可測基数ノート

でぃぐ

2023 年 2 月 4 日

概要

本稿は可測基数についてのノートである．

目次

1　可測基数の初歩および Ulam の定理の証明

定義 1.1. (1) 基数 κ が**可測基数**であるとは，κ 上の κ-完備な非単項超フィルターが存在することを言う．

(2) 基数 κ が**実数値可測基数**であるとは，κ 上の非自明な κ 完備測度が存在することを言う．

定義より、可測基数は実数値可測基数である。

補題 1.2. κ を次を満たす最小の基数とする：非単項 σ-完備な超フィルターが存在する．U をそのような超フィルターの一つとする．このとき，U は κ-完備である．

証明. U が κ-完備でないと仮定する．すると κ の分割 $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}$ があって，$\gamma < \kappa$ かつ各 X_α は U の意味で小さい．関数 $f \colon \kappa \to \gamma$ を次で定める：

$$f(x) = \alpha \iff x \in X_\alpha.$$

つまり，各入力 $x < \kappa$ について，x が何番目のピースに属しているかを返す関数である．γ 上の超フィルター D を

$$D = \{Z \subseteq \gamma : f^{-1}(Z) \in U\}$$

で定める．U が σ 完備なので，D も σ 完備である．D は非単項でもある：なぜなら，各 $\alpha < \gamma$ について $f^{-1}\{\alpha\} = X_\alpha \notin U$ より $\alpha \notin D$ だからである．したがって，D は γ 上の単項 σ-完備な超フィルターだが，$\gamma < \kappa$ より，これは κ の最小性に矛盾． □

補題 1.3. 可測基数は到達不能基数である．

証明. κ を可測基数とする．

κ の正則性を示す．κ 上の κ-完備な非単項超フィルター U を取る．κ が特異だとすると，κ の共終列 $\langle \lambda_i : i < \mathrm{cf}(\kappa) \rangle$ でおのおのの λ_i は κ 未満なものが取れる．今，$\kappa = \bigcup_{i<\mathrm{cf}(\kappa)} \lambda_i$ である．左辺 κ は U に属するが，右辺はおのおのの λ_i が U の意味で小さく，その $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$ 個の和集合だから U の意味で小さい．矛盾した．なお，ここで，おのおのの λ_i が小さいのは各 1 点集合が小さく，λ_i はその $\lambda_i < \kappa$ 個の和集合として書けるからである．

κ の強極限性を示す．背理法で，ある $\lambda < \kappa$ について，$2^\lambda \geq \kappa$ だと仮定する．集合 $S \subseteq \{0,1\}^\lambda$ で $|S| = \kappa$ となるものを取る．集合 S 上の κ-完備な非単項超フィルター U を取る．各 $\alpha \in \lambda$ について集合 $X_\alpha \subseteq S$ を

$$\{f \in S : f(\alpha) = 0\} \text{ もしくは } \{f \in S : f(\alpha) = 1\}$$

で U に属する方とする．集合 X を

$$X = \bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha$$

で定めると $X \in U$ であるが，明らかに X は 1 点集合である．これは U の非単項性に矛盾． □

補題 1.4. (1) κ を次を満たす最小の基数とする: κ 上の非自明かつ σ 加法的な測度が存在する．μ をそのような測度とする．このとき測度 0 集合のイデアル I_μ は κ 完備である．

(2) κ を次を満たす最小の基数とする: κ 上の σ 完備かつ σ 飽和的イデアルが存在する．I をそのようなイデアルとする．このとき I は κ 完備である．

証明. (1). I_μ が κ 完備ではないと仮定する．すると測度 0 集合の族 $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}$ で，$\gamma < \kappa$ かつ，それらの和集合 $X = \bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha$ は測度正なものがとれる．X_α たちは互いに素であると仮定しても良い．$f\colon X \to \gamma$ を

$$f(x) = \alpha \iff x \in X_\alpha$$

と定め，γ 上の測度 ν を

$$\nu(Z) = \frac{\mu(f^{-1}(Z))}{\mu(X)}$$

と定める．ν は σ 加法的である．また，ν は非自明である，なぜなら，各 $\alpha < \gamma$ について $\nu(\{\alpha\}) = \frac{\mu(X_\alpha)}{\mu(X)} = 0$ だからである．これは κ の最小性に反する．

(2) の証明は (1) と同様である． □

補題 1.5. μ を集合 S 上の測度とし，I_μ を測度 0 集合のイデアルとする．このとき，もし I_μ が κ 完備なら，μ は κ 完備である．

証明. $\gamma < \kappa$ とし，$\langle X_\alpha : \alpha < \gamma \rangle$ を互いに素な S の部分集合の族とする．X_α たちが互いに素なので，そのうちたかだか可算個が正の測度を持つ．よって，

$$\{X_\alpha : \alpha < \gamma\} = \{Y_n : n \in \omega\} \cup \{Z_\alpha : \alpha < \gamma\}$$

と書くことができる．ここに各 Z_α は測度 0 集合．よって，

$$\mu(\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha) = \mu(\bigcup_{n\in\omega} Y_n) + \mu(\bigcup_{\alpha<\gamma} Z_\alpha)$$

を得る．μ が σ 加法的なので，

$$\mu(\bigcup_{n\in\omega} Y_n) = \sum_{n\in\omega} \mu(Y_n)$$

である．また，I_μ が κ 完備なので，

$$\mu(\bigcup_{\alpha<\gamma} Z_\alpha) = 0$$

である．以上より，

$$\mu(\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha) = \sum_{\alpha<\gamma} \mu(X_\alpha)$$

を得る． □

補題 1.6. (1) ある集合上の原子なしで非自明な σ 加法的な測度が存在するとき，ある基数 $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ 上に非自明な σ 加法的な測度が存在する．

(2) I を集合 S 上の σ 完備 σ 飽和的イデアルとする．このとき，ある $Z \subseteq S$ に対して $I \restriction Z = \{X \subseteq Z : X \in I\}$ が極大イデアルであるか，または，σ 完備 σ 飽和的イデアルがある $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ 上に存在するかのどちらかが成り立つ．

証明. (1)．μ をそのような測度とする．S の測度正な部分集合からなり，逆向きの包含関係で順序付けられた木 T を構成する．T の根は S である．各 $X \in T$ について，X の測度正な集合への分割 $X = Y \cup Z, Y \cap Z = \varnothing$ を取り，この 2 つを X の直後の元とする．α が極限順序数のとき T の第 α レベルにはすべての共通部分 $X = \bigcap_{\xi<\alpha} X_\xi$ であって，$\langle X_\xi : \xi < \alpha \rangle$ は $T \restriction \alpha$ の増大鎖で X_ξ は第 ξ レベルの元，X は測度正なものたちを置く．

T のどの枝も可算である：なぜなら，$\langle X_\xi : \xi < \alpha \rangle$ が枝ならば，$\langle X_\xi \setminus X_{\xi+1} : \xi < \alpha \rangle$ は測度正な集合の互いに素な族となるからである．

同様に，T のどのレベルも可算であることも分かる．よって，T はたかだか $2^{\aleph_0}$ 個の極大枝を持つ (各 $\alpha < \omega_1$ について高さ α の極大枝の個数はたかだか $2^{\aleph_0}$．よってそれらの ω_1 個の和集合でたかだか $2^{\aleph_0}$ 個となる)．

$\{b_\alpha : \alpha < \kappa\}, \kappa \leq 2^{\aleph_0}$ をすべての極大枝 $b = \{X_\xi : \xi < \gamma\}$ であって，$\bigcap_{\xi<\gamma} X_\xi$ が非空なものの枚挙とする．各 $\alpha < \kappa$ について $Z_\alpha = \bigcap b_\alpha$ とおく．$\{Z_\alpha : \alpha < \kappa\}$ は S の測度 0 集合への分割となる (Z_α が測度 0 でないとすると，一個高さを上げることができ枝の極大性に反する; また，互いの異なる極大枝 b_α と b_β はどこかで枝分かれしているはずだから，後続ステップでの構成の仕方より，$X_\alpha \cap X_\beta = \varnothing$ を得る．; $s \in S$ を任意に取るとき，s が入っている集合を根から追跡することにより，ある X_α に s が入っていることがわかる)．あとは $f \colon S \to \kappa$ を $f(x) = \alpha \iff x \in Z_\alpha$ とおき，κ 上の測度 ν を $\nu(Z) = \mu(f^{-1}(Z))$ とおけば，ν は非自明な σ 加法的測度である．

(2)．(1) と同様である． □

系 1.7. κ が実数値可測基数ならば，κ は可測基数か，$\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ である．より一般に，κ が κ 完備 σ 飽和的イデアルを持つと，κ は可測基数であるか，$\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ である．

証明. 補題 1 の証明より，μ が S 上の原子なしの測度なら，S のたかだか $2^{\aleph_0}$ 個への測度 0 個の分割が存在することがわかる．つまり，μ は $(2^{\aleph_0})^+$ 加法的ではない．したがって，原子なしの κ 加法的測度を κ が持つとき，$\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ である (結論の否定を取ると，$\kappa \geq (2^{\aleph_0})^+$ だが，これと κ 加法性より $(2^{\aleph_0})^+$ 加法性が出るから)．後半の主張も同様． □

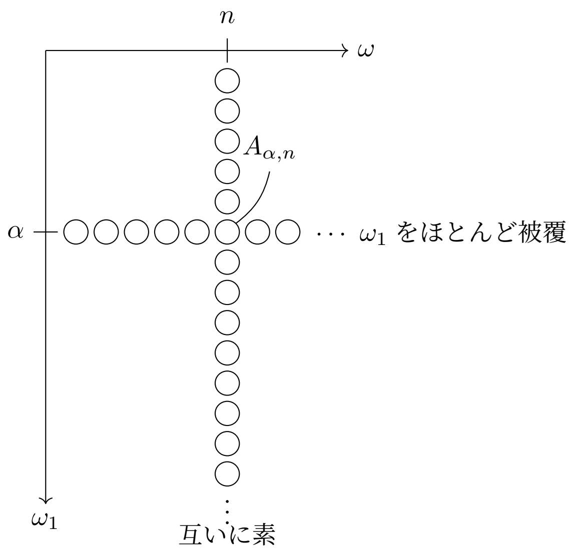
補題の (1) の主張の結論には「原子なし」が含まれていなかったが，これは実際には「原子なし」と

結論付けられる．なぜなら，原子があると κ は可測基数となるが，補題 1.3 より，それは $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ と相容れないからだ．

定義 1.8. $(\aleph_1, \aleph_0)$-Ulam 行列とは、ω_1 の部分集合の族 $\langle A_{\alpha,n} : \alpha \in \omega_1, n \in \omega \rangle$ であって、次次の 2 条件を満たすものである。

(1) 各 $n \in \omega$ と異なる $\alpha, \beta \in \omega_1$ について $A_{\alpha,n} \cap A_{\beta,n} = \varnothing$ である。

(2) 各 $\alpha \in \omega_1$ について、集合 $\omega_1 \setminus \bigcup_{n \in \omega} A_{\alpha,n}$ はたかだか可算集合である。



補題 1.9. $(\aleph_1, \aleph_0)$-Ulam 行列は存在する。

証明. 各 $\xi \in \omega_1$ に対して $f_\xi \colon \omega \to \omega_1$ を $\xi \subseteq \mathrm{ran}(f_\xi)$ なるものとする。集合 $A_{\alpha,n}$ を

$$\xi \in A_{\alpha,n} \iff f_\xi(n) = \alpha$$

と定める。

$\xi \in A_{\alpha,n} \cap A_{\beta,n}$ なら $\alpha = f_\xi(n) = \beta$ となるので、Ulam 行列の条件 (1) が成り立っていることがわかる。

$\alpha \in \omega_1$ とする。$\xi > \alpha$ に対して、f_ξ の取り方より、$f_\xi(n) = \alpha$ となる $n \in \omega$ が存在する。よって、

$$[\alpha + 1, \omega_1) \subseteq \bigcup_{n \in \omega} A_{\alpha,n}$$

なので条件 (2) も成り立っている。 □

演習問題 1.10. $(\aleph_1, \aleph_0)$-Ulam 行列の定義において、「各行は可算集合を除いてほとんど ω_1 を覆っている」という条件を「各行は ω_1 を (完全に) 覆っている」と変更したバージョンは存在しないことを示せ。

補題 1.11. ω_1 上の σ 完備 σ 飽和的イデアルは存在しない。特に ω_1 上の非自明 σ 加法的測度は存在しない。

証明. そのようなイデアル I が存在したと仮定する。また、$\langle A_{\alpha,n} : \alpha \in \omega_1, n \in \omega \rangle$ を $(\aleph_1, \aleph_0)$-Ulam 行列とする。I の σ 完備性と Ulam 行列の条件 (2) より、各 α について自然数 n_α があって、$A_{\alpha,n}$ は

I-正である。したがって、鳩の巣原理より、$W \subseteq \omega_1$, $|W| = \aleph_1$, $n \in \omega$ があって、すべての $\alpha \in W$ について $n_\alpha = n$ である。すると $\{A_{\alpha,n} : \alpha \in W\}$ は互いに素　(by Ulam 行列の条件 (1) な非可算な I-正集合の族となる。これは I の σ 飽和性に矛盾する。 $\square$

以上の ω_1 を一般の後続基数に一般化できる。証明は同様なので省略する。

定義と補題 1.12. λ を基数とする。

(1) (λ^+, λ)-Ulam 行列とは、λ^+ の部分集合の族 $\langle A_{\alpha,\eta} : \alpha \in \lambda^+, \eta \in \lambda \rangle$ であって、次次の 2 条件を満たすものである。
   (a) 各 $\eta \in \lambda$ と異なる $\alpha, \beta \in \lambda^+$ について $A_{\alpha,\eta} \cap A_{\beta,\eta} = \varnothing$ である。
   (b) 各 $\alpha \in \lambda^+$ について、集合 $\lambda^+ \setminus \bigcup_{\eta \in \lambda} A_{\alpha,\eta}$ は λ 以下の濃度を持つ。

(2) (λ^+, λ)-Ulam 行列は存在する。

(3) λ^+ 上の λ^+ 完備 σ 飽和的イデアルは存在しない。

系 1.13. 任意の実数値可測基数は、弱到達不能基数である。

証明. κ を実数値可測基数とする。正則なことは補題 1.3 と同様の証明でよい。後続基数なことは、定義と補題 1.12 から分かる。 $\square$

2　正規フィルター

3　可測基数の存在と実数値可測基数の存在の無矛盾等価性

4　ジェネリック超冪