

# 可測基数ノート

でいぐ

2023 年 2 月 15 日

## 概要

本稿は可測基数についてのノートである。

## 目次

1 可測基数の初歩	1
2 正規フィルター	6
3 宇宙 $V$ の超冪と初等埋め込み	7

本稿の内容はほぼ Jech のテキスト [Jec06] を参考にしている。

## 1 可測基数の初歩

**定義 1.1.**  $S$  を無限集合とする。  $S$  上の (一様かつ  $\sigma$  加法的な確率) 測度とは  $\mu: \mathcal{P}(S) \rightarrow [0, 1]$  であって、次を満たすものである：

- (1)  $\mu(\emptyset) = 0, \mu(S) = 1$ .
- (2)  $X \subseteq Y \subseteq S$  なら,  $\mu(X) \leq \mu(Y)$ .
- (3) (一様性) 任意の  $s \in S$  について  $\mu(\{s\}) = 0$ .
- (4) ( $\sigma$  加法的性)  $X_n, n \in \omega$  が互いに素な  $S$  の部分集合たちであれば,

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \omega} X_n\right) = \sum_{n \in \omega} \mu(X_n).$$

測度論で扱う測度は  $S$  上のある  $\sigma$  加法族を定義域とするものであったが、ここで扱う測度は定義域が  $\mathcal{P}(S)$  なことに注意しよう。

**定義 1.2.**  $\mu$  を  $S$  上の測度とする。  $A \subseteq S$  が原子であるとは、 $\mu(A) > 0$  かつ任意の  $X \subseteq A$  に対して  $\mu(X) = 0$  または  $\mu(X) = \mu(A)$  となるものである。原子が存在しない測度を原子なしの測度という。

**定義 1.3.** (1) 基数  $\kappa$  が可測基数であるとは、 $\kappa$  上の  $\kappa$  完備な非単項超フィルターが存在することを言う。

(2) 基数  $\kappa$  が実数値可測基数であるとは、 $\kappa$  上の  $\kappa$  加法的測度が存在することを言う。

$S$  上の非単項超フィルターを考えることと、 $S$  上の値域が  $\{0, 1\}$  である (つまり、2 値である) 測度を考えることは同じである。

実際、非単項超フィルター  $U$  に対して

$$\mu(X) = \begin{cases} 1 & (X \in U) \\ 0 & (X \notin U) \end{cases}$$

で定義される測度を対応される写像と、2 値測度  $\mu$  に対して非単項超フィルター

$$U = \mu^{-1}\{1\}$$

を対応させる写像は互いの逆写像である。

また、この対応において、超フィルターが  $\kappa$  完備なものと測度が  $\kappa$  加法的なことが対応する。よって、可測基数は実数値可測基数である。

**定義 1.4.** 集合  $S$  上のイデアル  $I$  で  $\sigma$  飽和的であるとは、 $I$  に属さない  $S$  の部分集合族で互いに素なものはどれも、族の濃度が可算であることを意味する。

$S$  上の測度  $\mu$  から来るイデアル  $I_\mu = \mu^{-1}\{0\}$  は必ず  $\sigma$  飽和的である。なぜなら、 $\mathcal{A}$  が  $I$  に属さない (すなわち  $\mu$  の測度が正な) 部分集合で互いに素なものとしよう。このとき正の自然数  $n$  に対して  $\mu(A) > 1/n$  を満たす  $A \in \mathcal{A}$  は  $n$  個しかない。よって、 $\mathcal{A}$  は有限集合の可算和であるから、たかだか可算濃度を持つ。

**補題 1.5.** 可測基数は到達不能基数である。

証明.  $\kappa$  を可測基数とする。

$\kappa$  の正則性を示す。  $\kappa$  上の  $\kappa$  完備な非単項超フィルター  $U$  を取る。  $\kappa$  が特異だとすると、  $\kappa$  の共終列  $\langle \lambda_i : i < \text{cf}(\kappa) \rangle$  でおおのの  $\lambda_i$  は  $\kappa$  未満なものが取れる。今、  $\kappa = \bigcup_{i < \text{cf}(\kappa)} \lambda_i$  である。左辺  $\kappa$  は  $U$  に属するが、右辺はおおのの  $\lambda_i$  が  $U$  の意味で小さく、その  $\text{cf}(\kappa) < \kappa$  個の和集合だから  $U$  の意味で小さい。矛盾した。なお、ここで、おおのの  $\lambda_i$  が小さいのは各 1 点集合が小さく、  $\lambda_i$  はその  $\lambda_i < \kappa$  個の和集合として書けるからである。

$\kappa$  の強極限性を示す。背理法で、ある  $\lambda < \kappa$  について、  $2^\lambda \geq \kappa$  だと仮定する。集合  $S \subseteq \{0, 1\}^\lambda$  で  $|S| = \kappa$  となるものを取る。集合  $S$  上の  $\kappa$  完備な非単項超フィルター  $U$  を取る。各  $\alpha \in \lambda$  について集合  $X_\alpha \subseteq S$  を

$$\{f \in S : f(\alpha) = 0\} \text{ もしくは } \{f \in S : f(\alpha) = 1\}$$

で  $U$  に属する方とする。集合  $X$  を

$$X = \bigcap_{\alpha < \lambda} X_\alpha$$

で定めると  $X \in U$  であるが、明らかに  $X$  は 1 点集合である。これは  $U$  の非単項性に矛盾。  $\square$

**補題 1.6.** (1)  $\kappa$  を次を満たす最小の基数とする：非単項  $\sigma$  完備な超フィルターが存在する。  $U$  をそのような超フィルターの一つとする。このとき、  $U$  は  $\kappa$  完備である。

(2)  $\kappa$  を次を満たす最小の基数とする：  $\kappa$  上の測度が存在する。  $\mu$  をそのような測度とする。このとき測度 0 集合のイデアル  $I_\mu$  は  $\kappa$  完備である。

(3)  $\kappa$  を次を満たす最小の基数とする：  $\kappa$  上の  $\sigma$  完備かつ  $\sigma$  飽和的イデアルが存在する。  $I$  をそのようなイデアルとする。このとき  $I$  は  $\kappa$  完備である。

証明. (1).  $U$  が  $\kappa$  完備でないとは定する. すると  $\kappa$  の分割  $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}$  があって,  $\gamma < \kappa$  かつ各  $X_\alpha$  は  $U$  の意味で小さい. 関数  $f: \kappa \rightarrow \gamma$  を次で定める:

$$f(x) = \alpha \iff x \in X_\alpha.$$

つまり, 各入力  $x < \kappa$  について,  $x$  が何番目のピースに属しているかを返す関数である.  $\gamma$  上の超フィルター  $D$  を

$$D = \{Z \subseteq \gamma : f^{-1}(Z) \in U\}$$

で定める.  $U$  が  $\sigma$  完備なので,  $D$  も  $\sigma$  完備である.  $D$  は非単項でもある: なぜなら, 各  $\alpha < \gamma$  について  $f^{-1}\{\alpha\} = X_\alpha \notin U$  より  $\alpha \notin D$  だからである. したがって,  $D$  は  $\gamma$  上の単項  $\sigma$ -完備な超フィルターだが,  $\gamma < \kappa$  より, これは  $\kappa$  の最小性に矛盾.

(2).  $I_\mu$  が  $\kappa$  完備ではないとは定する. すると測度 0 集合の族  $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}$  で,  $\gamma < \kappa$  かつ, それらの和集合  $X = \bigcup_{\alpha < \gamma} X_\alpha$  は測度正なものとれる.  $X_\alpha$  たちは互いに素であると仮定しても良い.  $f: X \rightarrow \gamma$  を

$$f(x) = \alpha \iff x \in X_\alpha$$

と定め,  $\gamma$  上の測度  $\nu$  を

$$\nu(Z) = \frac{\mu(f^{-1}(Z))}{\mu(X)}$$

と定める.  $\nu$  は  $\sigma$  加法的である. また,  $\nu$  は一様である, なぜなら, 各  $\alpha < \gamma$  について  $\nu(\{\alpha\}) = \frac{\mu(X_\alpha)}{\mu(X)} = 0$  だからである. これは  $\kappa$  の最小性に反する.

(3) の証明は (1) や (2) と同様である. □

$\mu$  を集合  $S$  上の測度とし,  $I_\mu$  を測度 0 集合のイデアルとすれば,  $\mu$  が  $\kappa$  加法的なら,  $I_\mu$  が  $\kappa$  完備なことは明らかである. 逆も言える:

**補題 1.7.**  $\mu$  を集合  $S$  上の測度とし,  $I_\mu$  を測度 0 集合のイデアルとする. このとき, もし  $I_\mu$  が  $\kappa$  完備なら,  $\mu$  は  $\kappa$  加法的である.

証明.  $\gamma < \kappa$  とし,  $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}$  を互いに素な  $S$  の部分集合の族とする.  $X_\alpha$  たちが互いに素なので, そのうちたかだか可算個が正の測度を持つ. よって,

$$\{X_\alpha : \alpha < \gamma\} = \{Y_n : n \in \omega\} \cup \{Z_\alpha : \alpha < \gamma\}$$

と書くことができる. ここに各  $Z_\alpha$  は測度 0 集合. よって,

$$\mu\left(\bigcup_{\alpha < \gamma} X_\alpha\right) = \mu\left(\bigcup_{n \in \omega} Y_n\right) + \mu\left(\bigcup_{\alpha < \gamma} Z_\alpha\right)$$

を得る.  $\mu$  が  $\sigma$  加法的なので,

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \omega} Y_n\right) = \sum_{n \in \omega} \mu(Y_n)$$

である. また,  $I_\mu$  が  $\kappa$  完備なので,

$$\mu\left(\bigcup_{\alpha < \gamma} Z_\alpha\right) = 0$$

である. 以上より,

$$\mu\left(\bigcup_{\alpha < \gamma} X_\alpha\right) = \sum_{\alpha < \gamma} \mu(X_\alpha)$$

を得る. □

**補題 1.8.** (1) ある集合上の原子なしの測度が存在するとき, ある基数  $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$  上に測度が存在する.

(2)  $I$  を集合  $S$  上の  $\sigma$  完備  $\sigma$  飽和的イデアルとする. このとき, ある  $Z \subseteq S$  に対して  $I \restriction Z = \{X \subseteq Z : X \in I\}$  が極大イデアルであるか, または,  $\sigma$  完備  $\sigma$  飽和的イデアルがある  $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$  上に存在するかのどちらかが成り立つ.

証明. (1).  $\mu$  をそのような測度とする.  $S$  の測度正な部分集合からなり, 逆向きの包含関係で順序付けられた木  $T$  を構成する.  $T$  の根は  $S$  である. 各  $X \in T$  について,  $X$  の測度正な集合への分割  $X = Y \cup Z, Y \cap Z = \emptyset$  を取り, この 2 つを  $X$  の直後の元とする.  $\alpha$  が極限順序数のとき  $T$  の第  $\alpha$  レベルにはすべての共通部分  $X = \bigcap_{\xi < \alpha} X_\xi$  であって,  $\langle X_\xi : \xi < \alpha \rangle$  は  $T \restriction \alpha$  の増大鎖で  $X_\xi$  は第  $\xi$  レベルの元,  $X$  は測度正なものを置く.

$T$  のどの枝も可算である: なぜなら,  $\langle X_\xi : \xi < \alpha \rangle$  が枝ならば,  $\langle X_\xi \setminus X_{\xi+1} : \xi < \alpha \rangle$  は測度正な集合の互いに素な族となるからである.

同様に,  $T$  のどのレベルも可算であることも分かる. よって,  $T$  はただだか  $2^{\aleph_0}$  個の極大枝を持つ (各  $\alpha < \omega_1$  について高さ  $\alpha$  の極大枝の個数はただだか  $2^{\aleph_0}$ . よってそれらの  $\omega_1$  個の和集合でただだか  $2^{\aleph_0}$  個となる).

$\{b_\alpha : \alpha < \kappa\}, \kappa \leq 2^{\aleph_0}$  をすべての極大枝  $b = \{X_\xi : \xi < \gamma\}$  であって,  $\bigcap_{\xi < \gamma} X_\xi$  が非空なものの枚挙とする. 各  $\alpha < \kappa$  について  $Z_\alpha = \bigcap b_\alpha$  とおく.  $\{Z_\alpha : \alpha < \kappa\}$  は  $S$  の測度 0 集合への分割となる ( $Z_\alpha$  が測度 0 でないとすると, 一個高さを上げることができ枝の極大性に反する; また, 互いの異なる極大枝  $b_\alpha$  と  $b_\beta$  はどこかで枝分かれしているはずだから, 後続ステップでの構成の仕方より,  $X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$  を得る; 覆っていることは  $s \in S$  を任意にとるとき,  $s$  が入っている集合を根から追跡することにより, ある  $X_\alpha$  に  $s$  が入っていることがわかるからよい). あとは  $f: S \rightarrow \kappa$  を  $f(x) = \alpha \iff x \in Z_\alpha$  とおき,  $\kappa$  上の測度  $\nu$  を  $\nu(Z) = \mu(f^{-1}(Z))$  とおけば,  $\nu$  は一様な  $\sigma$  加法的測度である.

(2). (1) と同様である. □

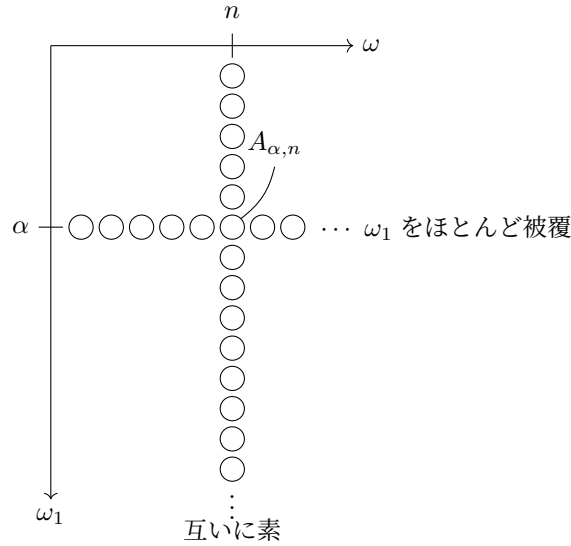
**系 1.9.**  $\kappa$  が実数値可測基数ならば,  $\kappa$  は可測基数か,  $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$  である. より一般に,  $\kappa$  が  $\kappa$  完備  $\sigma$  飽和的イデアルを持つと,  $\kappa$  は可測基数であるか,  $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$  である.

証明. 補題 1.8 の証明より,  $\mu$  が  $S$  上の原子なしの測度なら,  $S$  のただだか  $2^{\aleph_0}$  個への測度 0 個への分割が存在することがわかる. つまり,  $\mu$  は  $(2^{\aleph_0})^+$  加法的ではない. したがって, 原子なしの  $\kappa$  加法的測度を  $\kappa$  が持つとき,  $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$  である (結論の否定を取ると,  $\kappa \geq (2^{\aleph_0})^+$  だが, これと  $\kappa$  加法性より  $(2^{\aleph_0})^+$  加法性が出るから). 後半の主張も同様. □

補題 1.8 の (1) の主張の結論には「原子なし」が含まれていなかったが, これは実際には「原子なし」と結論付けられる. なぜなら, 原子があると  $\kappa$  は可測基数となるが, 補題 1.5 より, それは  $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$  と相容れないからだ.

**定義 1.10.**  $(\aleph_1, \aleph_0)$ -Ulam 行列とは,  $\omega_1$  の部分集合の族  $\langle A_{\alpha,n} : \alpha \in \omega_1, n \in \omega \rangle$  であって, 次の 2 条件を満たすものである.

- (1) 各  $n \in \omega$  と異なる  $\alpha, \beta \in \omega_1$  について  $A_{\alpha,n} \cap A_{\beta,n} = \emptyset$  である.
- (2) 各  $\alpha \in \omega_1$  について, 集合  $\omega_1 \setminus \bigcup_{n \in \omega} A_{\alpha,n}$  はただだか可算集合である.



**補題 1.11.**  $(\aleph_1, \aleph_0)$ -Ulam 行列は存在する.

証明. 各  $\xi \in \omega_1$  に対して  $f_\xi: \omega \rightarrow \omega_1$  を  $\xi \subseteq \text{ran}(f_\xi)$  なるものとする. 集合  $A_{\alpha,n}$  を

$$\xi \in A_{\alpha,n} \iff f_\xi(n) = \alpha$$

と定める.

$\xi \in A_{\alpha,n} \cap A_{\beta,n}$  なら  $\alpha = f_\xi(n) = \beta$  となるので, Ulam 行列の条件 (1) が成り立っていることがわかる.

$\alpha \in \omega_1$  とする.  $\xi > \alpha$  に対して,  $f_\xi$  の取り方より,  $f_\xi(n) = \alpha$  となる  $n \in \omega$  が存在する. よって,

$$[\alpha + 1, \omega_1) \subseteq \bigcup_{n \in \omega} A_{\alpha,n}$$

なので条件 (2) も成り立っている. □

**演習問題 1.12.**  $(\aleph_1, \aleph_0)$ -Ulam 行列の定義において, 「各行は可算集合を除いてほとんど  $\omega_1$  を覆っている」という条件を「各行は  $\omega_1$  を (完全に) 覆っている」と変更したバージョンは存在しないことを示せ.

**補題 1.13.**  $\omega_1$  上の  $\sigma$  完備  $\sigma$  飽和的イデアルは存在しない. 特に  $\omega_1$  上の測度は存在しない.

証明. そのようなイデアル  $I$  が存在したと仮定する. また,  $\langle A_{\alpha,n} : \alpha \in \omega_1, n \in \omega \rangle$  を  $(\aleph_1, \aleph_0)$ -Ulam 行列とする.  $I$  の  $\sigma$  完備性と Ulam 行列の条件 (2) より, 各  $\alpha$  について自然数  $n_\alpha$  があって,  $A_{\alpha,n}$  は  $I$ -正である. したがって, 鳩の巣原理より,  $W \subseteq \omega_1$ ,  $|W| = \aleph_1$ ,  $n \in \omega$  があって, すべての  $\alpha \in W$  について  $n_\alpha = n$  である. すると  $\{A_{\alpha,n} : \alpha \in W\}$  は互いに素 (by Ulam 行列の条件 (1)) な非可算な  $I$ -正集合の族となる. これは  $I$  の  $\sigma$  飽和性に矛盾する. □

以上の  $\omega_1$  を一般の後続基数に一般化できる. 証明は同様なので省略する.

**定義と補題 1.14.**  $\lambda$  を基数とする.

(1)  $(\lambda^+, \lambda)$ -Ulam 行列とは,  $\lambda^+$  の部分集合の族  $\langle A_{\alpha,\eta} : \alpha \in \lambda^+, \eta \in \lambda \rangle$  であって, 次の 2 条件を満たすものである.

- (a) 各  $\eta \in \lambda$  と異なる  $\alpha, \beta \in \lambda^+$  について  $A_{\alpha, \eta} \cap A_{\beta, \eta} = \emptyset$  である.
- (b) 各  $\alpha \in \lambda^+$  について, 集合  $\lambda^+ \setminus \bigcup_{\eta \in \lambda} A_{\alpha, \eta}$  は  $\lambda$  以下の濃度を持つ.
- (2)  $(\lambda^+, \lambda)$ -Ulam 行列は存在する.
- (3)  $\lambda^+$  上の  $\lambda^+$  完備  $\sigma$  飽和的イデアルは存在しない.

**系 1.15.** 任意の実数値可測基数は, 弱到達不能基数である.

証明.  $\kappa$  を実数値可測基数とする. 正則なことは補題 1.5 と同様の証明でよい. 後続基数でないことは, 定義と補題 1.14 から分かる. □

以上より次が結論付けられる: ZFC に「ある集合上の測度が存在する」という命題を加えた公理系の無矛盾性の強さは ZFC より真に強い. なぜなら「ある集合上の測度が存在する」からはその測度が原子ありかなしかに応じて, 到達不能基数か弱到達不能基数のどちらかが出て, どちらも ZFC の無矛盾性を出すからである.

## 2 正規フィルター

フィルターが**正規**であるとは, それが対角共通部分を取る操作で閉じていることであった. また,  $\kappa$  上の  $\kappa$  完備な超フィルター  $U$  に対しては,  $U$  が正規であることと任意の押し下げ関数  $f: X \rightarrow \kappa$ ,  $X \in U$  に対して, ある  $Y \in U$  について  $f$  が  $Y$  上で定数関数となることと同値であった.

**定理 2.1.** 任意の可測基数の上に正規超フィルターが存在する.

証明.  $U$  を  $\kappa$  上の非単項  $\kappa$  完備超フィルターとする.  $f, g \in \kappa^\kappa$  に対して,

$$f =^* g \iff \{\alpha < \kappa : f(\alpha) = g(\alpha)\} \in U$$

という同値関係を入れる. また,

$$f <^* g \iff \{\alpha < \kappa : f(\alpha) < g(\alpha)\} \in U$$

という擬全順序関係を入れる.

無限下降列  $f_0 >^* f_1 >^* f_2 >^* \dots$  は存在しない. 実際, それがあれば  $X_n = \{\alpha : f_n(\alpha) > f_{n+1}(\alpha)\} \in U$  だが,  $U$  が  $\sigma$  完備なので,  $X = \bigcap_{n \in \omega} X_n \in U$  であり, 特に  $X$  は空でない.  $\alpha \in X$  を一つ取ると, 順序数の無限下降列  $f_0(\alpha) > f_1(\alpha) > f_2(\alpha) > \dots$  ができて矛盾である.

したがって,  $<^*$  は擬整列順序である.

$f: \kappa \rightarrow \kappa$  を次を満たす (この擬整列順序で) 最小の関数とする: 任意の  $\gamma < \kappa$  に対して,  $\{\alpha : f(\alpha) > \gamma\} \in U$  である. このような  $f$  は少なくとも 1 つ存在する. たとえば対角関数  $d(\alpha) = \alpha$  は条件を満たす.

$D = f(U) = \{X \subseteq \kappa : f^{-1}(X) \in U\}$  とおく.  $D$  が  $\kappa$  上の正規超フィルターであることを示そう.

各  $\gamma < \kappa$  に対して,  $f^{-1}\{\gamma\} \notin U$  である ( $f^{-1}[\gamma + 1, \kappa) \in U$  だから). よって,  $\gamma \notin D$  なので,  $D$  は非単項である.

$D$  の正規性を示そう.  $h$  を  $X \in D$  上の押し下げ関数とする.  $h$  が  $D$  のあるメンバー上で定数なことを示さなければいけない.  $g \in \kappa^\kappa$  を  $g(\alpha) = h(f(\alpha))$  で定義される関数とする.  $g(\alpha) < f(\alpha)$  が

すべての  $\alpha \in f^{-1}(X)$  で成り立つ。よって、 $g <^* f$  である。 $f$  の最小性より、ある  $\gamma < \kappa$  に対して  $Y := \{\alpha : g(\alpha) = \gamma\} \in U$  となる。したがって、 $D$  の定義より  $f(Y) \in D$  であり、また、 $h$  は  $f(Y)$  上で定数  $\gamma$  を取る。  $\square$

### 3 宇宙 $V$ の超冪と初等埋め込み

**定理 3.1.** 可測基数が存在することと  $V = L$  は両立しない。

証明. 可測基数が存在し、かつ  $V = L$  だと仮定する。最小の可測基数を  $\kappa$  とし、 $\kappa$  上の非単項  $\kappa$  完備超フィルターを  $U$  とする。 $j: V \rightarrow M$  を  $U$  から生じる初等埋め込みとする。今、 $V = L$  を仮定しているので、 $L$  の内部モデルとしての最小性により  $M = V = L$  である。

$$V \models \kappa \text{ は最小の可測基数}$$

と  $j$  の初等性により

$$V \models j(\kappa) \text{ は最小の可測基数}$$

である。よって、 $j(\kappa) = \kappa$  とならないといけないが、これは  $j(\kappa) > \kappa$  であったことに矛盾。  $\square$

**定理 3.2.**  $j: V \rightarrow M$  を非自明な初等埋め込みとする。このとき、可測基数が存在する。

証明.  $\kappa = \text{crit}(j)$  とおく。 $\kappa$  が可測基数なことを示す。

$$D = \{X \subseteq \kappa : \kappa \in j(X)\}$$

とおく。 $D$  が非単項  $\kappa$  完備超フィルターなことを示す。  $\square$

### 参考文献

[Jec06] Thomas Jech. *Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded*. Springer Monographs in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2006.