えいちしーた★

でぃぐにゃん
2023 年 12 月 3 日

概要　正則基数のパラメータ θ を持つ集合 H_θ は冪集合公理を除いた ZFC の公理をすべて満たす集合モデルであり，集合論で非常に重要な道具である．この記事では，H_θ の基本性質と定義を見て，H_θ(の初等部分構造) の応用例としてデルタシステム補題を証明する．

目次

★ この文書について ★

この文書は Alwe さんの企画された Mathematical Logic Advent Calendar 2023 (`https://adventar.org/calendars/8737`) の 3 日目の記事である．

★ 1　H_θ の定義と基本性質 ★

この節では，H_θ を定義して，それが集合になっていることを確認したり，濃度を計算したりする．

定義 1

まず $n \in \omega$ について帰納的に

$$\bigcup^0 x = x,$$
$$\bigcup^{n+1} x = \bigcup(\bigcup^n x)$$

と定める．集合 x に対して $\mathrm{trcl}(x) = \bigcup\{\bigcup^n x : n \in \omega\}$ と定義する．これを x の推移閉包という．

もっとラフな書き方をすれば

$$\mathrm{trcl}(x) = x \cup (\bigcup x) \cup (\bigcup^2 x) \cup \dots$$

となる．

イメージとしては，$\bigcup x$ は x の元の直近の親を集めてくるので，$\bigcup^2 x$ は x の元の祖父や祖母たちを集めてきて，$\bigcup^3 x$ は x の元の曾祖母・曽祖父たちを集めてきて，以下同様で $\mathrm{trcl}(x)$ は x の元の祖先全部を集めてきた集合を返す，くらいに思うといいかもしれない．

定義 2

正則基数 θ に対して，

$$H_\theta = \{x : |\mathrm{trcl}(x)| < \theta\}$$

とおく．

補題 3

H_θ は集合であり，V_θ の部分集合である．また，$|H_\theta| = 2^{<\theta}$．

証明．任意の集合 x について $\{\mathrm{rank}(z) : z \in \mathrm{trcl}(x)\} = \mathrm{rank}(x)$ が $\mathrm{rank}(x)$ に関する帰納法で容易に示せる．よって，$x \in H_\theta$ なら，$|\mathrm{trcl}(x)| < \theta$ と合わせて，$\mathrm{rank}(x) < \theta$ である．つまり $H_\theta \subseteq V_\theta$ である．

すべての $\lambda < \theta$ について $\mathcal{P}(\lambda) \subseteq H_\theta$ なので，$|H_\theta| \geq 2^\lambda$．よって，$|H_\theta| \geq 2^{<\theta}$．

$|H_\theta| \leq 2^{<\theta}$ を示すために，単射 $F\colon H_\theta \to \bigcup\{\mathcal{P}(\lambda \times \lambda) : \lambda < \theta\}$ を構成する．$x \in H_\theta$ としよう．$\lambda = |\mathrm{trcl}(x)| < \theta$ とおこう．選択公理により関係 $F(x) \subseteq \lambda \times \lambda$ であって，

$$(\lambda, F(x)) \simeq (\mathrm{trcl}(x) \cup \{x\}, \in)$$

となるものを得られる．このとき，F は単射である．なぜなら，$(\lambda, F(x))$ の Mostowski 崩壊の最大元として x を復元できるからである． □

★ 2　H_θ は冪集合公理を除いた ZFC を満たす ★

この節では，H_θ は冪集合公理を除いた ZFC (ZFC − P と書く) を満たすことを示す．

補題 4: [Kun11] の Lemma II.2.4

(ZF$^-$ − P) 任意のクラス M に対して，

(1) M が推移的ならば，外延性公理は M で成り立つ．
(2) $M \subseteq$ WF ならば，基礎の公理は M で成り立つ．
(3) $(\forall z \in M)(\forall y \subseteq z)(y \in M)$ ならば，分出の公理は M で成り立つ．

(4) $(\forall x, y \in M)(\{x, y\} \in M)$ ならば，対の公理は M で成り立つ．
(5) $(\forall \mathcal{F} \in M)(\bigcup \mathcal{F} \in M)$ ならば，和集合の公理は M で成り立つ．
(6) M が推移的でかつ，任意の関数 f で $\mathrm{dom}(f) \in M$ でかつ $\mathrm{ran}(f) \subseteq M$ なものについて $\mathrm{ran}(f) \in M$ だとする．このとき，置換公理は M で成り立つ．

分出公理と置換公理は正確には図式であるから，その公理をメタで考えているのか，集合論の中で定式化された論理式で考えているのはいつでも明白にする必要がある (悲しいことに集合論の文献は暗に読み取れるからというので明白に書いてないことが多い)．上の補題はクラス M に関する相対化の意味での「成り立つ」なので，当然メタの論理式を考えていることになる．ところが，集合 M に対しては，「構造 $(M, \in)$ が集合論の中で定式化されたすべての分出公理・置換公理を満たす」という概念も考えられる．そして，その設定でも (3) と (6) の類似は成り立つ．これを強調するために補題としてくくりだしておこう．

補題 5

(ZF$^-$ − P) 任意の集合 M に対して，

(3)' $(\forall z \in M)(\forall y \subseteq z)(y \in M)$ ならば，任意の (集合論の中で定式化された) 分出公理 φ について，$(M, \in) \models \varphi$ である．
(6)' M が推移的でかつ，任意の関数 f で $\mathrm{dom}(f) \in M$ でかつ $\mathrm{ran}(f) \subseteq M$ なものについて $\mathrm{ran}(f) \in M$ だとする．このとき，任意の (集合論の中で定式化された) 置換公理 φ について，$(M, \in) \models \varphi$ である．

補題 6: [Kun11] の Lemma II.2.11

(ZF$^-$ − P) M を推移的クラスで，外延性公理，分出公理，対の公理，和集合公理が M で成り立つと仮定する．

(1) $\omega \in M$ ならば，M で無限公理は成立する．
(2) 非空で互いに交わりのない集合の族が M の元としてあったとき，その選択集合が M の中に属するとする．このとき M で選択公理が成り立つ．

定理 7

(ZFC) θ を非可算正則基数とする．このとき H_θ は ZFC − P を満たす．

この ZFC − P を満たすというのは任意の $\varphi \in$ ZFC − P について，$(H_\theta, \in) \models \varphi$ という意味である．

証明．まず H_θ は推移的であるので，外延性公理が H_θ で成り立つ ($y \in x$ なら $\mathrm{trcl}(y) \subseteq \mathrm{trcl}(x)$ なので，加えて $|\mathrm{trcl}(x)| < \theta$ ならば $|\mathrm{trcl}(y)| < \theta$)．

$H_\theta \subseteq V_\theta \subseteq$ WF なので，基礎の公理が H_θ で成り立つ．

$(\forall z \in H_\theta)(\forall y \subseteq z)(y \in H_\theta)$ も成り立つので，分出の公理が H_θ で成り立つ ($y \subseteq x$ なら

$\mathrm{trcl}(y) \subseteq \mathrm{trcl}(x)$).

$(\forall x, y \in H_\theta)(\{x, y\} \in H_\theta)$ も成り立つので対の公理が H_θ で成り立つ ($\mathrm{trcl}(x, y) = \{x, y\} \cup \mathrm{trcl}(x) \cup \mathrm{trcl}(y)$).

$(\forall x \in H_\theta)(\bigcup x \in H_\theta)$ も成り立つので和集合の公理の公理が H_θ で成り立つ ($\mathrm{trcl}(\bigcup x) \subseteq \mathrm{trcl}(x)$).

任意の関数 f で $\mathrm{dom}(f) \in H_\theta$ でかつ $\mathrm{ran}(f) \subseteq H_\theta$ なものをとる．このとき $\mathrm{ran}(f) \in H_\theta$ である．なぜなら，$\mathrm{ran}(f) \subseteq H_\theta$ かつ $\mathrm{ran}(f)$ の濃度が θ 未満だからである．よって，置換公理が H_θ で成り立つ．

θ を非可算としていて，$|\mathrm{trcl}(\omega)| = \aleph_0$ なので，$\omega \in H_\theta$．よって，H_θ で無限公理が成り立つ．

非空で互いに交わりのない集合の族 $F \in H_\theta$ を考える．今 (V で) 選択公理を仮定しているので，選択集合 C を取る．しかし，すると $\mathrm{trcl}(C) \subseteq \mathrm{trcl}(F)$ なので，$C \in H_\theta$ でもある．よって，選択公理が H_θ で成り立つ． □

どうでも良い余談を書く．上で見た通り，H_θ は選択公理を満たす．それをもっと強めてグローバル選択公理を満たすようにすると便利だよね，という人たちがいる．すなわち，H_θ の整列順序 $\lhd$ を一個固定して，構造に付与するのである：$(H_\theta, \in, \lhd)$．しかし，これをすることを「H_θ を痛めつけている」といって嫌う人たちもいるそうだ．

★ 3　応用：デルタシステム補題の証明 ★

H_θ の応用というよりは，初等部分構造の応用であるが，デルタシステム補題をこの節で示す．

定理 8

$\mathcal{A}$ を有限集合の非可算な族とする．このとき非可算な $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ が存在して，$\mathcal{B}$ はデルタシステムをなす．すなわち，ある集合 R があって，$\mathcal{B}$ の任意の相異なる元 B_1, B_2 について $B_1 \cap B_2 = R$ である．

証明. 次の二つの略記を導入しよう：

$$\Delta(R, \mathcal{D}) :\Leftrightarrow (\forall X \in \mathcal{D})(R \subseteq X) \wedge (\forall X, Y \in \mathcal{D})(X \neq Y \to X \cap Y = R),$$
$$\max\Delta(R, \mathcal{B}) :\Leftrightarrow \mathcal{B} \text{ は } \{\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A} : \Delta(R, \mathcal{D})\} \text{ の極大元}$$

$\Delta(R, \mathcal{B})$ を満たす R と非可算な $\mathcal{B}$ を見つければ定理の証明は終わりである．

θ を非可算正則基数で，$\mathcal{A} \in H_\theta$ なものとする．下向き Löwenheim–Skolem の定理より，可算部分集合 $M \subseteq H_\theta$ で $(H_\theta, \in)$ の初等部分構造となっているものを取れる．

M は可算集合であり，$\mathcal{A}$ は非可算なので，$X^* \in \mathcal{A} \setminus M$ が取れる．$R = X^* \cap M$ とおく．この R が目的の集合の対 $(R, \mathcal{B})$ の一方である．

この R に対して $\max\Delta(R, \mathcal{B})$ を満たす $\mathcal{B}$ を取る．これは Zorn の補題より取れる．この $\mathcal{B}$ が非可算なことを示すことができれば終わりである．背理法で $\mathcal{B}$ が可算だとする．

したがって，

$$H_\theta \models (\exists \mathcal{B})(\max\Delta(R, \mathcal{B}) \wedge |\mathcal{B}| \leq \aleph_0)$$

が成り立つ．なぜなら，$\mathcal{A}$ が H_θ に入っているので，その部分集合もすべて H_θ から見えているし，また，$\mathcal{B}$ が可算集合であることを witness する $\mathcal{B}$ の ω 列による枚挙も H_θ から見えているからである．

よって M が H_θ の初等部分構造なことより $\mathcal{B} \in M$ がとれて，

$$H_\theta \models (\max\Delta(R, \mathcal{B}) \wedge |\mathcal{B}| \leq \aleph_0).$$

同じことは V でも成り立つ．

$\mathcal{B} \in M$ かつ $\mathcal{B}$ が可算なので，$\mathcal{B}$ の各元 Y も M の元である．したがって，$Y \subseteq M$ である．

ここに二回，集合 Z が $Z \in M$ かつ Z が可算を満たすならば $Z \subseteq M$ という事実を使った．これは次のように示せる．

最初に注意すべきなのは，x が M のパラメータを使って H_θ 内で論理式で定義される集合なのであれば，x も M に属することである：つまり $H_\theta \models (\exists! x)\varphi(x, a)$ かつ $a \in M$ ならば $x \in M$．これは $(\exists x)\varphi(x, a)$ に初等性を使って $H_\theta \models \varphi(x', a)$ なる $x' \in M$ を取れるが，一意性より $x = x'$ であるからである．

このことから，ω と任意の ω の元は定義可能性より M に属する．

$f \colon \omega \to Z$ を全射とする．この f は H_θ に属する．よって，初等性より f を M の元で取り直せる．すると，各 $n \in \omega$ について $f, n \in M$ なので初等性より $f(n) \in M$ である．よって，$Z \subseteq M$．

$X^* \cap M = R$ なので，$\Delta(R, \mathcal{B} \cup \{X^*\})$ も成り立つ．

$Y \in \mathcal{B}$ を任意にとると $Y \subseteq M$．よって $X^* \cap Y = X^* \cap Y \cap M = R \cap Y = R$．最後の等式は $\Delta(R, \mathcal{B})$ の一つ目の条件である．

$X^* \notin M$ より，これは $\mathcal{B}$ の極大性に反する． □

★ 参考文献 ★

[Kun11] K. Kunen. *Set Theory*. Studies in Logic: Mathematical. College Publications, 2011.