

# 神託連鎖条件強制法

でいぐ

2023 年 1 月 26 日

**定義 0.1.**  $\bar{M}$  が  $\aleph_1$ -神託であるとは次を満たすことである:

- (1)  $\bar{M}$  は列  $\bar{M} = \langle M_\delta : \delta \in \text{Lim}_{\omega_1} \rangle$  である.
- (2) 各  $M_\delta$  は  $\text{ZFC}^-$  の可算推移的モデルである.
- (3) 各  $\delta \in \text{Lim}_{\omega_1}$  について  $\delta + 1 \subseteq M_\delta$  かつ  $M_\delta \models \text{“}\delta \text{ は可算”}$ .
- (4) 任意の  $A \subseteq \omega_1$  について  $\{\delta \in \text{Lim}_{\omega_1} : A \cap \delta \in M_\delta\}$  は  $\omega_1$  の定常集合.

**補題 0.2.** ダイヤモンド原理  $\diamond$  から  $\aleph_1$ -神託の存在が導かれる.

証明. ダイヤモンド列  $\langle A_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$  をとる. 各  $\delta \in \text{Lim}_{\omega_1}$  について全単射  $f_\delta: \omega \rightarrow \delta$  をとる.  $H_{\omega_1}$  の, 集合  $(\delta + 1) \cup \{f_\delta\} \cup \{A_\delta\}$  を含む可算初等部分モデル  $N_\delta$  を取り  $N_\delta$  の推移崩壊  $M_\delta$  とする. このとき  $\langle M_\delta : \delta \in \text{Lim}_{\omega_1} \rangle$  が  $\aleph_1$ -神託である.  $\square$

補題 0.2 の逆も正しいが, 本稿では使わない. [Kun83] の Theorem 7.14 を参照せよ.

**定義 0.3.** 各  $\aleph_1$ -神託  $\bar{M}$  に対して,  $\omega_1$  上のフィルター  $D_{\bar{M}}$  を集合たち

$$I_{\bar{M}}(A) = \{\delta \in \text{Lim}_{\omega_1} : A \cap \delta \in M_\delta\} \text{ (for } A \subseteq \omega_1\text{)}$$

で生成されるものとする.

**補題 0.4.** (1) 任意の  $A, B \subseteq \omega_1$  について,  $C \subseteq \omega_1$  が存在して

$$I_{\bar{M}}(C) = I_{\bar{M}}(A) \cap I_{\bar{M}}(B).$$

- (2)  $D_{\bar{M}}$  は任意の club 集合であって  $\text{Lim}_{\omega_1}$  に含まれるものを持つ.
- (3)  $D_{\bar{M}}$  は真の正規フィルター.

証明. (1)  $A, B \subseteq \omega_1$  を取る.  $g, f: \omega_1 \rightarrow \omega_1$  を

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= 2\alpha \\ f(\alpha) &= 2\alpha + 1 \end{aligned}$$

で定める.  $\delta < \omega_1$  が極限順序数ならば  $\delta$  は  $g$  と  $f$  で閉じている. そこで絶対性により  $g \restriction \delta, f \restriction \delta \in M_\delta$  である.

$C = g(A) \cup f(B)$  とおく. すると

$$\delta \in I_{\bar{M}}(C) \iff \delta \in I_{\bar{M}}(A) \ \& \ \delta \in I_{\bar{M}}(B)$$

を得る.

(2)  $C \subseteq \text{Lim}_{\omega_1}$  を club 集合とする.  $\langle \delta_i : i < \omega_1 \rangle$  を単調増加で連続な  $C$  の枚挙とする.  $A \subseteq \omega_1$  であって次を満たすものを構成する:  $\delta \in \text{Lim}_{\omega_1}$  かつすべての  $i < \omega_1$  に対して  $\delta \neq \delta_i$  ならば,  $A \cap \delta \notin M_\delta$ . この  $A$  を構成し終わると

$$\begin{aligned} I_{\bar{M}}(A) &= \{\delta \in \text{Lim}_{\omega_1} : A \cap \delta \in M_\delta\} \\ &\subseteq \{\delta \in \text{Lim}_{\omega_1} : \delta = \delta_i \text{ for some } i < \omega_1\} \\ &= C \end{aligned}$$

となるので  $C \in D_{\bar{M}}$  を得ることになる.

$A$  を区間ごとに帰納的に構成する. つまり  $A \cap [\delta_i, \delta_i + \omega)$  を  $i < \omega_1$  に関する帰納法で定めていく. これらの区間の外の順序数については必ず  $A$  に入れることにする.

$A \cap \delta_i$  が定まったとき,  $2^{\aleph_0}$  個の  $A \cap (\delta_i + \omega)$  の可能性がある. その中から一つ選び, 可算集合

$$\{B \cap (\delta_i + \omega) : B \in M_\delta, \delta_i < \delta < \delta_{i+1}\}$$

に属さないものとする. この構成で欲しい  $A$  が得られる. 構成より  $\delta \neq \delta_i$  for all  $i < \omega_1$  なる  $\delta \in \text{Lim}_{\omega_1}$  に対して  $A \cap \delta \notin M_\delta$  であるからだ.

(3) 真のフィルターであることは (1) と各  $A \subseteq \omega_1$  について  $I_{\bar{M}}(A)$  が定常集合である, 特に非空であることという事実から従う.

正規性を示そう. 対角共通部分で閉じていることを示す. それを示す際, とってくる元たちはフィルターの生成元であるとしてよいので,  $I_{\bar{M}}(A_i)$  (各  $i < \omega_1$  について  $A_i \subseteq \omega_1$ ) が与えられることとなる.  $A \subseteq \omega_1$  であって

$$I_{\bar{M}}(A) \subseteq \bigtriangleup_{i < \omega_1} I_{\bar{M}}(A_i)$$

となるものを構成すればよい. つまり

$$(\forall \delta \in \text{Lim}_{\omega_1}) [A \cap \delta \in M_\delta \rightarrow (\forall i < \delta) (A_i \cap \delta \in M_\delta)]$$

を言う. (2) と (3) より club many な  $\delta$  についてこの式が言えれば良い.

$\langle -, - \rangle : \omega_1 \times \omega_1 \rightarrow \omega_1$  を十分良く定義されたペア関数とする.

$$C = \{\delta < \omega_1 : \delta \text{ は } \langle -, - \rangle \text{ で閉じている}\}$$

とおけば  $C$  は club である.  $\delta \in C$  について  $\langle -, - \rangle$  の  $\delta \times \delta$  への制限は絶対性より  $M_\delta$  に属する.

$$A = \{\langle i, \alpha \rangle : \alpha \in A_i \text{ \& } i < \omega_1\}$$

とおく.  $\delta \in C$  かつ  $A \cap \delta \in M_\delta$  を仮定し,  $i < \delta$  とする. このとき,  $\langle -, - \rangle$  で第一座標が  $i$  なものを取り出す関数は絶対的なことから  $A_i \cap \delta \in M_\delta$  を得る. これで示せた.  $\square$

**補題 0.5.**  $h : \mathcal{P}(\omega_1) \rightarrow \mathcal{P}(\omega_1)$  を関数とする. このとき  $\{\delta \in \text{Lim}_{\omega_1} : (\forall A \in M_\delta \cap \mathcal{P}(\delta)) (h(A) \cap \delta \in M_\delta)\}$  は  $D_{\bar{M}}$  の元である.

証明. 集合  $\bigcup_{\delta \in \text{Lim}_{\omega_1}} M_\delta \cap \mathcal{P}(\delta)$  を  $\bigcup_{\delta \in \text{Lim}_{\omega_1}} M_\delta \cap \mathcal{P}(\delta) = \{X_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$  と枚挙する. ただしある club  $C$  について, どの  $\delta \in C$  に対しても  $M_\delta \cap \mathcal{P}(\delta)$  の元はすべて  $\delta$  未満の番号  $\alpha$  に対する  $X_\alpha$  として出現するようにする. このような枚挙は適当なペア関数を使って bookkeeping をすれば可能である.

$\alpha < \omega_1$  に対して  $Y_\alpha = I_{\bar{M}}(h(X_\alpha))$  とおく. このとき

$$\begin{aligned} D_{\bar{M}} \ni C \cap \bigtriangleup_{\alpha < \omega_1} Y_\alpha &= \{\delta \in C : (\forall \alpha < \delta)(\delta \in Y_\alpha)\} \\ &= \{\delta \in C : (\forall \alpha < \delta)(\delta \in I_{\bar{M}}(h(X_\alpha)))\} \\ &\supseteq \{\delta \in C : (\forall A \in M_\delta \cap \mathcal{P}(\delta))(\delta \in I_{\bar{M}}(h(A)))\} \\ &= \{\delta \in C : (\forall A \in M_\delta \cap \mathcal{P}(\delta))(h(A) \cap \delta \in M_\delta)\} \end{aligned}$$

となる. これでよい. □

**定義 0.6.**  $\bar{M}$  を  $\aleph_1$ -神託とする. 強制概念  $P$  が  $\bar{M}$  連鎖条件を満たすとは, 次のいずれかを満たすときである.

(1)  $|P| \leq \aleph_0$  である.

(2)  $|P| = \aleph_1$  かつある単射  $f: P \rightarrow \omega_1$  について

$$\begin{aligned} \{\delta \in \text{Lim}_{\omega_1} : \text{集合 } A \text{ が } A \in M_\delta, A \subseteq \delta, f^{-1}(A) \text{ が前稠密 in } f^{-1}\{i : i < \delta\} \text{ を満たすならば} \\ f^{-1}(A) \text{ は前稠密 in } P\} \in D_{\bar{M}} \end{aligned}$$

(3)  $|P| > \aleph_1$  かつすべての  $P^\dagger \subseteq P$  で  $|P^\dagger| \leq \aleph_1$  なものについて,  $P''$  であって,  $|P''| \leq \aleph_1$  かつ  $P^\dagger \subseteq P'' \subseteq P$  であって,  $P''$  は (2) の意味で  $\bar{M}$ -c.c. を満たし,  $P'' \subseteq_{\text{ic}} P$  である.

**補題 0.7.** 定義 0.6 の (2) における「ある単射  $f: P \rightarrow \omega_1$  について」は「すべての単射  $f: P \rightarrow \omega_1$  について」と変更しても同値である.

証明. (2) の証拠となる単射  $f: P \rightarrow \omega_1$  を取る. 単射  $g: P \rightarrow \omega_1$  を任意に取る. 仮定より

$$\begin{aligned} A := \{\delta \in \text{Lim}_{\omega_1} : \text{集合 } A \text{ が } A \in M_\delta, A \subseteq \delta, f^{-1}(A) \text{ が前稠密 in } f^{-1}\{i : i < \delta\} \text{ を満たすならば} \\ f^{-1}(A) \text{ は前稠密 in } P\} \end{aligned}$$

は  $D_{\bar{M}}$  の元である. 集合

$$B := \{\delta \in \text{Lim}_{\omega_1} : f^{-1}(\{i : i < \delta\}) = g^{-1}(\{i : i < \delta\})\}$$

は club なので  $B$  も  $D_{\bar{M}}$  の元である. 実際,  $f \circ g^{-1}$  と  $g \circ f^{-1}$  の両方で閉じている点全体の集合が club だからである. 集合

$$C := \{\delta \in \text{Lim}_{\omega_1} : (\forall A \in M_\delta \cap \mathcal{P}(\delta))((f \circ g^{-1}) \upharpoonright A \in M_\delta)\}$$

も  $D_{\bar{M}}$  の元である (by 補題 0.5). したがって,

$$\begin{aligned} \{\delta \in \text{Lim}_{\omega_1} : \text{集合 } A \text{ が } A \in M_\delta, A \subseteq \delta, g^{-1}(A) \text{ が前稠密 in } g^{-1}\{i : i < \delta\} \text{ を満たすならば} \\ g^{-1}(A) \text{ は前稠密 in } P\} \supseteq A \cap B \cap C \in D_{\bar{M}} \end{aligned}$$

となり証明が終わる. □

**補題 0.8 (CH).**  $P_1 \subseteq P_2$  とし,  $|P_1| \leq \aleph_1$  かつ  $P_2$  は可算鎖条件を満たすとする. このとき,  $P_3$  が存在して,  $|P_3| \leq \aleph_1$  かつ  $P_1 \subseteq P_3 \triangleleft P_2$  を満たす.

証明.  $P_2$  の部分集合の単調増加連続な列  $\langle P^{(\alpha)} : \alpha < \omega_1 \rangle$  を次のように定める: まず  $P^{(0)} = P_1$  として, 極限順序数  $\alpha$  については  $P^{(\alpha)} = \bigcup_{\beta < \alpha} P_\beta$  とおく. 後続順序数  $\alpha = \beta + 1$  のときの  $P^{(\alpha)}$  は次のよ

うに定める。 $P^{(\beta)}$  の可算集合  $I$  であって  $P_2$  の中で前稠密ではないものの各々について、その witness  $p_I \in P_2$  を取る。 $P^{(\alpha)}$  は  $P^{(\beta)}$  に  $p_I$  たちを追加した集合とする。そして、 $P_0^{(\alpha)}$  の元のすべての組について、それらが  $P_2$  で両立するなら、共通拡大をとり、 $P_0^{(\alpha)}$  に追加して得られる集合を  $P^{(\alpha)}$  とする。

最後に  $P_3 = \bigcup_{\alpha < \omega_1} P^{(\alpha)}$  とおけばこれが求めるべきものである。なお、CH を仮定しているので、各ステップにおいて  $I$  の個数は  $\aleph_1$  であること、そして  $P_2$  が可算鎖条件を満たすので、保存すべきおのこの極大反鎖のサイズは可算であることに注意しておく。  $\square$

**補題 0.9.** (1)  $P_1$  と  $P_2$  が同型な強制概念でかつ、 $P_1$  が  $\bar{M}$  連鎖条件を満たすならば、 $P_2$  も  $\bar{M}$  連鎖条件を満たす。

(2) ある  $\aleph_1$  神託  $\bar{M}$  について  $P$  が  $\bar{M}$  連鎖条件を満たすならば、 $P$  は可算鎖条件を満たす。

(3)  $P \leq Q$  かつ  $Q$  が  $\bar{M}$  連鎖条件を満たすならば、 $P$  も  $\bar{M}$  連鎖条件を満たす。

(4) 定義 0.6 の  $|P| > \aleph_1$  の場合において、 $P'' \leq P$  を要求しても同値な定義となる。

証明. (1) 明らか。

(2) 濃度  $\aleph_1$  の場合だけ示せばほかの場合もすぐ従う。そこで  $P$  は台集合  $\omega_1$  としてよい。 $\mathcal{J}$  を濃度  $\aleph_1$  の極大反鎖とする。このとき club 集合  $C \subseteq \omega_1$  があって、次を満たす： $\delta \in C$  かつ  $q < \delta$  ならば、 $p \in \mathcal{J} \cap \delta$  があって  $p$  と両立可能である、そして、 $p, q < \delta$  が両立可能ならば、共通下界を  $P \restriction \delta$  に持つ (そういう元を割り当てる写像をとり、それで閉じている元たちからなる club 集合を取ればよい)。

$P$  が  $\bar{M}$  連鎖条件を満たすので、 $\delta \in C \cap I_{\bar{M}}(\mathcal{J})$  が存在して以下を満たす： $A \in M_\delta$  かつ  $A$  が  $P \restriction \delta$  の前稠密部分集合ならば、 $A$  は  $P$  の前稠密部分集合である。

今、 $\delta \in I_{\bar{M}}(\mathcal{J})$  より  $\mathcal{J} \cap \delta \in M_\delta$  であり、また  $\delta \in C$  より  $\mathcal{J} \cap \delta$  は  $P \restriction \delta$  の前稠密集合である。したがって、前段落の事柄から、 $\mathcal{J} \cap \delta$  は  $P$  の前稠密集合である。したがって任意の  $p \in \mathcal{J} \setminus \delta$  はある  $q \in \mathcal{J} \cap \delta$  と両立可能である。 $\mathcal{J} \setminus \delta \neq \emptyset$  が  $|\mathcal{J}| = \aleph_1$  により分かる。これは  $\mathcal{J}$  が反鎖なことに矛盾。

(3) まず、 $|P| = |Q| = \aleph_1$  の場合を示す。一般性を失うことなく、 $Q$  の台集合は  $\omega_1$  としてよい。 $\delta \in \text{Lim}_{\omega_1}$  を  $Q$  が  $\bar{M}$  連鎖条件を満たすことの証拠を与える  $D_{\bar{M}}$  のメンバーの元であるとする。集合  $A$  が  $P \restriction \delta$  で前稠密かつ  $A \in M_\delta$  だと仮定する。このとき  $A$  が  $P$  で前稠密であることを示さなくてはならない。 $P \leq Q$  なので、特に  $P \subseteq_{\text{ic}} Q$  である。よって  $A$  が  $Q$  で前稠密であることを示せば十分である。 $\delta$  のとり方より  $A$  が  $Q \restriction \delta$  で前稠密なことを示せばよい。

$q \in Q$  に対して、集合  $I_q$  を

$$I_q = \{r \in P : r \text{ は } q \text{ と両立不能 または } (\forall r^\dagger \leq r)(r^\dagger \in P \rightarrow r^\dagger \text{ は } q \text{ と両立可能})\}$$

とおく。 $I_q$  は  $P$  の稠密集合である。よって  $P$  の極大反鎖  $J_q \subseteq I_q$  をとれる。 $P \leq Q$  より  $J_q$  は  $Q$  の中でも極大反鎖である。 $r_q \in J_q$  であって、 $(\forall r^\dagger \leq r_q)(r^\dagger \in P \rightarrow r^\dagger \text{ は } q \text{ と両立可能})$  なものをとる。これは取れる。なぜなら取れないとしたらすべての  $r \in J_q$  が  $q$  と両立不能なことになって、 $J_q$  が  $Q$  で極大反鎖なことに反するからである。今考えている  $\delta$  の動く範囲をある club 集合との共通部分の中で考えることにより、 $\delta$  は次を満たすと仮定できる：任意の  $q < \delta$  に対して  $r_q < \delta$ 、かつ  $p_1, p_2 \in P \restriction \delta$  が  $P$  で両立するなら  $P \restriction \delta$  でも両立する、かつ  $Q$  に対しても同じことが成り立つ。

$A$  が  $Q \restriction \delta$  で前稠密なことを示す。そのために、 $q \in Q \restriction \delta$  を取る。 $r_q \in P \restriction \delta$  であって  $A$  が  $P \restriction \delta$  で前稠密なので、 $p \in A$  があって、 $p$  と  $r_q$  は両立する。 $r^\dagger \in P \restriction \delta$  を  $p$  と  $r_q$  の共通拡大とする。 $r_q$  のとり方より、 $r^\dagger$  と  $q$  は両立する。よって  $p$  と  $q$  は両立する。したがって、 $A$  は  $Q \restriction \delta$  で前稠密である

ことが示された。これで、 $|P| = |Q| = \aleph_1$  の場合が証明された。

次に一般の場合を示そう。 $P$  の濃度で場合分けする。

$|P| \leq \aleph_0$  のとき。このときは明らかに  $P$  は  $\bar{M}$  連鎖条件を満たす。

次に  $|P| = \aleph_1$  のとき。 $|Q| = \aleph_1$  なら証明済みなので  $|Q| > \aleph_1$  とする。 $|Q|$  が  $\bar{M}$  連鎖条件を満たすことより  $P^\dagger \subseteq_{\text{ic}} Q$  であって  $P \subseteq P^\dagger$  かつ  $P^\dagger$  は  $\bar{M}$  連鎖条件を満たし、 $|P^\dagger| = \aleph_1$  なものが存在する。 $P \triangleleft Q$  かつ  $P^\dagger \subseteq_{\text{ic}} Q$  により、 $P \triangleleft P^\dagger$  が分かる。よって、すでに示したことより  $P$  は  $\bar{M}$  連鎖条件を満たす。

最後に  $|P| > \aleph_1$  のとき。 $P^\dagger \subseteq P$  であって  $|P^\dagger| = \aleph_1$  なものを任意にとる。補題 0.8 より、 $P''$  を見つけることができ、 $|P''| = \aleph_1$  かつ  $P^\dagger \subseteq P'' \triangleleft P$  である。 $P \triangleleft Q$  なので、 $P'' \triangleleft Q$  が従う。よって、小さい方の強制概念の濃度が  $\aleph_1$  なときの主張が証明済みなことより、 $P''$  は  $\bar{M}$  連鎖条件を満たす。ゆえに、 $P$  は  $\bar{M}$  連鎖条件を満たす。

(4)  $P$  がもとの意味で  $\bar{M}$  連鎖条件を満たし、 $|P| > \aleph_1$  であるとする。 $P^\dagger \subseteq P$  で  $|P^\dagger| \leq \aleph_1$  なものを任意に取る。補題 0.8 により、 $P''$  であって、 $|P''| \leq \aleph_1$  かつ  $P^\dagger \subseteq P'' \triangleleft P$  なものを取れる。(3) より  $P''$  は  $\bar{M}$  連鎖条件を満たす。これで主張が示された。  $\square$

## 参考文献

[Kun83] Kenneth Kunen. *Set Theory. An Introduction To Independence Proofs*. North-Holland, Amsterdam, 1983.