
Yet Another Introduction to Forcing

—連続体仮説の独立性への最短コース—

でいぐ
2024 年 5 月 5 日 作成 / 2024 年 5 月 7 日 更新

目次

0 導入	1
1 P 名称と強制関係	2
2 論理公理の強制	4
3 Δ_0 絶対性	6
4 ZFC の非論理公理の強制	8
5 無矛盾性証明の仕組み	10
6 ジェネリックフィルターの名称	11
7 連続体仮説の独立性	11
7.1 連続体仮説の否定の無矛盾性証明にトライ	11
7.2 デルタシステム補題	12
7.3 可算鎖条件と連続体仮説の否定の無矛盾性	12
7.4 閉性と連続体仮説の無矛盾性	13
8 本稿を超えて	15

0 導入

本稿では、ZFC の公理は何かということ、そして濃度と順序数、累積階層についての基礎知識を読者に要求する。特に Kunen の [Kun09] の第 1 章の内容だけで読めるようになっているはずである。

半順序集合といったら最大元 1 の指定された半順序集合 $(P, \leq, 1)$ を考える。半順序集合 P の元 p を条件 (condition) と呼ぶことがある。これから定義を述べる P 名称と強制関係の気持ちを書いておく。まず、アイディアとして我々は集合論のモデル (宇宙) V に G という元を付け加えて拡大し $V[G]$ というより大きなモデルを作りたい。しかし V というのは集合全体のクラスだったので新しい元 G を付け加えるというのは不合理である。そこで今いる宇宙 V の中で新しい宇宙 $V[G]$ で成り立つことを宣言することで本当に新しい宇宙を作ることの代替とするのである。この意味で、 P 名称は新しい宇宙にいるオブジェクトを今の宇宙にしながら参照するためのものである。そして強制関係 $p \Vdash \varphi$ は p という情報だけから論理式 φ が新しい宇宙で必ず成立することを宣言されるという意味である。半順序集合 P の元 p を確率だと思って、 $p \Vdash \varphi$ は φ が新しい宇宙で確率 p (以上) で成り立っていると読んでてもそこまで間違いではない。もちろん、普通の確率と違って今の「確率」は全順序ではないが。

本稿の流れについて触れる。第 2 節から第 4 節は述語論理の論理公理や ZFC の公理が (最大元で) 強

制されることを見る。正直退屈な部分であり、第5節から面白くなるので、「退屈だと感じたら第5節にジャンプする」ことをおすすめする。

1 P 名称と強制関係

では P 名称を定める。

定義 1.1. P を半順序集合とする。 P 名称のなすクラス V^P を定める。まず帰納的に V_α^P という集合を次で定める。

$$\begin{aligned} V_0^P &= \emptyset \\ V_{\alpha+1}^P &= \mathcal{P}(V_\alpha^P \times P) \\ V_\gamma^P &= \bigcup_{\alpha < \gamma} V_\alpha^P \quad (\gamma \text{ は極限順序数}) \end{aligned}$$

そして,

$$V^P = \bigcup_{\alpha \in \text{On}} V_\alpha^P$$

とおく。 V^P の元を P 名称という。

P 名称を $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ のような文字で表すことにする。定義より P 名称 \dot{x} の元は (\dot{y}, p) といった対で \dot{y} は P 名称で p は条件であることに注意する。

再び気持ちであるが、 P 名称とは所属関係に確率の付随した集合と思ってよいだろう。 $(\dot{y}, p) \in \dot{x}$ というのは確率 p (以上) で \dot{y} が指す集合を \dot{x} が指す集合の元にすると読める。

次に条件 $p \in P$ と集合論の言語の論理式 $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ と P 名称 τ_1, \dots, τ_n に対して $p \Vdash \varphi(\tau_1, \dots, \tau_n)$ という関係を定める。これを p が φ を強制すると読む。

まず原子論理式の場合を定義する。

定義 1.2. $(\text{rank}(\dot{x}), \text{rank}(\dot{y}))$ に関する再帰で次を定義する。

$$\begin{aligned} p \Vdash \dot{x} \in \dot{y} &\iff \{q \in P : \exists (\dot{z}, r) \in \dot{y} (q \leq r \wedge q \Vdash \dot{x} = \dot{z})\} \text{ が } p \text{ 以下で稠密} \\ p \Vdash \dot{y} \in \dot{x} &\iff \{q \in P : \exists (\dot{z}, r) \in \dot{x} (q \leq r \wedge q \Vdash \dot{y} = \dot{z})\} \text{ が } p \text{ 以下で稠密} \\ p \Vdash \dot{x} = \dot{y} &\iff p \Vdash \dot{y} = \dot{x} \iff \forall (\dot{z}, q) \in \dot{x} \forall r \leq p, q (r \Vdash \dot{z} \in \dot{y}) \\ &\quad \wedge \forall (\dot{z}, q) \in \dot{y} \forall r \leq p, q (r \Vdash \dot{z} \in \dot{x}) \end{aligned}$$

ここで $D \subseteq P$ が $p \in P$ 以下で稠密とは $\forall q \leq p \exists r \leq q (r \in D)$ の意味である。

定義の再帰がうまくいくことのために、 \dot{x} と \dot{y} を入れ替えたものも定義に含めている。

$x \in y$ は $\exists z \in y (x = z)$ と同値、 $x = y$ は $\forall z \in x (z \in y) \wedge \forall z \in y (z \in x)$ と同値なので、定義 1.2 はそれを意識した定義だと言える。

次は一般の論理式である。以下論理式 φ の変数に代入する名称を省略する。たとえば $p \Vdash \varphi$ は $p \Vdash \varphi(\tau_1, \dots, \tau_n)$ の省略表記である。

定義 1.3.

$$\begin{aligned} p \Vdash \varphi \rightarrow \psi &\iff \forall q \leq p (q \Vdash \varphi \implies q \Vdash \psi) \\ p \Vdash \neg \varphi &\iff \forall q \leq p q \nVdash \varphi \\ p \Vdash \forall x \varphi(x) &\iff \forall \dot{x} \in V^P p \Vdash \varphi(\dot{x}) \end{aligned}$$

明記していなかったが、本稿では論理記号としては $\rightarrow, \neg, \forall$ を本物の記号とし \wedge, \vee, \exists がそれらを使った適切な省略表現とする。

定義 1.3 における論理式は集合論の内部で定義された論理式ではなくメタで定義された論理式である。

命題 1.4. $p \Vdash \varphi$ かつ $q \leq p$ ならば $q \Vdash \varphi$.

証明. 論理式の構成に関する帰納法. \forall 以外の場合は帰納法の仮定を使わずに定義よりただちに言える.
 \forall では帰納法の仮定を使う. □

命題 1.5. $p \Vdash \varphi \iff \{q : q \Vdash \varphi\}$ が p 以下で稠密.

証明. \Rightarrow は命題 4 より明らか. \Leftarrow を言う.

まず原子論理式に対してランクに関する帰納法で示す.

$\varphi \equiv \dot{x} \in \dot{y}$ のとき. $p \in P, \dot{x}, \dot{y} \in V^P$ を固定し

$$D = \{q \in P : \exists (\dot{z}, r) \in \dot{y} (q \leq r \wedge q \Vdash \dot{x} = \dot{z})\}$$

とおく. すると仮定

$$\{q : q \Vdash \dot{x} \in \dot{y}\} \text{ が } p \text{ 以下で稠密}$$

は

$$\{q : D \text{ が } q \text{ 以下で稠密}\} \text{ が } p \text{ 以下で稠密}$$

と言い換えられる. これは単に

$$D \text{ が } p \text{ 以下で稠密である}$$

ことと同値である. よって, $p \Vdash \dot{x} \in \dot{y}$ である.

$\varphi \equiv \dot{x} = \dot{y}$ のとき. $\{q : q \Vdash \dot{x} = \dot{y}\}$ が p 以下で稠密であるとする. $p \Vdash \dot{x} = \dot{y}$ の定義の前半:
 $\forall (\dot{z}, q) \in \dot{x} \forall r \leq p, q \ r \Vdash \dot{z} \in \dot{y}$ を示そう. 後半も同様である.

$(\dot{z}, q) \in \dot{y}, r \leq p, q$ を固定する. $s \leq r$ とする. すると仮定より $t \leq s$ がとれて $t \Vdash \dot{x} = \dot{y}$. すると
 $t \Vdash \dot{x} = \dot{y}$ の定義より $t \Vdash \dot{z} \in \dot{x}$. これで $\{t : t \Vdash \dot{z} \in \dot{x}\}$ が r 以下で稠密なことが示せたので帰納法の仮
 定より $r \Vdash \dot{z} \in \dot{x}$.

次に論理式の構成に関する帰納法で一般の論理式で命題 5 が成り立つことを示す.

$\varphi \rightarrow \psi$ のとき. $q \leq p$ を任意にとり, $q \Vdash \varphi$ を仮定する. $r \leq q$ とする. このとき仮定より $s \leq r$ が
 とれて $s \Vdash \varphi \Rightarrow s \Vdash \psi$ である. 今命題 4 より $s \Vdash \varphi$ であるので, $s \Vdash \psi$. これで $\{s : s \Vdash \psi\}$ が q 以下
 で稠密なことが言えたので帰納法の仮定より $q \Vdash \psi$ である.

$\neg \varphi$ のとき. $q \leq p$ を任意にとる. すると $r \leq q$ がとれて, $r \Vdash \neg \varphi$. よって, 任意の $s \leq r$ で $s \nVdash \varphi$.
 これである $r \leq q$ が存在してすべての $s \leq r$ で $s \nVdash \varphi$ が示せたが, これは $\{s : s \Vdash \varphi\}$ が q 以下で稠密
 なことの否定である. よって $q \nVdash \varphi$.

$\forall x \varphi(x)$ のとき. $\dot{x} \in V^P$ を任意にとる. $q \leq p$ を任意にとる. すると仮定より $r \leq q$ がとれて,
 $\forall \dot{x} \in V^P \ r \Vdash \varphi(\dot{x})$. ここで今固定している \dot{x} を代入すれば $r \Vdash \varphi(\dot{x})$. よって, $\{r : r \Vdash \varphi(\dot{x})\}$ が p 以
 下で稠密が示せたので帰納法の仮定より $p \Vdash \varphi(\dot{x})$. よって $p \Vdash \forall x \varphi(x)$. □

上記命題の「 $\{q : q \Vdash \varphi\}$ が p 以下で稠密」という条件は言い直すと $p \Vdash \neg \neg \varphi$ ということである. し
 たがって, 上記命題は $p \Vdash \varphi$ と $p \Vdash \neg \neg \varphi$ が同値なことを主張している. このような「強制関係が古典
 論理である」ことを要請するために強制関係の定義が工夫されているのである.

命題 1.6. $p \nVdash \varphi \iff \exists q \leq p (q \Vdash \neg \varphi)$.

証明. 右辺を否定の強制の定義に従って書き直すと

$$\exists q \leq p \forall r \leq q (r \nVdash \varphi)$$

であるが, これは $\{r : r \Vdash \varphi\}$ が p 以下で稠密であることの否定である. よって命題 6 は命題 5 の主張
 で同値の両辺を否定したものにすぎない. □

命題 1.7. (1) $p \Vdash \varphi \rightarrow \psi \iff \forall q \leq p (q \Vdash \varphi \implies \exists r \leq q (r \Vdash \psi))$.

(2) $p \Vdash \varphi \vee \psi \iff \{q : (q \Vdash \varphi) \vee (q \Vdash \psi)\}$ が p 以下で稠密.

(3) $p \Vdash \varphi \wedge \psi \iff (p \Vdash \varphi) \wedge (p \Vdash \psi)$.

(4) $p \Vdash \exists x \varphi \iff \{q : \exists \dot{x} \in V^P q \Vdash \varphi(\dot{x})\}$ が p 以下で稠密.

証明. 1 について. \Rightarrow は定義より明らか. \Leftarrow を示す. $q \leq p$ を任意にとり, $q \Vdash \varphi$ を仮定する. $r \leq q$ を任意にとると, $r \Vdash \varphi$ である. よって仮定より, $s \leq r$ がとれて, $s \Vdash \psi$. これで $\{s : s \Vdash \psi\}$ が q 以下で稠密なことを言えたので $q \Vdash \psi$.

2 について. $\varphi \vee \psi$ は $\neg\varphi \rightarrow \psi$ の省略形と考えるので, $p \Vdash \varphi \vee \psi$ は $\forall q \leq p (q \Vdash \neg\varphi \Rightarrow q \Vdash \psi)$ と書ける. $D = \{q : (q \Vdash \varphi) \vee (q \Vdash \psi)\}$ とおく.

\Rightarrow について. D が p 以下で稠密なことを言えばよい. $q \leq p$ とする. q が $q \Vdash \varphi$ を満たすなら $q \in D, q \leq p$ なのでそれでよい. そうでないなら, 命題 6 より $q \nVdash \varphi$ なので $r \leq q$ があって $r \Vdash \neg\varphi$ である. すると仮定より $r \Vdash \psi$. よって $r \in D, r \leq p$ なのでよい.

\Leftarrow について. $q \leq p$ を任意にとり, $q \Vdash \neg\varphi$ と仮定する. D の稠密性より $r \leq q$ がとれて, $r \Vdash \varphi$ または $r \Vdash \psi$. $q \Vdash \neg\varphi$ の定義から $r \Vdash \varphi$ はありえない. よって $r \Vdash \psi$. これで命題 7 (1) で述べた $p \Vdash \neg\varphi \rightarrow \psi$ の同値な条件が確かめられたのでこれでよい.

3 について. $\varphi \wedge \psi$ は $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$ の省略形と考える. よって

$$\begin{aligned} p \Vdash \varphi \wedge \psi &\iff \forall q \leq p (q \nVdash (\neg\varphi \vee \neg\psi)) \\ &\iff \forall q \leq p \exists r \leq q \forall s \leq r ((s \nVdash \neg\varphi) \wedge (s \nVdash \neg\psi)) \\ &\iff \forall q \leq p \exists r \leq q \forall s \leq r ((\exists t \leq s t \Vdash \varphi) \wedge (\exists t \leq s t \Vdash \psi)) \end{aligned} \quad (*)$$

である.

\Rightarrow について. (*) において $q \leq p$ を任意にとる. このとき $r \leq q$ がとれて $\forall s \leq r ((\exists t \leq s t \Vdash \varphi) \wedge (\exists t \leq s t \Vdash \psi))$. $s = r$ を代入することで, $t \leq r$ が存在して $t \Vdash \varphi$. これで $\{t : t \Vdash \varphi\}$ が p 以下で稠密なことが示せたので $p \Vdash \varphi$. 同様に $p \Vdash \psi$ も示せる.

\Leftarrow について. $p \Vdash \varphi$ かつ $p \Vdash \psi$ とする. (*) において任意の $q \leq p$ が与えられたとき, $r = q$ とおく. すると任意の $s \leq r$ が与えられたときに $t = s$ とおけば $t \Vdash \varphi$. また同様に $t = s$ とおけば $t \Vdash \psi$. よって $p \Vdash \varphi \wedge \psi$ が言えた.

4 について. $\exists x \varphi$ は $\neg\forall x \neg\varphi$ の省略形と考える. よって

$$\begin{aligned} p \Vdash \exists x \varphi(x) &\iff \forall q \leq p q \nVdash \forall x \neg\varphi(x) \\ &\iff \forall q \leq p \exists \dot{x} \in V^P q \nVdash \neg\varphi(\dot{x}) \\ &\iff \forall q \leq p \exists \dot{x} \in V^P \exists r \leq q r \Vdash \varphi(\dot{x}) \\ &\iff \forall q \leq p \exists r \leq q \exists \dot{x} \in V^P r \Vdash \varphi(\dot{x}) \end{aligned}$$

となる. □

2 論理公理の強制

前節では名称と強制関係を定義して基本性質を見た. この節では論理公理が強制されることを見よう.

論理的な公理として以下を採用することにする. ただしそれぞれの全称閉包をとる. すなわち各自由変数 x について $\forall x$ で縛る.

(1) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

- (2) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \theta))$
- (3) $(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$
- (4) $\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi)$
- (5) $\varphi \rightarrow \forall x\varphi$ (ただし x は φ の自由変数でないとする)
- (6) $\forall x\varphi(x) \rightarrow \varphi(y)$ ($\varphi(x)$ の自由変数 x に y は代入可能であるとする)
- (7) $x = x$
- (8) $x = y \rightarrow y = x$
- (9) $x = y \rightarrow (y = z \rightarrow x = z)$
- (10) $x = y \rightarrow (x \in A \rightarrow y \in A)$
- (11) $A = B \rightarrow (x \in A \rightarrow x \in B)$

以下、上記の論理公理がすべて強制されることを示すが、証明するのがかんたんな 1-8 を先に示す。

命題 2.1. P を半順序集合とする。このとき上記の論理公理のうち 1 番から 8 番はすべて最大元 1 で強制される。

証明. 以下、全称閉包によって生じている全称量化については適切に任意に名称をとって議論していると考えてほしい。

1 の $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$ について。 $p \in P$ について $p \Vdash \varphi$ とする。このとき $p \Vdash \psi \rightarrow \varphi$ を示せばよい。 $q \leq p$ を任意にとり $q \Vdash \psi$ とする。このとき仮定より $q \Vdash \varphi$ である。よって示せた。

2 の $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \theta))$ について。 $p \Vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta) \cdots (*)$ とする。このとき $p \Vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \theta)$ を示す。そのために $q \leq p$ を任意にとり、 $q \Vdash \varphi \rightarrow \psi \cdots (**)$ とする。示すべきは $q \Vdash \varphi \rightarrow \theta$ である。そのために、 $r \leq q$ を任意にとり、 $r \Vdash \varphi$ とする。すると $(*)$ より $r \Vdash \psi \rightarrow \theta$ であり、 $(**)$ より $r \Vdash \psi$ である。この二つから $r \Vdash \theta$ 。よって示せた。

3 の $(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ について。 $p \Vdash \neg\psi \rightarrow \neg\varphi \cdots (*)$ とする。このとき $p \Vdash \varphi \rightarrow \psi$ を示す。そのために $q \leq p$ を任意にとり、 $q \Vdash \varphi$ とする。背理法で $q \Vdash \psi$ でないと仮定すると $r \leq q$ があって $r \Vdash \neg\psi$ である。すると $(*)$ より $r \Vdash \neg\varphi$ 。 $q \Vdash \varphi$ より特に $r \Vdash \varphi$ でもあるので、 r は φ と $\neg\varphi$ の両方を強制する。これは矛盾。

4 の $\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi)$ について。 $p \Vdash \forall x(\varphi \rightarrow \psi) \cdots (*)$ とする。 $q \leq p$ をとり $q \Vdash \forall x\varphi \cdots (**)$ とする。このとき示すべきは、 $q \Vdash \forall x\psi$ である。名称 $\dot{x} \in V^P$ を任意にとる。このとき $(*)$ より $q \Vdash \varphi(\dot{x}) \rightarrow \psi(\dot{x})$ であり $(**)$ より $q \Vdash \varphi(\dot{x})$ である。よってこの二つから $q \Vdash \psi(\dot{x})$ である。これで $q \Vdash \forall x\psi$ が示された。

5 の $\varphi \rightarrow \forall x\varphi$ について。 $p \Vdash \varphi$ とする。 φ には変数 x は自由に出現しないということから任意の名称 \dot{x} について $p \Vdash \varphi(\dot{x})$ である。よって $p \Vdash \forall x\varphi$ となる。

6 の $\forall x\varphi(x) \rightarrow \varphi(y)$ について。 $\dot{y} \in V^P$ を任意にとる。 $p \Vdash \forall x\varphi(x)$ を仮定する。このとき全称量化の強制の定義から $p \Vdash \varphi(\dot{y})$ 。よって良い。

7 の $x = x$ について。ランク帰納法で $\Vdash \dot{x} = \dot{x}$ を示す。等号の強制の定義を思い出すと、 $\forall(\dot{z}, p) \in \dot{x}$ ($p \Vdash \dot{z} \in \dot{x}$) を示せばよい。 $(\dot{z}, p) \in \dot{x}$ とする。 $p \Vdash \dot{z} \in \dot{x}$ の定義は $\{q \in P : \exists(\dot{w}, r) \in \dot{x} (q \leq r \wedge q \Vdash \dot{z} = \dot{w})\}$ が p 以下で稠密ということであった。今任意の $q \leq p$ で $(\dot{w}, r) = (\dot{z}, p)$ ととることで、 $q \leq r$ は満たしているし、ランク帰納法の仮定より $q \Vdash \dot{z} = \dot{z}$ を満たしている。よって、 $p \Vdash \dot{z} \in \dot{x}$ なのでこれで示せた。

8 の $x = y \rightarrow y = x$ について。 $p \Vdash \dot{x} = \dot{y}$ ならば $p \Vdash \dot{y} = \dot{x}$ なのは等号の強制の定義を見れば明らか。なのでよい。 □

命題 2.2. P を半順序集合とする。このとき上記の論理公理のうち 9 番と 10 番は最大元 1 で強制さ

れる。

証明. ここがやっかいなポイントである. 9 番を証明するのに 10 番が必要になり, 10 番を証明するのに 9 番が必要になる. そこでランク帰納法で同時に 9 番と 10 番を示す.

帰納法の仮定を表す命題を次のようにおく:

$$\text{IH}_1(\alpha) \iff \forall \dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \in V_\alpha^P \ 1 \Vdash \dot{x} = \dot{y} \rightarrow (\dot{y} = \dot{z} \rightarrow \dot{x} = \dot{z})$$

$$\text{IH}_2(\alpha) \iff \forall \beta < \alpha \ \forall \dot{x}, \dot{y} \in V_\beta^P, \dot{A} \in V_\alpha^P \ 1 \Vdash \dot{x} = \dot{y} \rightarrow (\dot{x} \in \dot{A} \rightarrow \dot{y} \in \dot{A})$$

任意の順序数 α について $\text{IH}_2(\alpha) \Rightarrow \text{IH}_1(\alpha)$ と $(\forall \beta < \alpha \ \text{IH}_1(\beta)) \Rightarrow \text{IH}_2(\alpha)$ を示す.

まず, $\text{IH}_2(\alpha) \Rightarrow \text{IH}_1(\alpha)$ について. $p \Vdash \dot{x} = \dot{y}$ かつ $p \Vdash \dot{y} = \dot{z}$ としよう. このとき $p \Vdash \dot{x} = \dot{z}$ を示せばよい. $p \Vdash \dot{x} = \dot{z}$ の定義の前半 $\forall (\dot{w}, q) \in \dot{x} \ \forall r \leq p, q \ (r \Vdash \dot{w} \in \dot{z})$ を示そう. 後半も同様である. $(\dot{w}, q) \in \dot{x}$ と $r \leq p, q$ を任意にとる. $s \leq r$ を任意にとる. このとき, $p \Vdash \dot{x} = \dot{y}$ の定義より $s \Vdash \dot{w} \in \dot{y}$ である. よって $t \leq s$ と $(\dot{w}', u) \in \dot{y}$ がとれて $t \leq u$ かつ $t \Vdash \dot{w}' = \dot{w}$ となる. すると $p \Vdash \dot{y} = \dot{z}$ の定義より, $t \Vdash \dot{w}' \in \dot{z}$ となる. t は $\dot{w}' = \dot{w}$ と $\dot{w}' \in \dot{z}$ の両方を強制するので $\text{IH}_1(\beta)$ より $\dot{w} \in \dot{z}$ も強制される.

$(\forall \beta < \alpha \ \text{IH}_1(\beta)) \Rightarrow \text{IH}_2(\alpha)$ について. $p \Vdash \dot{x} = \dot{y}$ かつ $p \Vdash \dot{x} \in \dot{A}$ とする. このとき $p \Vdash \dot{y} \in \dot{A}$ を示す. $q \leq p$ とする. このとき $p \Vdash \dot{x} \in \dot{A}$ の定義より, $r \leq q$ と $(\dot{z}, s) \in \dot{A}$ がとれて, $r \leq s$ かつ $r \Vdash \dot{x} = \dot{z}$. すると r は $\dot{x} = \dot{y}$ と $\dot{x} = \dot{z}$ を強制するので $\forall \beta < \alpha \ \text{IH}_1(\beta)$ より $r \Vdash \dot{y} = \dot{z}$. これで $p \Vdash \dot{y} \in \dot{A}$ が言えた. \square

命題 2.3. P を半順序集合とする. このとき上記の論理公理のうち 11 番は最大元 1 で強制される.

証明. $p \Vdash \dot{A} = \dot{B}$ かつ $p \Vdash \dot{x} \in \dot{A}$ とする. このとき $p \Vdash \dot{x} \in \dot{B}$ を示す. $q \leq p$ とする. このとき $p \Vdash \dot{x} \in \dot{A}$ より $r \leq q$ と $(\dot{z}, s) \in \dot{A}$ がとれて, $r \leq s$ かつ $r \Vdash \dot{z} = \dot{x}$. すると $p \Vdash \dot{A} = \dot{B}$ の定義より $r \Vdash \dot{z} \in \dot{B}$. すると r は $\dot{z} \in \dot{B}$ と $\dot{z} = \dot{x}$ をともに強制するから論理公理の 10 番が強制されることはすでに証明済みなので, $r \Vdash \dot{x} \in \dot{B}$. \square

以上の命題 1, 2, 3 より論理公理はすべて最大元で強制される.

推論規則として Modus Ponens のみを採用する (\forall 導入規則は入れない. 我々の形式体系は閉論理式のみが証明可能な対象にしているのである).

命題 2.4. $p \Vdash \varphi$ かつ $p \Vdash \varphi \rightarrow \psi$ ならば, $p \Vdash \psi$ である.

証明. 「ならば」の強制の定義より明らか. \square

3 Δ_0 絶対性

前節では論理公理がすべて強制されることを示した. 次の節で ZFC の公理が強制されることを示すが, その準備としてこの節で Δ_0 絶対性というものを示す.

$\forall x \in y \ \varphi(x)$ は $\forall x (x \in y \rightarrow \varphi(x))$ の略記, $\exists x \in y \ \varphi(x)$ は $\exists x (x \in y \wedge \varphi(x))$ の略記とする.

補題 3.1. $(\dot{x}, p) \in \dot{y}$ ならば $p \Vdash \dot{x} \in \dot{y}$.

証明. $q \leq p$ を任意にとる. このとき $q \Vdash \dot{x} = \dot{x}$ より,

$$\exists (\dot{z}, r) \in \dot{y} \ (q \leq r \wedge q \Vdash \dot{x} = \dot{z})$$

である (\dot{z}, r) として (\dot{x}, p) がとれるから). したがって, $p \Vdash \dot{x} \in \dot{y}$ である. \square

命題 3.2. $p \Vdash \forall x \in \dot{y} \ \varphi(x) \iff \forall (\dot{z}, q) \in \dot{y} \ \forall r \leq p, q \ (r \Vdash \varphi(\dot{z}))$.

証明. 左から右は補題 3.1 より従う. 右から左を示そう. $q \leq p$ と $\dot{x} \in V^P$ をとり, $q \Vdash \dot{x} \in \dot{y}$ を仮定する. このとき, $\exists r \leq q \ r \Vdash \varphi(\dot{x})$ を示したい. $q \Vdash \dot{x} \in \dot{y}$ より $r \leq q$ と $(\dot{z}, s) \in \dot{y}$ があって, $r \leq s$ かつ $r \Vdash \dot{x} = \dot{z}$. すると仮定より $r \Vdash \varphi(\dot{z})$. $r \Vdash \varphi(\dot{z}) \wedge \dot{x} = \dot{z}$ なので, $r \Vdash \varphi(\dot{x})$ である (論理公理が強制されることはすでに証明しているから). \square

命題 3.3. $p \Vdash \exists x \in \dot{y} \ \varphi(x) \iff \{q : \exists (\dot{x}, r) \in \dot{y} \ (q \leq r \wedge q \Vdash \varphi(\dot{x}))\}$ が p 以下で稠密.

証明. 右から左について. $q \leq p$ を任意にとる. このとき仮定より, $r \leq q$ と $(\dot{x}, s) \in \dot{y}$ がとれて, $r \leq s$ かつ $r \Vdash \varphi(\dot{x})$ である. $(\dot{x}, s) \in \dot{y}$ と補題 3.1 より $s \Vdash \dot{x} \in \dot{y}$ である. よって, $r \Vdash (\dot{x} \in \dot{y}) \wedge \varphi(\dot{x})$. これで左が導けた.

左から右について. $q \leq p$ を任意にとる. このとき $\dot{x} \in V^P$ と $r \leq q$ がとれて

$$r \Vdash \dot{x} \in \dot{y} \wedge \varphi(\dot{x})$$

となる. $r \Vdash \dot{x} \in \dot{y}$ なので, $s \leq r$ と $(\dot{z}, t) \in \dot{y}$ がとれて, $s \leq t$ かつ $s \Vdash \dot{x} = \dot{z}$ である. よって, $s \Vdash \dot{x} = \dot{z} \wedge \varphi(\dot{x})$ より, $s \Vdash \varphi(\dot{z})$ となり, これで右が導けた. \square

定義 3.4. 原子論理式は Δ_0 論理式である. φ, ψ が Δ_0 論理式で y が変数ならば, $\varphi \rightarrow \psi, \neg\phi, \forall x \in y \ \varphi$ もそれぞれ Δ_0 論理式である.

定義 3.5. Δ_0 論理式 φ を使って $\exists x \varphi(x)$ と表せる論理式を Σ_1 論理式という.

定義 3.6. 各集合 x について \check{x} という P 名称を次のように \in に関する再帰で定める.

$$\check{x} = \{(\check{y}, 1) : y \in x\}.$$

\check{x} のことを x のチェック名称と呼ぶ.

命題 3.7 (Δ_0 絶対性). $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ を Δ_0 論理式とする. このとき, 任意の集合 a_1, \dots, a_n と $p \in P$ について次が成り立つ:

$$\varphi(a_1, \dots, a_n) \leftrightarrow p \Vdash \varphi(\check{a}_1, \dots, \check{a}_n).$$

証明. 論理式の構成に関する帰納法. 原子論理式については, ランクに関する帰納法を使う. $a = b$ について.

$$\begin{aligned} p \Vdash \check{a} = \check{b} &\iff \forall (\dot{z}, q) \in \check{a} \ \forall r \leq p, q \ (r \Vdash \dot{z} \in \check{b}) \wedge \forall (\dot{z}, q) \in \check{b} \ \forall r \leq p, q \ (r \Vdash \dot{z} \in \check{a}) \\ &\iff \forall c \in a \ (c \in b) \wedge \forall c \in b \ (c \in a) \\ &\iff a = b. \end{aligned}$$

$a \in b$ について.

$$\begin{aligned} p \Vdash \check{a} \in \check{b} &\iff \{q \in P : \exists (\dot{z}, r) \in \check{b} \ (q \leq r \wedge q \Vdash \check{a} = \dot{z})\} \text{ が } p \text{ 以下で稠密} \\ &\iff \{q \in P : \exists c \in b \ (a = c)\} \text{ が } p \text{ 以下で稠密} \\ &\iff \{q \in P : a \in b\} \text{ が } p \text{ 以下で稠密} \\ &\iff a \in b. \end{aligned}$$

次に原子的でない論理式を考える. ただしここから論理式の変数および代入される名前は省略して書く. $\varphi \rightarrow \psi$ について.

$$\begin{aligned} p \Vdash \varphi \rightarrow \psi &\iff \forall q \leq p \ (q \Vdash \varphi \rightarrow \exists r \leq q \ (r \Vdash \psi)) \\ &\iff \forall q \leq p \ (\varphi \rightarrow \exists r \leq q \ \psi) \\ &\iff \varphi \rightarrow \psi \end{aligned}$$

$\neg\varphi$ について.

$$\begin{aligned} p \Vdash \neg\varphi &\iff \forall q \leq p \ q \nVdash \varphi \\ &\iff \forall q \leq p \ \neg\varphi \\ &\iff \neg\varphi. \end{aligned}$$

最後に $\forall x \in \check{a} \ \varphi$ について.

$$\begin{aligned} p \Vdash \forall x \in \check{a} \ \varphi(x) &\iff \forall \dot{x} \in V^P \ p \Vdash (\dot{x} \in \check{a} \wedge \varphi(\dot{x})) \\ &\iff \forall (\check{x}, 1) \in \check{a} \ p \Vdash \varphi(\check{x}) \\ &\iff \forall (\check{x}, 1) \in \check{a} \ \varphi(x) \\ &\iff \forall x \in a \ \varphi(x). \end{aligned}$$

以上より示された. (最後の $\forall x \in \check{a} \ \varphi$ のケースの 1 行目から 2 行目への変形は命題 3.3 である). \square

系 3.8. φ が Σ_1 論理式ならば,

$$\varphi \rightarrow 1 \Vdash \varphi.$$

4 ZFC の非論理公理の強制

この節は ZFC の公理が強制されることを示そう. 以下, 半順序集合 P を固定する.

命題 4.1. 外延性公理は 1 で強制される. すなわち $1 \Vdash \forall A, B (\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) \rightarrow A = B)$ である.

証明. \dot{A}, \dot{B} をとる. $p \Vdash \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$ を仮定する. このとき $p \Vdash \dot{A} = \dot{B}$ を示す. $(\dot{x}, q) \in \dot{A}$ と $r \leq p, q$ を任意にとる. このとき $r \Vdash \dot{x} \in \dot{A}$ なので仮定より $r \Vdash \dot{x} \in \dot{B}$. これで $p \Vdash \dot{A} = \dot{B}$ の定義の条件の前半は示せた. 後半も同様. \square

命題 4.2. 分離公理はそれぞれ 1 で強制される. すなわち各論理式 φ について, $1 \Vdash \forall A \forall \vec{t} \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x \in A \wedge \varphi(A, \vec{t}, x))$ である. ただし \vec{t} は有限個の変数の並び t_1, \dots, t_n の略記である.

証明. $\dot{A}, \vec{\dot{t}}$ をとる.

$$\dot{B} = \{(\dot{y}, q) : \dot{y} \in \text{dom } \dot{A} \wedge q \in P \wedge q \Vdash (\dot{y} \in \dot{A} \wedge \varphi(\dot{A}, \vec{\dot{t}}, \dot{y}))\}$$

とおく. \dot{x} をとる.

$p \Vdash \dot{x} \in \dot{B}$ とすると $(\dot{y}, q) \in \dot{B}$ と $r \leq p, q$ がとれて $r \Vdash \dot{x} = \dot{y}$. $(\dot{y}, q) \in \dot{B}$ と \dot{B} の定義より, $q \Vdash \dot{y} \in \dot{A} \wedge \varphi(\dot{A}, \vec{\dot{t}}, \dot{y})$. よって等号公理より $r \Vdash \dot{x} \in \dot{A} \wedge \varphi(\dot{A}, \vec{\dot{t}}, \dot{x})$. これで $1 \Vdash \dot{x} \in \dot{B} \rightarrow \dot{x} \in \dot{A} \wedge \varphi(\dot{A}, \vec{\dot{t}}, \dot{x})$ が言えた.

逆に $p \Vdash \dot{x} \in \dot{A} \wedge \varphi(\dot{A}, \vec{\dot{t}}, \dot{x})$ とする. $p \Vdash \dot{x} \in \dot{A}$ より $(\dot{y}, q) \in \dot{A}$ と $r \leq p, q$ がとれて $r \Vdash \dot{x} = \dot{y}$. すると等号公理より $r \Vdash \varphi(\dot{A}, \vec{\dot{t}}, \dot{y})$ であり, また $r \Vdash \dot{y} \in \dot{A}$. よって \dot{B} の定義より $1 \Vdash \dot{y} \in \dot{B}$. よって等号公理より $r \Vdash \dot{x} \in \dot{B}$. これで $1 \Vdash \dot{x} \in \dot{A} \wedge \varphi(\dot{A}, \vec{\dot{t}}, \dot{x}) \rightarrow \dot{x} \in \dot{B}$ が言えた. \square

命題 4.3. 対集合公理は 1 で強制される. すなわち $1 \Vdash \forall a, b \exists C \forall x ((x = a \vee x = b) \rightarrow x \in C)$ である.

証明. \dot{a}, \dot{b} をとる.

$$\dot{C} = \{(\dot{a}, 1), (\dot{b}, 1)\}$$

とおく. このとき $1 \Vdash \dot{a} \in \dot{C}$, $1 \Vdash \dot{b} \in \dot{C}$ に注意する. \dot{x} をとる. $p \Vdash \dot{x} = \dot{a} \vee \dot{x} = \dot{b}$ とする. このとき $q \leq p$ をとって $q \Vdash \dot{x} = \dot{a}$ または $q \Vdash \dot{x} = \dot{b}$ とできる. $q \Vdash \dot{x} = \dot{a}$ なら $q \Vdash \dot{x} = \dot{a} \in \dot{C}$ なので等号公理より $q \Vdash \dot{x} \in \dot{C}$. $q \Vdash \dot{x} = \dot{b}$ のときも同様. \square

命題 4.4. 和集合公理は 1 で強制される． すなわち $1 \Vdash \forall A \exists B \forall x (\exists Y (x \in Y \wedge Y \in A) \rightarrow x \in B)$ である．

証明. \dot{A} をとる．

$$\begin{aligned} \dot{B} &= \{(\dot{x}, 1) : \dot{x} \in \text{dom}(\bigcup \text{dom } \dot{A})\} \\ &= \{(\dot{x}, 1) : \exists (\dot{A}, p_1) \in \dot{A} \exists (x_1, p_2) \in \dot{A} \dot{x} = x_1\} \end{aligned}$$

とおく． \dot{x} とおく． $p \Vdash \exists Y (\dot{x} \in Y \wedge Y \in \dot{A})$ とする． すると $q \leq p$ と \dot{Y} があって、 $q \Vdash \dot{x} \in \dot{Y} \in \dot{A}$ ． $q \Vdash \dot{Y} \in \dot{A}$ の定義より、 $(\dot{Y}', p_1) \in \dot{A}$ と $r \leq q, p_1$ があって $r \Vdash \dot{Y} = \dot{Y}'$ ． $r \Vdash \dot{x} \in \dot{Y} = \dot{Y}'$ だから等号公理より $r \Vdash \dot{x} \in \dot{Y}'$ であり、この定義より $(\dot{x}', p_2) \in \dot{Y}'$ と $s \leq r, p_2$ があって $s \Vdash \dot{x} = \dot{x}'$ ． このとき \dot{B} の定義より $1 \Vdash \dot{x}' \in \dot{B}$ ． よって等号公理より $s \Vdash \dot{x} \in \dot{B}$ ． \square

命題 4.5. 冪集合公理は 1 で強制される． すなわち $1 \Vdash \forall A \exists B \forall X (X \subseteq A \rightarrow X \in B)$ である．

証明. \dot{A} をとる．

$$\dot{B} = \{(\dot{X}, 1) : \dot{X} \subseteq \text{dom } \dot{A} \times P\}$$

とおく． \dot{X} をとり、 $p \Vdash \dot{X} \subseteq \dot{A}$ とする．

$$\dot{Y} = \{(\dot{x}, q) \in \text{dom } \dot{A} \times P : q \Vdash \dot{x} \in \dot{X}\}$$

とおく． B の定義より $1 \Vdash \dot{Y} \in \dot{B}$ である．

ここで、 $p \Vdash \dot{X} = \dot{Y}$ を示す． $\forall (\dot{x}, q) \in \dot{Y} \forall r \leq p, q \ r \Vdash \dot{x} \in \dot{Y}$ は \dot{Y} の定義より明らか．

$(\dot{x}, q) \in \dot{X}$ 、 $r \leq p, q$ を任意にとる． このとき $r \Vdash \dot{x} \in \dot{X} \subseteq \dot{A}$ より $r \Vdash \dot{x} \in \dot{A}$ ． すると $(\dot{x}', p_1) \in \dot{A}$ と $s \leq r$ をとって $s \Vdash \dot{x} = \dot{x}'$ とできる． すると等号公理より $s \Vdash \dot{x}' \in \dot{X}$ ． このとき \dot{Y} の定義より $s \Vdash \dot{x}' \in \dot{Y}$ である． よって、 $s \Vdash \dot{x} = \dot{x}' \in \dot{Y}$ なので等号公理より $s \Vdash \dot{x} \in \dot{Y}$ である． 以上で $p \Vdash \dot{X} = \dot{Y}$ が示された．

したがって、 $p \Vdash \dot{X} = \dot{Y} \in \dot{B}$ より $p \Vdash \dot{X} \in \dot{B}$ ． \square

命題 4.6. 無限公理は 1 で強制される．

証明. 無限公理は Σ_1 論理式であるから、系 3.8 より良い． \square

命題 4.7. 置換公理は 1 で強制される (正確には置換公理図式のすべてのインスタンスは 1 で強制される)．

証明. 置換公理ではなく、採集公理を公理として採用することにする (この二つは同値である)． よって、示すべきは任意の論理式 φ に対して、

$$1 \Vdash \forall A (\forall x \in A \exists y \varphi(x, y) \rightarrow \exists B \forall x \in A \exists y \in B \varphi(x, y))$$

である． $p \in P$ とし \dot{A} を名称とする．

$$p \Vdash \forall x \in \dot{A} \exists y \varphi(x, y)$$

を仮定する． \forall の強制の定義に戻ると、これは

$$\forall (\dot{x}, q) \in \dot{A} \forall r \leq p, q \forall s \leq r \exists t \leq s \exists y \ t \Vdash \varphi(\dot{x}, y)$$

と書き直せる．採集公理を使うと集合 B がとれて、

$$\forall (\dot{x}, q) \in \dot{A} \forall r \leq p, q \forall s \leq r \exists t \leq s \exists y \in B \ t \Vdash \varphi(\dot{x}, y)$$

となる。名称 \dot{B} を

$$\dot{B} = B \times \{1\}$$

で定めると,

$$p \Vdash \forall x \in \dot{A} \exists y \in \dot{B} \varphi(x, y)$$

が分かる (確かめよ). □

命題 4.8. 選択公理は 1 で強制される。

証明. 次を示せば十分である：

$$1 \Vdash \forall a \exists \gamma \text{ 順序数 } \exists f (f \text{ は関数で } \text{dom } f = \gamma, \text{ran } f \supseteq a).$$

\dot{a}, \dot{b} に対して

$$\text{pair}(\dot{a}, \dot{b}) = \{(\dot{a}, 1), (\dot{b}, 1)\}$$

とおき,

$$\text{orderedpair}(\dot{a}, \dot{b}) = \text{pair}(\text{pair}(\dot{a}, \dot{a}), \text{pair}(\dot{a}, \dot{b}))$$

とおく。名称 \dot{a} を任意にとる。名称の集合 $\text{dom}(\dot{a})$ を整列し $\{x_\alpha : \alpha < \gamma\}$ とする。名称 \dot{f} を

$$\dot{f} = \{(\text{orderedpair}(\check{\alpha}, x_\alpha), 1) : \alpha < \gamma\}$$

とおく。このとき

$$1 \Vdash \dot{f} \text{ は関数で } \text{dom } \dot{f} = \check{\gamma}, \text{ran } \dot{f} \supseteq \dot{a}$$

がわかる (確かめよ). □

命題 4.9. 整礎性公理は 1 で強制される。

証明. 示すべきは,

$$1 \Vdash \forall A (A \neq \emptyset \rightarrow \exists x \in A A \cap x = \emptyset)$$

である。 $p \in P$ と名称 \dot{A} を任意にとり、 $p \Vdash \dot{A} \neq \emptyset$ と仮定する。すると、ある $q \leq p$ と \dot{x} が存在して、 $q \Vdash \dot{x} \in \dot{A}$ となる。 \dot{x} を集合 $\{\dot{y} : \exists q \leq p \ q \Vdash \dot{y} \in \dot{A}\}$ のランク最小元とする。よって、 $q \leq p$ がとれて、 $q \Vdash \dot{x} \in \dot{A}$ となる。 $q \Vdash \dot{A} \cap \dot{x} = \emptyset$ を示す。仮にそうでないとする、 $r \leq q$ と \dot{z} がとれて、 $r \Vdash \dot{z} \in \dot{A} \cap \dot{x}$ となる。 $r \Vdash \dot{z} \in \dot{x}$ の定義より、 $s \leq r$ と $\dot{w} \in \text{dom } \dot{x}$ がとれて、 $s \Vdash \dot{z} = \dot{w}$ 。このとき $s \Vdash \dot{w} \in \dot{A}$ であり、 \dot{w} のランクは \dot{x} より小さい。これは \dot{x} の取り方に矛盾。 □

5 無矛盾性証明の仕組み

命題 5.1. $p \Vdash \varphi$ かつ $p \Vdash \neg \varphi$ となることはない。

証明. 命題 1.4 より明らか。 □

命題 5.2. φ を閉論理式とする。ZFC で $\exists P \ 1 \Vdash_P \varphi$ が示されると仮定する。このとき ZFC が無矛盾なら $\text{ZFC} + \varphi$ も無矛盾。

証明. 対偶をとる。 $\text{ZFC} + \varphi$ が矛盾するとする。すると $\text{ZFC} \vdash \neg \varphi$ 。すると第 4 節の結果より $\text{ZFC} \vdash \forall P \ 1 \Vdash_P \neg \varphi$ 。仮定と合わせると、命題 5.1 より、ZFC が矛盾することとなる。 □

6 ジェネリックフィルターの名称

\dot{G} という P 名称を

$$\dot{G} = \{(\check{p}, p) : p \in P\}$$

で定める. \dot{G} を (標準的な) ジェネリックフィルターの名称という.

命題 6.1. (1) $1 \Vdash \dot{G} \subseteq \check{P}$

$$(2) 1 \Vdash \forall p \in \check{P} \forall q \in \dot{G} (q \leq p \rightarrow p \in \dot{G})$$

$$(3) 1 \Vdash \forall p, q \in \dot{G} \exists r \in \dot{G} (r \leq p, q)$$

$$(4) D \subseteq P \text{ が稠密集合のとき } 1 \Vdash \check{D} \cap \dot{G} \neq \emptyset.$$

証明. (1) は明らか.

(2) について. $r, p \in P$ とし $(\check{q}, q) \in \dot{G}$ かつ $r \leq q$ かつ $r \Vdash q \leq p$ だとする. よって $r \leq q \leq p$ である. \dot{G} の定義より, $p \Vdash p \in \dot{G}$ なので, $r \Vdash p \in \dot{G}$ となる.

(3) について. $r \in P$ と $(\check{p}, p), (\check{q}, q) \in \dot{G}$ をとり $r \leq p, q$ とする. このとき $r \Vdash r \in \dot{G} \wedge r \leq p, q$ なのでよい.

(4) について. $p \in P$ をとる. D の稠密性より, $q \in D$ を $q \leq p$ なるようにとる. このとき $q \Vdash \check{q} \in \check{D} \cap \dot{G}$ である. よって $q \Vdash \check{D} \cap \dot{G} \neq \emptyset$. \square

7 連続体仮説の独立性

7.1 連続体仮説の否定の無矛盾性証明にトライ

半順序集合 P を次で定める:

$$P = \{p : p \text{ は } \omega_2 \times \omega \text{ から } 2 \text{ への有限部分関数}\}$$

ただし順序は $q \leq p \iff p \subseteq q$ でいれる. 最大元は空な関数 \emptyset である.

このとき, ジェネリックフィルターはフィルターなことから,

$$1 \Vdash \bigcup \dot{G} \text{ は } (\omega_2 \times \omega)^\sim \text{ から } 2 \text{ への部分関数}$$

となる. 各 $(\alpha, n) \in \omega_2 \times \omega$ に対して

$$D_{(\alpha, n)} = \{p \in P : (\alpha, n) \in \text{dom } p\}$$

とおくと $D_{(\alpha, n)}$ は P の稠密集合である. そこで

$$1 \Vdash \dot{G} \cap D_{(\alpha, n)} \neq \emptyset$$

となるので,

$$1 \Vdash (\alpha, n) \in \text{dom} \left(\bigcup \dot{G} \right)$$

となる.

なぜなら, $p \in P$ を任意にとると, $q \in D_{(\alpha, n)}$ と $r \leq p$ がとれて, $r \Vdash q \in \dot{G}$ となる. 他方で $q \in D_{(\alpha, n)}$ なのである $i \in 2$ について $((\alpha, n), i) \in q$ である. よって $r \Vdash (\alpha, n, i) \in \bigcup \dot{G}$ となる.

したがって,

$$1 \Vdash \bigcup \dot{G} \text{ は } (\omega_2 \times \omega)^\sim \text{ から } 2 \text{ への全域関数}$$

となる. 各 $\alpha, \beta \in \omega_2$ で $\alpha \neq \beta$ なるものに対して

$$E_{\alpha, \beta} = \{p \in P : \exists n \in \omega ((\alpha, n), (\beta, n) \in \text{dom } p \wedge p(\alpha, n) \neq p(\beta, n))\}$$

とおく. $E_{\alpha,\beta}$ も稠密集合である. そこで

$$1 \Vdash \dot{G} \cap E_{\alpha,\beta} \neq \emptyset$$

となるので,

$$1 \Vdash \langle (\bigcup \dot{G})(\alpha, n) : n \in \omega \rangle \neq \langle (\bigcup \dot{G})(\beta, n) : n \in \omega \rangle$$

が分かる. よって,

$$1 \Vdash \text{関数 } (\omega_2)^\sim \ni \alpha \mapsto \langle (\bigcup \dot{G})(\alpha, n) : n \in \omega \rangle \in 2^\omega \text{ は単射}$$

である. したがって,

$$1 \Vdash 2^\omega \geq (\omega_2)^\sim$$

となる. 後は,

$$1 \Vdash (\omega_2)^\sim = \omega_2 \quad (*)$$

がわかれば, 連続体仮説の否定の無矛盾性が得られるが, (*) は自明ではない. 後の小節でそれを示していこう.

7.2 デルタシステム補題

小節 7.1 の最後の議論を正当化するためには, まず, 組合せ論的な補題が必要となる. それが以下のデルタシステム補題である. これは [Kun11] の Lemma III.2.6 による短い証明である.

命題 7.1. κ を非可算正則基数とする. \mathcal{A} を有限集合の族で, $|\mathcal{A}| = \kappa$ とする. このとき濃度 κ の $B \subseteq \mathcal{A}$ と有限集合 R がとれて, 任意の $X, Y \in \mathcal{A}$ について $X \cap Y = R$ となる. (この結論のことを B は根 R のデルタシステムをなす, と表現する).

証明. 各 $X \in \mathcal{A}$ について $|X| \in \omega$ であり, κ が非可算正則なので, $n \in \omega$ と濃度 κ の $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}$ が取れて, 任意の $X \in \mathcal{D}$ について $|X| = n$ となる. n に関する帰納法で主張を示す.

$n = 1$ なら \mathcal{D} は $R = \emptyset$ としてすでに主張の証拠となっている. よって $n > 1$ とする.

各集合 a について $\mathcal{D}_a = \{X \in \mathcal{D} : a \in X\}$ とおく.

場合 1: $|\mathcal{D}_a| = \kappa$ がある a について成り立つ. そのような a を固定し, $\mathcal{E} = \{X \setminus \{a\} : X \in \mathcal{D}_a\}$ とおく. これはどのメンバーも濃度 $n - 1$ のサイズ κ の族である. よって帰納法の仮定を使って, 濃度 κ の $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{E}$ と R がとれて, \mathcal{C} は根 R のデルタシステムを成す. このとき, $\{Z \cup \{a\} : Z \in \mathcal{C}\}$ は根 $R \cup \{a\}$ のデルタシステムとなる.

場合 2: すべての a について $|\mathcal{D}_a| < \kappa$ である. このとき, まず次の観察ができる: 任意の集合 S で $|S| < \kappa$ なものについて $\bigcup_{a \in S} \mathcal{D}_a$ は濃度 κ 未満. よって, このとき $X \in \mathcal{D} \setminus \bigcup_{a \in S} \mathcal{D}_a$ がとれるが \mathcal{D}_a の定義より, $X \cap S = \emptyset$ である.

この観察を繰り返す使うことにより, 各 $\beta < \kappa$ について $X_\beta \in \mathcal{D}$ がとれて, $X_\beta \cap \bigcup_{\alpha < \beta} X_\alpha = \emptyset$ となる. したがって, $\{X_\beta : \beta < \kappa\}$ は互いに素な \mathcal{A} の部分族, すなわち根 \emptyset を持つデルタシステムである. □

7.3 可算鎖条件と連続体仮説の否定の無矛盾性

$p \Vdash \kappa$ は基数 ならば, Σ_1 上方絶対性により, κ は基数とならないといけないことがわかる. 逆を保証する一つの条件がこの節で述べる可算鎖条件である.

定義 7.2. P の二元 p, q が両立するとは $r \leq p, q$ が存在することを意味する. P の反鎖 A とは A のどの二元も両立しないものを意味する. 半順序集合が可算鎖条件を満たすとは, P の反鎖が必ずたかだか可算なことを意味する.

命題 7.3. κ を基数とし, P を可算鎖条件を満たす半順序集合とする. このとき $1 \Vdash_P \check{\kappa}$ は基数.

証明. $1 \Vdash \check{\omega} = \omega$ なので, $\kappa \leq \omega$ については明らか. そこで κ を非可算基数とする. $1 \Vdash$ “ κ が基数” ではないとする. すると $p \in P$ と $\dot{f} \in V^P$ と $\beta < \kappa$ があって,

$$p \Vdash \dot{f}: \check{\beta} \rightarrow \check{\kappa} \text{ 全射}$$

となる. 各 $y \in \kappa$ について $x_y \in \beta$ と $p_y \leq p$ がとれて,

$$p_y \Vdash \dot{f}(\check{x}_y) = \check{y}.$$

となる. 鳩の巣原理によりある $x^* \in \beta$ について $Y = \{y \in \kappa : x_y = x^*\}$ は非可算となる.

そこで $\{p_y : y \in Y\}$ は非可算な反鎖となる. なぜなら,

$$p_y \Vdash \dot{f}(\check{x}^*) = y$$

と互いに矛盾する論理式を強制するからである. これは可算鎖条件を満たすことに反するので証明が終了する. \square

\aleph 系列は基数を下から並べたものであるという定義から, 任意の基数 κ について $1 \Vdash$ “ $\check{\kappa}$ は基数” ならば, この節の最初の注意と合わせて, 任意の順序数 α について $1 \Vdash \aleph_{\check{\alpha}} = \check{\aleph}_{\alpha}$ なことに注意する.

命題 7.4. κ を非可算正則基数とする. 次の半順序集合を考える:

$$P = \{p : p \text{ は } \kappa \text{ から } 2 \text{ への有限部分関数}\}$$

順序は $q \leq p \iff p \subseteq q$ である. このとき, この半順序集合 P は可算鎖条件を満たす.

証明. ω_1 個の P の元の列

$$\langle p_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$$

を任意にとる. 有限集合の族 $\{\text{dom}(p_\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ にデルタシステム補題を適用すると $X \in [\omega_1]^{\omega_1}$ と $R \subseteq \kappa$ 有限集合がとれて, 互いに異なる任意の $\alpha, \beta \in X$ について $\text{dom}(p_\alpha) \cap \text{dom}(p_\beta) = R$ となる.

ところが, R から 2 への関数は有限個である. よって, 鳩の巣原理より, $\alpha, \beta \in X$ がとれて, $p_\alpha \restriction R = p_\beta \restriction R$ となる. したがって, p_α と p_β は両立する. \square

系 7.5. 小節 7.1 で定義した半順序集合 P は $2^{\aleph_0} \geq \aleph_2$ を強制する. 特に ZFC が無矛盾であれば, ZFC は連続体仮説を証明できない.

証明. 小節 7.1 の議論および命題 7.3 と命題 7.4 から従う. \square

7.4 閉性と連続体仮説の無矛盾性

定義 7.6. P が λ 閉とは, 任意の $\gamma < \lambda$ と P の要素の降下列 $\langle p_\alpha : \alpha < \gamma \rangle$ に対して, $q \in P$ があって, すべての $\alpha < \gamma$ について $q \leq p_\alpha$ となることを言う.

命題 7.7. P が λ 閉かつ $\gamma < \lambda$ かつ B を集合とし $p \in P$ とする.

$$p \Vdash \dot{f}: \gamma \rightarrow B$$

とする. このとき $g: \gamma \rightarrow B$ と $q \leq p$ があって,

$$q \Vdash \dot{f} = \check{g}$$

となる. 一言で言うと, λ 閉な半順序は $< \lambda$ 列を付け加えない.

証明. 列 $\langle p_\alpha : \alpha < \gamma \rangle$ と B の元の降下列 $\langle b_\alpha : \alpha < \gamma \rangle$ を次を満たすように構成する：

- (1) $p_0 = p$.
- (2) $p_{\alpha+1} \Vdash \dot{f}(\alpha) = b_\alpha$.

これは取れる．なぜなら，極限ステップでは， P の λ 閉なことを使えばよくて，後続ステップでは，各 $\alpha < \gamma$ について

$$D_\alpha = \{q \in P : (\exists b \in B) q \Vdash \dot{f}(\alpha) = b\}$$

が稠密なことを使えばよいからである．

最後に，再び λ 閉性を使って， q を $\langle p_\alpha : \alpha < \gamma \rangle$ の下界とする．そこで $g = \{(\alpha, b_\alpha) : \alpha < \gamma\}$ と q は

$$q \Vdash \dot{f} = \check{g}$$

を満たす． □

命題 7.8. P が λ 閉だとすると， λ 以下の基数 κ について

$$1 \Vdash \check{\kappa} \text{ は基数}$$

となる．

証明. $p \Vdash \text{“}\check{\kappa} \text{ は基数でない”}$ と仮定する．すなわち，ある $q \leq p$ と \dot{f} と $\gamma < \kappa$ があって，

$$q \Vdash \dot{f}: \check{\gamma} \rightarrow \check{\kappa} \text{ 全射}$$

となる． $\gamma < \kappa \leq \lambda$ と命題 7.7 を使うことができ， $r \leq q$ と $g: \gamma \rightarrow \kappa$ がとれて，

$$r \Vdash \dot{f} = \check{g}$$

が成り立つ．したがって，

$$r \Vdash \check{g} \text{ は } \check{\gamma} \text{ から } \check{\kappa} \text{ への全射}$$

となるが， Δ_0 絶対性より， $g: \gamma \rightarrow \kappa$ が全射なことが従い， κ が基数なことに矛盾． □

半順序集合 P を次で定める：

$$P = \{p : p \text{ は } \omega_1 \times \omega \text{ から } 2 \text{ への可算部分関数}\}$$

ただし順序は $q \leq p \iff p \subseteq q$ でいれる．最大元は空な関数 \emptyset である．

定理 7.9. 上記の P において，最大元は連続体仮説を強制する．したがって，ZFC が無矛盾なら，ZFC は連続体仮説の否定を証明できない．

証明. P は明らかに ω_1 閉である．したがって P は ω_1 を保つ．各 $\alpha < \omega_1$ について P 名称 \dot{g}_α を次で定める：

$$\dot{g}_\alpha = \{(\check{n}, p) : n \in \omega, ((\alpha, n), 1) \in p\}.$$

なお，

$$1 \Vdash \check{n} \in \dot{g}_\alpha \iff (\bigcup \dot{G})(\check{\alpha}, \check{n}) = 1$$

に注意する．今，任意の $x \subseteq \omega$ について

$$1 \Vdash \exists \alpha < \omega_1 \ \check{x} = \dot{g}_\alpha \tag{*}$$

となる．

$p \in P$ とする. p は可算集合なので, α がとれて, 第一成分が α である組 (α, n) は一つも p に書き込まれていない:

$$p \cap (\{\alpha\} \times \omega) = \emptyset.$$

そこで $q = p \cup \{(\alpha, n), 1 : n \in x\} \cup \{(\alpha, n), 0 : n \notin x\}$ は P の元となる. すると $q \Vdash \dot{x} = \dot{g}_\alpha$ である.

以上より

$$1 \Vdash |\mathcal{P}(\omega)| = |(\mathcal{P}(\omega))^\sim| = \omega_1$$

となる. 第一の等式は命題 7.7, 第二の等式は (*) による. □

8 本稿を超えて

ここまでで連続体仮説の独立性が示された.

これに続いて「可算推移的モデルについて」「 $V[G]$ について」「ブール代数值モデルについて」という節を書くつもりであったが, 書かなかった. 可算推移的モデルを使う方針は Kunen のテキスト [Kun11] が採用しているものである. 最短コースにするため, 本稿ではあえてその方針を避けた. 本稿でイメージが捉えづらかった方は特に読むべきである.

可算推移的モデルに加えて, 論文などの実地では V を真に拡大した $V[G]$ というモデルを使う議論が頻繁に登場する. そんなものは本当には存在しないというのは最初に述べた通りだが, なぜあると思って議論していいのかについては [Fuc18] に触れられている.

強制法は半順序集合に伴ったものであるが, その半順序集合を完備ブール代数だけに制限して考えても実質的に変わらない. 完備ブール代数に限定して考えると, 強制関係の代わりに論理式のブール値というものを考えることができ, こちらは強制関係の定義より比較的自然的に思える. また, 実地の研究でも半順序集合ではなく完備ブール代数を考える必要のある場面も出てくる.

最後に, 強制法は連続体仮説の独立性に留まらず, 様々な無矛盾性証明・独立性証明に使えたり, あるいは ZFC の定理を示すのにも有効である. その際, 重要になってくるのは強制法をある意味で超限回繰り返した「反復強制法」である. 本稿を最後まで読んだ読者にはぜひ反復強制法にも触れてほしい. [Fuc18] と [Bau83] は反復強制法の良い文献である.

強制法は巨大基数と組み合わせて使うとより強力な武器となる. そのような理論の入門には [Kan08] がうってつけである.

なお, 本稿の作成には塩谷氏による講義ノート [塩谷 19] を非常に参考にした.

参考文献

- [Bau83] J. E. Baumgartner. “Iterated forcing”. *Surveys in set theory* 87 (1983), pp. 1–59.
- [Fuc18] S. Fuchino. “Iterated Forcing” (2018). URL: <https://fuchino.ddd.jp/notes/iterated-forcing-katowice-2018.pdf>.
- [Kan08] A. Kanamori. *The Higher Infinite: Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings*. Springer Monographs in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [Kun11] K. Kunen. *Set Theory*. Studies in logic. College Publications, 2011.
- [Kun09] K. Kunen. *The Foundations of Mathematics*. Mathematical logic and foundations. College Publications, 2009.
- [塩谷 19] 塩谷 真弘. 情報数学概論 I(01BB007) 講義資料. 2019.