Cichoń's maximum の証明

後藤 達哉

2022 年 9 月 14 日

目次

1 イントロダクション

実数全体の集合 $\mathbb{R}$ を Lebesgue 測度 0 集合たちで覆うには，それらが最低何個必要かという問いを考える．Lebesgue 測度 0 集合の可算和は Lebesgue 測度 0 だから可算個では足りない．一方，$\bigcup_{r \in \mathbb{R}} \{r\} = \mathbb{R}$ だから連続体濃度個あれば十分である．これで非可算かつ連続体濃度以下とわかるわけだが，ここで問いを終えてしまうのはもったいない．連続体濃度の下に非可算基数が存在することもありえると分かっているからだ．そこで問の答えを

$$\mathrm{cov}(\mathcal{N}) = \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \text{ はルベーグ測度 0 集合の族で } \bigcup \mathcal{A} = \mathbb{R}\}$$

とおいて，これがいろんな集合論のモデルでどうなっているのか調べよう．また，他の似たような問いの答えを文字でおいてそれらの間の関係を調べよう：ZFC の範囲内で大小関係がつくのか，等しいのか，ZFC で等しいことを証明できないなら実際にどんなモデルで破れているのか．これが**基数不変量**の研究である．

基数不変量という言葉に厳密な定義はないが，「実数の構造によって定義される基数」のことであり，その多くは $\aleph_1$ 以上 $2^{\aleph_0}$ 以下であることが証明される．

いくつかの基数不変量を定義しよう．

2^ω 上のイデアル $\mathcal{I}$ に対して

- $\mathrm{add}(\mathcal{I}) = \min\{|\mathcal{J}| : \mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}, \bigcup \mathcal{J} \notin \mathcal{I}\}$
- $\mathrm{cov}(\mathcal{I}) = \min\{|\mathcal{J}| : \mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}, \bigcup \mathcal{J} = 2^\omega\}$

- $\mathrm{non}(\mathcal{I}) = \min\{|A| : A \subseteq 2^\omega, A \notin \mathcal{I}\}$
- $\mathrm{cof}(\mathcal{I}) = \min\{|\mathcal{J}| : \mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}, (\forall A \in \mathcal{I})(\exists B \in \mathcal{J})(A \subseteq B)\}$

とおく．これらにルベーグ測度 0 集合のイデアル $\mathcal{N}$，痩せ集合のイデアル $\mathcal{M}$ を代入したものが考察の対象である．

また，

- $\mathfrak{d} = \min\{|F| : F \subseteq \omega^\omega, (\forall f \in \omega^\omega)(\exists g \in F)(f \leqslant^* g)\}$.
- $\mathfrak{b} = \min\{|F| : F \subseteq \omega^\omega, \neg(\exists f \in \omega^\omega)(\forall g \in F)(g \leqslant^* f)\}$.

という基数不変量も考えられる．$\mathfrak{d}$ は dominating number，$\mathfrak{b}$ は bounding number と呼ばれる．

以上の 10 個の基数不変量の ZFC で示せる大小関係については以下の図式が知られていて，Cichoń の図式と呼ばれる．

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{cov}(\mathcal{N}) \arrow[r] & \mathrm{non}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathcal{N}) \arrow[r] & \mathfrak{c} \\
& & \mathfrak{b} \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{d} \arrow[u] & & \\
\aleph_1 \arrow[r] & \mathrm{add}(\mathcal{N}) \arrow[uu] \arrow[r] & \mathrm{add}(\mathcal{M}) \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{cov}(\mathcal{M}) \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{non}(\mathcal{N}) \arrow[uu] &
\end{tikzcd}$$

ここで矢印 $A \to B$ は $A \leqslant B$ を ZFC で証明できることを意味する．また $\mathrm{add}(\mathcal{M}) = \min\{\mathrm{cov}(\mathcal{M}), \mathfrak{b}\}$ かつ $\mathrm{cof}(\mathcal{M}) = \max\{\mathrm{non}(\mathcal{M}), \mathfrak{d}\}$ が ZFC で証明できる．

Cichoń の図式に表示されている基数不変量以外にも Blass の図式と呼ばれる図式の基数不変量：$\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{h}, \mathfrak{g}, \mathfrak{s}, \mathfrak{e}, \mathfrak{r}, \mathfrak{a}, \mathfrak{u}, \mathfrak{i}$ などもある．しかし，本稿ではこれらには焦点を当てない．

表 1 に Cichoń の図式の歴史をまとめた．

連続体仮説の否定の無矛盾性以前に Rothberger の結果があるのがすごいが，この結果は「Luzin 集合と Sierpinski 集合の両方が存在するならば連続体仮説が成り立つ」という定理の補題として証明された．Cantor の $\aleph_0 < \mathfrak{c}$ 以前に du Bois-Reymond が $\aleph_0 < \mathfrak{b}$ を示していたことも驚くべきところであろう．

Kunen-Miller の表というのは図 1 のようなものである．[Mil81] から抜粋した．Cichoń の図式ができる前はどの組合せが可能かこのような表で表していた．

表題にもなっている Cichoń's maximum であるが，これは Cichoń の図式において (他の基数不変量の値に束縛されている $\mathrm{add}(\mathcal{M}), \mathrm{cof}(\mathcal{M})$ を除いて) すべての基数不変量の値を同時に別々の値にするモデルである．そのようなモデルの構成法を本稿では見ていく．

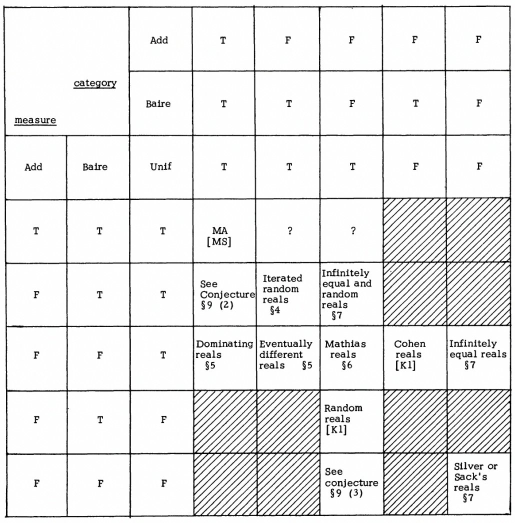
1.1 関係システム

定義 1. 3 つ組 $\mathbf{R} = (X, Y, \sqsubset)$ が**関係システム**であるとは，X, Y が集合で $\sqsubset$ が関係であることを言う (基本的には $\sqsubset \subseteq X \times Y$ だがはみ出ていてよい)．

$F \subseteq X$ が **$\mathbf{R}$ 有界**であるとは $(\exists y \in Y)(\forall x \in F)(x \sqsubset y)$ を満たすことである．$E \subseteq Y$ が **$\mathbf{R}$-dominanting** であるとは $(\forall x \in X)(\exists y \in E)(x \sqsubset y)$ を満たすことである．

表 1　Cichoń の図式の歴史

年	人物	出来事
1875 年	du Bois-Reymond	$\aleph_0 < \mathfrak{b}$ の証明
1891 年	Cantor	$\aleph_0 < \mathfrak{c}$ の証明
1938 年	Rothberger	$\mathrm{cov}(\mathcal{M}) \leqslant \mathrm{non}(\mathcal{N})$ と $\mathrm{cov}(\mathcal{N}) \leqslant \mathrm{non}(\mathcal{M})$ の証明
1963 年	Cohen	連続体仮説の独立性
1970 年	Martin–Solovay	Martin の公理およびその帰結の $\mathrm{add}(\mathcal{N}) = \mathfrak{c} > \aleph_1$ の証明
1977 年	Truss	$\min\{\mathrm{cov}(\mathcal{M}), \mathfrak{b}\} \leqslant \mathrm{add}(\mathcal{M})$ の証明
1981 年	Miller	$\mathrm{add}(\mathcal{M}) \leqslant \min\{\mathrm{cov}(\mathcal{M}), \mathfrak{b}\}$ の証明およびこの時点で知られていたモデルでの Cichon の図式の中の基数不変量の値の決定，Kunen-Miller の表 (5x5 マス)
1984 年	Miller	$\mathrm{add}(\mathcal{N}) \leqslant \mathfrak{b}$ の証明; Kunen-Miller の表 (6x6 マス)
1984 年	Bartoszyński	$\mathrm{add}(\mathcal{N}) \leqslant \mathrm{add}(\mathcal{M})$ の証明
1984 年	Fremlin	$\mathrm{cof}(\mathcal{M}) = \max\{\mathrm{non}(\mathcal{M}), \mathfrak{d}\}$ の証明; Cichoń's diagram 登場
1985 年	Raisonnier–Stern	$\mathrm{cof}(\mathcal{M}) \leqslant \mathrm{cof}(\mathcal{N})$ の証明
1989 年	Bartoszyński–Judah–Shelah	$\mathrm{PT}_{f,g}$ 強制法の開発および連続体濃度が $\aleph_2$ のときの Cichoń の図式の分離すべて完成
2019 年	Goldstern–Kellner–Shelah	巨大基数を仮定した Cichoń's maximum の証明
2021 年	Goldstern–Kellner–Mejía–Shelah	巨大基数を仮定しない Cichoń's maximum の証明



measure \ category		Add	T	F	F	F	F
		Baire	T	T	F	T	F
Add	Baire	Unif	T	T	T	F	F
T	T	T	MA [MS]	?	?		
F	T	T	See Conjecture §9 (2)	Iterated random reals §4	Infinitely equal and random reals §7		
F	F	T	Dominating reals §5	Eventually different reals §5	Mathias reals §6	Cohen reals [K1]	Infinitely equal reals §7
F	T	F			Random reals [K1]		
F	F	F			See conjecture §9 (3)		Silver or Sack's reals §7

図 1　Kunen-Miller の表

- $\mathfrak{b}_{\mathbf{R}} = \min\{|F| : F \subseteq X$ は $\mathbf{R}$ 非有界 $\}$
- $\mathfrak{d}_{\mathbf{R}} = \min\{|E| : E \subseteq Y$ は $\mathbf{R}$-dominating$\}$

と定める．

定義 2. 関係システム $\mathbf{R} = (X, Y, \sqsubset)$ についてその双対を $\mathbf{R}^\perp = (Y, X, \sqsubset^\perp)$ と定める．ここに

$$y \sqsubset^\perp x \iff \neg(x \sqsubset y).$$

$\mathfrak{b}_{\mathbf{R}^\perp} = \mathfrak{d}_{\mathbf{R}}$ かつ $\mathfrak{d}_{\mathbf{R}^\perp} = \mathfrak{b}_{\mathbf{R}}$ に注意する．

定義 3. 関係システム $\mathbf{R} = (X, Y, \sqsubset)$ が**ポーランド関係システム**であるとは，次の 3 条件を満たすことを言う．

1. X は完全ポーランド空間.
2. Y はあるポーランド空間 Z の非空な解析集合.
3. $\sqsubset \cap (X \times Z) = \bigcup_{n\in\omega} \sqsubset_n$ であって，$\langle \sqsubset_n : n \in \omega \rangle$ は $X \times Z$ の閉集合の増大列であって，各 $n \in \omega$ と $y \in Y$ について $(\sqsubset_n)^y = \{x \in X : x \sqsubset_n y\}$ は nowhere dense である．

ポーランド関係システムのような定義可能な関係システムを考えているとき，それを書いたときには今考えている宇宙の中でその定義を解釈したものを表すことにする．

事実 4. $\mathbf{R}$ がポーランド関係システムであれば，$\mathfrak{b}_{\mathbf{R}} \leqslant \mathrm{non}(\mathcal{M})$ かつ $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) \leqslant \mathfrak{d}_{\mathbf{R}}$ である．

定義 5.
1. $\mathcal{C} = \{(q_n)_{n\in\omega} :$ 各 q_nは正の有理数かつ $\sum_n q_n \leqslant 1\}$ とおく．
2. $\Omega_n = \{a \in [2^{<\omega}]^{<\aleph_0} : \mu(\bigcup_{s\in a}[s]) \leqslant 2^{-n}\}$ とおき，$\Omega = \prod_{n\in\omega} \Omega_n$ とおく．各 $x \in \Omega$ について $N_x = \bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{s\in x(n)} [s]$ とおく．

以下の 4 つはすべてポーランド関係システムである．

定義 6.
1. $\mathbf{R}_1 = (\mathcal{C}, \mathcal{C}, \{(x, y) : (\forall^\infty n)(x(n) \leqslant y(n))\})$
2. $\mathbf{R}_2 = (\Omega, 2^\omega, \{(x, y) : y \notin N_x\})$
3. $\mathbf{R}_3 = (\omega^\omega, \omega^\omega, \{(x, y) : (\forall^\infty n)(x(n) \leqslant y(n))\})$
4. $\mathbf{R}_4 = (\omega^\omega, \omega^\omega, \{(x, y) : (\forall^\infty n)(x(n) \neq y(n))\})$

補題 7.
1. $\mathfrak{d}_{\mathbf{R}_1} = \mathrm{cof}(\mathcal{N}), \mathfrak{b}_{\mathbf{R}_1} = \mathrm{add}(\mathcal{N})$,
2. $\mathfrak{d}_{\mathbf{R}_2} = \mathrm{non}(\mathcal{N}), \mathfrak{b}_{\mathbf{R}_2} = \mathrm{cov}(\mathcal{N})$,
3. $\mathfrak{d}_{\mathbf{R}_3} = \mathfrak{d}, \mathfrak{b}_{\mathbf{R}_3} = \mathfrak{b}$,
4. $\mathfrak{d}_{\mathbf{R}_4} = \mathrm{cov}(\mathcal{M}), \mathfrak{b}_{\mathbf{R}_4} = \mathrm{non}(\mathcal{M})$.

1.2 Cohen，ランダム，Hechler，アメーバ，eventually different 強制法

1.2.1 Cohen 強制法

$\mathbb{C} = 2^{<\omega}$ で順序を延長関係で入れたもの $q \leqslant p \iff p \subseteq q$ は Cohen 強制法と呼ばれる．$\mathbb{C}$ ジェネリックフィルター G から作られる実数 $c = \bigcup G$ を Cohen 実数という．Cohen 実数から G を復元できる：$G = \{c \upharpoonright n : n \in \omega\}$. Cohen 強制法は可算なので，明らかに σ-centered を満

たす．特に ccc を満たす．Cohen 実数は $\mathbf{R}_4^{\perp}$ を解決する：

$$(\forall x \in \omega^\omega \cap V)(\exists^\infty n)(x(n) = \dot{c}(n)).$$

1.2.2 ランダム強制法

$\mathbb{B} = \{T : T$ は $2^{<\omega}$の部分木で$\mu([T]) > 0\}$ で順序を包含関係で入れたもの $T' \leqslant T \iff T' \subseteq T$ をランダム強制法という．$\mathbb{B}$ ジェネリックフィルター G から作られる実数 $r = \bigcap\{[T] : T \in G\}$ をランダム実数という．ランダム実数から G を復元できる：$G = \{T \in \mathbb{B} : r \in [T]\}$．ランダム強制法は ccc を満たす．ランダム実数は $\mathbf{R}_2$ を解決する：

$$(\forall x \in \Omega^V)(\dot{r} \notin N_x).$$

1.2.3 Hechler 強制法

$\mathbb{D} = \{(n, f) : n \in \omega, f \in \omega^\omega\}$ で順序を

$$(m, g) \leqslant (n, f) \iff n \leqslant m \wedge f \upharpoonright n = g \upharpoonright n \wedge (\forall k \in \omega)(f(k) \leqslant g(k))$$

で入れたものを Hechler 強制法という．$\mathbb{D}$ ジェネリックフィルター G から作られる実数 $d = \bigcup\{f \upharpoonright n : (n, f) \in G\}$ を Hechler 実数という．Hechler 実数から G を復元できる：$G = \{(n, f) : f \upharpoonright n = d \upharpoonright n\}$. Hechler 強制法は σ-centered である．Hechler 実数は $\mathbf{R}_3$ を解決する：

$$(\forall x \in \omega^\omega \cap V)(\forall^\infty n)(x \leqslant^* \dot{d}).$$

1.2.4 アメーバ強制法

$\mathbb{A} = \{T : T$ は $2^{<\omega}$の subtree で$\mu([T]) \geqslant 1/2\}$ で順序を $T' \leqslant T \iff T' \subseteq T$ で入れたものをアメーバ強制法という．$\mathbb{D}$ ジェネリックフィルター G に対して測度 1/2 の閉集合 $K_G = \bigcap G$ が定まる．そのコード a をアメーバ実数という．アメーバ実数 a から G を復元できる： $G = \{T \in \mathbb{A} : \hat{a} \subseteq [T]\}$．アメーバ実数を Borel な方法で加工して得られる実数 $b \in \mathcal{C}$ があって，それは $\mathbf{R}_1$ を解決する：

$$(\forall x \in \mathcal{C}^V)(x \leqslant b).$$

アメーバ強制法は ccc である．

1.2.5 eventually different 強制法

$\mathbb{E} = \{(s, k, \varphi) : s \in \omega^{<\omega}, k \in \omega, \varphi \colon \omega \to [\omega]^{\leqslant k}, (\forall i \in \mathrm{dom}(s))(s(i) \notin \varphi(i))\}$ で順序を

$$(s', k', \varphi') \leqslant (s, k, \varphi) \iff s \subseteq s' \wedge k \leqslant k' \wedge (\forall i)(\varphi(i) \subseteq \varphi'(i))$$

を入れたものを eventually different 強制法という． $\mathbb{E}$ ジェネリックフィルター G から作られる実数 $e = \bigcup\{s : (s, k, \varphi) \in G\}$ を eventually different generic 実数という．eventually different 強制法は σ-centered である．eventually different generic 実数は $\mathbf{R}_4$ を解決する：

$$(\forall x \in \omega^\omega \cap V)(\forall^\infty n)(x(n) \neq \dot{e}(n)).$$

1.2.6 Borel reading of names

Cohen，ランダム，Hechler，アメーバ，eventually different 強制法は共通して次の性質を持つ．

性質 8. $\mathbb{P}$ を ccc かつ Borel な強制半順序であり，かつ $\mathbb{P}$ はジェネリック実数を持つという性質を考える．すなわち，実数の名前 $\dot{x}_{\mathrm{gen}}$ と Borel な関係 $B \subseteq \mathbb{P} \times 2^\omega$ があって

$$\mathbb{P} \Vdash p \in \dot{G} \iff B(p, \dot{x}_{\mathrm{gen}})$$

となるという性質を考える．

この性質を持つ強制法による強制拡大での実数はジェネリック実数から Borel な方法で計算できる．

命題 9. $\mathbb{P}$ を上記性質 8 を持つ強制法とする．$\dot{x}$ を 2^ω の元の名前とする．このとき Borel 関数 $C \colon 2^\omega \to 2^\omega$ があって，

$$\Vdash \dot{x} = C(\dot{x}_{\mathrm{gen}})$$

となる．

これは有限台反復でも同様である．

命題 10. $(P_\alpha, Q_\alpha : \alpha < \delta)$ を有限台反復とする．各 Q_α は上記性質 8 を持つ (ことが P_α によって強制される) 強制法とする．$\dot{x}$ を 2^ω の元の P_δ 名前とする．このとき Borel 関数 $C \colon (2^\omega)^\omega \to 2^\omega$ と可算個の添字 $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ があって，

$$\Vdash \dot{x} = C(\dot{x}_{\mathrm{gen}}^{\alpha_0}, \dot{x}_{\mathrm{gen}}^{\alpha_1}, \dots)$$

となる．

1.3 goodness

定義 11. P を ccc な強制法とし，λ を非可算正則基数とし，R をポーランド関係システムとする．P が **λ-R-good** であるとは，Y の元を表す各 P 名称 $\dot{y}$ について非空な集合 $\mathscr{Y} \subseteq Y$ でサイズ $< \lambda$ なものが V に存在して，どんな $x \in X$ についても x が $\mathscr{Y}$ 上 $\mathbf{R}$ 非有界であれば，$\Vdash x \not\sqsubset \dot{y}$.

事実 12. $\mathbf{R}$ をポーランド関係システムとする．

1. ccc でサイズ $< \lambda$ な強制法 P はすべて，λ-$\mathbf{R}$-good である．特に Cohen 強制法は $\aleph_1$-$\mathbf{R}$-good である．
2. ccc で λ-$\mathbb{R}$-good であることは任意の長さの有限台反復で保たれる．

事実 13.

1. σ-centered かランダム強制法の部分ブール代数である強制法は $\aleph_1$-$\mathbf{R}_1$-good である．
2. σ-centered な強制法は $\aleph_1$-$\mathbf{R}_2$-good である．

補題 14. $\mathbf{R} = (X, Y, \sqsubset)$ をポーランド関係システムとする．$\lambda \leqslant \kappa \leqslant \mu$ を全て非可算正則基数とする．μ 個の Cohen 実数 $(c_\alpha : \alpha < \mu)$ を加えた後に，λ-$\mathbf{R}$-good 強制法で強制拡大したモデ

ルにおいて，どんな実数 $y \in Y$ についても，

$$(\exists \alpha < \kappa)(\forall \beta \in \kappa \smallsetminus \alpha)(c_\beta \not\sqsubset y)$$

が成り立つ．

証明. κ 個の Cohen 実数を追加した後の中間モデルで議論する．それを V_κ と呼ぶ．残りの強制法，すなわち $\mu \smallsetminus \kappa$ 個の Cohen と good 強制法の反復は good である．よって V_κ において goodness を目撃する集合 $\mathcal{Y}$ でサイズ $<\lambda$ なものを得る．

最初の Cohen 強制法は ccc であり，$\kappa \geqslant \lambda$ は正則なので，ある番号 $\alpha \in \kappa$ がとれてどの元 $y \in \mathcal{Y}$ もすでに最初の α 個の Cohen を付け加えたモデルに存在する．そのモデルを V_α と書こう．y によって bound される実数たちの集合 M_y は meager であり，それは絶対的である．どの $\beta \in \kappa \smallsetminus \alpha$ に対しても c_β は V_α 上の Cohen 実数なので M_y に属さない．すなわち y に bound されない．つまり，$\mathcal{Y}$ によって bound されない．したがって，goodness の定義より，各 c_β は与えられた y に bound されないことが強制される． □

1.4 EUB と COB

定義 15. γ を極限順序数，P を ccc 強制法，$\mathbf{R} = (X, Y, \sqsubset)$ を定義可能な関係システムとする．$\mathsf{EUB}(\mathbf{R}, P, \gamma)$ とは次の主張である：X の元の P-名称の列 $(\dot{x}_\alpha)_{\alpha<\gamma}$ であって，どんな Y の元の P-名称の列 $\dot{y}$ についても

$$(\exists \alpha < \gamma)(\forall \beta \in \gamma \smallsetminus \alpha)\ P \Vdash \neg(\dot{x}_\beta \sqsubset \dot{y})$$

となる．

ccc 強制法を考えているので，γ が非可算共終数を持つときには，$(\exists \alpha < \gamma)(\forall \beta \in \gamma \smallsetminus \alpha)$ は強制関係の外にあろうが中にあろうが同じなことに注意しておく．

定義 16. λ, μ を非可算正則基数，P を ccc 強制法，$\mathbf{R} = (X, Y, \sqsubset)$ を定義可能な関係システムとする．このとき $\mathsf{COB}(\mathbf{R}, P, \lambda, \mu)$ は次の主張である：$<\lambda$-directed な半順序集合集合 $(S, <)$ でサイズ μ なものと Y の元の P-名称の族 $(\dot{y}_s : s \in S)$ があって，X の元のどんな P-名称 $\dot{x}$ についても

$$(\exists s \in S)(\forall t > s)\ P \Vdash \dot{x} \sqsubset \dot{y}_i$$

となる．

$\mathsf{EUB}(\mathbf{R}, P, \gamma)$ は $\mathsf{COB}(\mathbf{R}, P, \mathrm{cf}(\gamma), \mathrm{cf}(\gamma))$ と同値なことに注意する．

補題 17. $\mathsf{COB}(\mathbf{R}, P, \lambda, \mu)$ は $P \Vdash (\mathfrak{b}_\mathbf{R} \geqslant \lambda$ かつ $\mathfrak{d}_\mathbf{R} \leqslant \mu)$ を含意する．

証明. 集合 $(\dot{y}_s)_{s\in S}$ はサイズ μ の dominating family なので $\mathfrak{d}_\mathbf{R} \leqslant \mu$ を得る．

$\mathfrak{b}_\mathbf{R} \geqslant \lambda$ を示すために，$(\dot{x}_\alpha)_{\alpha\in\theta}$ を長さ $\theta < \lambda$ なる X の元の P 名前の列とする．各 $\dot{x}_\alpha$ について，$s_\alpha \in S$ があって，$(\forall t > s_\alpha)\, P \Vdash \dot{x}_\alpha \sqsubset \dot{y}_t$ である．S は $<\lambda$-directed なので，ある t があってどの s_α よりも大きい．したがって，$P \Vdash \dot{x}_\alpha \sqsubset \dot{y}_t$ がすべての α で成り立つ．すなわち $\{\dot{x}_\alpha : \alpha \in \theta\}$ は bounded である． □

上の注意と補題 17 より $\mathsf{EUB}(\mathbf{R}, P, \lambda)$ は $P \Vdash (\mathfrak{b}_\mathbf{R} \leqslant \lambda$ かつ $\mathfrak{d}_\mathbf{R} \geqslant \lambda)$ を含意する．

2 Cichoń の図式の左半分

これから「部分的アメーバ強制法」「部分的ランダム強制法」「部分的 Hechler 強制法」「部分的 eventually different 強制法」を定義する．そのために，性質 8 を持つ強制法の有限台反復 $(P_\alpha, Q_\alpha : \alpha < \delta)$ を考える．$(\dot\eta_\alpha : \alpha < \delta)$ をジェネリック実数の列とする．$\alpha < \delta$ と $w \subseteq \alpha$ を固定する．

定義 18. 1. V の元 (B, u) が w**-コード**であるとは，u が $u \subseteq w$ なる可算集合であり B が $B \colon \mathbb{R}^u \to \mathbb{R}$ なる Borel 関数であることを意味する．

2. V^{P_α} の実数 x が w-コード (B, u) の**解釈**であるとは，$x = B((\eta_\beta)_{\beta \in u})$ であることを意味する
3. $\dot Q_\alpha$ が w**-部分的ランダム強制法**であるとは，

$$P_\alpha \Vdash Q_\alpha = \{q : q \text{ はランダム強制法の条件であり}, q \text{ はある } w\text{-コード } (B, u) \text{ in } V \text{ の解釈 }\}$$

となっていることを意味する．ただし，Q_α の順序はランダム強制法の順序の制限であるとする．

ランダム強制法以外のアメーバ・Hechler・eventually different 強制法についても w-部分的強制法を同様に定義する．

仮定 19. $\aleph_1 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4 < \lambda_5$ を正則基数たちで $\mu < \lambda_i$ ならば $\mu^{\aleph_0} < \lambda_i$ となるものたちとする．また，λ_3 は正則基数 χ で $\chi^{\aleph_0} = \chi$ なものの後続基数だと仮定し，$\lambda_5^{<\lambda_4} = \lambda_5$ とする．

$\delta_5 = \lambda_5 + \lambda_5$ とおき，$\delta_5 \setminus \lambda_5$ の非有界部分集合たち S^1, S^2, S^3 and S^4 への分割を固定する．各 $\alpha \in \delta_5 \setminus \lambda_5$ について $w_\alpha \subseteq \alpha$ であって各 $\{w_\alpha : \alpha \in S^i\}$ は $[\delta_5]^{<\lambda_i}$ の中で共終であると仮定する．

定義 20. $\mathbb{P}^5 = (P_\alpha, Q_\alpha)_{\alpha \in \delta_5}$ を有限台反復であって，$\alpha \in \lambda_5$ に対する Q_α は Cohen 強制法であり

$$Q_\alpha \text{ は } w_\alpha\text{-部分的} \left\{ \begin{array}{c} \text{アメーバ} \\ \text{ランダム} \\ \text{Hechler} \\ \text{eventually different} \end{array} \right\} \text{強制法} \quad (\alpha \text{ が} \left\{ \begin{array}{c} S^1 \\ S^2 \\ S^3 \\ S^4 \end{array} \right\} \text{の元のとき})$$

であるものとする．

3 ブール超冪

κ を強コンパクト基数とし，B を κ 分配的かつ κ^+-cc を持つ無原子完備ブール代数とする．すると任意の B 内の κ 完備フィルターは κ 完備なウルトラフィルターに拡大される．U は κ^+ 完備ではない．今，κ 完備なウルトラフィルター U を固定する．

BUP 名前とは関数 $x \colon A \to V$ であって，その定義域 A は B の極大反鎖であるものである．x の定義域を $A(x)$ と書く．

任意の BUP 名前は V の元の B-名前を定める：BUP 名前 x に対して $\{(\overparen{x(a)}, a) : a \in A(x)\}$ である．逆に V の元の B-名前はそれと強制同値な BUP 名前を持つ．BUP 名前とそこから定まる B-名前を同一視する．

2 つの BUP 名前に対してブール値 $[\![x = y]\!]$ が定まる．x と y が同値とは $[\![x = y]\!] \in U$ であることを指す．

$v \in V$ の標準名前 $\check{v}$ とは $\{(1_B, w) : w \in v\}$ のことである．

ブール超冪 M^- は BUP 名前 x の同値類 $[x]$ からなる．$[x] \in^- [y]$ を $[\![x \in y]\!] \in U$ により定義する．$j^- : V \to M^-$ を v を $[\check{v}]$ に送る写像として定める．

BUP 名前 $x_1, \ldots, x_n$ に対してブール値 $[\![\varphi(x_1, \ldots, x_n)]\!]$ が適切に定まる．

次が成り立つ．

1. Łoś の定理: $(M^-, \in^-) \models \varphi([x_1], \ldots, [x_n])$ が成り立つのはちょうど $[\![\varphi(x_1, \ldots, x_n)]\!] \in U$ のとき．
2. $j^- : (V, \in) \to (M^-, \in^-)$ は初等埋め込み．
3. 特に $(M^-, \in^-)$ は ZFC のモデル．

U が σ 完備なので，$(M^-, \in^-)$ は wellfounded である．M を $(M^-, \in^-)$ の推移崩壊とする．そして $j : V \to M$ を j^- と推移崩壊写像の合成とする．$[x]$ の推移崩壊 x^U と書く．したがって，$\check{v}^U = j(v)$ である．

事実 21.

1. $M \models \varphi(x_1^U, \ldots, x_n^U)$ となるのはちょうど $[\![\varphi(x_1, \ldots, x_n)]\!] \in U$ となるとき．特に $j : V \to M$ は初等埋め込み．
2. $|Y| < \kappa$ ならば $j(Y) = j``Y$ である．特に j の κ への制限は恒等写像である．M は $<\kappa$ 列で閉じている．
3. $j(\kappa) \neq \kappa$，特に $\kappa = \mathrm{crit}(j)$.

証明．一つだけ示してみよう．$\alpha < \kappa$ について $j(\alpha) = \alpha$ を示す．背理法で，$j(\alpha) > \alpha$ となる α が存在するとして，そのような最小を取る．$\alpha \in j(\alpha) \in M$ で M は推移的なので $\alpha \in M$ である．そこで BUP 名前 x をとって $j(x) = \alpha$ となる．$j(x) \in j(\alpha)$ だからŁoś の定理より $[\![\check{x} \in \check{\alpha}]\!] \in U$ となる．今ブール値 $[\![\check{x} \in \check{\alpha}]\!]$ は $\bigvee_{\beta \in \alpha} [\![\check{x} = \check{\beta}]\!]$ に等しいことと，U の κ 完備性より，ある $\beta < \alpha$ があって，$[\![\check{x} = \check{\beta}]\!] \in U$ となる．Łoś の定理をもう一度使うと $j(\beta) = j(x) = \alpha$．今 β の最小性より $j(\beta) = \beta$ だから $\beta = j(\beta) = j(x) = \alpha$ となって，$\beta < \alpha$ に反する． □

V の元 Y について，Y の元を表す強制名前は BUP 名前 x でその値域 $\mathrm{ran}(x)$ が Y の部分集合であるものとして書ける．そのような BUP 名前を $j(Y)$ **の元を表す BUP 名前**と呼ぶことにする (そのような名前 x について x^U は $j(Y)$ の元であるため).

補題 22. $(S, \leqslant)$ を $\leqslant\kappa$-directed な半順序集合としたとき，$j``S$ は $j(S)$ の中で cofinal である．

証明．$j(S)$ の元を任意にとり，x^U とする．先程の注意より，BUP 名前 x は $\mathrm{ran}(x) \subseteq S$ としてよい．$\mathrm{dom}(x)$ は B が κ^+-cc なことよりサイズ κ 以下なので，$\mathrm{ran}(x)$ は共通の上界 s_0 を持つ．すると $[\![x \leqslant s_0]\!] = 1_B$ となるので，$(M^-, \in^-) \models [x] \leqslant \check{s_0}$．したがって，$x^U \leqslant j(s_0)$ となる． □

定義 23. BUP 埋め込みとは，初等埋め込み $j\colon V \to M$ (M は推移的) であって，クリティカルポイント κ を持つものであって，M は $<\kappa$-closed かつ，どんな $\leqslant\kappa$-directed な半順序集合 S についても $j``S$ は $j(S)$ 内で cofinal になるものである．

よって，κ-分配的かつ κ^+-cc 原子なし完備ブール代数と κ 完備ウルトラフィルターに対する上で定義した埋め込みは BUP 埋め込みである．

補題 24. j を BUP 埋め込みで $\mathrm{crit}(j) = \kappa$ なものとする．

1. $|A| < \kappa$ ならば，$j``A = j(A)$ である．
2. ある正則基数 $\lambda < \kappa$ について S が $<\lambda$-directed な半順序であるとき, $j(S)$ は $<\lambda$-directed である．
3. $\mathrm{cf}(\alpha) \neq \kappa$ なる極限順序数 α について，$j``\alpha$ は $j(\alpha)$ の中で共終．よって特に $\mathrm{cf}(j(\alpha)) = \mathrm{cf}(\alpha)$.

証明. 1 つ目．$f\colon \lambda \to A$ 全単射と $\lambda < \kappa$ をとる．すると M で $j(f)\colon \lambda \to j(A)$ 全単射が成り立つ．よって，$x \in j(A)$ とすると $\alpha < \lambda$ がとれて $x = j(f)(\alpha)$ だが，$j(f)(\alpha) = j(f(\alpha))$ なので，これで良い．

2 つ目．M で $j(S)$ は $<\lambda$-directed な半順序なことが成り立ち，M が $<\kappa$-closed なことを使うとよい．

3 つ目．$\mathrm{cf}(\alpha) = \lambda \neq \kappa$ とする．$f\colon \lambda \to \alpha$ を共終単調増加関数とする．$\lambda < \kappa$ ならば M の中で $j(f)\colon \lambda \to j(\alpha)$ が共終単調増加関数となるが，これは絶対的である．$\lambda > \kappa$ ならば α は $\leqslant\kappa$-directed な半順序なので，$j``\alpha$ は $j(\alpha)$ の中で共終である．よって $j``f = (j(\xi), j(f(\xi)))_{\xi<\lambda}$ は $\mathrm{cf}(j``\lambda) = \mathrm{cf}(j``\alpha) = \mathrm{cf}(j(\alpha))$ を目撃する．他方で，$\mathrm{cf}(j``\lambda) = \mathrm{cf}(\lambda) = \lambda$ である．これで示せた． □

補題 25. κ を強コンパクト基数，$\theta > \kappa$ を $\mathrm{cf}(\theta) > \kappa$ なる基数とする．このとき BUP 埋め込み j で $\mathrm{crit}(j) = \kappa$ かつ次の 3 条件を満たすものが存在する：

1. $\mathrm{cf}(j(\kappa)) = cf(\theta)$ かつ $j(\kappa) \geqslant \theta$.
2. すべての μ について $|j(\mu)| \leqslant \max(\mu, \theta)^\kappa$.
3. 特に $\theta^\kappa = \theta$ かつ $\kappa \leqslant \mu \leqslant \theta$ ならば $|j(\mu)| = \theta$.

証明. 次で定まる強制法 $(P_{\kappa,\theta}, \supseteq)$ の完備化を B とする：

$$P_{\kappa,\theta} = \{f : f \text{ は}\theta\text{から}\kappa\text{への部分関数で濃度が } {<\kappa}\text{なもの } \}$$

B は $<\kappa$ 分配的かつ κ^+-cc を持つ．この強制法はジェネリックな関数 $f^*\colon \theta \to \kappa$ を付け加える．よって，各 $\delta < \theta$ に対して $f^*(\delta)$ は κ の元を表す強制名前であり，したがって BUP 名前である．

1 番について．x を $j(\kappa)$ の元を表す BUP 名前とする．すなわち x の定義域 A は B の極大反鎖であり，値域は κ の部分集合である．$P_{\kappa,\theta}$ が B で稠密なので，$A \subseteq P_{\kappa,\theta}$ と仮定してもよい．$\delta < \theta$ を各 $a \in A$ について a の定義域の上限より大きいものとする ($\mathrm{cf}(\theta) > \kappa$ よりこれはある)．このような (x, δ) を「適切な組」と呼ぶことにする．そして

$$b_{x,\delta} = [\![f^*(\delta) > x]\!]$$

とおく．

今，$b_{x,\delta}$ たちが κ 完備なフィルターを生成することを主張する．それを示すために，$(x_i, \delta_i : i < \mu)$, $\mu < \kappa$ を適切な組の列とする．$\bigwedge_{i<\mu} b_{x_i,\delta_i} \neq \varnothing$ を示す必要がある．集合 $\{\delta_i : i < \mu\}$ の元を単調増加かつ重複なしに $(\delta^\ell : \ell < \gamma)$, $\gamma \leqslant \mu$ と並べる．$A_\ell = \{i < \mu : \delta_i = \delta^l\}$ とおく．条件 q_ℓ が与えられたときに $q_{\ell+1} \in P_{\kappa,\theta}$ を次のように定める：

1. $q_{\ell+1} \leqslant q_\ell$
2. $\delta^\ell \in \mathrm{supp}(q_{\ell+1}) \subseteq \delta^\ell \cup \{\delta^\ell\}$
3. $q_{\ell+1} \upharpoonright \delta^\ell$ はすべての $i < A^\ell$ について x_i の値を α_i に決定する．
4. $q^{\ell+1}(\delta^\ell) = \sup_{i\in A_\ell}(\alpha_i) + 1$

この構成は $q_{\ell+1}$ が各 $i \in A_\ell$ について b_{x_i,δ_i} より強いことを保証する．極限順序数 $\ell \leqslant \gamma$ についてはそこまで構成した条件の和集合をとる．すると q_γ は各 b_{x_i,δ_i} より強い条件となり主張が証明された．

さて，κ が強コンパクトなので，$b_{x,\delta}$ ((x,δ) は適切な組) が生成する κ 完備フィルターを拡大して，κ 完備ウルトラフィルター U を得ることができる．すると列 $(f^*(\delta)^U : \delta < \theta)$ は狭義単調増加かつ共終である ($\delta < \delta'$ に対して $(f^*(\delta), \delta')$ は適切であり，適切な組の b は U に入れていることから)．よって，$\mathrm{cf}(j(\kappa)) = cf(\theta)$ かつ $j(\kappa) \geqslant \theta$ を得る．

2 番について．$j(\mu)$ の元を表す BUP 名前の数を勘定すればよい．反鎖は $P_{\kappa,\theta}$ の部分集合としてよかったので，$|P_{\kappa,\theta}| = \theta$ を考えると，$j(\mu)$ の元を表す BUP 名前の数は

$$[\theta]^\kappa \times \mu^\kappa = \max(\theta, \kappa)^\kappa$$

で抑えられる．したがって，

$$|j(\mu)| \leqslant \max(\theta, \kappa)^\kappa.$$

□

参考文献

[Mil81] Arnold W. Miller. “Some properties of measure and category”. *Transactions of the American Mathematical Society* 266 (1981), pp. 93–114.