

# 可測基数ノート

でいぐ  
2023 年 3 月 2 日

## 概要

本稿は可測基数についてのノートである。可測基数のかなり初歩的な話からはじめ、超冪と初等埋め込みという標準的な話題を扱い、最後に応用として峻厳イデアルの存在の無矛盾性証明を行う。

## 目次

1	可測基数の初歩	1
2	正規フィルター	6
3	宇宙 $V$ の超冪と初等埋め込み	7
4	ジェネリック超冪	13
5	峻厳イデアル	15

本稿の内容はほぼ Jech のテキスト [Jec06] を参考に行っている。

## 1 可測基数の初歩

可測基数の研究は、Lebesgue 測度を  $\mathbb{R}$  の冪集合全体に拡張できるかという問から出発している。本節では ZFC にその命題を付け加えた公理系の無矛盾性が ZFC の無矛盾性を超えることを示す。

**定義 1.1.**  $S$  を無限集合とする。  $S$  上の (一様かつ  $\sigma$  加法的な確率) 測度とは  $\mu: \mathcal{P}(S) \rightarrow [0, 1]$  であって、次を満たすものである：

- (1)  $\mu(\emptyset) = 0, \mu(S) = 1$ .
- (2)  $X \subseteq Y \subseteq S$  なら、 $\mu(X) \leq \mu(Y)$ .
- (3) (一様性) 任意の  $s \in S$  について  $\mu(\{s\}) = 0$ .
- (4) ( $\sigma$  加法性)  $X_n, n \in \omega$  が互いに素な  $S$  の部分集合たちであれば、

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \omega} X_n\right) = \sum_{n \in \omega} \mu(X_n).$$

測度論で扱う測度は  $S$  上のある  $\sigma$  加法族を定義域とするものであったが、ここで扱う測度は定義域が  $\mathcal{P}(S)$  なことに注意しよう。

**定義 1.2.**  $\mu$  を  $S$  上の測度とする。  $A \subseteq S$  が原子であるとは、 $\mu(A) > 0$  かつ任意の  $X \subseteq A$  に対して  $\mu(X) = 0$  または  $\mu(X) = \mu(A)$  となるものである。原子が存在しない測度を原子なしの測度という。

**定義 1.3.** (1) 基数  $\kappa$  が可測基数であるとは、 $\kappa$  上の  $\kappa$  完備な非単項超フィルターが存在することを言う。

(2) 基数  $\kappa$  が**実数値可測基数**であるとは、 $\kappa$  上の  $\kappa$  加法的測度が存在することを言う。

$S$  上の非単項超フィルタを考えることと、 $S$  上の値域が  $\{0, 1\}$  である (つまり、2 値である) 測度を考えることは同じである。

実際、非単項超フィルタ  $U$  に対して

$$\mu(X) = \begin{cases} 1 & (X \in U) \\ 0 & (X \notin U) \end{cases}$$

で定義される測度を対応される写像と、2 値測度  $\mu$  に対して非単項超フィルタ

$$U = \mu^{-1}\{1\}$$

を対応させる写像は互いの逆写像である。

また、この対応において、超フィルタが  $\kappa$  完備なものと測度が  $\kappa$  加法的なことが対応する。よって、可測基数は実数値可測基数である。

**定義 1.4.** 集合  $S$  上のイデアル  $I$  で  $\sigma$  飽和的であるとは、 $I$  に属さない  $S$  の部分集合族で互いに素なものはどれも、族の濃度が可算であることを意味する。

$S$  上の測度  $\mu$  から来るイデアル  $I_\mu = \mu^{-1}\{0\}$  は必ず  $\sigma$  飽和的である。なぜなら、 $\mathcal{A}$  が  $I$  に属さない (すなわち  $\mu$  の測度が正な) 部分集合の族で互いに素なものとしよう。このとき正の自然数  $n$  に対して  $\mu(A) > 1/n$  を満たす  $A \in \mathcal{A}$  は  $n$  個しかない。よって、 $\mathcal{A}$  は有限集合の可算和であるから、たかだか可算濃度を持つ。

**補題 1.5.** 実数値可測基数 (および可測基数) は正則基数である。

証明.  $\kappa$  を実数値可測基数とする。  $\kappa$  上の  $\kappa$  完備な測度  $\mu$  を取る。  $\kappa$  が特異だとすると、 $\kappa$  の共終列  $\langle \lambda_i : i < \text{cf}(\kappa) \rangle$  でおおおの  $\lambda_i$  は  $\kappa$  未満なものが取れる。今、 $\kappa = \bigcup_{i < \text{cf}(\kappa)} \lambda_i$  である。左辺  $\kappa$  は測度 1 だが、右辺はおおおの  $\lambda_i$  が測度 0 で、その  $\text{cf}(\kappa) < \kappa$  個の和集合だから測度 0 である。矛盾した。なお、ここで、おおおの  $\lambda_i$  が測度 0 なのは、各 1 点集合が測度 0 で、 $\lambda_i$  はその  $\lambda_i < \kappa$  個の和集合として書けるからである。  $\square$

**補題 1.6.** 可測基数は到達不能基数である。

証明.  $\kappa$  を可測基数とする。

$\kappa$  が正則なことは補題 1.5 で示した。

$\kappa$  の強極限性を示す。背理法で、ある  $\lambda < \kappa$  について、 $2^\lambda \geq \kappa$  だと仮定する。集合  $S \subseteq \{0, 1\}^\lambda$  で  $|S| = \kappa$  となるものを取る。集合  $S$  上の  $\kappa$  完備な非単項超フィルタ  $U$  を取る。各  $\alpha \in \lambda$  について集合  $X_\alpha \subseteq S$  を

$$\{f \in S : f(\alpha) = 0\} \text{ もしくは } \{f \in S : f(\alpha) = 1\}$$

で  $U$  に属する方とする。集合  $X$  を

$$X = \bigcap_{\alpha < \lambda} X_\alpha$$

で定めると  $X \in U$  であるが、明らかに  $X$  は 1 点集合である。これは  $U$  の非単項性に矛盾。  $\square$

**補題 1.7.** (1)  $\kappa$  を次を満たす最小の基数とする：非単項  $\sigma$  完備な超フィルタが存在する。  $U$  をそのような超フィルタの一つとする。このとき、 $U$  は  $\kappa$  完備である。

- (2)  $\kappa$  を次を満たす最小の基数とする:  $\kappa$  上の測度が存在する.  $\mu$  をそのような測度とする. このとき測度 0 集合のイデアル  $I_\mu$  は  $\kappa$  完備である.
- (3)  $\kappa$  を次を満たす最小の基数とする:  $\kappa$  上の  $\sigma$  完備かつ  $\sigma$  飽和的イデアルが存在する.  $I$  をそのようなイデアルとする. このとき  $I$  は  $\kappa$  完備である.

証明. (1).  $U$  が  $\kappa$  完備でないと仮定する. すると  $\kappa$  の分割  $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}$  があって,  $\gamma < \kappa$  かつ各  $X_\alpha$  は  $U$  の意味で小さい. 関数  $f: \kappa \rightarrow \gamma$  を次で定める:

$$f(x) = \alpha \iff x \in X_\alpha.$$

つまり, 各入力  $x < \kappa$  について,  $x$  が何番目のピースに属しているかを返す関数である.  $\gamma$  上の超フィルター  $D$  を

$$D = \{Z \subseteq \gamma : f^{-1}(Z) \in U\}$$

で定める.  $U$  が  $\sigma$  完備なので,  $D$  も  $\sigma$  完備である.  $D$  は非単項でもある: なぜなら, 各  $\alpha < \gamma$  について  $f^{-1}\{\alpha\} = X_\alpha \notin U$  より  $\alpha \notin D$  だからである. したがって,  $D$  は  $\gamma$  上の単項  $\sigma$ -完備な超フィルターだが,  $\gamma < \kappa$  より, これは  $\kappa$  の最小性に矛盾.

(2).  $I_\mu$  が  $\kappa$  完備ではないと仮定する. すると測度 0 集合の族  $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}$  で,  $\gamma < \kappa$  かつ, それらの和集合  $X = \bigcup_{\alpha < \gamma} X_\alpha$  は測度正なものがとれる.  $X_\alpha$  たちは互いに素であると仮定しても良い.  $f: X \rightarrow \gamma$  を

$$f(x) = \alpha \iff x \in X_\alpha$$

と定め,  $\gamma$  上の測度  $\nu$  を

$$\nu(Z) = \frac{\mu(f^{-1}(Z))}{\mu(X)}$$

と定める.  $\nu$  は  $\sigma$  加法的である. また,  $\nu$  は一様である, なぜなら, 各  $\alpha < \gamma$  について  $\nu(\{\alpha\}) = \frac{\mu(X_\alpha)}{\mu(X)} = 0$  だからである. これは  $\kappa$  の最小性に反する.

(3) の証明は (1) や (2) と同様である. □

$\mu$  を集合  $S$  上の測度とし,  $I_\mu$  を測度 0 集合のイデアルとすれば,  $\mu$  が  $\kappa$  加法的なら,  $I_\mu$  が  $\kappa$  完備なことは明らかである. 逆も言える:

**補題 1.8.**  $\mu$  を集合  $S$  上の測度とし,  $I_\mu$  を測度 0 集合のイデアルとする. このとき, もし  $I_\mu$  が  $\kappa$  完備なら,  $\mu$  は  $\kappa$  加法的である.

証明.  $\gamma < \kappa$  とし,  $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}$  を互いに素な  $S$  の部分集合の族とする.  $X_\alpha$  たちが互いに素なので, そのうちたかだか可算個が正の測度を持つ. よって,

$$\{X_\alpha : \alpha < \gamma\} = \{Y_n : n \in \omega\} \cup \{Z_\alpha : \alpha < \gamma\}$$

と書くことができる. ここに各  $Z_\alpha$  は測度 0 集合. よって,

$$\mu\left(\bigcup_{\alpha < \gamma} X_\alpha\right) = \mu\left(\bigcup_{n \in \omega} Y_n\right) + \mu\left(\bigcup_{\alpha < \gamma} Z_\alpha\right)$$

を得る.  $\mu$  が  $\sigma$  加法的なので,

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \omega} Y_n\right) = \sum_{n \in \omega} \mu(Y_n)$$

である. また,  $I_\mu$  が  $\kappa$  完備なので,

$$\mu\left(\bigcup_{\alpha < \gamma} Z_\alpha\right) = 0$$

である。以上より,

$$\mu\left(\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha\right) = \sum_{\alpha<\gamma} \mu(X_\alpha)$$

を得る. □

**補題 1.9.** (1) ある集合上の原子なしの測度が存在するとき, ある基数  $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$  上に測度が存在する.  
 (2)  $I$  を集合  $S$  上の  $\sigma$  完備  $\sigma$  飽和的イデアルとする. このとき, ある  $Z \subseteq S$  に対して  $I \restriction Z = \{X \subseteq Z : X \in I\}$  が極大イデアルであるか, または,  $\sigma$  完備  $\sigma$  飽和的イデアルがある  $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$  上に存在するかのどちらかが成り立つ.

証明. (1).  $\mu$  をそのような測度とする.  $S$  の測度正な部分集合からなり, 逆向きの包含関係で順序付けられた木  $T$  を構成する.  $T$  の根は  $S$  である. 各  $X \in T$  について,  $X$  の測度正な集合への分割  $X = Y \cup Z, Y \cap Z = \emptyset$  を取り, この 2 つを  $X$  の直後の元とする.  $\alpha$  が極限順序数のとき  $T$  の第  $\alpha$  レベルにはすべての共通部分  $X = \bigcap_{\xi<\alpha} X_\xi$  であって,  $\langle X_\xi : \xi < \alpha \rangle$  は  $T \restriction \alpha$  の増大鎖で  $X_\xi$  は第  $\xi$  レベルの元,  $X$  は測度正なものを置く.

$T$  のどの枝も可算である: なぜなら,  $\langle X_\xi : \xi < \alpha \rangle$  が枝ならば,  $\langle X_\xi \setminus X_{\xi+1} : \xi < \alpha \rangle$  は測度正な集合の互いに素な族となるからである.

同様に,  $T$  のどのレベルも可算であることも分かる. よって,  $T$  はたかだか  $2^{\aleph_0}$  個の極大枝を持つ (各  $\alpha < \omega_1$  について高さ  $\alpha$  の極大枝の個数はたかだか  $2^{\aleph_0}$ . よってそれらの  $\omega_1$  個の和集合でたかだか  $2^{\aleph_0}$  個となる).

$\{b_\alpha : \alpha < \kappa\}, \kappa \leq 2^{\aleph_0}$  をすべての極大枝  $b = \{X_\xi : \xi < \gamma\}$  であって,  $\bigcap_{\xi<\gamma} X_\xi$  が非空なものの枚挙とする. 各  $\alpha < \kappa$  について  $Z_\alpha = \bigcap b_\alpha$  とおく.  $\{Z_\alpha : \alpha < \kappa\}$  は  $S$  の測度 0 集合への分割となる ( $Z_\alpha$  が測度 0 でないとすると, 一個高さを上げることができ枝の極大性に反する; また, 互いの異なる極大枝  $b_\alpha$  と  $b_\beta$  はどこかで枝分かれしているはずだから, 後続ステップでの構成の仕方より,  $X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$  を得る; 覆っていることは  $s \in S$  を任意にとるとき,  $s$  が入っている集合を根から追跡することにより, ある  $X_\alpha$  に  $s$  が入っていることがわかるからよい). あとは  $f: S \rightarrow \kappa$  を  $f(x) = \alpha \iff x \in Z_\alpha$  とおき,  $\kappa$  上の測度  $\nu$  を  $\nu(Z) = \mu(f^{-1}(Z))$  とおけば,  $\nu$  は一様な  $\sigma$  加法的測度である.

(2). (1) と同様である. □

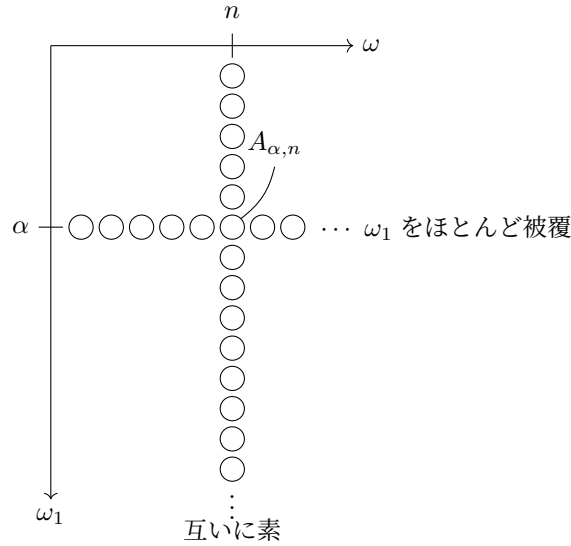
**系 1.10.**  $\kappa$  が実数値可測基数ならば,  $\kappa$  は可測基数か,  $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$  である. より一般に,  $\kappa$  が  $\kappa$  完備  $\sigma$  飽和的イデアルを持つと,  $\kappa$  は可測基数であるか,  $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$  である.

証明. 補題 1.9 の証明より,  $\mu$  が  $S$  上の原子なしの測度なら,  $S$  のたかだか  $2^{\aleph_0}$  個への測度 0 個の分割が存在することがわかる. つまり,  $\mu$  は  $(2^{\aleph_0})^+$  加法的ではない. したがって, 原子なしの  $\kappa$  加法的測度を  $\kappa$  が持つとき,  $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$  である (結論の否定を取ると,  $\kappa \geq (2^{\aleph_0})^+$  だが, これと  $\kappa$  加法性より  $(2^{\aleph_0})^+$  加法性が出るから). 後半の主張も同様. □

補題 1.9 の (1) の主張の結論には「原子なし」が含まれていなかったが, これは実際には「原子なし」と結論付けられる. なぜなら, 原子があると  $\kappa$  は可測基数となるが, 補題 1.6 より, それは  $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$  と相容れないからだ.

**定義 1.11.**  $(\aleph_1, \aleph_0)$ -Ulam 行列とは,  $\omega_1$  の部分集合の族  $\langle A_{\alpha,n} : \alpha \in \omega_1, n \in \omega \rangle$  であって, 次の 2 条件を満たすものである.

- (1) 各  $n \in \omega$  と異なる  $\alpha, \beta \in \omega_1$  について  $A_{\alpha,n} \cap A_{\beta,n} = \emptyset$  である.
- (2) 各  $\alpha \in \omega_1$  について, 集合  $\omega_1 \setminus \bigcup_{n \in \omega} A_{\alpha,n}$  はたかだか可算集合である.



**補題 1.12.**  $(\aleph_1, \aleph_0)$ -Ulam 行列は存在する.

証明. 各  $\xi \in \omega_1$  に対して  $f_\xi: \omega \rightarrow \omega_1$  を  $\xi \subseteq \text{ran}(f_\xi)$  なるものとする. 集合  $A_{\alpha,n}$  を

$$\xi \in A_{\alpha,n} \iff f_\xi(n) = \alpha$$

と定める.

$\xi \in A_{\alpha,n} \cap A_{\beta,n}$  なら  $\alpha = f_\xi(n) = \beta$  となるので, Ulam 行列の条件 (1) が成り立っていることがわかる.

$\alpha \in \omega_1$  とする.  $\xi > \alpha$  に対して,  $f_\xi$  の取り方より,  $f_\xi(n) = \alpha$  となる  $n \in \omega$  が存在する. よって,

$$[\alpha + 1, \omega_1) \subseteq \bigcup_{n \in \omega} A_{\alpha,n}$$

なので条件 (2) も成り立っている. □

**演習問題 1.13.**  $(\aleph_1, \aleph_0)$ -Ulam 行列の定義において, 「各行は可算集合を除いてほとんど  $\omega_1$  を覆っている」という条件を「各行は  $\omega_1$  を (完全に) 覆っている」と変更したバージョンは存在しないことを示せ.

**補題 1.14.**  $\omega_1$  上の  $\sigma$  完備  $\sigma$  飽和的イデアルは存在しない. 特に  $\omega_1$  上の測度は存在しない.

証明. そのようなイデアル  $I$  が存在したと仮定する. また,  $\langle A_{\alpha,n} : \alpha \in \omega_1, n \in \omega \rangle$  を  $(\aleph_1, \aleph_0)$ -Ulam 行列とする.  $I$  の  $\sigma$  完備性と Ulam 行列の条件 (2) より, 各  $\alpha$  について自然数  $n_\alpha$  があって,  $A_{\alpha,n}$  は  $I$ -正である. したがって, 鳩の巣原理より,  $W \subseteq \omega_1$ ,  $|W| = \aleph_1$ ,  $n \in \omega$  があって, すべての  $\alpha \in W$  について  $n_\alpha = n$  である. すると  $\{A_{\alpha,n} : \alpha \in W\}$  は互いに素 (by Ulam 行列の条件 (1)) な非可算な  $I$ -正集合の族となる. これは  $I$  の  $\sigma$  飽和性に矛盾する. □

以上の  $\omega_1$  を一般の後続基数に一般化できる. 証明は同様なので省略する.

**定義と補題 1.15.**  $\lambda$  を基数とする.

(1)  $(\lambda^+, \lambda)$ -Ulam 行列とは,  $\lambda^+$  の部分集合の族  $\langle A_{\alpha,\eta} : \alpha \in \lambda^+, \eta \in \lambda \rangle$  であって, 次の 2 条件を満たすものである.

(a) 各  $\eta \in \lambda$  と異なる  $\alpha, \beta \in \lambda^+$  について  $A_{\alpha,\eta} \cap A_{\beta,\eta} = \emptyset$  である.

(b) 各  $\alpha \in \lambda^+$  について, 集合  $\lambda^+ \setminus \bigcup_{\eta \in \lambda} A_{\alpha,\eta}$  は  $\lambda$  以下の濃度を持つ.

- (2)  $(\lambda^+, \lambda)$ -Ulam 行列は存在する.  
 (3)  $\lambda^+$  上の  $\lambda^+$  完備  $\sigma$  飽和的イデアルは存在しない.

**系 1.16.** 任意の実数値可測基数は、弱到達不能基数である.

証明.  $\kappa$  を実数値可測基数とする. 正則なことは補題 1.5 で示した. 後続基数でないことは、定義と補題 1.15 から分かる.  $\square$

以上より次が結論付けられる: ZFC に「ある集合上の測度が存在する」という命題を加えた公理系の無矛盾性の強さは ZFC より真に強い. なぜなら「ある集合上の測度が存在する」からはその測度が原子ありかなしかに応じて、到達不能基数か弱到達不能基数のどちらかが出て、どちらも ZFC の無矛盾性を出すからである. これが Ulam が証明した定理である.

## 2 正規フィルター

$\kappa$  の部分集合の列  $(X_\alpha : \alpha < \kappa)$  についてその**対角共通部分**  $\Delta_{\alpha < \kappa} X_\alpha$  というのは

$$\Delta_{\alpha < \kappa} X_\alpha = \{\beta < \kappa : (\forall \alpha < \beta)(\beta \in X_\alpha)\}$$

で定まっていた. その双対概念として,

$$\nabla_{\alpha < \kappa} X_\alpha = \{\beta < \kappa : (\exists \alpha < \beta)(\beta \in X_\alpha)\}$$

を**対角和集合**という.

フィルターが**正規**であるとは、それが対角共通部分を取る操作で閉じていることであつた. イデアルが正規というのは双対フィルターが正規であること、すなわち対角和を取る操作で閉じていることを意味する.  $f: X \rightarrow \kappa$  ( $X \subseteq \kappa$ ) が**押し下げ関数**であるとは、任意の  $\alpha \in X$  について  $f(\alpha) < \alpha$  となることであつた.

イデアル  $I$  に対して集合

$$I^+ = \{A \subseteq \kappa : A \notin I\}$$

の元を  $I$  正值集合ということにする.

**補題 2.1.**  $I$  を  $\kappa$  上のイデアルとする. 次は同値.

- (1)  $I$  は正規.  
 (2) 任意の  $I$  正值集合  $S_0$  と任意の  $S_0$  上の押し下げ関数  $f$  に対して、 $I$  正值集合  $S \subseteq S_0$  があつて  $f$  は  $S$  上定数.

証明. (1) ならば (2) は Fodor の補題の証明そのままである.

(2) ならば (1) を証明する.  $I$  の双対フィルターを  $F$  とする.  $(X_\alpha : \alpha < \kappa)$  を  $F$  の元の列とする.  $\Delta_{\alpha < \kappa} X_\alpha \notin F$  だとする.  $S = \kappa \setminus \Delta_{\alpha < \kappa} X_\alpha$  とおく.  $S$  は  $I$  正值集合である.  $f(\alpha)$  を  $\xi < \alpha$  であつて、 $\alpha \notin X_\xi$  なものとして定める (対角共通部分の定義より取れる). すると (2) より  $I$  正值集合  $S' \subseteq S$  と  $\gamma < \kappa$  がとれて、任意の  $\alpha \in S'$  について  $f(\alpha) = \gamma$ . これは  $f$  の定義より  $S' \cap X_\gamma = \emptyset$  を意味する.  $S'$  が  $I$  正值集合で  $X_\gamma \in F$  なのでこれは矛盾.  $\square$

したがって、 $\kappa$  上の超フィルター  $U$  に対しては、 $U$  が正規であることと任意の押し下げ関数  $f: X \rightarrow \kappa$ ,  $X \in U$  に対して、ある  $Y \in U$  について  $f$  が  $Y$  上で定数関数となることと同値である.

**補題 2.2.**  $\kappa$  を非可算正則基数とし,  $F$  を  $\kappa$  上の正規フィルターで, 任意の終切片  $\{\alpha : \alpha_0 < \alpha < \kappa\}$  を持っているものとする. するとすべての club 集合は  $F$  の元を持つ. したがって,  $F$  の元はすべて定常集合である.

証明. まず極限順序数全体  $\text{Lim}_\kappa$  は  $F$  の元であることに注意する:  $X_\alpha = \{\xi : \alpha + 1 < \xi < \kappa\}$  の対角共通部分として書けるからである.  $C$  を club 集合とし,  $C = \{a_\alpha : \alpha < \kappa\}$  を単調増加な枚举とする.  $Y_\alpha = \{\xi : a_\alpha < \xi < \kappa\}$  とおくと  $\text{Lim}_\kappa \cap \Delta_{\alpha < \kappa} Y_\alpha \subseteq C$  を得る. なぜなら  $\beta \in \text{Lim}_\kappa \cap \Delta_{\alpha < \kappa} Y_\alpha$  とすると

$$\beta = \sup_{\alpha < \beta} a_\alpha \in C$$

であるからである. □

**定理 2.3.** 任意の可測基数の上に正規超フィルターが存在する.

証明.  $U$  を  $\kappa$  上の非単項  $\kappa$  完備超フィルターとする.  $f, g \in \kappa^\kappa$  に対して,

$$f =^* g \iff \{\alpha < \kappa : f(\alpha) = g(\alpha)\} \in U$$

という同値関係を入れる. また,

$$f <^* g \iff \{\alpha < \kappa : f(\alpha) < g(\alpha)\} \in U$$

という擬全順序関係を入れる.

無限下降列  $f_0 >^* f_1 >^* f_2 >^* \dots$  は存在しない. 実際, それがあれば  $X_n = \{\alpha : f_n(\alpha) > f_{n+1}(\alpha)\} \in U$  だが,  $U$  が  $\sigma$  完備なので,  $X = \bigcap_{n \in \omega} X_n \in U$  であり, 特に  $X$  は空でない.  $\alpha \in X$  を一つ取ると, 順序数の無限下降列  $f_0(\alpha) > f_1(\alpha) > f_2(\alpha) > \dots$  ができて矛盾である.

したがって,  $<^*$  は擬整列順序である.

$f: \kappa \rightarrow \kappa$  を次を満たす (この擬整列順序で) 最小の関数とする: 任意の  $\gamma < \kappa$  に対して,  $\{\alpha : f(\alpha) > \gamma\} \in U$  である. このような  $f$  は少なくとも 1 つ存在する. たとえば対角関数  $d(\alpha) = \alpha$  は条件を満たす.

$D = f(U) = \{X \subseteq \kappa : f^{-1}(X) \in U\}$  とおく.  $D$  が  $\kappa$  上の正規超フィルターなことを示そう.

各  $\gamma < \kappa$  に対して,  $f^{-1}\{\gamma\} \notin U$  である ( $f^{-1}[\gamma + 1, \kappa) \in U$  だから). よって,  $\gamma \notin D$  なので,  $D$  は非単項である.

$D$  の正規性を示そう.  $h$  を  $X \in D$  上の押し下げ関数とする.  $h$  が  $D$  のあるメンバー上で定数なことを示さなければいけない.  $g \in \kappa^\kappa$  を  $g(\alpha) = h(f(\alpha))$  で定義される関数とする.  $g(\alpha) < f(\alpha)$  がすべての  $\alpha \in f^{-1}(X)$  で成り立つ. よって,  $g <^* f$  である.  $f$  の最小性より, ある  $\gamma < \kappa$  に対して  $Y := \{\alpha : g(\alpha) = \gamma\} \in U$  となる. したがって,  $D$  の定義より  $f(Y) \in D$  であり, また,  $h$  は  $f(Y)$  上で定数  $\gamma$  を取る. □

### 3 宇宙 $V$ の超冪と初等埋め込み

本節では, 可測基数が存在すれば, 内部モデルへの初等埋め込みが存在すること, 逆に初等埋め込みがあれば可測基数があることを示す. また, 可測基数の存在が  $V = L$  と両立しないことを示す.

$U$  を集合  $S$  上の超フィルターとする.  $f, g: S \rightarrow V$  に対して次の二つの関係を定める:

$$\begin{aligned} f =^* g &\iff \{x \in S : f(x) = g(x)\} \in U, \\ f \in^* g &\iff \{x \in S : f(x) \in g(x)\} \in U. \end{aligned}$$

$S$  を定義域とする関数全体は真クラスをなすため、同値関係  $=^*$  のおのおの同値類は真クラスになってしまう。そこで Scott のトリックを使って、次のように同値類のようなものを定義する。

$$[f] = \{g : f =^* g \wedge \neg(\exists h)(h = f \wedge \text{rank } h < \text{rank } g)\}$$

こうすると各  $[f]$  は集合となる。  $f, g : S \rightarrow V$  に対して、  $[f] \in^* [g] \iff f \in^* g$  と定義する。これは well-defined である。

$\text{Ult} = \text{Ult}_U(V)$  をすべての  $[f]$  (ただし  $f : S \rightarrow V$ ) 全体のなすクラスとする。構造  $\text{Ult} = (\text{Ult}, \in^*)$  を考える。これを宇宙  $V$  の**超冪**という。通常のモデル理論における Łoś の定理は宇宙の超冪でも成り立つことが確認できる：

$$\text{Ult} \models \varphi([f_1], \dots, [f_n]) \iff \{x \in S : \varphi(f_1(x), \dots, f_n(x))\} \in U.$$

ここに  $\varphi$  は集合論の論理式。特に文を考えると、  $(V, \in)$  と  $(\text{Ult}, \in^*)$  が初等同値なことが分かる。

また、各  $a \in V$  に対して定数関数  $c_a : S \rightarrow V; c_a(x) = a$  を考えて、  $j(a) = [c_a]$  とおくと

$$\text{Ult} \models \varphi(j(a_1), \dots, j(a_n)) \iff V \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$$

を得る。つまり、モデル理論で使っていた用語を拝借すると、  $j : V \rightarrow \text{Ult}$  は**初等埋め込み**である。

超冪が well-founded である状況を考察する。set-like であることは常に成り立つ：つまり任意の  $f$  について

$$\text{ext}(f) = \{[g] : g \in^* f\}$$

は常に集合である。なぜなら、  $g \in^* f$  なる  $g$  を考えるとある  $h =^* g$  であってすべての  $x \in S$  で  $h(x) \in f(x)$  となるものをとれる。この  $h$  はランクが  $f$  以下である。よって  $\text{rank}([g]) \leq \text{rank}(f) + 1$  となるので、  $\text{ext}(f)$  は集合である。

**補題 3.1.**  $U$  が  $\sigma$  完備な超フィルターなら、  $(\text{Ult}, \in^*)$  は well-founded である。

証明.  $\text{Ult}$  の無限  $\in^*$  下降列がないことを示せば良い。もしあったとする：  $[f_0] \ni^* [f_1] \in^* \dots$  すると各  $n$  について集合

$$X_n := \{x \in S : f_{n+1}(x) \in f_n(x)\}$$

は  $U$  に属する。  $U$  の  $\sigma$  完備性より

$$X = \bigcap_{n \in \omega} X_n$$

も  $U$  に属し、特に空でない。そこから元  $x \in X$  を一つ取ると、

$$f_0(x) \ni f_1(x) \ni f_2(x) \ni \dots$$

となり、整楚性公理に反する。 □

Mostowski の崩壊定理は任意の well-founded モデルは推移的モデルと同型なことを主張しているのであった。よって、  $U$  が  $\sigma$  完備なら、あるクラス  $M$  と同型なクラス写像  $\pi : (\text{Ult}, \in^*) \rightarrow (M, \in)$  が存在する。記号の乱用で  $\pi([f])$  のことを単に  $[f]$  と書く。合成写像  $\pi \circ j$  の方がもとの  $j$  より重要であるため、これを単に  $j$  と書く。したがって、初等埋め込み  $j : V \rightarrow M$  が得られる。

$\alpha$  が順序数ならば  $j(\alpha)$  も順序数であり、初等性と絶対性より  $\alpha < \beta \iff j(\alpha) < j(\beta)$  を得る。したがって、任意の順序数について  $\alpha \leq j(\alpha)$  を得る。したがって、順序数全体のクラス  $\text{On}$  は  $V$  と  $M$  の間で変わらない： $\text{On}^V = \text{On}^M$ 。すなわち、  $M$  は  $V$  の内部モデルである。

初等性より  $j(0) = 0$  かつすべての  $n \in \omega$  について  $j(\alpha + 1) = j(\alpha) + 1$  であるので、すべての  $n \in \omega$  について  $j(n) = n$  である。  $j(\omega) = \omega$  は  $\omega$  の定義可能性と絶対性より分かる。



**定義 3.2.** 内部モデルへの初等埋め込み  $j: V \rightarrow M$  について,

$$\text{crit}(j) = \min\{\alpha \in \text{On} : \alpha < j(\alpha)\}$$

とおき,  $j$  の臨界点と呼ぶ.

**補題 3.3.** (1) 内部モデルへの初等埋め込み  $j: V \rightarrow M$  が非自明, すなわち  $j \neq \text{id}$  のとき, 臨界点  $\text{crit}(j)$  は存在する.

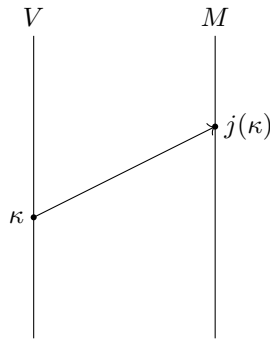
(2) 可測基数  $\kappa$  とその上の  $\kappa$  完備非単項超フィルター  $U$  について  $U$  を使った超冪によって定まる初等埋め込み  $j: V \rightarrow M$  について, その臨界点は  $\kappa$  である.

証明. (1) の証明.  $j(x) \neq x$  なるランク最小の  $x$  を取る.  $y \in x$  なら  $\text{rank}(y) < \text{rank}(x)$  なので,  $x$  のランク最小性より,  $y = j(y)$  を得る. よって,  $y = j(y) \in j(x)$  となる. したがって,  $x \subseteq j(x)$ . したがって,  $j(x) \neq x$  であることと合わせると  $z \in j(x) \setminus x$  がとれる. もし,  $\text{rank}(j(x)) = \text{rank}(x)$  なら  $j(z) = z \in j(x)$  となるので, 初等性より  $z \in x$  を得て, 矛盾. よって  $\text{rank}(j(x)) > \text{rank}(x)$  である. 一方でランクの定義可能性と初等性と絶対性より  $\text{rank}(j(x)) = j(\text{rank}(x))$  を得るので,  $j(\text{rank}(x)) > \text{rank}(x)$ . したがって  $\{\alpha \in \text{On} : \alpha < j(\alpha)\}$  が空でないことが証明された.

(2) の証明.  $\alpha < \kappa$  として  $j(\alpha) = \alpha$  を示す.  $\alpha$  に関する超限帰納法で示すことにすれば, 任意の  $\beta < \alpha$  で  $j(\beta) = \beta$  であることを仮定して良い.  $[f] \in j(\alpha)$  を取る. すると  $U$  の意味でほとんどすべての  $x \in S$  で  $f(x) < \alpha$ . ここで  $U$  の  $\kappa$  完備性より, ある  $\beta < \alpha$  が存在して, ほとんどすべての  $x \in S$  で  $f(x) = \beta$ . よって  $[f] \in j(\beta)$  である. 帰納法の仮定より  $[f] \in j(\beta) = \beta$  なので, これで  $j(\alpha) = \alpha$  が示された.

次に  $j(\kappa) > \kappa$  を示す. 対角関数  $d(\alpha) = \alpha$  を考える.  $\{\alpha : d(\alpha) < \kappa\} = S \in U$  なので,  $[d] < j(\kappa)$  である. 次に  $\kappa \leq [d]$  を示す.  $\beta < \kappa$  を任意にとる. すると  $\{\alpha : \beta < d(\alpha)\} = [\beta + 1, \kappa] \in U$  なので,  $j(\beta) < [d]$ .  $j(\beta) = \beta$  は証明済みなので  $\beta < [d]$  を得る. これで  $\kappa \leq [d]$  が示された. 以上より,  $\kappa \leq [d] < j(\kappa)$  である.  $\square$

内部モデルへの初等埋め込み  $j: V \rightarrow M$  は  $j \neq \text{id}$  なら全射ではない. なぜなら,  $\text{crit}(j)$  が  $j$  の像ではないからである.



**定理 3.4** (Scott). 可測基数が存在することと  $V = L$  は両立しない.

証明. 可測基数が存在し, かつ  $V = L$  だと仮定する. 最小の可測基数を  $\kappa$  とし,  $\kappa$  上の非単項  $\kappa$  完備超フィルターを  $U$  とする.  $j: V \rightarrow M$  を  $U$  から生じる初等埋め込みとする. 今,  $V = L$  を仮定しているので,  $L$  の内部モデルとしての最小性により  $M = V = L$  である.

$V \models \kappa$  は最小の可測基数

と  $j$  の初等性により

$$V \models j(\kappa) \text{ は最小の可測基数}$$

である。よって、 $j(\kappa) = \kappa$  とならないといけないが、これは  $j(\kappa) > \kappa$  であったことに矛盾。  $\square$

**定理 3.5.**  $j: V \rightarrow M$  を非自明な初等埋め込みとする。このとき、 $\text{crit}(j)$  は可測基数である。特に非自明な初等埋め込みが存在するとき可測基数が存在する。

証明.  $\kappa = \text{crit}(j)$  とおく。

$$D = \{X \subseteq \kappa : \kappa \in j(X)\}$$

とおく。  $D$  が非単項  $\kappa$  完備超フィルタであることを示す。

**主張:**  $\kappa \in D$ .

**証明:**  $\kappa < j(\kappa)$  なのでよい。 //

**主張:**  $\emptyset \notin D$ .

**証明:** 初等性より  $j(\emptyset) = \emptyset$  なのでよい。 //

**主張:**  $D$  は共通部分で閉じている。

**証明:**  $X, Y \in D$  とすると  $\kappa \in j(X), j(Y)$ . ところが初等性により  $j(X \cap Y) = j(X) \cap j(Y)$  なので  $\kappa \in j(X \cap Y)$ . よって  $X \cap Y \in D$ . //

**主張:**  $D$  は上に閉じている。

**証明:**  $X \in D$  かつ  $X \subseteq Y$  とする。すると初等性より  $j(X) \subseteq j(Y)$  である。したがって、 $\kappa \in j(X) \subseteq j(Y)$  を得るのでよい。 //

**主張:**  $D$  は超フィルタである。

**証明:**  $X \notin D$  とすると  $\kappa \notin j(X)$ . 初等性より  $j(\kappa \setminus X) = j(\kappa) \setminus j(X)$  となり、右辺に  $\kappa$  が属しているため、 $\kappa \in j(\kappa \setminus X)$ . つまり、 $\kappa \setminus X \in D$  である。 //

**主張:**  $D$  は非単項。

**証明:**  $\alpha \in \kappa$  について  $j(\{\alpha\}) = \{j(\alpha)\} = \{\alpha\}$  である。第一の等式は初等性、第二の等式は臨界点  $\kappa$  の最小性による。この集合に  $\kappa$  は属さない。 //

**主張:**  $D$  は  $\kappa$  完備。

**証明:**  $\bar{X} = \langle X_i : i < \gamma \rangle$  を  $D$  の元からなる列とする。ただし、 $\gamma < \kappa$ . 今、初等性により  $j(\bar{X}) = \langle j(X_i) : i < j(\gamma) \rangle = \langle j(X_i) : i < \gamma \rangle$  である。したがって、再び初等性により  $\bigcap_{i < \gamma} j(X_i) = j(\bigcap_{i < \gamma} X_i)$  となる。しかし、仮定より左辺に  $\kappa$  が属しているため、右辺にも属する。よって、 $\bigcap_{i < \gamma} X_i \in D$ . //

以上で  $D$  が非単項  $\kappa$  完備超フィルタなことが示された。  $\square$

定理 3.5 で作った超フィルタは正規である。実際、初等埋め込み  $j$  により  $D = \{X \subseteq \kappa : \kappa \in j(X)\}$  と定義された超フィルタ  $D$  が正規なことを示そう。  $f$  を  $X \in D$  上の押し下げ関数とすると  $D$  の定義より、 $\kappa \in j(\{\alpha : f(\alpha) < \alpha\})$  なので、 $j(f)(\kappa) < \kappa$  である。そこで  $\gamma = j(f)(\kappa)$  とおく。このとき  $\kappa \in j(\{\alpha : f(\alpha) = \gamma\})$  だから、再び  $D$  の定義より、 $\{\alpha : f(\alpha) = \gamma\} \in D$  となる。よって、 $D$  は正規である。

正規性は次のように超冪の言葉で特徴づけられる。

**補題 3.6.**  $D$  を  $\kappa$  上の非単項  $\kappa$  完備超フィルタとする。このとき次は同値。

- (1)  $D$  は正規。
- (2)  $\text{Ult}_D(V)$  において  $\kappa = [d]$ . ここに  $d$  は対角関数。
- (3)  $D = \{X \subseteq \kappa : \kappa \in j_D(X)\}$ .

証明. (1) ならば (2) の証明.  $\kappa \leq [d]$  は明らかなので,  $[d] \leq \kappa$  を示す.  $f \in^* d$  とすると  $f$  は押し下げ関数である. よって, 仮定 (1) よりある  $\gamma < \kappa$  があって,  $[f] = \gamma$ .

(2) ならば (3) の証明.  $X \subseteq \kappa$  とする.

$$\begin{aligned} X \in D &\iff \{\alpha < \kappa : \alpha \in X\} \in D \\ &\iff \{\alpha < \kappa : d(\alpha) \in X\} \in D \\ &\iff [d] \in j_D(X) \text{ (Łoś の定理より)} \\ &\iff \kappa \in j_D(X) \text{ (仮定より)} \end{aligned}$$

より良い.

(3) ならば (1) の証明はこの補題の上の注意より従う. □

次に,  $V$  から  $V$  への初等埋め込みは存在しないという Kunen の定理を証明する. そのために補題を用意する.

**補題 3.7.**  $\lambda$  を無限基数で  $2^\lambda = \lambda^{\aleph_0}$  なるものとする. このとき関数  $F: \lambda^\omega \rightarrow \lambda$  が存在して, 任意の  $A \in [\lambda]^\lambda$  と  $\gamma < \lambda$  について, ある  $s \in A^\omega$  があって,  $F(s) = \gamma$  である.

証明.  $\langle (A_\alpha, \gamma_\alpha) : \alpha < 2^\lambda \rangle$  を  $[\lambda]^\lambda \times \lambda$  の枚举とする.  $\alpha$  に関する帰納法で,  $\lambda^\omega$  の元の列  $\langle s_\alpha : \alpha < 2^\lambda \rangle$  を次のように定める:  $\alpha$  ステージにおいて,  $s_\alpha \in [A_\alpha]^\lambda$  かつすべての  $\beta < \alpha$  について  $s_\alpha \neq s_\beta$  である. これは  $|A_\alpha^\omega| = \lambda^\omega = 2^\lambda > |\beta|$  より取ることができる. 各  $\alpha < 2^\lambda$  について  $F(s_\alpha) = \gamma_\alpha$  と定める. 列  $\langle s_\alpha : \alpha < 2^\lambda \rangle$  の中に現れない  $s$  については  $F(s)$  は何でもよい.

この  $F$  が条件を満たす. 実際,  $A \in [\lambda]^\lambda$  と  $\gamma < \lambda$  をとると, ある  $\alpha < 2^\lambda$  があって,  $(A, \gamma) = (A_\alpha, \gamma_\alpha)$  であり,  $F(s_\alpha) = \gamma_\alpha$  となる. □

**定理 3.8** (Kunen).  $j: V \rightarrow M$  が非自明 (すなわち  $j \neq id$ ) な初等埋め込みとしたとき,  $M \neq V$  である.

証明.  $j: V \rightarrow V$  を非自明な初等埋め込みだとして矛盾を導く.  $\kappa = \text{crit}(j)$  とおくと  $\kappa$  は可測基数.  $\kappa_0 = \kappa, \kappa_{n+1} = j(\kappa_n)$  (for  $n \in \omega$ ) とおくと, どの  $\kappa_n$  も可測基数である.  $\lambda = \sup_{n \in \omega} \kappa_n$  とおく.

$j(\langle \kappa_n : n \in \omega \rangle) = \langle j(\kappa_n) : n \in \omega \rangle = \langle \kappa_{n+1} : n \in \omega \rangle$  だから  $j(\lambda) = \lambda$  を得る.  $G = \{j(\alpha) : \alpha < \lambda\}$  とおく.

$\lambda$  は可測基数の極限だから強極限である. さらに  $\text{cf}(\lambda) = \omega$  なので

$$\begin{aligned} 2^\lambda &= (2^{<\lambda})^{\text{cf}(\lambda)} \text{ (これは一般的に成り立つ等式)} \\ &= \lambda^{\text{cf}(\lambda)} \text{ (強極限性)} \\ &= \lambda^\omega \end{aligned}$$

を得る. 補題 3.7 により,  $F: \lambda^\omega \rightarrow \lambda$  がとれて, すべての  $A \in [\lambda]^\lambda$  について  $F^A \lambda = \lambda$  である.  $j$  の初等性と  $j(\omega) = \omega$  と  $j(\lambda) = \lambda$  により,  $j(F)$  も同じ性質を持つ. よって, 上の  $G$  をここでの  $A$  に代入すると, ある  $s \in G^\omega$  があって,  $(jF)(s) = \kappa$  である.

$G$  の定義より,  $s$  はある  $t: \omega \rightarrow \lambda$  を使って,  $s(n) = j(t(n))$  (for  $n \in \omega$ ) と表わせる. よって  $s = j(t)$  である. したがって,  $\kappa = (jF)(s) = (jF)(j(t)) = j(F(t))$  である.  $\kappa$  は  $j$  の像ではないので, これは矛盾. □

**補題 3.9.**  $U$  を  $\kappa$  上の非単項  $\kappa$  完備超フィルターとし,  $M = \text{Ult}_U(V)$  とし,  $j: V \rightarrow M$  を誘導される初等埋め込みとする. このとき次が成り立つ.

- (1)  $M^\kappa \subseteq M$ . すなわち  $M$  は  $\kappa$  列を取る操作で閉じている.
- (2)  $U \notin M$ .
- (3)  $2^\kappa \leq (2^\kappa)^M < j(\kappa) < (2^\kappa)^+$ .
- (4)  $\lambda$  が極限順序数のとき,  $\text{cf}(\lambda) = \kappa$  ならば  $j(\lambda) > \sup_{\alpha < \lambda} j(\alpha)$ ;  $\text{cf}(\lambda) \neq \kappa$  ならば  $j(\lambda) = \sup_{\alpha < \lambda} j(\alpha)$ .
- (5)  $\lambda > \kappa$  が強極限基数かつ  $\text{cf}(\lambda) \neq \kappa$  ならば  $j(\lambda) = \lambda$ .

証明. (1) の証明.  $\langle a_\xi : \xi < \kappa \rangle$  を  $M$  の元からなる  $\kappa$  列とする. 各  $\xi < \kappa$  について  $g_\xi$  を元  $a_\xi$  を表現する関数とする.  $h$  を元  $\kappa$  を表現する関数とする.

関数  $F$  で  $[F] = \langle a_\xi : \xi < \kappa \rangle$  となるものを構成する. 各  $\alpha < \kappa$  について

$$F(\alpha) = \langle g_\xi(\alpha) : \xi < h(\alpha) \rangle$$

とおく. 各  $\alpha$  について,  $F(\alpha)$  は  $h(\alpha)$  列なので  $[F]$  は  $\kappa$  列である.  $\xi < \kappa$  とする.  $[F]$  の  $\xi$  番目の項が  $a_\xi$  であることを示したい.  $[h] > \xi$  なので,  $U$  の意味でほとんどすべての  $\alpha$  で  $\xi < h(\alpha)$  である. そのような  $\alpha$  について,  $F(\alpha)$  の  $\xi$  番目の項は  $g_\xi(\alpha)$  である. よって Loś の定理により,  $[F]$  の  $\xi$  番目が  $[g_\xi]$  であることを得る ( $[c_\xi] = \xi$  に注意).

(2) の証明.  $U \in M$  と仮定する. 写像  $e: \kappa^\kappa \rightarrow j(\kappa)$  を  $e(f) = [f]$  で定める. (1) より  $\kappa^\kappa = \kappa^\kappa \cap M = (\kappa^\kappa)^M \in M$  に注意. また仮定  $U \in M$  があるので,  $e \in M$  である.  $e$  は全射なので,  $M \models |j(\kappa)| \leq 2^\kappa$  である. これは  $j(\kappa)$  が  $M$  で到達不能基数なことに矛盾する.

(3) の証明. (1) より  $\mathcal{P}(\kappa)^M = \mathcal{P}(\kappa)$  に注意する. よって  $M \subseteq V$  より

$$\begin{aligned} 2^\kappa &= \min\{\alpha : (\exists f)(f: \mathcal{P}(\kappa) \rightarrow \alpha \text{ 全射})\} \\ &\leq \min\{\alpha : (\exists f \in M)(f: \mathcal{P}^M(\kappa) \rightarrow \alpha \text{ 全射})\} \\ &= (2^\kappa)^M. \end{aligned}$$

$\kappa < j(\kappa)$  であることと  $j(\kappa)$  が  $M$  で到達不能基数なことから  $(2^\kappa)^M < j(\kappa)$  を得る. 最後に,  $j(\kappa)$  の元は  $\kappa$  から  $\kappa$  への関数で表現されることから  $|j(\kappa)| \leq \kappa^\kappa = 2^\kappa$ . よって  $j(\kappa) < 2^\kappa$ .

なお, (3) の主張は  $j(\kappa)$  が  $V$  では基数でないことを含意している.

(4) の証明.  $\text{cf}(\lambda) = \kappa$  として,  $\lambda = \sup_{\alpha < \kappa} \lambda_\alpha$  と書く. 関数  $f$  を  $f(\alpha) = \lambda_\alpha$  とおく. すると Loś の定理より, 任意の  $\alpha$  について  $j(\lambda_\alpha) < [f]$  であることと  $[f] < j(\lambda)$  が分かる. したがって,  $\sup_{\alpha < \lambda} j(\alpha) \leq [f] < j(\lambda)$ .

次に  $\text{cf}(\lambda) > \kappa$  として  $f$  を任意の  $\kappa$  から  $\lambda$  への関数とする. この  $f$  は共終でないので, ある  $\alpha < \lambda$  があって  $[f] < j(\alpha)$ .  $f: \kappa \rightarrow \lambda$  について  $[f]$  は  $j(\lambda)$  の元すべてを動くのでこれで  $j(\lambda) \leq \sup_{\alpha < \lambda} j(\alpha)$  が示された. 逆向きの不等号は当たり前.

最後に  $\text{cf}(\lambda) < \kappa$  として,  $\lambda = \sup_{\nu < \gamma} \lambda_\nu$  ( $\gamma = \text{cf}(\lambda)$ ) と書く. すると任意の関数  $f: \kappa \rightarrow \lambda$  について  $g: \kappa \rightarrow \gamma$  があって,  $f(\alpha) \leq \lambda_{g(\alpha)}$  (for  $\alpha < \kappa$ ) となる. よって,  $U$  の  $\kappa$  完備性よりある  $\nu < \gamma$  について  $[f] < j(\lambda_\nu)$  となる.

(5) の証明. 各  $\alpha < \lambda$  について  $\alpha$  未満の順序数は関数  $f: \kappa \rightarrow \alpha$  によって表現されるので,  $|j(\alpha)| \leq |\alpha|^\kappa \leq 2^{|\alpha|^\kappa} < \lambda$  を得る. よって (4) より  $j(\lambda) = \sup_{\alpha < \lambda} j(\alpha) = \lambda$ .  $\square$

**補題 3.10.**  $\kappa$  を可測基数とする. もし  $2^\kappa > \kappa^+$  ならば, どんな  $\kappa$  上の正規  $\kappa$  完備非単項超フィルター  $D$  についても集合  $\{\alpha < \kappa : 2^\alpha > \alpha^+\}$  は  $D$  に属する. したがって, すべての基数  $\alpha < \kappa$  について  $2^\alpha = \alpha^+$  ならば,  $2^\kappa = \kappa^+$  である.

証明.  $D$  を  $\kappa$  上の正規  $\kappa$  完備非単項超フィルターとし,  $M = \text{Ult}_D(V)$  とおく. もし,  $\{\alpha < \kappa : 2^\alpha =$

$\alpha^+ \in D$  なら  $[d] = \kappa$  と Los の定理より  $2^\kappa = \kappa^+$  in  $M$  を得る．ところが, 補題 3.9 より  $2^\kappa = (2^\kappa)^M$  かつ  $\kappa^+ = (\kappa^+)^M$  である．ここに  $\kappa^+$  は集合  $\kappa$  に入る整列順序の上限として書けることを使って,  $2^\kappa = (2^\kappa)^M$  により  $\kappa^+ = (\kappa^+)^M$  を得る．よって,  $V$  で  $2^\kappa = \kappa^+$  である．  $\square$

## 4 ジェネリック超冪

本稿では可測基数を使わず, 強制法によるジェネリックフィルターを使った超冪を考える．その応用として, Silver の定理を証明する．

$\kappa$  を非可算正則基数とし  $I$  を  $\kappa$  上のイデアルとする． $I$  正值集合のなす半順序集合  $(I^+, \subseteq)$  を考える：

$$I^+ = \{X \subseteq \kappa : X \notin I\}.$$

$G$  を  $(V, P)$  ジェネリックフィルターとする．

以下の補題で  $M$  **超フィルター** というのは次を満たす  $D \subseteq \mathcal{P}^M(\kappa)$  である：

- (1)  $\emptyset \notin D, \kappa \in D$ .
- (2)  $X, Y \in D$  なら  $X \cap Y \in D$ .
- (3)  $X \in D$  かつ  $Y \in M$  で  $X \subseteq Y$  ならば,  $Y \in D$ .
- (4)  $X \in M$  が  $X \subseteq \kappa$  であるとき,  $X \in D$  または  $\kappa \setminus X \in D$ .

**補題 4.1.** (1)  $G$  は  $\kappa$  上の  $V$  超フィルターで  $I$  の双対フィルターを拡大するものである．

(2)  $V$  で  $I$  が  $\kappa$  完備なら,  $G$  は  $\kappa$  完備  $V$  超フィルターである．

(3)  $I$  が正規ならば,  $G$  も正規である．

証明. (1) の証明.  $X$  が  $I$  の双対フィルターの元ならば,  $\{Y \in I^+ : Y \subseteq X\}$  は  $I^+$  の稠密部分集合なので,  $X \in G$  を得る． $V$  超フィルターなことの証明はやさしい．

(2) の証明.  $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}, \gamma < \kappa$  を  $V$  に属する  $\kappa$  の分割とする．すると  $\{Y \in I^+ : Y \subseteq X_\alpha \text{ (for some } \alpha < \gamma)\}$  は  $I^+$  の稠密部分集合である (by  $I$  の  $\kappa$  完備性)．したがって, ある  $X_\alpha$  が  $G$  に属する．

(3) の証明.  $X \in G$  とし  $f \in V$  を  $X$  上の押し下げ関数とする．すると  $\{Y \in I^+ : f \text{ is constant on } Y\}$  は  $X$  の下で稠密である．よって  $f$  はある  $Y \in G$  の上で定数である．  $\square$

これから  $I$  は  $\kappa$  上の  $\kappa$  完備イデアルとし, 全ての一点集合を含むものとする．すると  $G$  は  $\kappa$  上の非単項  $\kappa$  完備  $M$  超フィルターである． $V[G]$  で超冪  $\text{Ult}_G(V)$  を考える．これを**ジェネリック超冪**という．これは ZFC のモデルだが, 必ずしも well-founded ではない．

Los の定理はジェネリック超冪でも成立する：

$$\text{Ult}_G(V) \models \varphi([f_1], \dots, [f_n]) \iff \{\alpha \in \kappa : \varphi(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha))\} \in G.$$

ここに  $\varphi$  は集合論の論理式で,  $f_1, \dots, f_n \in V$ ．特に初等埋め込み  $j_G : V \rightarrow \text{Ult}_G(V); j_G(x) = [c_x]$  を得る．

$N = \text{Ult}_G(V)$  とする． $N$  中の順序数全体  $\text{On}^N$  は線形順序付けられたクラスだが, 必ずしも整列しているとは言えない．しかし, 次の補題は成り立つ．ここで,  $x \in \text{On}^N$  について  $\{y \in \text{On}^N : y <^N x\}$  が順序型  $\alpha$  を持つとき, 記号の乱用で  $x = \alpha$  と書く．

**補題 4.2.** (1) 各  $\gamma < \kappa$  について,  $j(\gamma) = \gamma$ ．よって  $\text{On}^N$  は順序型  $\kappa$  の始切片を持つ．

(2)  $I$  が正規ならば,  $x \in \text{On}^N$  があって,  $x = \kappa$  である．実際,  $[d] = \kappa$  である．ただし  $d$  は対角関数．

(3)  $j(\kappa) \neq \kappa$ .

証明. (1) の証明.  $j \restriction \gamma$  が  $(\gamma, \in)$  と  $\{y \in \text{On}^N : y <^N j(\gamma)\}, <^N$  の間の同型写像であることを示せばよい.  $j \restriction \gamma$  の値域が  $\{y \in \text{On}^N : y <^N j(\gamma)\}, <^N$  に含まれることは明らか. 順序保存性, 単射性は  $j$  の初等性より明らか.

全射性を示す.  $y \in \text{On}^N$  で  $y <^N j(\gamma)$  とする.  $y = [f], f \in M, \text{dom}(f) = \kappa$  なる  $f$  を取る. すると  $[f] <^N j(\gamma)$  より

$$\{\alpha : f(\alpha) < \gamma\} \in G$$

だが, 左辺は  $\bigcup_{\beta < \gamma} \{\alpha : f(\alpha) = \beta\}$  と書けるため,  $G$  の  $\kappa$  完備性により, ある  $\beta < \kappa$  について  $\{\alpha : f(\alpha) = \beta\} \in G$  である. よって,  $y = [f] = j(\beta)$ .

(2) の証明.  $j \restriction \kappa$  が  $\kappa$  と  $\{y \in \text{On}^N : y <^N [d]\}$  の間の同型となることを示す.  $j \restriction \kappa$  の値域が  $\{y \in \text{On}^N : y <^N [d]\}$  に収まることは, 各  $\alpha \in \kappa$  について  $\langle \alpha, \alpha, \alpha, \dots \rangle \in^* \langle 0, 1, 2, \dots \rangle$  よりよい. 順序保存性, 単射性は再び明らかである.

全射性を示す.  $[f] \in \text{On}^N$  で  $[f] <^N [d]$  なるものをとる. すると  $f$  はある  $G$  のメンバーの上で押し下げ関数である.  $G$  が正規なので, ある集合  $X \in G$  上で  $f$  は定数関数である. その定数  $\alpha < \kappa$  について  $j(\alpha) = [f]$  を得る.

(3) の証明. (2) の証明は全射性以外, 正規性を使っていない. そこで  $\text{ran}(j \restriction \kappa) \subseteq \{y \in \text{On}^N : y <^N [d]\}$  は順序型  $\kappa$  を持つ. よって,  $\{y \in \text{On}^N : y \leq^N [d]\}$  は順序型  $\kappa + 1$  の部分集合を持つ.  $[d] < j(\kappa)$  であるため,  $\{y \in \text{On}^N : y <^N j(\kappa)\}$  も順序型  $\kappa + 1$  の部分集合を持つ. よって, この集合は順序型  $\kappa$  を持つことはない.  $\square$

**定理 4.3 (Silver).**  $\kappa$  を特異基数で  $\text{cf}(\kappa) = \omega_1$  とする. また, すべての  $\lambda < \kappa$  で  $2^\lambda = \lambda^+$  と仮定する. このとき  $2^\kappa = \kappa^+$ .

証明.  $(\text{stat}_{\omega_1}, \subseteq)$  を  $\omega_1$  の定常集合全体が包含関係で作る半順序集合とする.  $G$  を  $(V, \text{stat}_{\omega_1})$  ジェネリクフィルターとする.  $V[G]$  で議論する.  $G$  は  $\omega_1^M$  上の正規  $\sigma$  完備  $M$  超フィルターである.  $(N, \varepsilon^N) = \text{Ult}_G(V)$  をジェネリク超冪とし,  $j : V \rightarrow N$  を誘導される初等埋め込みとする.

$\langle \kappa_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$  を  $V$  の中で単調増加連続な基数の列で  $\kappa$  に収束するものとする.  $e$  を  $N$  の中の基数とし,  $e(\alpha) = \kappa_\alpha$  で定められる関数によって表現されるものとする.  $e^+$  を  $N$  の中で  $e$  の後続基数とする.

$x \in N$  に対して  $\text{ext}(x) = \{y \in N : y \varepsilon^N x\}$  とおく. これは  $V[G]$  の集合である. この定義より特に

$$\text{ext}(\mathcal{P}^N(e)) = \{x \in N : N \models "x \subseteq e"\}$$

である.

**主張 A:**  $|\mathcal{P}^V(\kappa)| \leq |\text{ext}(\mathcal{P}^N(e))|$ .

**証明:**  $V$  の中の  $X \subseteq \kappa$  について関数  $f_X$  を  $f_X(\alpha) = X \cap \kappa_\alpha$  ( $\alpha \in \omega_1$ ) と定める.  $f_X$  が表現する  $N$  の元は,  $N$  の中で  $e$  の部分集合である. また,  $X \neq Y$  なら, 関数  $f_X$  と  $f_Y$  はゆくゆく異なるので, 異なる  $N$  の元を表現する. //

**主張 B:**  $|\text{ext}(\mathcal{P}^N(e))| = |\text{ext}(e^+)|$ .

**証明:**  $V$  で任意の  $\alpha$  について  $2^{\kappa_\alpha} = \kappa_\alpha^+$  であることから, Łoś の定理より,  $N$  で  $2^e = e^+$  が成り立つ. つまり  $F \in N$  がとれて,  $N \models F : 2^e \rightarrow e^+$  全単射となる. 各  $x \in \text{ext}(\mathcal{P}^N(e))$  について  $y \in N$  で  $N \models y = F(x)$  となる元を割り当てる関数を  $\tilde{F} : \text{ext}(\mathcal{P}^N(e)) \rightarrow \text{ext}(e^+)$  とする. これは全単射であることが確認できるので, 主張が示された. //

**主張 C:** 任意の  $a \varepsilon^N e$  について,  $\gamma < \omega_1^V$  が存在して,  $a \varepsilon^N j(\kappa_\gamma)$  である.

**証明:**  $a \varepsilon^N e$  を任意にとり, 関数  $f$  が  $a$  を表現するとする. このときある  $X \in G$  があって, 全ての  $\alpha \in X$  で  $f(\alpha) < \kappa_\alpha$  である. ここで極限順序数全体の集合は club なので  $G$  に属する. よって, 上で取った  $X$  は全ての元が極限順序数だと仮定して良い. したがって, 列  $\langle \kappa_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$  を連続で取っていたことから,  $f(\alpha) < \kappa_{\gamma(\alpha)}$  が, ある  $\gamma(\alpha) < \alpha$  について成り立つ.  $\gamma$  は押し下げ関数だから, ある  $\gamma < \omega_1^V$  が存在して, ある  $Y \in G$  について, 任意の  $\alpha \in Y$  で  $f(\alpha) < \kappa_\gamma$  となる. つまり  $a \varepsilon^N j(\kappa_\gamma)$  を得る. //

**主張 D:**  $|\text{ext}(e)| \leq \kappa$ .

**証明:** 各  $\gamma < \omega_1^V$  について,  $|j(\kappa_\gamma)| \leq |(\kappa_\gamma^{\aleph_1})^V| < \kappa$  である. 第一の不等号は  $j(\kappa_\gamma)$  の元というのはつねに  $\kappa_\gamma$  の元を値に取る  $\omega_1$  列で表現されるからである. よって, 主張 C と合わせて,  $|\text{ext}(e)| \leq \kappa$  を得る. //

**主張 E:**  $|\text{ext}(e^+)| \leq \kappa^+$ .

**証明:** もし,  $x \varepsilon^N e^+$  なら,  $N$  の中に  $x$  から  $e$  への単射があるから, 主張 B と同じ方法によって,  $\text{ext}(x)$  から  $\text{ext}(e)$  への単射を得る. したがって,  $\text{ext}(e^+)$  は全順序集合で, どの始切片もサイズたかだか  $\kappa$  を持つので,  $\text{ext}(e^+) \leq \kappa^+$  を得る ([Jec06] の Exercise 5.3 を参照). //

主張 A, B, E を組み合わせると

$$|\mathcal{P}^V(\kappa)| \leq |\text{ext}(\mathcal{P}^N(e))| \leq |\text{ext}(e^+)| \leq \kappa^+$$

を得る. これは  $V[G]$  での不等式である. ところが,  $|P| = 2^{\aleph_1} < \kappa$  であるため, chain condition により,  $V$  の全ての  $\kappa$  以上の基数は  $V[G]$  でも基数である. よって

$$|\mathcal{P}^V(\kappa)|^V \leq (\kappa^+)^V$$

を得る. これが欲しかった結論である. □

## 5 峻厳イデアル

### 参考文献

- [Jec06] Thomas Jech. *Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded*. Springer Monographs in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [新井 21] 新井敏康. **数学基礎論**. 東京大学出版会, 2021.