

# 信託連鎖条件強制法

でいぐ

2023 年 1 月 24 日

**定義 0.1.**  $\bar{M}$  が  $\aleph_1$ -信託であるとは次を満たすことである:

- (1)  $\bar{M}$  は列  $\bar{M} = \langle M_\delta : \delta \in \text{Lim}_{\omega_1} \rangle$  である.
- (2) 各  $M_\delta$  は  $\text{ZFC}^-$  の可算推移的モデルである.
- (3) 各  $\delta \in \text{Lim}_{\omega_1}$  について  $\delta + 1 \subseteq M_\delta$  かつ  $M_\delta \models \text{“}\delta \text{ は可算”}$ .
- (4) 任意の  $A \subseteq \omega_1$  について  $\{\delta \in \text{Lim}_{\omega_1} : A \cap \delta \in M_\delta\}$  は  $\omega_1$  の定常集合.

**補題 0.2.** ダイヤモンド原理  $\diamond$  から  $\aleph_1$ -信託の存在が導かれる.

証明. ダイヤモンド列  $\langle A_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$  をとる. 各  $\delta \in \text{Lim}_{\omega_1}$  について全単射  $f_\delta: \omega \rightarrow \delta$  をとる.  $H_{\omega_1}$  の, 集合  $(\delta + 1) \cup \{f_\delta\} \cup \{A_\delta\}$  を含む可算初等部分モデル  $N_\delta$  を取り  $N_\delta$  の推移崩壊  $M_\delta$  とする. このとき  $\langle M_\delta : \delta \in \text{Lim}_{\omega_1} \rangle$  が  $\aleph_1$ -信託である.  $\square$

補題 0.2 の逆も正しいが, 本稿では使わない. [Kun83] の Theorem 7.14 を参照せよ.

**定義 0.3.** 各  $\aleph_1$ -信託  $\bar{M}$  に対して,  $\omega_1$  上のフィルター  $D_{\bar{M}}$  を集合たち

$$I_{\bar{M}}(A) = \{\delta \in \text{Lim}_{\omega_1} : A \cap \delta \in M_\delta\} \text{ (for } A \subseteq \omega_1\text{)}$$

で生成されるものとする.

**補題 0.4.** (1) 任意の  $A, B \subseteq \omega_1$  について,  $C \subseteq \omega_1$  が存在して

$$I_{\bar{M}}(C) = I_{\bar{M}}(A) \cap I_{\bar{M}}(B).$$

- (2)  $D_{\bar{M}}$  は任意の club 集合であって  $\text{Lim}_{\omega_1}$  に含まれるものを持つ.
- (3)  $D_{\bar{M}}$  は真の正規フィルター.

証明. (1)  $A, B \subseteq \omega_1$  を取る.  $g, f: \omega_1 \rightarrow \omega_1$  を

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= 2\alpha \\ f(\alpha) &= 2\alpha + 1 \end{aligned}$$

で定める.  $\delta < \omega_1$  が極限順序数ならば  $\delta$  は  $g$  と  $f$  で閉じている. そこで絶対性により  $g \restriction \delta, f \restriction \delta \in M_\delta$  である.

$C = g(A) \cup f(B)$  とおく. すると

$$\delta \in I_{\bar{M}}(C) \iff \delta \in I_{\bar{M}}(A) \ \& \ \delta \in I_{\bar{M}}(B)$$

を得る.

(2)  $C \subseteq \text{Lim}_{\omega_1}$  を club 集合とする.  $\langle \delta_i : i < \omega_1 \rangle$  を単調増加で連続な  $C$  の枚挙とする.  $A \subseteq \omega_1$  であって次を満たすものを構成する:  $\delta \in \text{Lim}_{\omega_1}$  かつすべての  $i < \omega_1$  に対して  $\delta \neq \delta_i$  ならば,  $A \cap \delta \notin M_\delta$ . この  $A$  を構成し終わると

$$\begin{aligned} I_{\bar{M}}(A) &= \{\delta \in \text{Lim}_{\omega_1} : A \cap \delta \in M_\delta\} \\ &\subseteq \{\delta \in \text{Lim}_{\omega_1} : \delta = \delta_i \text{ for some } i < \omega_1\} \\ &= C \end{aligned}$$

となるので  $C \in D_{\bar{M}}$  を得ることになる.

$A$  を区間ごとに帰納的に構成する. つまり  $A \cap [\delta_i, \delta_i + \omega)$  を  $i < \omega_1$  に関する帰納法で定めていく. これらの区間の外の順序数については必ず  $A$  に入れることにする.

$A \cap \delta_i$  が定まったとき,  $2^{\aleph_0}$  個の  $A \cap (\delta_i + \omega)$  の可能性がある. その中から一つ選び, 可算集合

$$\{B \cap (\delta_i + \omega) : B \in M_\delta, \delta_i < \delta < \delta_{i+1}\}$$

に属さないものとする. この構成で欲しい  $A$  が得られる. 構成より  $\delta \neq \delta_i$  for all  $i < \omega_1$  なる  $\delta \in \text{Lim}_{\omega_1}$  に対して  $A \cap \delta \notin M_\delta$  であるからだ.

(3) 真のフィルターであることは (1) と各  $A \subseteq \omega_1$  について  $I_{\bar{M}}(A)$  が定常集合である, 特に非空であることという事実から従う.

正規性を示そう. 対角共通部分で閉じていることを示す. それを示す際, とってくる元たちはフィルターの生成元であるとしてよいので,  $I_{\bar{M}}(A_i)$  (各  $i < \omega_1$  について  $A_i \subseteq \omega_1$ ) が与えられることとなる.  $A \subseteq \omega_1$  であって

$$I_{\bar{M}}(A) \subseteq \bigtriangleup_{i < \omega_1} I_{\bar{M}}(A_i)$$

となるものを構成すればよい. つまり

$$(\forall \delta \in \text{Lim}_{\omega_1}) [A \cap \delta \in M_\delta \rightarrow (\forall i < \delta) (A_i \cap \delta \in M_\delta)]$$

を言う. (2) と (3) より club many な  $\delta$  についてこの式が言えれば良い.

$\langle -, - \rangle : \omega_1 \times \omega_1 \rightarrow \omega_1$  を十分良く定義されたペア関数とする.

$$C = \{\delta < \omega_1 : \delta \text{ は } \langle -, - \rangle \text{ で閉じている}\}$$

とおけば  $C$  は club である.  $\delta \in C$  について  $\langle -, - \rangle$  の  $\delta \times \delta$  への制限は絶対性より  $M_\delta$  に属する.

$$A = \{\langle i, \alpha \rangle : \alpha \in A_i \text{ \& } i < \omega_1\}$$

とおく.  $\delta \in C$  かつ  $A \cap \delta \in M_\delta$  を仮定し,  $i < \delta$  とする. このとき,  $\langle -, - \rangle$  で第一座標が  $i$  なものを取り出す関数は絶対的なことから  $A_i \cap \delta \in M_\delta$  を得る. これで示せた.  $\square$

**補題 0.5.**  $h : \mathcal{P}(\omega_1) \rightarrow \mathcal{P}(\omega_1)$  を関数とする. このとき  $\{\delta \in \text{Lim}_{\omega_1} : (\forall A \in M_\delta \cap \mathcal{P}(\delta)) (h(A) \cap \delta \in M_\delta)\}$  は  $D_{\bar{M}}$  の元である.

証明. 集合  $\bigcup_{\delta \in \text{Lim}_{\omega_1}} M_\delta \cap \mathcal{P}(\delta)$  を  $\bigcup_{\delta \in \text{Lim}_{\omega_1}} M_\delta \cap \mathcal{P}(\delta) = \{X_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$  と枚挙する. ただしある club  $C$  について, どの  $\delta \in C$  に対しても  $M_\delta \cap \mathcal{P}(\delta)$  の元はすべて  $\delta$  未満の番号  $\alpha$  に対する  $X_\alpha$  として出現するようにする. このような枚挙は適当なペア関数を使って bookkeeping をすれば可能である.

$\alpha < \omega_1$  に対して  $Y_\alpha = I_{\bar{M}}(h(X_\alpha))$  とおく. このとき

$$\begin{aligned} D_{\bar{M}} \ni C \cap \bigtriangleup_{\alpha < \omega_1} Y_\alpha &= \{\delta \in C : (\forall \alpha < \delta)(\delta \in Y_\alpha)\} \\ &= \{\delta \in C : (\forall \alpha < \delta)(\delta \in I_{\bar{M}}(h(X_\alpha)))\} \\ &\supseteq \{\delta \in C : (\forall A \in M_\delta \cap \mathcal{P}(\delta))(\delta \in I_{\bar{M}}(h(A)))\} \\ &= \{\delta \in C : (\forall A \in M_\delta \cap \mathcal{P}(\delta))(h(A) \cap \delta \in M_\delta)\} \end{aligned}$$

となる. これでよい.  $\square$

**定義 0.6.**  $\bar{M}$  を  $\aleph_1$ -信託とする. 強制概念  $P$  が  $\bar{M}$  連鎖条件を満たすとは, 次のいずれかを満たすときである.

(1)  $|P| \leq \aleph_0$  である.

(2)  $|P| = \aleph_1$  かつある単射  $f: P \rightarrow \omega_1$  について

$$\{\delta \in \text{Lim}_{\omega_1} : \text{集合 } A \text{ が } A \in M_\delta, A \subseteq \delta, f^{-1}(A) \text{ が前稠密 in } f^{-1}\{i : i < \delta\} \text{ を満たすならば } f^{-1}(A) \text{ は前稠密 in } P\} \in D_{\bar{M}}$$

(3)  $|P| > \aleph_1$  かつすべての  $P^\dagger \subseteq P$  で  $|P^\dagger| \leq \aleph_1$  なものについて,  $P''$  であって,  $|P''| \leq \aleph_1$  かつ  $P^\dagger \subseteq P'' \subseteq P$  であって,  $P''$  は (2) の意味で  $\bar{M}$ -c.c. を満たし,  $P'' \subseteq_{\text{ic}} P$  である.

**補題 0.7.** 定義 0.6 の (2) における「ある単射  $f: P \rightarrow \omega_1$  について」は「すべての単射  $f: P \rightarrow \omega_1$  について」と変更しても同値である.

証明. (2) の証拠となる単射  $f: P \rightarrow \omega_1$  を取る. 単射  $g: P \rightarrow \omega_1$  を任意に取る. 仮定より

$$A := \{\delta \in \text{Lim}_{\omega_1} : \text{集合 } A \text{ が } A \in M_\delta, A \subseteq \delta, f^{-1}(A) \text{ が前稠密 in } f^{-1}\{i : i < \delta\} \text{ を満たすならば } f^{-1}(A) \text{ は前稠密 in } P\}$$

は  $D_{\bar{M}}$  の元である. 集合

$$B := \{\delta \in \text{Lim}_{\omega_1} : f^{-1}(\{i : i < \delta\}) = g^{-1}(\{i : i < \delta\})\}$$

は club なので  $B$  も  $D_{\bar{M}}$  の元である. 実際,  $f \circ g^{-1}$  と  $g \circ f^{-1}$  の両方で閉じている点全体の集合が club だからである. 集合

$$C := \{\delta \in \text{Lim}_{\omega_1} : (\forall A \in M_\delta \cap \mathcal{P}(\delta))((f \circ g^{-1}) \upharpoonright A \in M_\delta)\}$$

も  $D_{\bar{M}}$  の元である (by 補題 0.5). したがって,

$$\begin{aligned} \{\delta \in \text{Lim}_{\omega_1} : \text{集合 } A \text{ が } A \in M_\delta, A \subseteq \delta, g^{-1}(A) \text{ が前稠密 in } g^{-1}\{i : i < \delta\} \text{ を満たすならば } g^{-1}(A) \text{ は前稠密 in } P\} &\supseteq A \cap B \cap C \in D_{\bar{M}} \end{aligned}$$

となり証明が終わる.  $\square$

**補題 0.8.** (1)  $P_1$  と  $P_2$  が同型な強制概念でかつ,  $P_1$  が  $\bar{M}$  連鎖条件を満たすならば,  $P_2$  も  $\bar{M}$  連鎖条件を満たす.

(2) ある  $\aleph_1$  信託  $\bar{M}$  について  $P$  が  $\bar{M}$  連鎖条件を満たすならば,  $P$  は可算鎖条件を満たす.

(3)  $P \leq Q$  かつ  $Q$  が  $\bar{M}$  連鎖条件を満たすならば,  $P$  も  $\bar{M}$  連鎖条件を満たす.

(4) 定義 0.6 の  $|P| > \aleph_1$  の場合において,  $P'' \leq P$  を要求しても同値な定義となる.

証明. (1) 明らか.

(2) 濃度  $\aleph_1$  の場合だけ示せばほかの場合もすぐ従う. そこで  $P$  は台集合  $\omega_1$  としてよい.  $\mathcal{J}$  を濃度  $\aleph_1$  の極大反鎖とする. このとき club 集合  $C \subseteq \omega_1$  があって, 次を満たす:  $\delta \in C$  かつ  $q < \delta$  ならば,  $p \in \mathcal{J} \cap \delta$  があって  $p$  と両立可能である, そして,  $p, q < \delta$  が両立可能ならば, 共通下界を  $P \restriction \delta$  に持つ (そういう元を割り当てる写像をとり, それで閉じている元たちからなる club 集合を取ればよい).

$P$  が  $\bar{M}$  連鎖条件を満たすので,  $\delta \in C \cap I_{\bar{M}}(\mathcal{J})$  が存在して以下を満たす:  $A \in M_\delta$  かつ  $A$  が  $P \restriction \delta$  の前稠密部分集合ならば,  $A$  は  $P$  の前稠密部分集合である.

今,  $\delta \in I_{\bar{M}}(\mathcal{J})$  より  $\mathcal{J} \cap \delta \in M_\delta$  であり, また  $\delta \in C$  より  $\mathcal{J} \cap \delta$  は  $P \restriction \delta$  の前稠密集合である. したがって, 前段落の事柄から,  $\mathcal{J} \cap \delta$  は  $P$  の前稠密集合である. したがって任意の  $p \in \mathcal{J} \setminus \delta$  はある  $q \in \mathcal{J} \cap \delta$  と両立可能である.  $\mathcal{J} \setminus \delta \neq \emptyset$  が  $|\mathcal{J}| = \aleph_1$  により分かる. これは  $\mathcal{J}$  が反鎖なことに矛盾. □

## 参考文献

[Kun83] Kenneth Kunen. *Set Theory. An Introduction To Independence Proofs*. North-Holland, Amsterdam, 1983.