

Cichoń's maximum の証明

後藤 達哉

2022 年 8 月 31 日

目次

1	イントロダクション	1
1.1	関係システム	2
1.2	Cohen, ランダム, Hechler, アメーバ, eventually different 強制法	4
1.3	goodness	6
1.4	EUB と COB	7
2	Cichoń の図式の左半分	7
3	ブール超冪	8

1 イントロダクション

実数全体の集合 \mathbb{R} を Lebesgue 測度 0 集合たちで覆うには、それらが最低何個必要かという問いを考える。Lebesgue 測度 0 集合の可算和は Lebesgue 測度 0 だから可算個では足りない。一方、 $\bigcup_{r \in \mathbb{R}} \{r\} = \mathbb{R}$ だから連続体濃度個あれば十分である。これで非可算かつ連続体濃度以下とわかるわけだが、ここで問いを終えてしまうのはもったいない。連続体濃度の下に非可算基数が存在することもありえると分かっているからだ。そこで問の答えを

$$\text{cov}(\mathcal{N}) = \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \text{ はルベーグ測度 0 集合の族で } \bigcup \mathcal{A} = \mathbb{R}\}$$

とおいて、これがいろんな集合論のモデルでどうなっているのか調べよう。また、他の似たような問いの答えを文字でおいてそれらの間の関係を調べよう：ZFC の範囲内で大小関係がつくのか、等しいのか、ZFC で等しいことを証明できないなら実際にどんなモデルで破れているのか。これが**基数不変量**の研究である。

基数不変量という言葉に厳密な定義はないが、「実数の構造によって定義される基数」のことであり、その多くは \aleph_1 以上 2^{\aleph_0} 以下であることが証明される。

いくつかの基数不変量を定義しよう。

2^ω 上のイデアル \mathcal{I} に対して

- $\text{add}(\mathcal{I}) = \min\{|\mathcal{J}| : \mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}, \bigcup \mathcal{J} \notin \mathcal{I}\}$
- $\text{cov}(\mathcal{I}) = \min\{|\mathcal{J}| : \mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}, \bigcup \mathcal{J} = 2^\omega\}$

- $\text{non}(\mathcal{I}) = \min\{|A| : A \subseteq 2^\omega, A \notin \mathcal{I}\}$
- $\text{cof}(\mathcal{I}) = \min\{|\mathcal{J}| : \mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}, (\forall A \in \mathcal{I})(\exists B \in \mathcal{J})(A \subseteq B)\}$

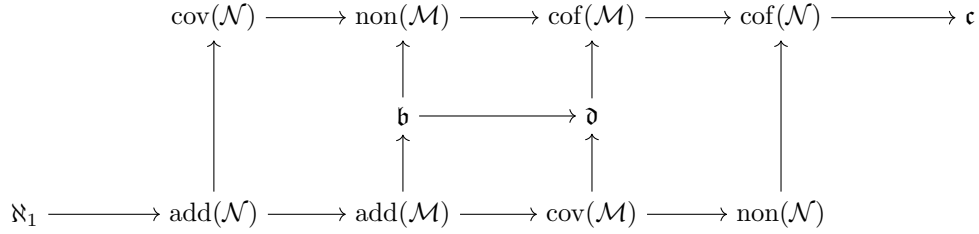
とおく．これらにルベーク測度 0 集合のイデアル \mathcal{N} ，痩せ集合のイデアル \mathcal{M} を代入したものが考察の対象である．

また，

- $\mathfrak{d} = \min\{|F| : F \subseteq \omega^\omega, (\forall f \in \omega^\omega)(\exists g \in F)(f \leq^* g)\}$.
- $\mathfrak{b} = \min\{|F| : F \subseteq \omega^\omega, \neg(\exists f \in \omega^\omega)(\forall g \in F)(g \leq^* f)\}$.

という基数不変量も考えられる． \mathfrak{d} は dominating number, \mathfrak{b} は bounding number と呼ばれる．

以上の 10 個の基数不変量の ZFC で示せる大小関係については以下の図式が知られていて，Cichoń の図式と呼ばれる．



ここで矢印 $A \rightarrow B$ は $A \leq B$ を ZFC で証明できることを意味する．また $\text{add}(\mathcal{M}) = \min\{\text{cov}(\mathcal{M}), \mathfrak{b}\}$ かつ $\text{cof}(\mathcal{M}) = \max\{\text{non}(\mathcal{M}), \mathfrak{d}\}$ が ZFC で証明できる．

Cichoń の図式に表示されている基数不変量以外にも Blass の図式と呼ばれる図式の基数不変量： $\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{h}, \mathfrak{g}, \mathfrak{s}, \mathfrak{e}, \mathfrak{r}, \mathfrak{a}, \mathfrak{u}, \mathfrak{i}$ などもある．しかし，本稿ではこれらには焦点を当てない．

表 1 に Cichoń の図式の歴史をまとめた．

連続体仮説の否定の無矛盾性以前に Rothberger の結果があるのがすごいが，この結果は「Luzin 集合と Sierpinski 集合の両方が存在するならば連続体仮説が成り立つ」という定理の補題として証明された．Cantor の $\aleph_0 < \mathfrak{c}$ 以前に du Bois-Reymond が $\aleph_0 < \mathfrak{b}$ を示していたことも驚くべきところであろう．

Kunen-Miller の表というのは図 1 のようなものである．[Mil81] から抜粋した．Cichoń の図式ができる前はどの組合せが可能かこのような表で表していた．

表題にもなっている Cichoń's maximum であるが，これは Cichoń の図式において（他の基数不変量の値に束縛されている $\text{add}(\mathcal{M}), \text{cof}(\mathcal{M})$ を除いて）すべての基数不変量の値を同時に別々の値にするモデルである．そのようなモデルの構成法を本稿では見ていく．

1.1 関係システム

定義 1. 3 つ組 $\mathbf{R} = (X, Y, \sqsubset)$ が **関係システム** であるとは， X, Y が集合で \sqsubset が関係であることを言う（基本的には $\sqsubset \subseteq X \times Y$ だがはみ出ているよい）．

$F \subseteq X$ が \mathbf{R} **有界** であるとは $(\exists y \in Y)(\forall x \in F)(x \sqsubset y)$ を満たすことである． $E \subseteq Y$ が \mathbf{R} -**dominant** であるとは $(\forall x \in X)(\exists y \in E)(x \sqsubset y)$ を満たすことである．

表 1 Cichoń の図式の歴史

年	人物	出来事
1875 年	du Bois-Reymond	$\aleph_0 < \mathfrak{b}$ の証明
1891 年	Cantor	$\aleph_0 < \mathfrak{c}$ の証明
1938 年	Rothberger	$\text{cov}(\mathcal{M}) \leq \text{non}(\mathcal{N})$ と $\text{cov}(\mathcal{N}) \leq \text{non}(\mathcal{M})$ の証明
1963 年	Cohen	連続体仮説の独立性
1970 年	Martin–Solovay	Martin の公理およびその帰結の $\text{add}(\mathcal{N}) = \mathfrak{c} > \aleph_1$ の証明
1977 年	Truss	$\min\{\text{cov}(\mathcal{M}), \mathfrak{b}\} \leq \text{add}(\mathcal{M})$ の証明
1981 年	Miller	$\text{add}(\mathcal{M}) \leq \min\{\text{cov}(\mathcal{M}), \mathfrak{b}\}$ の証明およびこの時点で知られていたモデルでの Cichon の図式の中の基数不変量の値の決定, Kunen-Miller の表 (5x5 マス)
1984 年	Miller	$\text{add}(\mathcal{N}) \leq \mathfrak{b}$ の証明; Kunen-Miller の表 (6x6 マス)
1984 年	Bartoszyński	$\text{add}(\mathcal{N}) \leq \text{add}(\mathcal{M})$ の証明
1984 年	Fremlin	$\text{cof}(\mathcal{M}) = \max\{\text{non}(\mathcal{M}), \mathfrak{d}\}$ の証明; Cichoń’s diagram 登場
1985 年	Raisonnier–Stern	$\text{cof}(\mathcal{M}) \leq \text{cof}(\mathcal{N})$ の証明
1989 年	Bartoszyński–Judah–Shelah	$\text{PT}_{f,g}$ 強制法の開発および連続体濃度が \aleph_2 のときの Cichoń の図式の分離すべて完成
2019 年	Goldstern–Kellner–Shelah	巨大基数を仮定した Cichoń’s maximum の証明
2021 年	Goldstern–Kellner–Mejía–Shelah	巨大基数を仮定しない Cichoń’s maximum の証明

		Add	T	F	F	F	F
		Baire	T	T	F	T	F
measure							
Add	Baire	Unif	T	T	T	F	F
T	T	T	MA [MS]	?	?		
F	T	T	See Conjecture §9 (2)	Iterated random reals §4	Infinitely equal and random reals §7		
F	F	T	Dominating reals §5	Eventually different reals §5	Mathias reals §6	Cohen reals [K1]	Infinitely equal reals §7
F	T	F			Random reals [K1]		
F	F	F			See conjecture §9 (3)		Silver or Sack’s reals §7

図 1 Kunen-Miller の表

- $\mathfrak{b}_{\mathbf{R}} = \min\{|F| : F \subseteq X \text{ は } \mathbf{R} \text{ 非有界}\}$
- $\mathfrak{d}_{\mathbf{R}} = \min\{|E| : E \subseteq Y \text{ は } \mathbf{R}\text{-dominating}\}$

と定める.

定義 2. 関係システム $\mathbf{R} = (X, Y, \sqsubset)$ についてその双対を $\mathbf{R}^\perp = (Y, X, \sqsubset^\perp)$ と定める. ここに

$$y \sqsubset^\perp x \iff \neg(x \sqsubset y).$$

$\mathfrak{b}_{\mathbf{R}^\perp} = \mathfrak{d}_{\mathbf{R}}$ かつ $\mathfrak{d}_{\mathbf{R}^\perp} = \mathfrak{b}_{\mathbf{R}}$ に注意する.

定義 3. 関係システム $\mathbf{R} = (X, Y, \sqsubset)$ がポーランド関係システムであるとは, 次の 3 条件を満たすことを言う.

1. X は完全ポーランド空間.
2. Y はあるポーランド空間 Z の非空な解析集合.
3. $\sqsubset \cap (X \times Z) = \bigcup_{n \in \omega} \sqsubset_n$ であって, $\langle \sqsubset_n : n \in \omega \rangle$ は $X \times Z$ の閉集合の増大列であって, 各 $n \in \omega$ と $y \in Y$ について $(\sqsubset_n)^y = \{x \in X : x \sqsubset_n y\}$ は nowhere dense である.

ポーランド関係システムのような定義可能な関係システムを考えているとき, それを書いたときには今考えている宇宙の中でその定義を解釈したものを表すことにする.

事実 4. \mathbf{R} がポーランド関係システムであれば, $\mathfrak{b}_{\mathbf{R}} \leq \text{non}(\mathcal{M})$ かつ $\text{cov}(\mathcal{M}) \leq \mathfrak{d}_{\mathbf{R}}$ である.

定義 5. 1. $\mathcal{C} = \{(q_n)_{n \in \omega} : \text{各 } q_n \text{ は正の有理数かつ } \sum_n q_n \leq 1\}$ とおく.
 2. $\Omega_n = \{a \in [2^{<\omega}]^{<\aleph_0} : \mu(\bigcup_{s \in a} [s]) \leq 2^{-n}\}$ とおき, $\Omega = \prod_{n \in \omega} \Omega_n$ とおく. 各 $x \in \Omega$ について $N_x = \bigcap_{n \in \omega} \bigcup_{s \in x(n)} [s]$ とおく.

以下の 4 つはすべてポーランド関係システムである.

定義 6. 1. $\mathbf{R}_1 = (\mathcal{C}, \mathcal{C}, \{(x, y) : (\forall^\infty n)(x(n) \leq y(n))\})$
 2. $\mathbf{R}_2 = (\Omega, 2^\omega, \{(x, y) : y \notin N_x\})$
 3. $\mathbf{R}_3 = (\omega^\omega, \omega^\omega, \{(x, y) : (\forall^\infty n)(x(n) \leq y(n))\})$
 4. $\mathbf{R}_4 = (\omega^\omega, \omega^\omega, \{(x, y) : (\forall^\infty n)(x(n) \neq y(n))\})$

補題 7. 1. $\mathfrak{d}_{\mathbf{R}_1} = \text{cof}(\mathcal{N}), \mathfrak{b}_{\mathbf{R}_1} = \text{add}(\mathcal{N}),$
 2. $\mathfrak{d}_{\mathbf{R}_2} = \text{non}(\mathcal{N}), \mathfrak{b}_{\mathbf{R}_2} = \text{cov}(\mathcal{N}),$
 3. $\mathfrak{d}_{\mathbf{R}_3} = \mathfrak{d}, \mathfrak{b}_{\mathbf{R}_3} = \mathfrak{b},$
 4. $\mathfrak{d}_{\mathbf{R}_4} = \text{cov}(\mathcal{M}), \mathfrak{b}_{\mathbf{R}_4} = \text{non}(\mathcal{M}).$

1.2 Cohen, ランダム, Hechler, アメーバ, eventually different 強制法

1.2.1 Cohen 強制法

$\mathbb{C} = 2^{<\omega}$ で順序を延長関係で入れたもの $q \leq p \iff p \subseteq q$ は Cohen 強制法と呼ばれる. \mathbb{C} ジェネリックフィルター G から作られる実数 $c = \bigcup G$ を Cohen 実数という. Cohen 実数から G を復元できる: $G = \{c \upharpoonright n : n \in \omega\}$. Cohen 強制法は可算なので, 明らかに σ -centered を満

たす. 特に ccc を満たす. Cohen 実数は \mathbf{R}_4^\perp を解決する:

$$(\forall x \in \omega^\omega \cap V)(\exists^\infty n)(x(n) = \dot{c}(n)).$$

1.2.2 ランダム強制法

$\mathbb{B} = \{T : T \text{ は } 2^{<\omega} \text{ の部分木で } \mu([T]) > 0\}$ で順序を包含関係で入れたもの $T' \leq T \iff T' \subseteq T$ をランダム強制法という. \mathbb{B} ジェネリックフィルター G から作られる実数 $r = \bigcap \{[T] : T \in G\}$ をランダム実数という. ランダム実数から G を復元できる: $G = \{T \in \mathbb{B} : r \in [T]\}$. ランダム強制法は ccc を満たす. ランダム実数は \mathbf{R}_2 を解決する:

$$(\forall x \in \Omega^V)(\dot{r} \notin N_x).$$

1.2.3 Hechler 強制法

$\mathbb{D} = \{(n, f) : n \in \omega, f \in \omega^\omega\}$ で順序を

$$(m, g) \leq (n, f) \iff n \leq m \wedge f \upharpoonright n = g \upharpoonright n \wedge (\forall k \in \omega)(f(k) \leq g(k))$$

で入れたものを Hechler 強制法という. \mathbb{D} ジェネリックフィルター G から作られる実数 $d = \bigcup \{f \upharpoonright n : (n, f) \in G\}$ を Hechler 実数という. Hechler 実数から G を復元できる: $G = \{(n, f) : f \upharpoonright n = d \upharpoonright n\}$. Hechler 強制法は σ -centered である. Hechler 実数は \mathbf{R}_3 を解決する:

$$(\forall x \in \omega^\omega \cap V)(\forall^\infty n)(x \leq^* \dot{d}).$$

1.2.4 アメーバ強制法

$\mathbb{A} = \{T : T \text{ は } 2^{<\omega} \text{ の subtree で } \mu([T]) \geq 1/2\}$ で順序を $T' \leq T \iff T' \subseteq T$ で入れたものをアメーバ強制法という. \mathbb{A} ジェネリックフィルター G に対して測度 $1/2$ の閉集合 $K_G = \bigcap G$ が定まる. そのコード a をアメーバ実数という. アメーバ実数 a から G を復元できる: $G = \{T \in \mathbb{A} : a \subseteq [T]\}$. アメーバ実数を Borel な方法で加工して得られる実数 $b \in \mathcal{C}$ があって, それは \mathbf{R}_1 を解決する:

$$(\forall x \in \mathcal{C}^V)(x \leq b).$$

アメーバ強制法は ccc である.

1.2.5 eventually different 強制法

$\mathbb{E} = \{(s, k, \varphi) : s \in \omega^{<\omega}, k \in \omega, \varphi : \omega \rightarrow [\omega]^{\leq k}, (\forall i \in \text{dom}(s))(s(i) \notin \varphi(i))\}$ で順序を

$$(s', k', \varphi') \leq (s, k, \varphi) \iff s \subseteq s' \wedge k \leq k' \wedge (\forall i)(\varphi(i) \subseteq \varphi'(i))$$

を入れたものを eventually different 強制法という. \mathbb{E} ジェネリックフィルター G から作られる実数 $e = \bigcup \{s : (s, k, \varphi) \in G\}$ を eventually different generic 実数という. eventually different 強制法は σ -centered である. eventually different generic 実数は \mathbf{R}_4 を解決する:

$$(\forall x \in \omega^\omega \cap V)(\forall^\infty n)(x(n) \neq \dot{e}(n)).$$

1.2.6 Borel reading of names

Cohen, ランダム, Hechler, アメーバ, eventually different 強制法は共通して次の性質を持つ.

性質 8. \mathbb{P} を ccc かつ Borel な強制半順序であり, かつ \mathbb{P} はジェネリック実数を持つ. すなわち, 実数の名前 \dot{x}_{gen} と Borel な関係 $B \subseteq \mathbb{P} \times 2^\omega$ があって

$$\mathbb{P} \Vdash p \in \dot{G} \iff B(p, \dot{x}_{\text{gen}})$$

となる.

この性質を持つ強制法による強制拡大での実数はジェネリック実数から Borel な方法で計算できる.

命題 9. \mathbb{P} を上記性質 8 を持つ強制法とする. \dot{x} を 2^ω の元の名前とする. このとき Borel 関数 $C: 2^\omega \rightarrow 2^\omega$ があって,

$$\Vdash \dot{x} = C(\dot{x}_{\text{gen}})$$

となる.

これは有限台反復でも同様である.

命題 10. $(P_\alpha, Q_\alpha : \alpha < \delta)$ を有限台反復とする. 各 Q_α は上記性質 8 を持つ (ことが P_α によって強制される) 強制法とする. \dot{x} を 2^ω の元の P_δ 名前とする. このとき Borel 関数 $C: (2^\omega)^\omega \rightarrow 2^\omega$ と可算個の添字 $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ があって,

$$\Vdash \dot{x} = C(\dot{x}_{\text{gen}}^{\alpha_0}, \dot{x}_{\text{gen}}^{\alpha_1}, \dots)$$

となる.

1.3 goodness

定義 11. P を ccc な強制法とし, λ を非可算正則基数とし, R をポーランド関係システムとする. P が λ -**R-good** であるとは, Y の元を表す各 P 名称 \dot{y} について非空な集合 $\mathcal{U} \subseteq Y$ で $\text{size}(\mathcal{U}) < \lambda$ なものが V に存在して, どんな $x \in X$ についても x が \mathcal{U} 上 **R** 非有界であれば, $\Vdash x \not\sqsubseteq \dot{y}$.

事実 12. **R** をポーランド関係システムとする.

1. ccc で $\text{size} < \lambda$ な強制法 P はすべて, λ -**R-good** である. 特に Cohen 強制法は \aleph_1 -**R-good** である.
2. ccc で λ -**R-good** であることは任意の長さの有限台反復で保たれる.

事実 13. 1. σ -centered かランダム強制法の部分ブール代数である強制法は \aleph_1 -**R-good** である.

2. σ -centered な強制法は \aleph_1 -**R-good** である.

補題 14. $\mathbf{R} = (X, Y, \sqsubseteq)$ をポーランド関係システムとする. $\lambda \leq \kappa \leq \mu$ を全て非可算正則基数とする. μ 個の Cohen 実数 $(c_\alpha : \alpha < \mu)$ を加えた後に, λ -**R-good** 強制法で強制拡大したモデル

ルにおいて, どんな実数 $y \in Y$ についても,

$$(\exists \alpha < \kappa)(\forall \beta \in \kappa \setminus \alpha)(c_\beta \not\sqsubseteq y)$$

が成り立つ.

1.4 EUB と COB

定義 15. γ を極限順序数, P を ccc 強制法, $\mathbf{R} = (X, Y, \sqsubset)$ を定義可能な関係システムとする. $\text{EUB}(\mathbf{R}, P, \gamma)$ とは次の主張である: X の元の P -名称の列 $(\dot{x}_\alpha)_{\alpha < \gamma}$ であって, どんな Y の元の P -名称の列 \dot{y} についても

$$(\exists \alpha < \gamma)(\forall \beta \in \gamma \setminus \alpha) P \Vdash \neg(\dot{x}_\beta \sqsubset \dot{y})$$

となる.

ccc 強制法を考えているので, γ が非可算共終数を持つときには, $(\exists \alpha < \gamma)(\forall \beta \in \gamma \setminus \alpha)$ は強制関係の外にあらうが中にあらうが同じなことに注意しておく.

定義 16. λ, μ を非可算正則基数, P を ccc 強制法, $\mathbf{R} = (X, Y, \sqsubset)$ を定義可能な関係システムとする. このとき $\text{COB}(\mathbf{R}, P, \lambda, \mu)$ は次の主張である: $<\lambda$ -directed な半順序集合 $(S, <)$ でサイズ μ なものと Y の元の P -名称の族 $(\dot{y}_s : s \in S)$ があって, X の元のどんな P -名称 \dot{x} についても

$$(\exists s \in S)(\forall t \succ s) P \Vdash \dot{x} \sqsubset \dot{y}_t$$

となる.

$\text{EUB}(\mathbf{R}, P, \gamma)$ は $\text{COB}(\mathbf{R}, P, \text{cf}(\gamma), \text{cf}(\gamma))$ と同値なことに注意する.

補題 17. $\text{COB}(\mathbf{R}, P, \lambda, \mu)$ は $P \Vdash (\mathfrak{b}_{\mathbf{R}} \geq \lambda \text{ かつ } \mathfrak{d}_{\mathbf{R}} \leq \mu)$ を含意する.

上の注意と補題 17 より $\text{EUB}(\mathbf{R}, P, \lambda)$ は $P \Vdash (\mathfrak{b}_{\mathbf{R}} \leq \lambda \text{ かつ } \mathfrak{d}_{\mathbf{R}} \geq \lambda)$ を含意する.

2 Cichoń の図式の左半分

仮定 18. $\aleph_1 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4 < \lambda_5$ を正則基数たちで $\mu < \lambda_i$ ならば $\mu^{\aleph_0} < \lambda_i$ となるものたちとする. また, λ_3 は正則基数 χ で $\chi^{\aleph_0} = \chi$ なものの後続基数だと仮定し, $\lambda_5^{<\aleph_4} = \lambda_5$ とする.

$\delta_5 = \lambda_5 + \lambda_5$ とおき, $\delta_5 \setminus \lambda_5$ の非有界部分集合たち S^1, S^2, S^3 and S^4 への分割を固定する. 各 $\alpha \in \delta_5 \setminus \lambda_5$ について $w_\alpha \subseteq \alpha$ であって各 $\{w_\alpha : \alpha \in S^i\}$ は $[\delta_5]^{<\aleph_i}$ の中で共終であると仮定する.

定義 19. $\mathbb{P}^{\text{pre}} = (P_\alpha, Q_\alpha)_{\alpha \in \delta_5}$ を有限台反復であって, $\alpha \in \lambda_5$ に対する Q_α は Cohen 強制法で

あり

$$Q_\alpha \text{ は } w_\alpha\text{-部分的} \left\{ \begin{array}{c} \text{アメーバ} \\ \text{ランダム} \\ \text{Hechler} \\ \text{eventually different} \end{array} \right\} \text{ 強制法} \quad (\alpha \text{ が } \left\{ \begin{array}{c} S^1 \\ S^2 \\ S^3 \\ S^4 \end{array} \right\} \text{ の元するとき})$$

であるものとする.

3 ブール超冪

参考文献

- [Mil81] Arnold W. Miller. “Some properties of measure and category”. *Transactions of the American Mathematical Society* 266 (1981), pp. 93–114.