのような超フィルターの一つとする. このとき、 U は κ 完備である.

(2) κ を次を満たす最小の基数とする: κ 上の測度が存在する. μ をそのような測度とする. このとき測度 0 集合のイデアル I_μ は κ 完備である.

(3) κ を次を満たす最小の基数とする: κ 上の σ 完備かつ σ 飽和的イデアルが存在する. I をそのようなイデアルとする. このとき I は κ 完備である.

証明. (1). U が κ 完備でないと仮定する. すると κ の分割 $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}$ があって, $\gamma < \kappa$ かつ各 X_α は U の意味で小さい. 関数 $f: \kappa \rightarrow \gamma$ を次で定める:

$$f(x) = \alpha \iff x \in X_\alpha.$$

つまり, 各入力 $x < \kappa$ について, x が何番目のピースに属しているかを返す関数である. γ 上の超フィルター D を

$$D = \{Z \subseteq \gamma : f^{-1}(Z) \in U\}$$

で定める. U が σ 完備なので, D も σ 完備である. D は非単項でもある: なぜなら, 各 $\alpha < \gamma$ について $f^{-1}\{\alpha\} = X_\alpha \notin U$ より $\alpha \notin D$ だからである. したがって, D は γ 上の単項 σ -完備な超フィルターだが, $\gamma < \kappa$ より, これは κ の最小性に矛盾.

(2). I_μ が κ 完備ではないと仮定する. すると測度 0 集合の族 $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}$ で, $\gamma < \kappa$ かつ, それらの和集合 $X = \bigcup_{\alpha < \gamma} X_\alpha$ は測度正なものがとれる. X_α たちは互いに素であると仮定しても良い. $f: X \rightarrow \gamma$ を

$$f(x) = \alpha \iff x \in X_\alpha$$

と定め, γ 上の測度 ν を

$$\nu(Z) = \frac{\mu(f^{-1}(Z))}{\mu(X)}$$

と定める. ν は σ 加法的である. また, ν は一様である, なぜなら, 各 $\alpha < \gamma$ について $\nu(\{\alpha\}) = \frac{\mu(X_\alpha)}{\mu(X)} = 0$ だからである. これは κ の最小性に反する.

(3) の証明は (1) や (2) と同様である. □

μ を集合 S 上の測度とし, I_μ を測度 0 集合のイデアルとすれば, μ が κ 加法的なら, I_μ が κ 完備なことは明らかである. 逆も言える:

補題 1.8. μ を集合 S 上の測度とし, I_μ を測度 0 集合のイデアルとする. このとき, もし I_μ が κ 完備なら, μ は κ 加法的である.

証明. $\gamma < \kappa$ とし, $\langle X_\alpha : \alpha < \gamma \rangle$ を互いに素な S の部分集合の族とする. X_α たちが互いに素なので, そのうちたかだか可算個が正の測度を持つ. よって,

$$\{X_\alpha : \alpha < \gamma\} = \{Y_n : n \in \omega\} \cup \{Z_\alpha : \alpha < \gamma\}$$

と書くことができる. ここに各 Z_α は測度 0 集合. よって,

$$\mu\left(\bigcup_{\alpha < \gamma} X_\alpha\right) = \mu\left(\bigcup_{n \in \omega} Y_n\right) + \mu\left(\bigcup_{\alpha < \gamma} Z_\alpha\right)$$

を得る. μ が σ 加法的なので,

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \omega} Y_n\right) = \sum_{n \in \omega} \mu(Y_n)$$

である. また, I_μ が κ 完備なので,

$$\mu\left(\bigcup_{\alpha < \gamma} Z_\alpha\right) = 0$$

である。以上より,

$$\mu\left(\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha\right) = \sum_{\alpha<\gamma} \mu(X_\alpha)$$

を得る. □

補題 1.9. (1) ある集合上の原子なしの測度が存在するとき, ある基数 $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ 上に測度が存在する.
 (2) I を集合 S 上の σ 完備 σ 飽和的イデアルとする. このとき, ある $Z \subseteq S$ に対して $I \restriction Z = \{X \subseteq Z : X \in I\}$ が極大イデアルであるか, または, σ 完備 σ 飽和的イデアルがある $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ 上に存在するかのどちらかが成り立つ.

証明. (1). μ をそのような測度とする. S の測度正な部分集合からなり, 逆向きの包含関係で順序付けられた木 T を構成する. T の根は S である. 各 $X \in T$ について, X の測度正な集合への分割 $X = Y \cup Z, Y \cap Z = \emptyset$ を取り, この 2 つを X の直後の元とする. α が極限順序数のとき T の第 α レベルにはすべての共通部分 $X = \bigcap_{\xi<\alpha} X_\xi$ であって, $\langle X_\xi : \xi < \alpha \rangle$ は $T \restriction \alpha$ の増大鎖で X_ξ は第 ξ レベルの元, X は測度正なものを置く.

T のどの枝も可算である: なぜなら, $\langle X_\xi : \xi < \alpha \rangle$ が枝ならば, $\langle X_\xi \setminus X_{\xi+1} : \xi < \alpha \rangle$ は測度正な集合の互いに素な族となるからである.

同様に, T のどのレベルも可算であることも分かる. よって, T はたかだか 2^{\aleph_0} 個の極大枝を持つ (各 $\alpha < \omega_1$ について高さ α の極大枝の個数はたかだか 2^{\aleph_0} . よってそれらの ω_1 個の和集合でたかだか 2^{\aleph_0} 個となる).

$\{b_\alpha : \alpha < \kappa\}, \kappa \leq 2^{\aleph_0}$ をすべての極大枝 $b = \{X_\xi : \xi < \gamma\}$ であって, $\bigcap_{\xi<\gamma} X_\xi$ が非空なものの枚挙とする. 各 $\alpha < \kappa$ について $Z_\alpha = \bigcap b_\alpha$ とおく. $\{Z_\alpha : \alpha < \kappa\}$ は S の測度 0 集合への分割となる (Z_α が測度 0 でないとすると, 一個高さを上げることができ枝の極大性に反する; また, 互いの異なる極大枝 b_α と b_β はどこかで枝分かれしているはずだから, 後続ステップでの構成の仕方より, $X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$ を得る; 覆っていることは $s \in S$ を任意にとるとき, s が入っている集合を根から追跡することにより, ある X_α に s が入っていることがわかるからよい). あとは $f: S \rightarrow \kappa$ を $f(x) = \alpha \iff x \in Z_\alpha$ とおき, κ 上の測度 ν を $\nu(Z) = \mu(f^{-1}(Z))$ とおけば, ν は一様な σ 加法的測度である.

(2). (1) と同様である. □

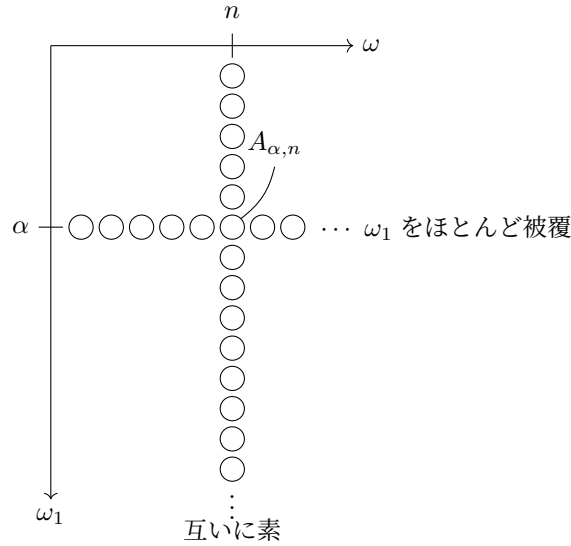
系 1.10. κ が実数値可測基数ならば, κ は可測基数か, $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ である. より一般に, κ が κ 完備 σ 飽和的イデアルを持つと, κ は可測基数であるか, $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ である.

証明. 補題 1.9 の証明より, μ が S 上の原子なしの測度なら, S のたかだか 2^{\aleph_0} 個への測度 0 個の分割が存在することがわかる. つまり, μ は $(2^{\aleph_0})^+$ 加法的ではない. したがって, 原子なしの κ 加法的測度を κ が持つとき, $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ である (結論の否定を取ると, $\kappa \geq (2^{\aleph_0})^+$ だが, これと κ 加法性より $(2^{\aleph_0})^+$ 加法性が出るから). 後半の主張も同様. □

補題 1.9 の (1) の主張の結論には「原子なし」が含まれていなかったが, これは実際には「原子なし」と結論付けられる. なぜなら, 原子があると κ は可測基数となるが, 補題 1.6 より, それは $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ と相容れないからだ.

定義 1.11. (\aleph_1, \aleph_0) -Ulam 行列とは, ω_1 の部分集合の族 $\langle A_{\alpha,n} : \alpha \in \omega_1, n \in \omega \rangle$ であって, 次の 2 条件を満たすものである.

- (1) 各 $n \in \omega$ と異なる $\alpha, \beta \in \omega_1$ について $A_{\alpha,n} \cap A_{\beta,n} = \emptyset$ である.
- (2) 各 $\alpha \in \omega_1$ について, 集合 $\omega_1 \setminus \bigcup_{n \in \omega} A_{\alpha,n}$ はたかだか可算集合である.



補題 1.12. (\aleph_1, \aleph_0) -Ulam 行列は存在する.

証明. 各 $\xi \in \omega_1$ に対して $f_\xi: \omega \rightarrow \omega_1$ を $\xi \subseteq \text{ran}(f_\xi)$ なるものとする. 集合 $A_{\alpha,n}$ を

$$\xi \in A_{\alpha,n} \iff f_\xi(n) = \alpha$$

と定める.

$\xi \in A_{\alpha,n} \cap A_{\beta,n}$ なら $\alpha = f_\xi(n) = \beta$ となるので, Ulam 行列の条件 (1) が成り立っていることがわかる.

$\alpha \in \omega_1$ とする. $\xi > \alpha$ に対して, f_ξ の取り方より, $f_\xi(n) = \alpha$ となる $n \in \omega$ が存在する. よって,

$$[\alpha + 1, \omega_1) \subseteq \bigcup_{n \in \omega} A_{\alpha,n}$$

なので条件 (2) も成り立っている. □

演習問題 1.13. (\aleph_1, \aleph_0) -Ulam 行列の定義において, 「各行は可算集合を除いてほとんど ω_1 を覆っている」という条件を「各行は ω_1 を (完全に) 覆っている」と変更したバージョンは存在しないことを示せ.

補題 1.14. ω_1 上の σ 完備 σ 飽和的イデアルは存在しない. 特に ω_1 上の測度は存在しない.

証明. そのようなイデアル I が存在したと仮定する. また, $\langle A_{\alpha,n} : \alpha \in \omega_1, n \in \omega \rangle$ を (\aleph_1, \aleph_0) -Ulam 行列とする. I の σ 完備性と Ulam 行列の条件 (2) より, 各 α について自然数 n_α があって, $A_{\alpha,n}$ は I -正である. したがって, 鳩の巣原理より, $W \subseteq \omega_1$, $|W| = \aleph_1$, $n \in \omega$ があって, すべての $\alpha \in W$ について $n_\alpha = n$ である. すると $\{A_{\alpha,n} : \alpha \in W\}$ は互いに素 (by Ulam 行列の条件 (1)) な非可算な I -正集合の族となる. これは I の σ 飽和性に矛盾する. □

以上の ω_1 を一般の後続基数に一般化できる. 証明は同様なので省略する.

定義と補題 1.15. λ を基数とする.

(1) (λ^+, λ) -Ulam 行列とは, λ^+ の部分集合の族 $\langle A_{\alpha,\eta} : \alpha \in \lambda^+, \eta \in \lambda \rangle$ であって, 次の 2 条件を満たすものである.

(a) 各 $\eta \in \lambda$ と異なる $\alpha, \beta \in \lambda^+$ について $A_{\alpha,\eta} \cap A_{\beta,\eta} = \emptyset$ である.

(b) 各 $\alpha \in \lambda^+$ について, 集合 $\lambda^+ \setminus \bigcup_{\eta \in \lambda} A_{\alpha,\eta}$ は λ 以下の濃度を持つ.

- (2) (λ^+, λ) -Ulam 行列は存在する.
 (3) λ^+ 上の λ^+ 完備 σ 飽和的イデアルは存在しない.

系 1.16. 任意の実数値可測基数は、弱到達不能基数である.

証明. κ を実数値可測基数とする. 正則なことは補題 1.5 で示した. 後続基数でないことは、定義と補題 1.15 から分かる. \square

以上より次が結論付けられる: ZFC に「ある集合上の測度が存在する」という命題を加えた公理系の無矛盾性の強さは ZFC より真に強い. なぜなら「ある集合上の測度が存在する」からはその測度が原子ありかなしかに応じて、到達不能基数か弱到達不能基数のどちらかが出て、どちらも ZFC の無矛盾性を出すからである. これが Ulam が証明した定理である.

2 正規フィルター

κ の部分集合の列 $(X_\alpha : \alpha < \kappa)$ についてその**対角共通部分** $\Delta_{\alpha < \kappa} X_\alpha$ というのは

$$\Delta_{\alpha < \kappa} X_\alpha = \{\beta < \kappa : (\forall \alpha < \beta)(\beta \in X_\alpha)\}$$

で定まっていた. その双対概念として,

$$\nabla_{\alpha < \kappa} X_\alpha = \{\beta < \kappa : (\exists \alpha < \beta)(\beta \in X_\alpha)\}$$

を**対角和集合**という.

フィルターが**正規**であるとは、それが対角共通部分を取る操作で閉じていることであつた. イデアルが正規というのは双対フィルターが正規であること、すなわち対角和を取る操作で閉じていることを意味する. $f: X \rightarrow \kappa$ ($X \subseteq \kappa$) が**押し下げ関数**であるとは、任意の $\alpha \in X$ について $f(\alpha) < \alpha$ となることであつた.

イデアル I に対して集合

$$I^+ = \{A \subseteq \kappa : A \notin I\}$$

の元を I 正值集合ということにする.

補題 2.1. I を κ 上のイデアルとする. 次は同値.

- (1) I は正規.
 (2) 任意の I 正值集合 S_0 と任意の S_0 上の押し下げ関数 f に対して、 I 正值集合 $S \subseteq S_0$ があつて f は S 上定数.

証明. (1) ならば (2) は Fodor の補題の証明そのままである.

(2) ならば (1) を証明する. I の双対フィルターを F とする. $(X_\alpha : \alpha < \kappa)$ を F の元の列とする. $\Delta_{\alpha < \kappa} X_\alpha \notin F$ だとする. $S = \kappa \setminus \Delta_{\alpha < \kappa} X_\alpha$ とおく. S は I 正值集合である. $f(\alpha)$ を $\xi < \alpha$ であつて、 $\alpha \notin X_\xi$ なものとして定める (対角共通部分の定義より取れる). すると (2) より I 正值集合 $S' \subseteq S$ と $\gamma < \kappa$ がとれて、任意の $\alpha \in S'$ について $f(\alpha) = \gamma$. これは f の定義より $S' \cap X_\gamma = \emptyset$ を意味する. S' が I 正值集合で $X_\gamma \in F$ なのでこれは矛盾. \square

したがって、 κ 上の超フィルター U に対しては、 U が正規であることと任意の押し下げ関数 $f: X \rightarrow \kappa$, $X \in U$ に対して、ある $Y \in U$ について f が Y 上で定数関数となることと同値である.

補題 2.2. κ を非可算正則基数とし, F を κ 上の正規フィルターで, 任意の終切片 $\{\alpha : \alpha_0 < \alpha < \kappa\}$ を持っているものとする. するとすべての club 集合は F の元を持つ. したがって, F の元はすべて定常集合である.

証明. まず極限順序数全体 Lim_κ は F の元であることに注意する: $X_\alpha = \{\xi : \alpha + 1 < \xi < \kappa\}$ の対角共通部分として書けるからである. C を club 集合とし, $C = \{a_\alpha : \alpha < \kappa\}$ を単調増加な枚举とする. $Y_\alpha = \{\xi : a_\alpha < \xi < \kappa\}$ とおくと $\text{Lim}_\kappa \cap \Delta_{\alpha < \kappa} Y_\alpha \subseteq C$ を得る. なぜなら $\beta \in \text{Lim}_\kappa \cap \Delta_{\alpha < \kappa} Y_\alpha$ とすると

$$\beta = \sup_{\alpha < \beta} a_\alpha \in C$$

であるからである. □

定理 2.3. 任意の可測基数の上に正規超フィルターが存在する.

証明. U を κ 上の非単項 κ 完備超フィルターとする. $f, g \in \kappa^\kappa$ に対して,

$$f =^* g \iff \{\alpha < \kappa : f(\alpha) = g(\alpha)\} \in U$$

という同値関係を入れる. また,

$$f <^* g \iff \{\alpha < \kappa : f(\alpha) < g(\alpha)\} \in U$$

という擬全順序関係を入れる.

無限下降列 $f_0 >^* f_1 >^* f_2 >^* \dots$ は存在しない. 実際, それがあれば $X_n = \{\alpha : f_n(\alpha) > f_{n+1}(\alpha)\} \in U$ だが, U が σ 完備なので, $X = \bigcap_{n \in \omega} X_n \in U$ であり, 特に X は空でない. $\alpha \in X$ を一つ取ると, 順序数の無限下降列 $f_0(\alpha) > f_1(\alpha) > f_2(\alpha) > \dots$ ができて矛盾である.

したがって, $<^*$ は擬整列順序である.

$f: \kappa \rightarrow \kappa$ を次を満たす (この擬整列順序で) 最小の関数とする: 任意の $\gamma < \kappa$ に対して, $\{\alpha : f(\alpha) > \gamma\} \in U$ である. このような f は少なくとも 1 つ存在する. たとえば対角関数 $d(\alpha) = \alpha$ は条件を満たす.

$D = f(U) = \{X \subseteq \kappa : f^{-1}(X) \in U\}$ とおく. D が κ 上の正規超フィルターなことを示そう.

各 $\gamma < \kappa$ に対して, $f^{-1}\{\gamma\} \notin U$ である ($f^{-1}[\gamma + 1, \kappa) \in U$ だから). よって, $\gamma \notin D$ なので, D は非単項である.

D の正規性を示そう. h を $X \in D$ 上の押し下げ関数とする. h が D のあるメンバー上で定数なことを示さなければいけない. $g \in \kappa^\kappa$ を $g(\alpha) = h(f(\alpha))$ で定義される関数とする. $g(\alpha) < f(\alpha)$ がすべての $\alpha \in f^{-1}(X)$ で成り立つ. よって, $g <^* f$ である. f の最小性より, ある $\gamma < \kappa$ に対して $Y := \{\alpha : g(\alpha) = \gamma\} \in U$ となる. したがって, D の定義より $f(Y) \in D$ であり, また, h は $f(Y)$ 上で定数 γ を取る. □

3 宇宙 V の超冪と初等埋め込み

本節では, 可測基数が存在すれば, 内部モデルへの初等埋め込みが存在すること, 逆に初等埋め込みがあれば可測基数があることを示す. また, 可測基数の存在が $V = L$ と両立しないことを示す.

U を集合 S 上の超フィルターとする. $f, g: S \rightarrow V$ に対して次の二つの関係を定める:

$$\begin{aligned} f =^* g &\iff \{x \in S : f(x) = g(x)\} \in U, \\ f \in^* g &\iff \{x \in S : f(x) \in g(x)\} \in U. \end{aligned}$$

S を定義域とする関数全体は真クラスをなすため、同値関係 $=^*$ のおのおの同値類は真クラスになってしまう。そこで Scott のトリックを使って、次のように同値類のようなものを定義する。

$$[f] = \{g : f =^* g \wedge \neg(\exists h)(h = f \wedge \text{rank } h < \text{rank } g)\}$$

こうすると各 $[f]$ は集合となる。 $f, g : S \rightarrow V$ に対して、 $[f] \in^* [g] \iff f \in^* g$ と定義する。これは well-defined である。

$\text{Ult} = \text{Ult}_U(V)$ をすべての $[f]$ (ただし $f : S \rightarrow V$) 全体のなすクラスとする。構造 $\text{Ult} = (\text{Ult}, \in^*)$ を考える。これを宇宙 V の**超冪**という。通常のモデル理論における Łoś の定理は宇宙の超冪でも成り立つことが確認できる：

$$\text{Ult} \models \varphi([f_1], \dots, [f_n]) \iff \{x \in S : \varphi(f_1(x), \dots, f_n(x))\} \in U.$$

ここに φ は集合論の論理式。特に文を考えると、 (V, \in) と (Ult, \in^*) が初等同値なことが分かる。

また、各 $a \in V$ に対して定数関数 $c_a : S \rightarrow V; c_a(x) = a$ を考えて、 $j(a) = [c_a]$ とおくと

$$\text{Ult} \models \varphi(j(a_1), \dots, j(a_n)) \iff V \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$$

を得る。つまり、モデル理論で使っていた用語を拝借すると、 $j : V \rightarrow \text{Ult}$ は**初等埋め込み**である。

超冪が well-founded である状況を考察する。set-like であることは常に成り立つ：つまり任意の f について

$$\text{ext}(f) = \{[g] : g \in^* f\}$$

は常に集合である。なぜなら、 $g \in^* f$ なる g を考えるとある $h =^* g$ であってすべての $x \in S$ で $h(x) \in f(x)$ となるものをとれる。この h はランクが f 以下である。よって $\text{rank}([g]) \leq \text{rank}(f) + 1$ となるので、 $\text{ext}(f)$ は集合である。

補題 3.1. U が σ 完備な超フィルターなら、 (Ult, \in^*) は well-founded である。

証明. Ult の無限 \in^* 下降列がないことを示せば良い。もしあったとする： $[f_0] \ni^* [f_1] \in^* \dots$ すると各 n について集合

$$X_n := \{x \in S : f_{n+1}(x) \in f_n(x)\}$$

は U に属する。 U の σ 完備性より

$$X = \bigcap_{n \in \omega} X_n$$

も U に属し、特に空でない。そこから元 $x \in X$ を一つ取ると、

$$f_0(x) \ni f_1(x) \ni f_2(x) \ni \dots$$

となり、整楚性公理に反する。 □

Mostowski の崩壊定理は任意の well-founded モデルは推移的モデルと同型なことを主張しているのであった。よって、 U が σ 完備なら、あるクラス M と同型なクラス写像 $\pi : (\text{Ult}, \in^*) \rightarrow (M, \in)$ が存在する。記号の乱用で $\pi([f])$ のことを単に $[f]$ と書く。合成写像 $\pi \circ j$ の方がもとの j より重要であるため、これを単に j と書く。したがって、初等埋め込み $j : V \rightarrow M$ が得られる。

α が順序数ならば $j(\alpha)$ も順序数であり、初等性と絶対性より $\alpha < \beta \iff j(\alpha) < j(\beta)$ を得る。したがって、任意の順序数について $\alpha \leq j(\alpha)$ を得る。したがって、順序数全体のクラス On は V と M の間で変わらない： $\text{On}^V = \text{On}^M$ 。すなわち、 M は V の内部モデルである。

初等性より $j(0) = 0$ かつすべての $n \in \omega$ について $j(\alpha + 1) = j(\alpha) + 1$ であるので、すべての $n \in \omega$ について $j(n) = n$ である。 $j(\omega) = \omega$ は ω の定義可能性と絶対性より分かる。

定義 3.2. 内部モデルへの初等埋め込み $j: V \rightarrow M$ について,

$$\text{crit}(j) = \min\{\alpha \in \text{On} : \alpha < j(\alpha)\}$$

とおき, j の臨界点と呼ぶ.

補題 3.3. (1) 内部モデルへの初等埋め込み $j: V \rightarrow M$ が非自明, すなわち $j \neq \text{id}$ のとき, 臨界点 $\text{crit}(j)$ は存在する.

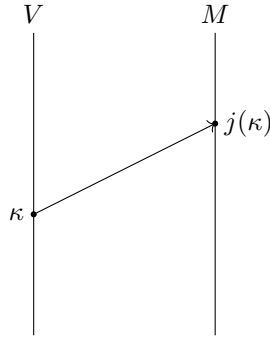
(2) 可測基数 κ とその上の κ 完備非単項超フィルター U について U を使った超冪によって定まる初等埋め込み $j: V \rightarrow M$ について, その臨界点は κ である.

証明. (1) の証明. $j(x) \neq x$ なるランク最小の x を取る. $y \in x$ なら $\text{rank}(y) < \text{rank}(x)$ なので, x のランク最小性より, $y = j(y)$ を得る. よって, $y = j(y) \in j(x)$ となる. したがって, $x \subseteq j(x)$. したがって, $j(x) \neq x$ であることと合わせると $z \in j(x) \setminus x$ がとれる. もし, $\text{rank}(j(x)) = \text{rank}(x)$ なら $j(z) = z \in j(x)$ となるので, 初等性より $z \in x$ を得て, 矛盾. よって $\text{rank}(j(x)) > \text{rank}(x)$ である. 一方でランクの定義可能性と初等性と絶対性より $\text{rank}(j(x)) = j(\text{rank}(x))$ を得るので, $j(\text{rank}(x)) > \text{rank}(x)$. したがって $\{\alpha \in \text{On} : \alpha < j(\alpha)\}$ が空でないことが証明された.

(2) の証明. $\alpha < \kappa$ として $j(\alpha) = \alpha$ を示す. α に関する超限帰納法で示すことにすれば, 任意の $\beta < \alpha$ で $j(\beta) = \beta$ であることを仮定して良い. $[f] \in j(\alpha)$ を取る. すると U の意味でほとんどすべての $x \in S$ で $f(x) < \alpha$. ここで U の κ 完備性より, ある $\beta < \alpha$ が存在して, ほとんどすべての $x \in S$ で $f(x) = \beta$. よって $[f] \in j(\beta)$ である. 帰納法の仮定より $[f] \in j(\beta) = \beta$ なので, これで $j(\alpha) = \alpha$ が示された.

次に $j(\kappa) > \kappa$ を示す. 対角関数 $d(\alpha) = \alpha$ を考える. $\{\alpha : d(\alpha) < \kappa\} = S \in U$ なので, $[d] < j(\kappa)$ である. 次に $\kappa \leq [d]$ を示す. $\beta < \kappa$ を任意にとる. すると $\{\alpha : \beta < d(\alpha)\} = [\beta + 1, \kappa] \in U$ なので, $j(\beta) < [d]$. $j(\beta) = \beta$ は証明済みなので $\beta < [d]$ を得る. これで $\kappa \leq [d]$ が示された. 以上より, $\kappa \leq [d] < j(\kappa)$ である. \square

内部モデルへの初等埋め込み $j: V \rightarrow M$ は $j \neq \text{id}$ なら全射ではない. なぜなら, $\text{crit}(j)$ が j の像ではないからである.



定理 3.4 (Scott). 可測基数が存在することと $V = L$ は両立しない.

証明. 可測基数が存在し, かつ $V = L$ だと仮定する. 最小の可測基数を κ とし, κ 上の非単項 κ 完備超フィルターを U とする. $j: V \rightarrow M$ を U から生じる初等埋め込みとする. 今, $V = L$ を仮定しているので, L の内部モデルとしての最小性により $M = V = L$ である.

$V \models \kappa$ は最小の可測基数

と j の初等性により

$$V \models j(\kappa) \text{ は最小の可測基数}$$

である。よって、 $j(\kappa) = \kappa$ とならないといけないが、これは $j(\kappa) > \kappa$ であったことに矛盾。 \square

定理 3.5. $j: V \rightarrow M$ を非自明な初等埋め込みとする。このとき、 $\text{crit}(j)$ は可測基数である。特に非自明な初等埋め込みが存在するとき可測基数が存在する。

証明. $\kappa = \text{crit}(j)$ とおく。

$$D = \{X \subseteq \kappa : \kappa \in j(X)\}$$

とおく。 D が非単項 κ 完備超フィルタであることを示す。

主張: $\kappa \in D$.

証明: $\kappa < j(\kappa)$ なのでよい。 //

主張: $\emptyset \notin D$.

証明: 初等性より $j(\emptyset) = \emptyset$ なのでよい。 //

主張: D は共通部分で閉じている。

証明: $X, Y \in D$ とすると $\kappa \in j(X), j(Y)$. ところが初等性により $j(X \cap Y) = j(X) \cap j(Y)$ なので $\kappa \in j(X \cap Y)$. よって $X \cap Y \in D$. //

主張: D は上に閉じている。

証明: $X \in D$ かつ $X \subseteq Y$ とする。すると初等性より $j(X) \subseteq j(Y)$ である。したがって、 $\kappa \in j(X) \subseteq j(Y)$ を得るのでよい。 //

主張: D は超フィルタである。

証明: $X \notin D$ とすると $\kappa \notin j(X)$. 初等性より $j(\kappa \setminus X) = j(\kappa) \setminus j(X)$ となり、右辺に κ が属しているため、 $\kappa \in j(\kappa \setminus X)$. つまり、 $\kappa \setminus X \in D$ である。 //

主張: D は非単項。

証明: $\alpha \in \kappa$ について $j(\{\alpha\}) = \{j(\alpha)\} = \{\alpha\}$ である。第一の等式は初等性、第二の等式は臨界点 κ の最小性による。この集合に κ は属さない。 //

主張: D は κ 完備。

証明: $\bar{X} = \langle X_i : i < \gamma \rangle$ を D の元からなる列とする。ただし、 $\gamma < \kappa$. 今、初等性により $j(\bar{X}) = \langle j(X_i) : i < j(\gamma) \rangle = \langle j(X_i) : i < \gamma \rangle$ である。したがって、再び初等性により $\bigcap_{i < \gamma} j(X_i) = j(\bigcap_{i < \gamma} X_i)$ となる。しかし、仮定より左辺に κ が属しているため、右辺にも属する。よって、 $\bigcap_{i < \gamma} X_i \in D$. //

以上で D が非単項 κ 完備超フィルタなことが示された。 \square

定理 3.5 で作った超フィルタは正規である。実際、初等埋め込み j により $D = \{X \subseteq \kappa : \kappa \in j(X)\}$ と定義された超フィルタ D が正規なことを示そう。 f を $X \in D$ 上の押し下げ関数とすると D の定義より、 $\kappa \in j(\{\alpha : f(\alpha) < \alpha\})$ なので、 $j(f)(\kappa) < \kappa$ である。そこで $\gamma = j(f)(\kappa)$ とおく。このとき $\kappa \in j(\{\alpha : f(\alpha) = \gamma\})$ だから、再び D の定義より、 $\{\alpha : f(\alpha) = \gamma\} \in D$ となる。よって、 D は正規である。

正規性は次のように超冪の言葉で特徴づけられる。

補題 3.6. D を κ 上の非単項 κ 完備超フィルタとする。このとき次は同値。

- (1) D は正規。
- (2) $\text{Ult}_D(V)$ において $\kappa = [d]$. ここに d は対角関数。
- (3) $D = \{X \subseteq \kappa : \kappa \in j_D(X)\}$.

証明. (1) ならば (2) の証明. $\kappa \leq [d]$ は明らかなので, $[d] \leq \kappa$ を示す. $f \in^* d$ とすると f は押し下げ関数である. よって, 仮定 (1) よりある $\gamma < \kappa$ があって, $[f] = \gamma$.

(2) ならば (3) の証明. $X \subseteq \kappa$ とする.

$$\begin{aligned} X \in D &\iff \{\alpha < \kappa : \alpha \in X\} \in D \\ &\iff \{\alpha < \kappa : d(\alpha) \in X\} \in D \\ &\iff [d] \in j_D(X) \text{ (Łoś の定理より)} \\ &\iff \kappa \in j_D(X) \text{ (仮定より)} \end{aligned}$$

より良い.

(3) ならば (1) の証明はこの補題の上の注意より従う. □

次に, V から V への初等埋め込みは存在しないという Kunen の定理を証明する. そのために補題を用意する.

補題 3.7. λ を無限基数で $2^\lambda = \lambda^{\aleph_0}$ なるものとする. このとき関数 $F: \lambda^\omega \rightarrow \lambda$ が存在して, 任意の $A \in [\lambda]^\lambda$ と $\gamma < \lambda$ について, ある $s \in A^\omega$ があって, $F(s) = \gamma$ である.

証明. $\langle (A_\alpha, \gamma_\alpha) : \alpha < 2^\lambda \rangle$ を $[\lambda]^\lambda \times \lambda$ の枚举とする. α に関する帰納法で, λ^ω の元の列 $\langle s_\alpha : \alpha < 2^\lambda \rangle$ を次のように定める: α ステージにおいて, $s_\alpha \in [A_\alpha]^\lambda$ かつすべての $\beta < \alpha$ について $s_\alpha \neq s_\beta$ である. これは $|A_\alpha^\omega| = \lambda^\omega = 2^\lambda > |\beta|$ より取ることができる. 各 $\alpha < 2^\lambda$ について $F(s_\alpha) = \gamma_\alpha$ と定める. 列 $\langle s_\alpha : \alpha < 2^\lambda \rangle$ の中に現れない s については $F(s)$ は何でもよい.

この F が条件を満たす. 実際, $A \in [\lambda]^\lambda$ と $\gamma < \lambda$ をとると, ある $\alpha < 2^\lambda$ があって, $(A, \gamma) = (A_\alpha, \gamma_\alpha)$ であり, $F(s_\alpha) = \gamma_\alpha$ となる. □

定理 3.8 (Kunen). $j: V \rightarrow M$ が非自明 (すなわち $j \neq id$) な初等埋め込みとしたとき, $M \neq V$ である.

証明. $j: V \rightarrow V$ を非自明な初等埋め込みだとして矛盾を導く. $\kappa = \text{crit}(j)$ とおくと κ は可測基数. $\kappa_0 = \kappa, \kappa_{n+1} = j(\kappa_n)$ (for $n \in \omega$) とおくと, どの κ_n も可測基数である. $\lambda = \sup_{n \in \omega} \kappa_n$ とおく.

$j(\langle \kappa_n : n \in \omega \rangle) = \langle j(\kappa_n) : n \in \omega \rangle = \langle \kappa_{n+1} : n \in \omega \rangle$ だから $j(\lambda) = \lambda$ を得る. $G = \{j(\alpha) : \alpha < \lambda\}$ とおく.

λ は可測基数の極限だから強極限である. さらに $\text{cf}(\lambda) = \omega$ なので

$$\begin{aligned} 2^\lambda &= (2^{<\lambda})^{\text{cf}(\lambda)} \text{ (これは一般的に成り立つ等式)} \\ &= \lambda^{\text{cf}(\lambda)} \text{ (強極限性)} \\ &= \lambda^\omega \end{aligned}$$

を得る. 補題 3.7 により, $F: \lambda^\omega \rightarrow \lambda$ がとれて, すべての $A \in [\lambda]^\lambda$ について $F^A A^\omega = \lambda$ である. j の初等性と $j(\omega) = \omega$ と $j(\lambda) = \lambda$ により, $j(F)$ も同じ性質を持つ. よって, 上の G をここでの A に代入すると, ある $s \in G^\omega$ があって, $(jF)(s) = \kappa$ である.

G の定義より, s はある $t: \omega \rightarrow \lambda$ を使って, $s(n) = j(t(n))$ (for $n \in \omega$) と表わせる. よって $s = j(t)$ である. したがって, $\kappa = (jF)(s) = (jF)(j(t)) = j(F(t))$ である. κ は j の像ではないので, これは矛盾. □

補題 3.9. U を κ 上の非単項 κ 完備超フィルターとし, $M = \text{Ult}_U(V)$ とし, $j: V \rightarrow M$ を誘導される初等埋め込みとする. このとき次が成り立つ.

- (1) $M^\kappa \subseteq M$. すなわち M は κ 列を取る操作で閉じている.
- (2) $U \notin M$.
- (3) $2^\kappa \leq (2^\kappa)^M < j(\kappa) < (2^\kappa)^+$.
- (4) λ が極限順序数のとき, $\text{cf}(\lambda) = \kappa$ ならば $j(\lambda) > \sup_{\alpha < \lambda} j(\alpha)$; $\text{cf}(\lambda) \neq \kappa$ ならば $j(\lambda) = \sup_{\alpha < \lambda} j(\alpha)$.
- (5) $\lambda > \kappa$ が強極限基数かつ $\text{cf}(\lambda) \neq \kappa$ ならば $j(\lambda) = \lambda$.

証明. (1) の証明. $\langle a_\xi : \xi < \kappa \rangle$ を M の元からなる κ 列とする. 各 $\xi < \kappa$ について g_ξ を元 a_ξ を表現する関数とする. h を元 κ を表現する関数とする.

関数 F で $[F] = \langle a_\xi : \xi < \kappa \rangle$ となるものを構成する. 各 $\alpha < \kappa$ について

$$F(\alpha) = \langle g_\xi(\alpha) : \xi < h(\alpha) \rangle$$

とおく. 各 α について, $F(\alpha)$ は $h(\alpha)$ 列なので $[F]$ は κ 列である. $\xi < \kappa$ とする. $[F]$ の ξ 番目の項が a_ξ であることを示したい. $[h] > \xi$ なので, U の意味でほとんどすべての α で $\xi < h(\alpha)$ である. そのような α について, $F(\alpha)$ の ξ 番目の項は $g_\xi(\alpha)$ である. よって Loś の定理により, $[F]$ の ξ 番目が $[g_\xi]$ であることを得る ($[c_\xi] = \xi$ に注意).

(2) の証明. $U \in M$ と仮定する. 写像 $e: \kappa^\kappa \rightarrow j(\kappa)$ を $e(f) = [f]$ で定める. (1) より $\kappa^\kappa = \kappa^\kappa \cap M = (\kappa^\kappa)^M \in M$ に注意. また仮定 $U \in M$ があるので, $e \in M$ である. e は全射なので, $M \models |j(\kappa)| \leq 2^\kappa$ である. これは $j(\kappa)$ が M で到達不能基数なことに矛盾する.

(3) の証明. (1) より $\mathcal{P}(\kappa)^M = \mathcal{P}(\kappa)$ に注意する. よって $M \subseteq V$ より

$$\begin{aligned} 2^\kappa &= \min\{\alpha : (\exists f)(f: \mathcal{P}(\kappa) \rightarrow \alpha \text{ 全射})\} \\ &\leq \min\{\alpha : (\exists f \in M)(f: \mathcal{P}^M(\kappa) \rightarrow \alpha \text{ 全射})\} \\ &= (2^\kappa)^M. \end{aligned}$$

$\kappa < j(\kappa)$ であることと $j(\kappa)$ が M で到達不能基数なことから $(2^\kappa)^M < j(\kappa)$ を得る. 最後に, $j(\kappa)$ の元は κ から κ への関数で表現されることから $|j(\kappa)| \leq \kappa^\kappa = 2^\kappa$. よって $j(\kappa) < 2^\kappa$.

なお, (3) の主張は $j(\kappa)$ が V では基数でないことを含意している.

(4) の証明. $\text{cf}(\lambda) = \kappa$ として, $\lambda = \sup_{\alpha < \kappa} \lambda_\alpha$ と書く. 関数 f を $f(\alpha) = \lambda_\alpha$ とおく. すると Loś の定理より, 任意の α について $j(\lambda_\alpha) < [f]$ であることと $[f] < j(\lambda)$ が分かる. したがって, $\sup_{\alpha < \lambda} j(\alpha) \leq [f] < j(\lambda)$.

次に $\text{cf}(\lambda) > \kappa$ として f を任意の κ から λ への関数とする. この f は共終でないので, ある $\alpha < \lambda$ があって $[f] < j(\alpha)$. $f: \kappa \rightarrow \lambda$ について $[f]$ は $j(\lambda)$ の元すべてを動くのでこれで $j(\lambda) \leq \sup_{\alpha < \lambda} j(\alpha)$ が示された. 逆向きの不等号は当たり前.

最後に $\text{cf}(\lambda) < \kappa$ として, $\lambda = \sup_{\nu < \gamma} \lambda_\nu$ ($\gamma = \text{cf}(\lambda)$) と書く. すると任意の関数 $f: \kappa \rightarrow \lambda$ について $g: \kappa \rightarrow \gamma$ があって, $f(\alpha) \leq \lambda_{g(\alpha)}$ (for $\alpha < \kappa$) となる. よって, U の κ 完備性よりある $\nu < \gamma$ について $[f] < j(\lambda_\nu)$ となる.

(5) の証明. 各 $\alpha < \lambda$ について α 未満の順序数は関数 $f: \kappa \rightarrow \alpha$ によって表現されるので, $|j(\alpha)| \leq |\alpha|^\kappa \leq 2^{|\alpha|^\kappa} < \lambda$ を得る. よって (4) より $j(\lambda) = \sup_{\alpha < \lambda} j(\alpha) = \lambda$. \square

補題 3.10. κ を可測基数とする. もし $2^\kappa > \kappa^+$ ならば, どんな κ 上の正規 κ 完備非単項超フィルター D についても集合 $\{\alpha < \kappa : 2^\alpha > \alpha^+\}$ は D に属する. したがって, すべての基数 $\alpha < \kappa$ について $2^\alpha = \alpha^+$ ならば, $2^\kappa = \kappa^+$ である.

証明. D を κ 上の正規 κ 完備非単項超フィルターとし, $M = \text{Ult}_D(V)$ とおく. もし, $\{\alpha < \kappa : 2^\alpha =$

$\alpha^+ \in D$ なら $[d] = \kappa$ と Loś の定理より $2^\kappa = \kappa^+$ in M を得る．ところが, 補題 3.9 より $2^\kappa = (2^\kappa)^M$ かつ $\kappa^+ = (\kappa^+)^M$ である．ここに κ^+ は集合 κ に入る整列順序の上限として書けることを使って, $2^\kappa = (2^\kappa)^M$ により $\kappa^+ = (\kappa^+)^M$ を得る．よって, V で $2^\kappa = \kappa^+$ である． \square

補題 3.11. κ を可測基数とする． D を κ 上の正規 κ 完備非単項超フィルターとする． $j: V \rightarrow M$ を誘導される初等埋め込みとする． $\lambda > \kappa$ を強極限かつ共終数 κ を持つとする．このとき $2^\lambda < j(\lambda)$ ．

証明. $\text{cf}(\lambda) = \kappa$ より $j(\lambda) > \lambda$ を得る．

実際, $\text{cf}(\lambda) = \kappa$ より $V \models (\exists f)(f: \kappa \rightarrow \lambda \text{ 共終})$ である．初等性より, $M \models (\exists f)(f: j(\kappa) \rightarrow j(\lambda) \text{ 共終})$ であり, 絶対性より $V \models (\exists f)(f: j(\kappa) \rightarrow j(\lambda) \text{ 共終})$ である．よって, $\text{cf}(j(\lambda)) = \text{cf}(j(\kappa)) = j(\kappa) > \kappa$ となる．したがって, $j(\lambda) = \lambda$ となることはありえない．

今, 次の不等式を得る．

$$2^\lambda = \lambda^\kappa \leq (\lambda^\kappa)^M \leq (\lambda^{j(\kappa)})^M < j(\lambda).$$

一つ目の不等式は強極限かつ $\text{cf}(\lambda) = \kappa$ により $2^\lambda = 2^{<\lambda} \text{cf}(\lambda) = \lambda^{\text{cf}(\lambda)} = \lambda^\kappa$ となるから．二つ目の不等式は補題 3.9 より κ から λ への関数はすべて M に属するからである．最後の不等式は,

$$M \models j(\lambda) \text{ は強極限}$$

なことから, $\lambda, j(\kappa) < j(\lambda)$ なことより従う． \square

4 ジェネリック超冪

本節以降では強制法の知識を仮定する．

本節では可測基数を使わず, 強制法によるジェネリックフィルターを使った超冪を考える．その応用として, Silver の定理を証明する．

κ を非可算正則基数とし I を κ 上のイデアルとする． I 正值集合のなす半順序集合 (I^+, \subseteq) を考える：

$$I^+ = \{X \subseteq \kappa : X \notin I\}.$$

G を (V, P) ジェネリックフィルターとする．

以下の補題で M **超フィルター** というのは次を満たす $D \subseteq \mathcal{P}^M(\kappa)$ である：

- (1) $\emptyset \notin D, \kappa \in D$.
- (2) $X, Y \in D$ なら $X \cap Y \in D$.
- (3) $X \in D$ かつ $Y \in M$ で $X \subseteq Y$ ならば, $Y \in D$.
- (4) $X \in M$ が $X \subseteq \kappa$ であるとき, $X \in D$ または $\kappa \setminus X \in D$.

補題 4.1. (1) G は κ 上の V 超フィルターで I の双対フィルターを拡大するものである．

(2) V で I が κ 完備なら, G は κ 完備 V 超フィルターである．

(3) I が正規ならば, G も正規である．

証明. (1) の証明. X が I の双対フィルターの元ならば, $\{Y \in I^+ : Y \subseteq X\}$ は I^+ の稠密部分集合なので, $X \in G$ を得る． V 超フィルターなことの証明はやさしい．

(2) の証明. $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}, \gamma < \kappa$ を V に属する κ の分割とする．すると $\{Y \in I^+ : Y \subseteq X_\alpha \text{ (for some } \alpha < \gamma)\}$ は I^+ の稠密部分集合である (by I の κ 完備性)．したがって, ある X_α が G に属する．

(3) の証明. $X \in G$ とし $f \in V$ を X 上の押し下げ関数とする. すると $\{Y \in I^+ : f \text{ is constant on } Y\}$ は X の下で稠密である. よって f はある $Y \in G$ の上で定数である. \square

これから I は κ 上の κ 完備イデアルとし, 全ての一点集合を含むものとする. すると G は κ 上の非単項 κ 完備 M 超フィルターである. $V[G]$ で超冪 $\text{Ult}_G(V)$ を考える. これをジェネリック超冪という. これは ZFC のモデルだが, 必ずしも well-founded ではない.

Łoś の定理はジェネリック超冪でも成立する:

$$\text{Ult}_G(V) \models \varphi([f_1], \dots, [f_n]) \iff \{\alpha \in \kappa : \varphi(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha))\} \in G.$$

ここに φ は集合論の論理式で, $f_1, \dots, f_n \in V$. 特に初等埋め込み $j_G: V \rightarrow \text{Ult}_G(V); j_G(x) = [c_x]$ を得る.

$N = \text{Ult}_G(V)$ とする. N 中の順序数全体 On^N は線形順序付けられたクラスだが, 必ずしも整列しているとは言えない. しかし, 次の補題は成り立つ. ここで, $x \in \text{On}^N$ について $\{y \in \text{On}^N : y <^N x\}$ が順序型 α を持つとき, 記号の乱用で $x = \alpha$ と書く.

補題 4.2. (1) 各 $\gamma < \kappa$ について, $j(\gamma) = \gamma$. よって On^N は順序型 κ の始切片を持つ.

(2) I が正規ならば, $x \in \text{On}^N$ があって, $x = \kappa$ である. 実際, $[d] = \kappa$ である. ただし d は対角関数.

(3) $j(\kappa) \neq \kappa$.

証明. (1) の証明. $j \upharpoonright \gamma$ が (γ, \in) と $\{y \in \text{On}^N : y <^N j(\gamma)\}, <^N\}$ の間の同型写像であることを示せばよい. $j \upharpoonright \gamma$ の値域が $\{y \in \text{On}^N : y <^N j(\gamma)\}$ に含まれることは明らか. 順序保存性, 単射性は j の初等性より明らか.

全射性を示す. $y \in \text{On}^N$ で $y <^N j(\gamma)$ とする. $y = [f], f \in M, \text{dom}(f) = \kappa$ なる f を取る. すると $[f] <^N j(\gamma)$ より

$$\{\alpha : f(\alpha) < \gamma\} \in G$$

だが, 左辺は $\bigcup_{\beta < \gamma} \{\alpha : f(\alpha) = \beta\}$ と書けるため, G の κ 完備性により, ある $\beta < \kappa$ について $\{\alpha : f(\alpha) = \beta\} \in G$ である. よって, $y = [f] = j(\beta)$.

(2) の証明. $j \upharpoonright \kappa$ が κ と $\{y \in \text{On}^N : y <^N [d]\}$ の間の同型となることを示す. $j \upharpoonright \kappa$ の値域が $\{y \in \text{On}^N : y <^N [d]\}$ に収まることは, 各 $\alpha \in \kappa$ について $\langle \alpha, \alpha, \alpha, \dots \rangle \in^* \langle 0, 1, 2, \dots \rangle$ よりよい. 順序保存性, 単射性は再び明らかである.

全射性を示す. $[f] \in \text{On}^N$ で $[f] <^N [d]$ なるものをとる. すると f はある G のメンバーの上で押し下げ関数である. G が正規なので, ある集合 $X \in G$ 上で f は定数関数である. その定数 $\alpha < \kappa$ について $j(\alpha) = [f]$ を得る.

(3) の証明. (2) の証明は全射性以外, 正規性を使っていない. そこで $\text{ran}(j \upharpoonright \kappa) \subseteq \{y \in \text{On}^N : y <^N [d]\}$ は順序型 κ を持つ. よって, $\{y \in \text{On}^N : y \leq^N [d]\}$ は順序型 $\kappa + 1$ の部分集合を持つ. $[d] < j(\kappa)$ であるため, $\{y \in \text{On}^N : y <^N j(\kappa)\}$ も順序型 $\kappa + 1$ の部分集合を持つ. よって, この集合は順序型 κ を持つことはない. \square

定理 4.3 (Silver). κ を特異基数で $\text{cf}(\kappa) = \omega_1$ とする. また, すべての $\lambda < \kappa$ で $2^\lambda = \lambda^+$ と仮定する. このとき $2^\kappa = \kappa^+$.

証明. $(\text{stat}_{\omega_1}, \subseteq)$ を ω_1 の定常集合全体が包含関係で作る半順序集合とする. G を $(V, \text{stat}_{\omega_1})$ ジェネリックフィルターとする. $V[G]$ で議論する. G は ω_1^M 上の正規 σ 完備 M 超フィルターである. $(N, \varepsilon^N) = \text{Ult}_G(V)$ をジェネリック超冪とし, $j: V \rightarrow N$ を誘導される初等埋め込みとする.

$\langle \kappa_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ を V の中で単調増加連続な基数の列で κ に収束するものとする． e を N の中の基数とし， $e(\alpha) = \kappa_\alpha$ で定められる関数によって表現されるものとする． e^+ を N の中で e の後続基数とする．

$x \in N$ に対して $\text{ext}(x) = \{y \in N : y \varepsilon^N x\}$ とおく．これは $V[G]$ の集合である．この定義より特に

$$\text{ext}(\mathcal{P}^N(e)) = \{x \in N : N \models "x \subseteq e"\}$$

である．

主張 A: $|\mathcal{P}^V(\kappa)| \leq |\text{ext}(\mathcal{P}^N(e))|$ ．

証明: V の中の $X \subseteq \kappa$ について関数 f_X を $f_X(\alpha) = X \cap \kappa_\alpha$ ($\alpha \in \omega_1$) と定める． f_X が表現する N の元は， N の中で e の部分集合である．また， $X \neq Y$ なら，関数 f_X と f_Y はゆくゆく異なるので，異なる N の元を表現する． //

主張 B: $|\text{ext}(\mathcal{P}^N(e))| = |\text{ext}(e^+)|$ ．

証明: V で任意の α について $2^{\kappa_\alpha} = \kappa_\alpha^+$ であることから，Łoś の定理より， N で $2^e = e^+$ が成り立つ．つまり $F \in N$ がとれて， $N \models F: 2^e \rightarrow e^+$ 全単射となる．各 $x \in \text{ext}(\mathcal{P}^N(e))$ について $y \in N$ で $N \models y = F(x)$ となる元を割り当てる関数を $\tilde{F}: \text{ext}(\mathcal{P}^N(e)) \rightarrow \text{ext}(e^+)$ とする．これは全単射であることが確認できるので，主張が示された． //

主張 C: 任意の $a \varepsilon^N e$ について， $\gamma < \omega_1^V$ が存在して， $a \varepsilon^N j(\kappa_\gamma)$ である．

証明: $a \varepsilon^N e$ を任意にとり，関数 f が a を表現するとする．このときある $X \in G$ があって，全ての $\alpha \in X$ で $f(\alpha) < \kappa_\alpha$ である．ここで極限順序数全体の集合は club なので G に属する．よって，上で取った X は全ての元が極限順序数だと仮定して良い．したがって，列 $\langle \kappa_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ を連続で取っていたことから， $f(\alpha) < \kappa_{\gamma(\alpha)}$ が，ある $\gamma(\alpha) < \alpha$ について成り立つ． γ は押し下げ関数だから，ある $\gamma < \omega_1^V$ が存在して，ある $Y \in G$ について，任意の $\alpha \in Y$ で $f(\alpha) < \kappa_\gamma$ となる．つまり $a \varepsilon^N j(\kappa_\gamma)$ を得る． //

主張 D: $|\text{ext}(e)| \leq \kappa$ ．

証明: 各 $\gamma < \omega_1^V$ について， $|j(\kappa_\gamma)| \leq |(\kappa_\gamma^N)^V| < \kappa$ である．第一の不等号は $j(\kappa_\gamma)$ の元というのはつねに κ_γ の元を値に取る ω_1 列で表現されるからである．よって，主張 C と合わせて， $|\text{ext}(e)| \leq \kappa$ を得る． //

主張 E: $|\text{ext}(e^+)| \leq \kappa^+$ ．

証明: もし， $x \varepsilon^N e^+$ なら， N の中に x から e への単射があるから，主張 B と同じ方法によって， $\text{ext}(x)$ から $\text{ext}(e)$ への単射を得る．したがって， $\text{ext}(e^+)$ は全順序集合で，どの始切片もサイズたかだか κ を持つので， $\text{ext}(e^+) \leq \kappa^+$ を得る ([Jec06] の Exercise 5.3 を参照)． //

主張 A, B, E を組み合わせると

$$|\mathcal{P}^V(\kappa)| \leq |\text{ext}(\mathcal{P}^N(e))| \leq |\text{ext}(e^+)| \leq \kappa^+$$

を得る．これは $V[G]$ での不等式である．ところが， $|P| = 2^{\aleph_1} < \kappa$ であるため，chain condition により， V の全ての κ 以上の基数は $V[G]$ でも基数である．よって

$$|\mathcal{P}^V(\kappa)|^V \leq (\kappa^+)^V$$

を得る．これが欲しかった結論である． □

5 峻厳イデアル

κ 完備イデアル I が峻厳であるとは、そのジェネリック超冪 $\text{Ult}_G(V)$ が常に well-founded となることを意味する。

峻厳イデアルの存在と可測基数の存在は無矛盾等価である。本節では、その片側、可測基数の存在から峻厳イデアルの存在の無矛盾性を導く方を示す。もう一方の方向は本稿では示さない。

定理 5.1. 可測基数 κ が存在するとき、ジェネリック拡大が存在し、その中で、 $\kappa = \aleph_1$ であり、かつ κ 上の峻厳イデアルが存在する。

証明. κ を可測基数、 D を κ 上の正規超フィルター、 $j: V \rightarrow M$ を誘導される初等埋め込みとする。

V の中で、 $P = \text{Coll}(\omega, <\kappa)$ を Levy 崩壊とする。すなわち

$$P = \{p : p \text{ は有限関数で } \text{dom}(p) \subseteq \kappa \times \omega \text{ かつ任意の } (\alpha, n) \in \text{dom}(p) \text{ で } p(\alpha, n) < \alpha\}$$

とおく。順序は逆包含である。 G を (V, P) ジェネリックフィルターとする。 $V[G]$ で $\kappa = \aleph_1$ なことに注意する。

$V[G]$ の中で I を D の双対が生成するイデアルとする：

$$I = \{X \subseteq \kappa : (\exists Y \in D)(X \cap Y = \emptyset)\}.$$

P の κ -chain condition を使って、 I が κ 完備イデアルであることを示せる (ジェネリック拡大の関数 $f: \lambda \rightarrow D$ ($\lambda < \kappa$) はグラウンドモデルの関数 $F: \lambda \rightarrow [D]^{<\kappa}$ で近似できることを使う)。

I が峻厳であることを示す。

そのために $S \in I^+$ を任意に取る。示すべきは $S' \in I^+$ 、 $S' \subseteq S$ があって、 S' が「ジェネリック超冪が well-founded であること」を強制することである。そのためには、 $V[G]$ のあるジェネリック拡大の中に $(V[G], I^+)$ ジェネリックフィルター W が存在し、 $S \in W$ であり、 $\text{Ult}_W(V[G])$ が well-founded であることを示せば十分である。

各 μ について

$$\begin{aligned} P_\mu &= \{p \in P : (\forall (\alpha, n) \in \text{dom}(p))(\alpha < \mu)\} \\ P^\mu &= \{p \in P : (\forall (\alpha, n) \in \text{dom}(p))(\alpha \geq \mu)\} \end{aligned}$$

とおく。

強制概念 $j(P)$ を考える。明らかに $(j(P))_\kappa = P$ 。したがって、 $j(P)$ は $P \times Q$ と同型である。ここに $Q = (j(P))^\kappa$ である。

S の名前 $\dot{S} \in V^P$ をとる。すると $V[G]$ の中で $S \in I^+$ なことより V で

$$\{\alpha < \kappa : (\exists r' \in P)(r' \Vdash_P \alpha \in \dot{S})\} \in D$$

が分かる。したがって、Łoś の定理よりある $r \in j(P)$ があって、

$$r \Vdash_{j(P)} \kappa \in j(\dot{S}).$$

かつ $r \restriction (\omega \times \kappa) \in G$ である。 H を $(V[G], Q)$ ジェネリックフィルターで、 $r \in G \times H$ となるように取る。強制法の product lemma より、 $G \times H$ は $(V, P \times Q)$ ジェネリックフィルターである。

$V[G \times H]$ の中で、 κ 上の $V[G]$ 超フィルター W を次のように定める：

$$X \in W \iff \kappa \in j(\dot{X})^{G \times H}.$$

ここに $\dot{X} \in V^P$ は X の名前である．名前のとり方によらないことを示そう．

$$X = \dot{X}^G = \dot{Y}^G$$

のとき, ある $p \in G$ について, $p \Vdash \dot{X} = \dot{Y}$ である．これを初等埋め込み j で移すと, $j(p) \Vdash j(\dot{X}) = j(\dot{Y})$ を得る．ところが $j(p) = p$ である．なぜなら, $p \in V_\kappa$ だから．よって, $p \Vdash j(\dot{X}) = j(\dot{Y})$ を得て, $p \in G \times H$ だから $V[G] \models j(\dot{X})^{G \times H} = j(\dot{Y})^{G \times H}$ を得る．これで名前のとり方のよらないことが言えた． W が $V[G]$ 超フィルターなことはかんたんな議論で示せる．

さて, $\text{Ult}_W(V[G])$ が well-founded なことを示そう．これは次の可換図式から分かる：

$$\begin{array}{ccc} V[G] & \xrightarrow{\tilde{j}} & M[G \times H] \\ \downarrow j_W & \nearrow k & \\ \text{Ult}_W(V[G]) & & \end{array} .$$

ここで \tilde{j} は $j: V \rightarrow M$ の延長で,

$$j(x) = j(\dot{x})^{G \times H}$$

で定義されるものである．これが名前のとり方によらないことは上と同様．初等性もかんたんに示せる．

そして, k は次で定義されるものである： $f \in V[G]$ が κ を定義域とする関数のときに

$$k([f]_W) = j(f)(\kappa).$$

この well-defined 性, 初等性も易しい．可換性もかんたんである．

あとは, この W が $(V[G], I^+)$ ジェネリックフィルターであることを確かめなければいけない．これは, $\mathcal{X} = \{X_i : i < \theta\}$ が $V[G]$ に属する κ の I 分割であるときに, ある i について, $X_i \in W$ であることを確かめれば十分である． $\dot{\mathcal{X}}$ を \mathcal{X} の名前, \dot{X}_i を X_i の名前とする． $p \in G$ と $q \in H$ があって

$$p \Vdash \dot{\mathcal{X}} \text{ が } I \text{ 分割}$$

かつ各 i について

$$(p, q) \Vdash \dot{X}_i \notin \dot{W} \quad (*)$$

であると仮定して, 矛盾を導く． q は M の中で列 $\langle q_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ によって表現されるとする．

(*) と Łoś の定理と W の定義より, 各 i について

$$A_i := \{\alpha : p \cup q_\alpha \Vdash \alpha \notin \dot{X}_i\} \in D \quad (**)$$

となる． $V[G]$ の中で, 集合 T を

$$T = \{\alpha < \kappa : q_\alpha \in G\}$$

で定める．この T が $T \in I^+$ かつ任意の i について $T \cap X_i \in I$ を満たすことを示そう．それを示せば, \mathcal{X} が I 分割であることに反して矛盾する．

各 i について, $\alpha \in T$ かつ $\alpha \in A_i$ なる α を考えると, $p \cup q_\alpha \in G$ となり, したがって, (**) より, $\alpha \notin X_i$ を得る．よって, $T \cap X_i \cap A_i = \emptyset$ なので, I の定義より $T \cap X_i \in I$ を得る．

最後に $T \in I^I$ を示そう． I の定義より, どんな $Z \in D$ についても, $T \cap Z \neq \emptyset$ であることを示せばよい．そこで $Z \in D$ とする．このときある $\alpha \in Z$ について, $q_\alpha \in G$ であることを示せばよい．

今, 集合 E を

$$E = \{r \in P : (\exists \alpha \in Z)(r \leq q_\alpha)\}$$

で定める．これは P の稠密部分集合である．実際, $r \in P$ とする．このとき, P の定義よりある β について $r \in P_\beta$ ．すると β より大きな $\alpha \in Z$ をとれば, $r \cup q_\alpha$ は r の拡大となる E の元である．

したがって, $E \cap G \neq \emptyset$ であるので $T \cap Z \neq \emptyset$ である． \square

参考文献

- [Jec+80] T. Jech et al. “Precipitous Ideals”. *The Journal of Symbolic Logic* 45.1 (1980), pp. 1–8.
- [Jec06] Thomas Jech. *Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded*. Springer Monographs in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [新井 21] 新井敏康. **数学基礎論**. 東京大学出版会, 2021.