

$\mathbf{PT}_{f,g}$: $\text{non}(\text{meager})$ を上げる強制法

でいぐ

2023 年 1 月 25 日

概要

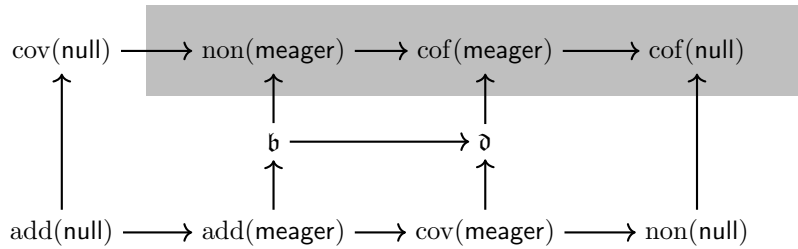
本稿は Bartoszyński と Judah の本 [BJ95] に載っている $\mathbf{PT}_{f,g}$ という強制法について詳しく証明を書いたものである． $\mathbf{PT}_{f,g}$ は $\text{non}(\text{meager})$ を上げ、ほかの基数不変量には影響を与えない強制法である．

目次

| | | |
|-----|---|---|
| 1 | はじめに | 1 |
| 2 | 強制法の性質 | 2 |
| 2.1 | Axiom A と strong axiom A | 2 |
| 2.2 | 性質 $B_{f,h}$ と (f,h) -bounding | 3 |
| 2.3 | $\sqsubseteq^{\text{random}}$ について | 4 |
| 3 | $\mathbf{PT}_{f,g}$ について | 4 |
| 3.1 | $\mathbf{PT}_{f,g}$ は $\text{non}(\text{meager})$ を上げる | 4 |
| 3.2 | $\mathbf{PT}_{f,g}$ は proper かつ ω^ω -bounding | 5 |
| 3.3 | $\mathbf{PT}_{f,g}$ は $\text{cov}(\text{null})$ を保つ | 7 |
| 3.4 | $\mathbf{PT}_{f,g}$ は $\text{non}(\text{null})$ を保つ | 8 |

1 はじめに

$\mathbf{PT}_{f,g}$ は proper な強制法で $\text{non}(\text{meager})$ を上げ、ほかの基数不変量には影響を与えない強制法である．すなわち、CH のモデル上で ω_2 回 $\mathbf{PT}_{f,g}$ の可算台反復を行うと、Cichoń の図式において次の図のように分離する．



この強制法は [BJS93] で考案され、その後テキスト [BJ95] にも載せられている．本稿ではこの強制法のサーベイである．

2 強制法の性質

この節ははじめは読み飛ばして、必要に応じて戻ってくればよい。

2.1 Axiom A と strong axiom A

定義 2.1. 強制概念 P が axiom A を満たすとは P の順序の列 $\langle \leq_n : n \in \omega \rangle$ が存在して次の 3 条件を満たすことである。

- (1) $q \leq_{n+1} p$ ならば $q \leq_n p$ かつ $q \leq p$.
- (2) $\langle p_n : n \in \omega \rangle$ が P の元の列ですべての n で $p_{n+1} \leq_n p_n$ を満たすならば, $p \in P$ が存在して, すべての n で $p \leq_n p_n$ である.
- (3) $A \subseteq P$ が反鎖ならば, すべての $p \in P$ と $n \in \omega$ に対して $q \leq_n p$ が存在して, $\{r \in A : q \parallel r\}$ は可算.

条件 (3) の代わりに次の (3') を仮定したとき P は strong axiom A を満たすという。

- (3') $A \subseteq P$ が反鎖ならば, すべての $p \in P$ と $n \in \omega$ に対して $q \leq_n p$ が存在して, $\{r \in A : q \parallel r\}$ は有限.

事実 2.2. axiom A を満たす強制概念は proper である。

補題 2.3. strong axiom A を満たす強制概念 P は ω^ω -bounding である。すなわち

$$P \Vdash (\forall f \in \omega^\omega)(\exists g \in \omega^\omega \cap V)(f \leq g).$$

証明. $p \in P$ と名前 \dot{f} で $p \Vdash \dot{f} \in \omega^\omega$ なものをとる。各 $n \in \omega$ に対して, A_n を $\dot{f}(n)$ の値を決定する条件からなる極大反鎖とする。条件の列 $\langle p_n : n \in \omega \rangle$ を次を満たすように取る。

- $p_0 \leq p$.
- $p_{n+1} \leq_n p_n$.
- $\{r \in A_n : p_n \parallel r\}$ は有限.

これは (3') より取れる。最後に q を $\langle p_n : n \in \omega \rangle$ の fusion とする。

今, 有限集合 $\{r \in A_n : p_n \parallel r\}$ に対応する $\dot{f}(n)$ の値の候補の全体を B_n とする:

$$B_n = \{m \in \omega : (\exists r \in A_n)(p_n \parallel r \wedge r \Vdash \dot{f}(n) = m)\}.$$

B_n は有限集合なので $g(n) = \max B_n$ とおく。このとき $q \Vdash (\forall n \in \omega)(\dot{f}(n) \leq g(n))$ である。

実際, $n \in \omega$ とする。 $q' \leq q$ を任意にとる。 A_n が極大反鎖なので $r \in A_n$ があって, $q' \parallel r$ 。 q' は p_n より下にあるので, r は p_n と両立する。 よって, $r \Vdash \dot{f}(n) \in B_n$ 。 特に $r \Vdash \dot{f}(n) \leq g(n)$ である。 q' と r の共通拡大 s をとると, $s \Vdash \dot{f}(n) \leq g(n)$ でもあるので, これで $q \Vdash (\forall n \in \omega)(\dot{f}(n) \leq g(n))$ が示された。 \square

補題 2.4. 1. P を強制概念とする。 axiom A の条件 (3) は次と同値である。

$$(\forall \dot{a} \in V^P)(\forall p \in P)(\forall n \in \omega)(p \Vdash \dot{a} \in V \Rightarrow (\exists x \text{ 可算集合})(\exists q \leq_n p)(q \Vdash \dot{a} \in x))$$

2. P を強制概念とする。 strong axiom A の条件 (3') は次と同値である。

$$(\forall \dot{a} \in V^P)(\forall p \in P)(\forall n \in \omega)(p \Vdash \dot{a} \in V \Rightarrow (\exists x \text{ 有限集合})(\exists q \leq_n p)(q \Vdash \dot{a} \in x))$$

2.2 性質 $B_{f,h}$ と (f, h) -bounding

定義 2.5. 強制概念 P は axiom A を満たすとする. $f \in \omega, h \in \omega^{\omega \times \omega}$ とする. 各 $n \in \omega$ について

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{h(k, n)^n}{f(k)} = 0$$

と仮定する. P が性質 $B_{f,h}$ を持つとは,

$$\begin{aligned} & (\forall p \in P)(\forall n \in \omega)(\exists c, l \in \omega)(\forall m \geq l)(\forall r \in \omega)(\forall \dot{B} \in V^P) \\ & (T \Vdash (\dot{B} \subseteq f(m) \ \& \ |\dot{B}| \leq r) \rightarrow \\ & (\exists q \leq_n p)(\exists A \subseteq f(m))(|A| \leq c \cdot h(m, n) \cdot r \ \& \ q \Vdash \dot{B} \subseteq A)). \end{aligned}$$

を満たすこととする.

定義 2.6. $f, h \in \omega^\omega$ は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h(n)^n}{f(n)} = 0$$

を満たすとする. 強制概念 P が (f, h) -bounding であるとは,

$$P \Vdash (\forall x \in \prod_n f(n))(\exists S \in V \cap ([\omega]^{<\omega})^\omega)(\forall n)(|S(n)| \leq h(n) \ \& \ f(n) \in S(n))$$

を満たすことである.

補題 2.7. $B_{f,h}$ を満たす強制概念は (f, h^*) -bounding である. ここに

$$h^*(n) = h(n, n).$$

証明. $p \in P, \dot{x} \in V^P$ で $p \Vdash \dot{x} \in \prod_n f(n)$ とする. [TODO] □

事実 2.8. 各 iterand が「proper かつ (f, h) -bounding」な強制法の加算台反復は proper かつ (f, h) -bounding である.

補題 2.9. (f, h) -bounding な強制法はランダム実数を付け加えない.

証明. $\{I_n : n \in \omega\}$ を ω の区間分割で $|I_n| = f(n)$ なものとする. $p \Vdash \dot{y} \in 2^\omega$ とする. $p \Vdash \dot{x}(n) = \dot{y} \restriction I_n$ なる名前 \dot{x} を定める. すると (f, h) -bounding より $q \leq p$ と S がとれて, 各 $n \in \omega$ について

$$|S(n)| \leq h(n) \ \& \ q \Vdash \dot{x}(n) \in S(n).$$

今,

$$q \Vdash \dot{A} = \{z \in 2^\omega : (\forall n)(z \restriction I_n \in S(n))\}$$

とおくと, $q \Vdash \dot{y} \in \dot{A}$ であり, また

$$\begin{aligned} \mu(\dot{A}) & \leq \mu(\{z \in 2^\omega : z \restriction I_n \in S(n)\}) \\ & \leq \frac{h(n)}{2^{f(n)}} \\ & \leq \frac{h(n)^n}{f(n)} \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

であるので, \dot{A} は測度 0 である. また, \dot{A} は V の元でコードできる閉集合である. よって, \dot{y} はランダム実数ではない. □

2.3 $\sqsubseteq^{\text{random}}$ について

3 $\mathbf{PT}_{f,g}$ について

仮定 3.1. この節では $f \in \omega^\omega$ と $g \in \omega^{\omega \times \omega}$ は次の条件を満たす関数とする.

1. すべての $n \in \omega$ に対して $f(n) > \prod_{j < n} f(j)$.
2. すべての $n, j \in \omega$ に対して $g(n, j+1) > f(n) \cdot g(n, j)$.
3. $\min\{j \in \omega : g(n, j) > f(n+1)\} \rightarrow \infty$ (as $n \rightarrow \infty$)

このような関数 f, g は存在する. 番号の小さい方から値を順に定めていくことによりそれが分かる.

定義 3.2. 木 $T \subseteq \omega^{<\omega}$ に対して $\text{stem}(T)$ をその幹, すなわちその上で分岐する最初のノードとする. 木 $T \subseteq \omega^{<\omega}$ とそのノード $s \in T$ に対して

$$T_s = \{t \in T : s \leq t \text{ or } t \leq s\}$$

とおく.

定義 3.3. 集合 Seq^f を $\text{Seq}^f = \{s \in \omega^{<\omega} : (\forall j < |s|)(s(j) \leq f(j))\}$ と定める. $\mathbf{PT}_{f,g}$ を次で定められる強制概念とする. $T \in \mathbf{PT}_{f,g}$ であるのは次のとき:

1. T は Seq^f の完全な部分木.
2. 関数 $r \in \omega^\omega$ で $\lim_{n \rightarrow \infty} r(n) = \infty$ なものが存在して, 次を満たす:

$$(\forall s \in T)(\text{stem}(T) \subseteq s \rightarrow |\text{succ}_T(s)| \geq g(|s|, r(|s|))).$$

$\mathbf{PT}_{f,g}$ の元の順序は包含で定められる: $S, T \in \mathbf{PT}_{f,g}$ について $T \leq S \Leftrightarrow T \subseteq S$.

3.1 $\mathbf{PT}_{f,g}$ は non(meager) を上げる

補題 3.4. $\mathbf{PT}_{f,g} \Vdash V \cap \omega^\omega \in \text{meager}$.

証明. G を $(V, \mathbf{PT}_{f,g})$ ジェネリックフィルターとする. $f_G = \bigcup \{\text{stem}(T) : T \in G\}$ とする. すると

$$(\forall h \in V \cap \omega^\omega)(\forall^\infty n)(h(n) \neq f_G(n))$$

である. 実際, $h \in V \cap \omega^\omega$ に対して

$$D_h = \{T \in \mathbf{PT}_{f,g} : (\forall s \in T)(\text{stem}(T) \subseteq s \rightarrow s(|s|-1) \neq h(|s|-1))\}$$

とおくとこれは V 内で定められる稠密集合である. 稠密性を今から確かめよう.

$T \in \mathbf{PT}_{f,g}$ とする. すると $r \in \omega^\omega$ で $\lim_{n \rightarrow \infty} r(n) = \infty$ であって

$$(\forall s \in T)(\text{stem}(T) \subseteq s \rightarrow |\text{succ}_T(s)| \geq g(|s|, r(|s|)))$$

を満たす. $r'(n) = r(n) - 1$ とおくと仮定 3.1 (2) より, ある n_0 があって, すべての $n \geq n_0$ で

$$g(n, r(n)) - 1 \geq g(n, r'(n))$$

が言える. $T' \subseteq T$ をまず幹の高さを n_0 以上にして, 次に幹の高さ以上の h と同じ値のラベルを取るノードを削った木とする. 今,

$$\text{succ}_{T'}(s) \geq \text{succ}_T(s) - 1 \geq g(|s|, r(|s|)) - 1 \geq g(|s|, r'(|s|))$$

であるので、 r' は T' が $\mathbf{PT}_{f,g}$ の元であることを目撃する。これで、 D_h の稠密性が言えた。

以上より

$$V \cap \omega^\omega \subseteq \{h \in \omega^\omega : (\forall^\infty n)(h(n) \neq f_G(n))\} \in \text{meager}$$

である。 □

3.2 $\mathbf{PT}_{f,g}$ は proper かつ ω^ω -bounding

$T \in \mathbf{PT}_{f,g}$ について、 r_T で r であって条件 (2) を目撃し、 $r(i) = 0$ for all $i < |\text{stem } T|$ を満たすものの中で最大なものを表す。

定義 3.5.

$$\mathbf{PT}_{f,g}^* = \{T \in \mathbf{PT}_{f,g} : r_T \text{ is non-decreasing \& } (\forall s \in T)(\text{stem}(T) \subseteq s \rightarrow |\text{succ}_T(s)| = g(|s|, r_T(|s|)))\}.$$

補題 3.6. $\mathbf{PT}_{f,g}^*$ は $\mathbf{PT}_{f,g}$ の稠密部分集合である。

証明. $T \in \mathbf{PT}_{f,g}$ をとる. $\lim r_T = \infty$ より、各 $k \in \omega$ について $i_k \in \omega$ があって $(\forall i \geq i_k)(r_T(i) \geq k)$. $(i_k : k \in \omega)$ は単調増大としてよい. $r' \in \omega^\omega$ を

$$r'(i) = k \quad (i \in [i_k, i_{k+1}))$$

とおくと r' は非減少かつ ∞ に発散し、 $r' \leq r_T$ である. T の中のノードをいくつか消して $\text{succ}_{T'}(s) = g(|s|, r'(|s|))$ なる部分木 T' を作る. すると $T' \leq T$, $r_{T'} = r'$ かつ $T' \in \mathbf{PT}_{f,g}^*$ である. □

定義 3.7. $S, T \in \mathbf{PT}_{f,g}^*$ と $n \in \omega$ に対して関係 $T \leq_n S$ を次で定める：

$$T \leq_n S \Leftrightarrow T \leq S \text{ \& } (\forall i \in \omega)(T \cap \omega^{i+1} \neq S \cap \omega^{i+1} \rightarrow r_{T'}(i) \geq n).$$

補題 3.8. $\langle T^n : n \in \omega \rangle$ を $\mathbf{PT}_{f,g}^*$ の元の列であって、 $T^{n+1} \leq_n T^n$ for $n \in \omega$ なものとする. すると $T \in \mathbf{PT}_{f,g}^*$ があって、 $T \leq_n T^n$ for all n を満たす。

証明. $n \in \omega$ に対して、 $u_n = \min\{j \in \omega : r_{T^{n+1}}(j) \geq n\}$ とおく. 木 T を

$$T = \bigcup_{n \in \omega} (T^n \cap \omega^{\leq u_n}).$$

により定める。

主張 A: 各 u_n は well-defined である。

∴ これは $r_{T^n}(j) \rightarrow \infty$ ($j \rightarrow \infty$) から従う. //

主張 B: $u_n \leq u_{n+1}$.

∴ $r_{T^{n+1}} \leq r_{T^n}$ より、もし $r_{T^{n+1}}(j) \geq n$ ならば $r_{T^n}(j) \geq n$ である. //

主張 C: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$.

∴ $k \in \omega$ を固定する. すると $n_0 \in \omega$ を取れて $f(k) < g(k, n_0)$ を満たす. このとき各 $n > n_0$ について

$$g(k, r_{T^n}(k)) \leq f(k) \leq g(k, n_0)$$

を得る、なぜなら我々の木は Seq^f の部分木だからである. よって、 g の単調性より、 $r_{T^n}(k) \leq n_0 < n$ を得る. ゆえに $u_n > k$. //

主張 D: 各 $n \in \omega$ について、 $T^n \cap \omega^{\leq u_n} = T^{n+1} \cap \omega^{\leq u_n}$.

\therefore) $s \in T^n \cap \omega^{\leq u_n}$ を取る. t を s の前者とする. $s \notin T^{n+1}$ だとする. すると, $T^n \cap \omega^{|t|+1} \neq T^{n+1} \cap \omega^{|t|+1}$. よって, $T^{n+1} \leq_n T^n$ より, $r_{T^{n+1}}(|t|) \geq n$ を得る. したがって, $u_n \leq |t|$. これは $|t| < |s| \leq u_n$ に矛盾する. //

主張 E: $T \in \mathbf{PT}_{f,g}^*$.

\therefore) 主張 D より

$$r_{T^{m+1}}(k) = r_{T^{n+1}}(k) \text{ (if } k \leq u_{m+1}, u_{n+1}).$$

である. よって, $r \in \omega^\omega$ を式

$$r(k) = r_{T^{n+1}}(k) \text{ (if } k \leq u_{n+1}).$$

によって定められる. この r は非減少であり, $\lim_{n \rightarrow \infty} r(n) = \infty$ を満たす. $s \in T$ を取る. すると $n \in \omega$ であって, $s \in T^{n+1} \cap \omega^{\leq u_{n+1}}$ を満たすものを取れる. このとき,

$$|\text{succ}_T(s)| = |\text{succ}_{T^{n+1}}(s)| = g(|s|, r_{T^{n+1}}(|s|)) = g(|s|, r(|s|)).$$

よって, $T \in \mathbf{PT}_{f,g}^*$. //

主張 F: すべての n について, $T \leq_n T^n$.

\therefore) $n \in \omega$ を固定する. $t \in T$ とする. すると $m \in \omega$ が取れて, $t \in T^m \cap \omega^{\leq u_m}$ を満たす. もし $m \geq n$ ならば, $t \in T^m \subseteq T^n$ である. もし $m < n$ ならば, $t \in T^m \cap \omega^{\leq u_m} \subseteq T_n \cap \omega^{\leq u_n} \subseteq T_n$ である. よって $T \subseteq T^n$ を得る.

また, $T \cap \omega^{\leq u_n} = T^n \cap \omega^{\leq u_n}$ である.

$i \in \omega$ を固定し, $T \cap \omega^{i+1} \neq T^n \cap \omega^{i+1}$ を仮定する. すると $i \geq u_n$ である. 自然数 m を $i < u_{m+1}$ を満たす最小としてとる. よって, $u_m \leq i < u_{m+1}$. すると $u_n \leq i < u_{m+1}$ より $n \leq m$ を得る.

ゆえに u_m の定義より, $r_{T^{m+1}}(i) \geq m \geq n$ を得る. したがって, $r_T(i) \geq n$. //

これで補題の証明が終わった. \square

補題 3.9. 任意の $r \in \omega^\omega$ で $\lim r = \infty$ なものと $n \in \omega$ に対して, $r' \in \omega^\omega$ で $\lim r' = \infty$ なものが存在して有限個を除いたすべての $k \in \omega$ で

$$g(k, r(k)) - g(k, n) \geq g(k, r'(k)).$$

証明. $r'(k) = r(k) - n$ が条件を満たす. 実際, 仮定 3.1 (2) より, 十分大きな k について

$$\begin{aligned} g(k, r(k)) &> f(k) \cdot g(k, r(k) - 1) \\ &> f(k)^2 \cdot g(k, r(k) - 2) \\ &> \dots \\ &> f(k)^n \cdot g(k, r(k) - n) \\ &> 2 \cdot g(k, r(k) - n) \\ &> g(k, r(k) - n) + g(k, n) \end{aligned}$$

が成り立つ. \square

補題 3.10. $T \in \mathbf{PT}_{f,g}^*$ かつ $n \in \omega$ とする. $T \Vdash \dot{a} \in V$ とする. すると $\tilde{T} \leq_n T$ と $m \in \omega$ があって,

$$(\forall s \in \tilde{T} \cap \omega^m)(\exists a)(\tilde{T}_s \Vdash \dot{a} = a).$$

証明. 集合 S を次で定める:

$$S = \{t \in T : (\exists m \in \omega)(\exists \tilde{T} \leq_n T_t)(\forall s \in \tilde{T} \cap \omega^m)(\tilde{T}_s \text{ decides } \dot{a})\}.$$

主張 A: $t \in T$ とする. $t \notin S$ ならば $|\text{succ}_T(t) \cap S| < g(|t|, n)$.

\therefore) 対偶を示す. $|\text{succ}_T(t) \cap S| \geq g(|t|, n)$ と仮定する. $\text{succ}_T(t) \cap S = \{s_1, \dots, s_l\}$ としよう. 各 s_i は S の元だから, $m_i \in \omega$ と $\tilde{T}^i \leq_n T_{s_i}$ がとれて,

$$(\forall s \in \tilde{T}^i \cap \omega^m)((\tilde{T}^i)_s \text{ decides } \dot{a})$$

となる. m を $m = \max\{m_1, \dots, m_l\}$ で定め,

$$\tilde{T} = \bigcup_{1 \leq i \leq l} \tilde{T}^i.$$

とおく. \tilde{T} を縮めると $\tilde{T} \in \mathbf{PT}_{f,g}^*$ かつ $\tilde{T} \leq_n T_s$ かつ $(\forall s \in \tilde{T} \cap \omega^m)(\tilde{T}_s \text{ decides } \dot{a})$ を得る.

よって $t \in S$ を得る. //

主張 B: $t \in T$ とする. このとき $t \notin S$ ならば $(\exists s \in \text{succ}_T(t))(s \notin S)$.

\therefore) 主張 A と似た議論で示せる. //

補題を示すために, 背理法により $\text{stem}(T) \notin S$ を仮定する. 木 $\tilde{S} \leq T$ をレベルに関する帰納法で

$$\text{succ}_{\tilde{S}}(s) = \text{succ}_T(s) \setminus S \quad (s \in \tilde{S})$$

と定める.

主張 B より $s \in \tilde{S}$ に対して $\text{succ}_{\tilde{S}}(s) = \emptyset$ は起こり得ない. そして主張 A より \tilde{S} の中で各高さ k と高さ k の各ノードに対して切り落とされた後続者の数は $g(k, n)$ で抑えられる. よって補題 3.9 より $\tilde{S} \in \mathbf{PT}_{f,g}$ である.

$\tilde{S}_1 \leq \tilde{S}$ と a であって $\tilde{S}_1 \Vdash \dot{a} = a$ なものを取る.

$t \in T$ と $\tilde{S}_2 \leq \tilde{S}_1$ であって $\tilde{S}_2 \leq_n T_t$ かつ $t \in \tilde{S}_2$ なものを取る. すると $m = |t|$ と \tilde{S}_2 は $t \in S$ を目撃する. しかし $t \in \tilde{S}_2 \subseteq \tilde{S}$ であるので, よって $t \notin S$ である. これは矛盾. \square

系 3.11. $\mathbf{PT}_{f,g}$ は strong axiom A を満たす.

3.3 $\mathbf{PT}_{f,g}$ は $\text{cov}(\text{null})$ を保つ

次の定理は $\mathbf{PT}_{f,g}$ の反復がランダム実数を付け加えないこと ($\text{cov}(\text{null})$ を保つこと) を保証するものである.

定理 3.12. $f \in \omega^\omega, g, h \in \omega^{\omega \times \omega}$ は仮定 3.1 に加えて次の条件も満たすとする.

(A) すべての $n, j \in \omega$ について $g(n, j+1) > f(n)^{f(n)} \cdot g(n, j)$.

(B) すべての $n, k \in \omega$ について $h(n, k) \geq \prod_{i < n} g(i, k)$.

(C) すべての $r, c, k \in \omega$ について $(\forall^\infty n)(c \cdot h(n, k)^r \leq f(n)/2)$.

このとき $\mathbf{PT}_{f,g}$ は性質 $B_{f,h}$ を満たす. すなわち,

$$\begin{aligned} & (\forall T \in \mathbf{PT}_{f,g})(\forall n \in \omega)(\exists c, l \in \omega)(\forall m \geq l)(\forall r \in \omega)(\forall \dot{B} \in V^{\mathbf{PT}_{f,g}}) \\ & (T \Vdash (\dot{B} \subseteq f(m) \ \& \ |\dot{B}| \leq r) \rightarrow \\ & (\exists T' \leq_n T)(\exists A \subseteq f(m))(|A| \leq c \cdot h(m, n) \cdot r \ \& \ T' \Vdash \dot{B} \subseteq A)). \end{aligned}$$

証明. $T \in \mathbf{PT}_{f,g}$, $n \in \omega$ とする. $l \in \omega$ を

$$(\forall s \in T)(|s| > l \rightarrow |\text{succ}_T(s)| > g(|S|, n+1))$$

なるようにとる. $c = |T \cap \omega^l|$ ととる. $m \geq l$ と $r \in \omega$ が与えられたとして

$$T \Vdash \dot{B} = \{\dot{b}_1, \dots, \dot{b}_r\} \subseteq f(m)$$

とする.

補題 3.10 より, $k \in \omega$ と $\tilde{T} \leq_{n+1} T$ が取れて,

$$(\forall j \leq r)(\forall s \in \tilde{T} \cap \omega^k)(\exists a_s^j \in \omega)(\tilde{T}_s \Vdash \dot{b}_j = a_s^j) \quad (*)$$

となる. k は大きく取り直せるので, $k \geq m$ としてよい.

列 $\tilde{T} = T^k \geq_n T^{k-1} \geq_n \dots \geq_n T^m$ を次のように構成する. T^{z+1} が構成されたとする. T^z を T^{z+1} の長さ z の列を後続者をいくつか取り除くことで得る. z に関する帰納法の仮定を次とする.

$$(\forall t \in T^{z+1} \cap \omega^{z+1})(\exists B^t \subseteq f(m))(|B^t| = r \ \& \ T_t^{z+1} \Vdash \dot{B} = B^t).$$

$z+1 = k$ では (*) より良い.

$s \in T^{z+1} \cap \omega^z$ とする. B を $\{B^t : t \in \text{succ}_{T^{z+1}}(s)\}$ の中でもっとも多く現れる集合とする.

$$\text{succ}_{T^z}(s) = \{t \in \text{succ}_{T^{z+1}} : B^t = B\}$$

とおく.

今, $s \in T^z \cap \omega^z$ ならば

$$|\text{succ}_{T^z}(s)| \geq \frac{g(z, n+1)}{f(m)^r}$$

である. 右辺の分母は B の選び方の個数, 分子は $\text{succ}_{T^z}(s)$ の個数である. 一番頻出する B を選んでいたおかげでこの不等号が成立する. したがって,

$$|\text{succ}_{T^z}(s)| \geq \frac{g(z, n+1)}{f(m)^r} \geq \frac{g(z, n+1)}{f(z)f(z)} \geq g(z, n)$$

を得る. 最後の不等式は仮定 (A) によるものである. よって, $T^z \geq_n T^{z+1}$ を得る.

最後に $\tilde{T} = T^m$ とおく. T^m の構成の仕方より

$$(\forall j \leq r)(\exists s \in \tilde{T} \cap \omega^m)(\exists a_s^j \in f(m))(\tilde{T}_s \Vdash \dot{b}_j = a_s^j)$$

を得る. また,

$$|\tilde{T} \cap \omega^m| \leq c \cdot g(l+1, n) \cdots g(m, n) \leq c \cdot h(m, n)$$

を得る. 一つ目の不等号は $c = |T \cap \omega^l|$ だから各高さで分岐する数を掛けていけば高さ m のノードの数が抑えられるからである. 二つ目は仮定 (B) による.

最後に

$$A = \{a_s^j : s \in \tilde{T} \cap \omega^m \ \& \ j \leq r\}$$

とおけば,

$$|A| \leq c \cdot h(m, n) \cdot r$$

$$\tilde{T} \leq_n T$$

$$\tilde{T} \Vdash \dot{B} \subseteq A$$

を得る. □

3.4 $\mathbf{PT}_{f,g}$ は $\text{non}(\text{null})$ を保つ

定理 3.13. $A \subseteq 2^\omega$ は $\mu^*(A) > 0$ (外測度正) を満たすとする. すると $\mathbf{PT}_{f,g} \Vdash \mu^*(A) > 0$.

証明. $c = \mu^*(A) > 0$ とおく. 背理法で結論の否定を仮定する. すると $T \in \mathbf{PT}_{f,g}$ と有理区間の名前の列 $\langle \dot{I}_n : n \in \omega \rangle$ があって, 次を満たす:

1. $T \Vdash \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\dot{I}_n) < \infty$.
2. $T \Vdash A \subseteq \bigcap_{m \in \omega} \bigcup_{n > m} \dot{I}_n$.

$s_0 = \text{stem}(T)$ とおく. 補題 3.10 より次のような自然数の単調増加列 $\langle k_n : n \in \omega \rangle$ が取れると仮定して良い.

1. 各 $s \in T \cap \omega^{k_n}$ について, T_s は \dot{I}_j (for $j \leq n$) の値を決めている.
2. $T \Vdash \sum_{n \geq |s_0|} \mu(\dot{I}_n) < c/2$.

各 $s \in T \cap \omega^{k_n}$ と $j \leq n$ について

$$I_j^s = \begin{cases} I & \text{if } T_s \Vdash \dot{I}_j = I \\ \emptyset & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定める.

$r \in \omega^\omega$ が $T \in \mathbf{PT}_{f,g}$ を目撃するとする. $r' \in \omega^\omega$ で $r'(n) \leq r(n)$ かつ $r'(n) \rightarrow \infty$ なものを考える.

補題 3.14. $x \in 2^\omega$ について次は同値.

1. $\tilde{T} \leq T$ があって r' は $\tilde{T} \in \mathbf{PT}_{f,g}$ を目撃し, かつ $\tilde{T} \Vdash x \notin \bigcup_{n \in \omega} \dot{I}_n$.
2. どんな $k \geq |s_0|$ についても, 有限の木 \mathbf{t} が存在して, 次を満たす:
 - (a) $\mathbf{t} \subseteq T \cap \omega^{\leq k}$.
 - (b) すべての $s \in \mathbf{t} \cap \omega^{\geq |s_0|}$ について $|\text{succ}_{\mathbf{t}}(s)| \geq g(|s|, r'(|s|))$
 - (c) もし $s \in \mathbf{t} \cap \omega^k$ ならば $x \notin \bigcup_{j \in \omega} I_j^s$.

証明. (1) \rightarrow (2) について. もし \tilde{T} が (1) を満たすならば, $\mathbf{t} = \tilde{T} \restriction k$ は (2) を満たす. (2) \rightarrow (1) について. コンパクト性定理を使えば (1) の \tilde{T} の存在が言える. \square

今集合 $D \subseteq 2^\omega$ を次で定める: $y \in D$ であるのは $\tilde{T} \in \mathbf{PT}_{f,g}$ が存在して次を満たすとき

1. $\tilde{T} \leq T$ かつ $\text{stem}(\tilde{T}) = s_0$
2. $\tilde{T} \Vdash y \notin \bigcup_{n \geq |s_0|} \dot{I}_n$
3. $(\forall n \geq |s_0|)(\forall s \in \tilde{T} \cap \omega^n)(|\text{succ}_{\tilde{T}}(s)| \geq g(n, r(n) - 1))$.

また各 $k \geq |s_0|$ について集合 $D_k \subseteq 2^\omega$ を次で定める: $y \in D_k$ であるのは有限な木 \mathbf{t} が存在して次を満たすとき

1. $\mathbf{t} \subseteq T \cap \omega^{\leq k}$.
2. $(\forall n \geq |s_0|)(\forall s \in \mathbf{t} \cap \omega^n)(|\text{succ}_{\mathbf{t}}(s)| \geq g(n, r(n) - 1))$.
3. $(\forall s \in \mathbf{t} \cap \omega^k)(y \notin \bigcup_{n \geq |s_0|} \dot{I}_n^s)$.

上の補題 3.14 より $D = \bigcap_{k \in \omega} D_k$ である. D_k は定義より明らかに Borel 集合であるため, D も Borel 集合, 特に Lebesgue 可測である.

また, D の定義より $D \cap A = \emptyset$ である. よって,

$$c = \mu^*(A) \leq \mu(2^\omega \setminus D)$$

となる.

D_k は減少列であるため, 測度の連続性より $k \in \omega$ があって,

$$\mu(2^\omega \setminus D_k) > 3c/4$$

を得る.

次に各 $k \in \omega$ と各 $s \in T$ であって, $|s_0| \leq |s| \leq k$ なものについて, 集合 $D_{k,s}$ を次で定める:
 $y \in D_{k,s}$ であるのは有限な木 \mathbf{t} が存在して次を満たすとき

1. $\mathbf{t} \subseteq T \cap \omega^{\leq k}$.
2. $(\forall n \geq |s|)(\forall v \in \mathbf{t} \cap \omega^n)(|\text{succ}_{\mathbf{t}}(v)| \geq g(n, r(n) - 1))$.
3. $(\forall v \in \mathbf{t} \cap \omega^k)(y \notin \bigcup_{n \geq |s_0|} I_n^s)$.

定義より $D_k = D_{k,s_0}$ は明らか. また, $D_{k,s}$ と $\bigcup_{n \geq |s_0|} I_n^s$ は交わらないので,

$$\mu(2^\omega \setminus D_{k,s}) \leq \sum_{n \geq |s_0|} \mu(I_n^s) < \frac{c}{2}$$

である.

補題 3.15. a を非負実数とする. $|s_0| \leq m < k$ とし, $s \in T \cap \omega^m$ と仮定する. 各 $t \in \text{succ}_T(s)$ について $\mu(2^\omega \setminus D_{k,t}) \leq a$ と仮定する. このとき

$$\mu(2^\omega \setminus D_{k,s}) \leq a \cdot \left(1 - \frac{1}{f(m)}\right).$$

証明. はじめに, $t \in \text{succ}_T(s)$ であって $y \in D_{k,t}$ であるものの個数が $g(m, r(m) - 1)$ 以上であれば, それらを目撃する有限木を貼り合わせるにより, $y \in D_{k,s}$ が分かる. 対偶をとれば,

$$y \notin D_{k,s} \Rightarrow |\{t \in \text{succ}_T(s) : y \notin D_{k,t}\}| \geq g(m, r(m)) - g(m, r(m) - 1)$$

となる. この逆

$$y \in D_{k,s} \Rightarrow |\{t \in \text{succ}_T(s) : y \notin D_{k,t}\}| < g(m, r(m)) - g(m, r(m) - 1)$$

も分かるので,

$$y \notin D_{k,s} \Leftrightarrow |\{t \in \text{succ}_T(s) : y \notin D_{k,t}\}| \geq g(m, r(m)) - g(m, r(m) - 1) \quad (*)$$

を得る.

次の簡単な補題を使う:

補題 3.16. $N_1 > N_2$ を二つの自然数とし, $\{A_j : j \leq N_1\}$ を測度 $\leq a$ の集合の族とする. $A = \{x \in 2^\omega : x \text{ は } A_j \text{ の中の少なくとも } N_2 \text{ 個に入る}\}$ とおく. すると $\mu(A) \leq a \cdot \frac{N_1}{N_2}$.

証明. χ_{A_i} を A_i の特性関数とする. 今,

$$\int \sum_{i \leq N_1} \chi_{A_i} \leq N_1 \cdot a$$

なので,

$$\mu(\{x \in 2^\omega : \sum_{i \leq N_1} \chi_{A_i}(x) \geq N_2\}) \leq \frac{N_1 \cdot a}{N_2}.$$

□

この補題と (*) を使えば,

$$\mu(2^\omega \setminus D_{k,s}) \leq a \cdot \frac{g(m, r(m))}{g(m, r(m)) - g(m, r(m) - 1)} \leq a \cdot \left(1 - \frac{1}{f(m)}\right)^{-1}$$

を得る. 最後の不等式は仮定 3.1 (2) を使った.

□

今、補題を繰り返し使えば、

$$\mu(2^\omega \setminus D_k) = \mu(2^\omega \setminus D_{k,s_0}) \leq (c/2) \prod_{m=k}^{|s_0|} \left(1 - \frac{1}{f(m)}\right)^{-1}$$

を得る。だが、 f は急増大なように取り直せるので、

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{f(n)}\right) > \frac{2}{3}$$

としてよい。

よって、

$$\mu(2^\omega \setminus D_k) \leq \frac{c}{2} \cdot \frac{3}{2} = 3c/4$$

を得る。これは矛盾。 □

1 ステップで外測度正の保存が言えただけではまだ反復をしたときに $\text{non}(\text{null})$ が保存されるためには不十分であるが、近いところまでは証明できたことになる。

参考文献

- [BJ95] Tomek Bartoszyński and Haim Judah. *Set Theory: on the structure of the real line*. CRC Press, 1995.
- [BJS93] Tomek Bartoszyński, Haim Judah, and Saharon Shelah. “The Cichoń Diagram”. *The Journal of Symbolic Logic* 58.2 (1993), pp. 401–423.