信託連鎖条件強制法

でぃぐ

2023 年 1 月 24 日

定義 0.1. $\bar{M}$ が $\aleph_1$**-信託**であるとは次を満たすことである:

(1) $\bar{M}$ は列 $\bar{M} = \langle M_\delta : \delta \in \mathrm{Lim}_{\omega_1} \rangle$ である.

(2) 各 M_δ は ZFC^- の可算推移的モデルである.

(3) 各 $\delta \in \mathrm{Lim}_{\omega_1}$ について $\delta + 1 \subseteq M_\delta$ かつ $M_\delta \models$ "δは可算".

(4) 任意の $A \subseteq \omega_1$ について $\{\delta \in \mathrm{Lim}_{\omega_1} : A \cap \delta \in M_\delta\}$ は ω_1 の定常集合.

補題 0.2. ダイヤモンド原理 $\diamondsuit$ から $\aleph_1$-信託の存在が導かれる.

証明. ダイヤモンド列 $\langle A_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ をとる．各 $\delta \in \mathrm{Lim}_{\omega_1}$ について全単射 $f_\delta \colon \omega \to \delta$ をとる．H_{ω_1} の，集合 $(\delta + 1) \cup \{f_\delta\} \cup \{A_\delta\}$ を含む可算初等部分モデル N_δ を取り N_δ の推移崩壊 M_δ とする．このとき $\langle M_\delta : \delta \in \mathrm{Lim}_{\omega_1} \rangle$ が $\aleph_1$-信託である. $\square$

補題 0.2 の逆も正しいが，本稿では使わない．[Kun83] の Theorem 7.14 を参照せよ.

定義 0.3. 各 $\aleph_1$-信託 $\bar{M}$ に対して，ω_1 上のフィルター $D_{\bar{M}}$ を集合たち

$$I_{\bar{M}}(A) = \{\delta \in \mathrm{Lim}_{\omega_1} : A \cap \delta \in M_\delta\} \ (\text{for } A \subseteq \omega_1)$$

で生成されるものとする.

補題 0.4. (1) 任意の $A, B \subseteq \omega_1$ について，$C \subseteq \omega_1$ が存在して

$$I_{\bar{M}}(C) = I_{\bar{M}}(A) \cap I_{\bar{M}}(B).$$

(2) $D_{\bar{M}}$ は任意の club 集合であって Lim_{ω_1} に含まれるものを持つ.

(3) $D_{\bar{M}}$ は真の正規フィルター.

証明. (1) $A, B \subseteq \omega_1$ を取る．$g, f \colon \omega_1 \to \omega_1$ を

$$g(\alpha) = 2\alpha$$
$$f(\alpha) = 2\alpha + 1$$

で定める．$\delta < \omega_1$ が極限順序数ならば δ は g と f で閉じている．そこで絶対性により $g \restriction \delta, f \restriction \delta \in M_\delta$ である.

$C = g(A) \cup f(B)$ とおく．すると

$$\delta \in I_{\bar{M}}(C) \iff \delta \in I_{\bar{M}}(A) \,\&\, \delta \in I_{\bar{M}}(B)$$

を得る.

(2) $C \subseteq \mathrm{Lim}_{\omega_1}$ を club 集合とする．$\langle \delta_i : i < \omega_1 \rangle$ を単調増加で連続な C の枚挙とする．$A \subseteq \omega_1$ であって次を満たすものを構成する：$\delta \in \mathrm{Lim}_{\omega_1}$ かつすべての $i < \omega_1$ に対して $\delta \neq \delta_i$ ならば，$A \cap \delta \notin M_\delta$. この A を構成し終えると

$$\begin{aligned} I_{\bar{M}}(A) &= \{\delta \in \mathrm{Lim}_{\omega_1} : A \cap \delta \in M_\delta\} \\ &\subseteq \{\delta \in \mathrm{Lim}_{\omega_1} : \delta = \delta_i \text{for some } i < \omega_1\} \\ &= C \end{aligned}$$

となるので $C \in D_{\bar{M}}$ を得ることになる．

A を区間ごとに帰納的に構成する．つまり $A \cap [\delta_i, \delta_i + \omega)$ を $i < \omega_1$ に関する帰納法で定めていく．これらの区間の外の順序数については必ず A に入れることにする．

$A \cap \delta_i$ が定まったとき，$2^{\aleph_0}$ 個の $A \cap (\delta_i + \omega)$ の可能性がある．その中から一つ選び，可算集合

$$\{B \cap (\delta_i + \omega) : B \in M_\delta, \delta_i < \delta < \delta_{i+1}\}$$

に属さないものとする．この構成で欲しい A が得られる．構成より $\delta \neq \delta_i$ for all $i < \omega_1$ なる $\delta \in \mathrm{Lim}_{\omega_1}$ に対して $A \cap \delta \notin M_\delta$ であるからだ．

(3) 真のフィルターであることは (1) と各 $A \subseteq \omega_1$ について $I_{\bar{M}}(A)$ が定常集合である，特に非空であることという事実から従う．

正規性を示そう．対角共通部分で閉じていることを示す．それを示す際，とってくる元たちはフィルターの生成元であるとしてよいので，$I_{\bar{M}}(A_i)$ (各 $i < \omega_1$ について $A_i \subseteq \omega_1$) が与えられることとなる．$A \subseteq \omega_1$ であって

$$I_{\bar{M}}(A) \subseteq \mathop{\triangle}_{i<\omega_1} I_{\bar{M}}(A_i)$$

となるものを構成すればよい．つまり

$$(\forall \delta \in \mathrm{Lim}_{\omega_1})[A \cap \delta \in M_\delta \to (\forall i < \delta)(A_i \cap \delta \in M_\delta)]$$

を言う．(2) と (3) より club many な δ についてこの式が言えれば良い．

$\langle -, - \rangle : \omega_1 \times \omega_1 \to \omega_1$ を十分良く定義されたペア関数とする．

$$C = \{\delta < \omega_1 : \delta \text{ は } \langle -, - \rangle \text{ で閉じている }\}$$

とおけば C は club である．$\delta \in C$ について $\langle -, - \rangle$ の $\delta \times \delta$ への制限は絶対性より M_δ に属する．

$$A = \{\langle i, \alpha \rangle : \alpha \in A_i \,\&\, i < \omega_1\}$$

とおく．$\delta \in C$ かつ $A \cap \delta \in M_\delta$ を仮定し，$i < \delta$ とする．このとき，$\langle -, - \rangle$ で第一座標が i なものを取り出す関数は絶対的なことから $A_i \cap \delta \in M_\delta$ を得る．これで示せた． □

補題 0.5. $h \colon \mathcal{P}(\omega_1) \to \mathcal{P}(\omega_1)$ を関数とする．このとき $\{\delta \in \mathrm{Lim}_{\omega_1} : (\forall A \in M_\delta \cap \mathcal{P}(\delta))(h(A) \cap \delta \in M_\delta)\}$ は $D_{\bar{M}}$ の元である．

証明. 集合 $\bigcup_{\delta \in \mathrm{Lim}_{\omega_1}} M_\delta \cap \mathcal{P}(\delta)$ を $\bigcup_{\delta \in \mathrm{Lim}_{\omega_1}} M_\delta \cap \mathcal{P}(\delta) = \{X_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ と枚挙する．ただしある club C について，どの $\delta \in C$ に対しても $M_\delta \cap \mathcal{P}(\delta)$ の元はすべて δ 未満の番号 α に対する X_α として出現するようにする．このような枚挙は適当なペア関数を使って bookkeeping をすれば可能である．

$\alpha < \omega_1$ に対して $Y_\alpha = I_{\bar{M}}(h(X_\alpha))$ とおく．このとき

$$\begin{aligned} D_{\bar{M}} \ni C \cap \mathop{\triangle}_{\alpha<\omega_1} Y_\alpha &= \{\delta \in C : (\forall \alpha < \delta)(\delta \in Y_\alpha)\} \\ &= \{\delta \in C : (\forall \alpha < \delta)(\delta \in I_{\bar{M}}(h(X_\alpha)))\} \\ &\supseteq \{\delta \in C : (\forall A \in M_\delta \cap \mathcal{P}(\delta))(\delta \in I_{\bar{M}}(h(A))\} \\ &= \{\delta \in C : (\forall A \in M_\delta \cap \mathcal{P}(\delta))(h(A) \cap \delta \in M_\delta)\} \end{aligned}$$

となる．これでよい． □

定義 0.6. $\bar{M}$ を $\aleph_1$-信託とする．強制概念 P が $\bar{M}$ **連鎖条件**を満たすとは，次のいずれかを満たすときである．

(1) $|P| \leq \aleph_0$ である．

(2) $|P| = \aleph_1$ かつある単射 $f\colon P \to \omega_1$ について

$$\{\delta \in \mathrm{Lim}_{\omega_1} :\text{集合 } A \text{ が } A \in M_\delta, A \subseteq \delta, f^{-1}(A) \text{ が前稠密 in } f^{-1}\{i : i < \delta\} \text{ を満たすならば } f^{-1}(A) \text{ は前稠密 in } P\} \in D_{\bar{M}}$$

(3) $|P| > \aleph_1$ かつすべての $P^\dagger \subseteq P$ で $|P^\dagger| \leq \aleph_1$ なものについて，P'' であって，$|P''| \leq \aleph_1$ かつ $P^\dagger \subseteq P'' \subseteq P$ であって，P'' は (2) の意味で $\bar{M}$-c.c. を満たし，$P'' \subseteq_{\mathrm{ic}} P$ である．

補題 0.7. 定義 0.6 の (2) における「ある単射 $f\colon P \to \omega_1$ について」は「すべての単射 $f\colon P \to \omega_1$ について」と変更しても同値である．

証明. (2) の証拠となる単射 $f\colon P \to \omega_1$ を取る．単射 $g\colon P \to \omega_1$ を任意に取る．仮定より

$$A := \{\delta \in \mathrm{Lim}_{\omega_1} :\text{集合 } A \text{ が } A \in M_\delta, A \subseteq \delta, f^{-1}(A) \text{ が前稠密 in } f^{-1}\{i : i < \delta\} \text{ を満たすならば } f^{-1}(A) \text{ は前稠密 in } P\}$$

は $D_{\bar{M}}$ の元である．集合

$$B := \{\delta \in \mathrm{Lim}_{\omega_1} : f^{-1}(\{i : i < \delta\}) = g^{-1}(\{i : i < \delta\})\}$$

は club なので B も $D_{\bar{M}}$ の元である．実際，$f \circ g^{-1}$ と $g \circ f^{-1}$ の両方で閉じている点全体の集合が club だからである．集合

$$C := \{\delta \in \mathrm{Lim}_{\omega_1} : (\forall A \in M_\delta \cap \mathcal{P}(\delta))((f \circ g^{-1}) \restriction A \in M_\delta)\}$$

も $D_{\bar{M}}$ の元である (by 補題 0.5)．したがって，

$$\{\delta \in \mathrm{Lim}_{\omega_1} :\text{集合 } A \text{ が } A \in M_\delta, A \subseteq \delta, g^{-1}(A) \text{ が前稠密 in } g^{-1}\{i : i < \delta\} \text{ を満たすならば } g^{-1}(A) \text{ は前稠密 in } P\} \supseteq A \cap B \cap C \in D_{\bar{M}}$$

となり証明が終わる． □

補題 0.8. (1) P_1 と P_2 が同型な強制概念でかつ，P_1 が $\bar{M}$ 連鎖条件を満たすならば，P_2 も $\bar{M}$ 連鎖条件を満たす．

(2) ある $\aleph_1$ 信託 $\bar{M}$ について P が $\bar{M}$ 連鎖条件を満たすならば，P は可算鎖条件を満たす．

(3) $P \lessdot Q$ かつ Q が $\bar{M}$ 連鎖条件を満たすならば，P も $\bar{M}$ 連鎖条件を満たす．

(4) 定義 0.6 の $|P| > \aleph_1$ の場合において，$P'' \lessdot P$ を要求しても同値な定義となる．

証明．(1) 明らか．

(2) 濃度 $\aleph_1$ の場合だけ示せばほかの場合もすぐ従う．そこで P は台集合 ω_1 としてよい．$\mathcal{J}$ を濃度 $\aleph_1$ の極大反鎖とする．このとき club 集合 $C \subseteq \omega_1$ があって，次を満たす：$\delta \in C$ かつ $q < \delta$ ならば，$p \in \mathcal{J} \cap \delta$ があって p と両立可能である，そして，$p, q < \delta$ が両立可能ならば，共通下界を $P \restriction \delta$ に持つ (そういう元を割り当てる写像をとり，それで閉じている元たちからなる club 集合を取ればよい)．

P が $\bar{M}$ 連鎖条件を満たすので，$\delta \in C \cap I_{\bar{M}}(\mathcal{J})$ が存在して以下を満たす：$A \in M_\delta$ かつ A が $P \restriction \delta$ の前稠密部分集合ならば，A は P の前稠密部分集合である．

今，$\delta \in I_{\bar{M}}(\mathcal{J})$ より $\mathcal{J} \cap \delta \in M_\delta$ であり，また $\delta \in C$ より $\mathcal{J} \cap \delta$ は $P \restriction \delta$ の前稠密集合である．したがって，前段落の事柄から，$\mathcal{J} \cap \delta$ は P の前稠密集合である．したがって任意の $p \in \mathcal{J} \setminus \delta$ はある $q \in \mathcal{J} \cap \delta$ と両立可能である．$\mathcal{J} \setminus \delta \neq \varnothing$ が $|\mathcal{J}| = \aleph_1$ により分かる．これは $\mathcal{J}$ が反鎖なことに矛盾．

(3) まず，$|P| = |Q| = \aleph_1$ の場合を示す．一般性を失うことなく，Q の台集合は ω_1 としてよい．$\delta \in \mathrm{Lim}_{\omega_1}$ を Q が $\bar{M}$ 連鎖条件を満たすことの証拠を与える $D_{\bar{M}}$ のメンバーの元であるとする．集合 A が $P \restriction \delta$ で前稠密かつ $A \in M_\delta$ だと仮定する．このとき A が P で前稠密であることを示さなくてはならない．$P \lessdot Q$ なので，特に $P \subseteq_{\mathrm{ic}} Q$ である．よって A が Q で前稠密であることを示せば十分である．δ のとり方より A が $Q \restriction \delta$ で前稠密なことを示せばよい．

$q \in Q$ に対して，集合 I_q を

$$I_q = \{r \in P : r \text{ は } q \text{ と両立不能 または } (\forall r^\dagger \leq r)(r^\dagger \in P \to r^\dagger \text{ は } q \text{ と両立可能})\}$$

とおく．I_q は P の稠密集合である．よって P の極大反鎖 $J_q \subseteq I_q$ をとれる．$P \lessdot Q$ より J_q は Q の中でも極大反鎖である．$r_q \in J_q$ であって，$(\forall r^\dagger \leq r_q)(r^\dagger \in P \to r^\dagger$ は q と両立可能$)$ なものをとる．これは取れる．なぜなら取れないとしたらすべての $r \in J_q$ が q と両立不能なことになって，J_q が Q で極大反鎖なことに反するからである．今考えている δ の動く範囲をある club 集合との共通部分の中で考えることにより，δ は次を満たすと仮定できる：任意の $q < \delta$ に対して $r_q < \delta$，かつ $p_1, p_2 \in P \restriction \delta$ が P で両立するなら $P \restriction \delta$ でも両立する，かつ Q に対しても同じことが成り立つ．

A が $Q \restriction \delta$ で前稠密なことを示す．そのために，$q \in Q \restriction \delta$ を取る．$r_q \in P \restriction \delta$ であって A が $P \restriction \delta$ で前稠密なので，$p \in A$ があって，p と r_q は両立する．$r^\dagger \in P \restriction \delta$ を p と r_q の共通拡大とする．r_q のとり方より，$r^\dagger$ と q は両立する．よって p と q は両立する．したがって，A は $Q \restriction \delta$ で前稠密であることが示された．これで，$|P| = |Q| = \aleph_1$ の場合が証明された． □

参考文献

[Kun83] Kenneth Kunen. *Set Theory. An Introduction To Independence Proofs.* North-Holland, Amsterdam, 1983.