

1. 次の式を因数分解せよ。
- (1) $(x^2+x-5)(x^2+x-7)+1$

(2) $9b^2+3ab-2a-4$

(3) $a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+2abc$
2. 次の に最も適する語句を (ア)~(工) から選べ。 x, y は実数とする。
- (1) $x<1$ は $x\leq 1$ であるための 。

(2) $x<y$ は $x^4<y^4$ であるための 。

(3) $xy+1=x+y$ は x, y のうち少なくとも1つは1であるための 。

(4) $\triangle ABC$ において、 $\angle A<90^\circ$ は、 $\triangle ABC$ が鋭角三角形であるための 。

(ア) 必要十分条件である (イ) 必要条件であるが十分条件ではない

(ウ) 十分条件であるが必要条件ではない (工) 必要条件でも十分条件でもない
3. $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ のとき、次の式の値を求めよ。
- (1) a^2-a-1

(2) $a^4+a^3+a^2+a+1$
4. k を $k>2$ を満たす定数とする。このとき、 x についての不等式 $5-x\leq 4x<2x+k$ の解は \supseteq である。また、不等式 $5-x\leq 4x<2x+k$ を満たす整数 x がちょうど5つ存在するような定数 k の値の範囲は \supseteq である。
5. (1) 不等式 $a(x+1)>x+a^2$ を解け。ただし、 a は定数とする。
- (2) 不等式 $ax<4-2x<2x$ の解が $1<x<4$ であるとき、定数 a の値を求めよ。

以下の問いでは解決過程も採点対象である。
根拠や記述が不十分な場合は減点対象となる。

6. $x=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}, y=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ のとき、 $x+y=\supseteq$, $xy=\supseteq$ であるから、
 $x^2+y^2=\supseteq$, $x^3+y^3=\supseteq$, $x^4+y^4=\supseteq$, $x^5+y^5=\supseteq$ となる。
7. 不等式 $|x-1|+2|x-3|\leq 11$ を解け。
8. (1) a, b が有理数のとき、 $a+b\sqrt{2}=0$ ならば $a=b=0$ であることを証明せよ。ただし、 $\sqrt{2}$ は無理数である。
- (2) 等式 $(2+3\sqrt{2})x+(1-5\sqrt{2})y=13$ を満たす有理数 x, y の値を求めよ。

2 式の数

基本問題

10 $x+y=\frac{5}{6}$, $xy=\frac{1}{6}$ のとき、次の式の値を求めよ。

- (1) x^2+y^2 (2) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ (3) x^3+y^3 [13 大阪経大]

ポイントチェック

11 $x=\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$, $y=\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$ であるとき、 $x^2+xy+y^2=\square$,
 $x^3+x^2y+xy^2+y^3=\square$ である。 [16 大阪経大]

ポイント 無理数と対称式の値 x, y の対称式は $x+y, xy$ で表される。
 直接代入すると計算が大変であるから、式を変形して考える。
 $x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy$

***12** $\sqrt{14}$ の整数部分を a 、小数部分を b とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) a, b の値を求めよ。
 (2) $\frac{1}{b}$ の整数部分を c 、小数部分を d とするとき、 c, d の値を求めよ。

[15 東北学院大]

ポイント 整数部分と小数部分
 実数 A の整数部分が x のとき、小数部分 y は $y=A-x$

***13** $\frac{x+y}{3}=\frac{y+z}{6}=\frac{z+x}{7}$ ($\neq 0$) のとき、 $\frac{x^3+y^3+z^3}{xyz}$ の値を求めよ。

[15 明治大]

ポイント 比例式 (比例式) $=k$ とおくと、式の値が計算しやすくなる。

A 問題

***14** (1) $x+\frac{1}{x}=2\sqrt{7}$ のとき、 $x^2+\frac{1}{x^2}=\square$, $x^3+\frac{1}{x^3}=\square$,
 $x^4+\frac{1}{x^4}=\square$, $x^5+\frac{1}{x^5}=\square$ である。 [15 駒澤大]

(2) 実数 a, b が $a+b=-1$, $a^3+b^3=-19$ を満たすとき、 $a^2+b^2=\square$,
 $a^5+b^5=\square$ である。 [14 佛教大]

15 $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ の整数部分を a 、小数部分を b とするとき、 $\frac{a}{b}-\frac{b}{a+b-1}$ の値
 を求めよ。 [16 星薬大]

16 相異なる実数 α, β が $\begin{cases} \alpha^2+\sqrt{3}\beta=\sqrt{6} \\ \beta^2+\sqrt{3}\alpha=\sqrt{6} \end{cases}$ を満たすとき、 $\alpha+\beta=\square$,
 $\alpha\beta=\square$ であり、 $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\square$ である。 [16 近畿大]

B 問題

17 a は定数とする。3つの数 x, y, z は関係式 $xyz=2(xy+yz+zx)$,
 $x+y+z=a$ を満たす。

- (1) $(x-2)(y-2)(z-2)$ を a の式で表せ。
 (2) x, y, z のうち少なくとも1つが2であるとする。このとき、 a の値を求めよ。また、 $x^3+y^3+z^3$ の値を求めよ。 [11 岡山理科大]

ヒント **14** (1) 2次、3次の展開の公式を利用して、 $x^2+\frac{1}{x^2}$, $x^3+\frac{1}{x^3}$ を $x+\frac{1}{x}$ で表す。

16 α, β が相異なる実数であるから $\alpha-\beta \neq 0$

17 (2) x, y, z のうち少なくとも1つが2であるとき $(x-2)(y-2)(z-2)=0$

3 1次不等式

基本問題

- 18 (1) 不等式 $\frac{3(x-1)}{2} \leq 2(3x+1)$ を解け。 [16 東邦大]
 (2) 1次不等式 $0.3x-5 \geq 1-1.2x$ の解を求めよ。 [15 北見工大]

ポイントチェック

- 19 2つの不等式 $-x < 2(x+9)$, $\frac{3x-4}{6} < -2x+7$ を同時に満たす整数 x の値をすべて求めよ。 [12 鶴見大]



連立不等式の整数解 連立不等式の解は、それぞれの不等式の解の共通範囲。まず不等式を解き、その解のうち、整数であるものを考える。

- *20 (1) 不等式 $|2x-1| < 9$ を解け。 [11 千葉工大]
 (2) 不等式 $|2x+1| > 9$ を解け。 [20 岡山理科大]



絶対値を含む不等式 $c > 0$ のとき、
 不等式 $|x| < c$ の解は $-c < x < c$, 不等式 $|x| > c$ の解は $x < -c, c < x$

- *21 お菓子を子どもに分けたい。お菓子は、1人に7個ずつ分けると36個余り、16個ずつ分けると最後の1人に不足が生ずるという。お菓子の個数を x 個、子どもの人数を y 人とおくと $x=7y+\square$, $0 \leq x-1\square(y-1) < 16$ である。
 x, y はともに自然数であることに注意すると、 $(x, y) = \square$ である。

[類 12 敬愛大]



1次不等式を利用する文章題 求めたいものを x, y などの文字でおき、問題文の条件から不等式を作る。あとは不等式を解き、問題に適しているものを解とすればよい。

A 問題

- *22 (1) a, b は定数で $a > 0, b > 0$ とする。不等式 $ax \leq -2x+3 \leq bx+2$ の解が $\frac{1}{10} \leq x \leq \frac{1}{5}$ であるとき、 a, b の値を求めよ。 [09 金沢工大]

- (2) a を実数の定数とする。
 不等式 $5x+3 \geq x+a$ ……①, $x-2 \geq 3x-a$ ……② について、①を満たす x のうち、最小の整数が2である a の値の範囲は $\square < a \leq \square$ である。
 さらに①, ②を同時に満たす x のうち、整数が2だけである a の値の範囲は $\square < a < \square$ である。 [20 昭和女子大]

- *23 (1) 不等式 $|5x-41| < 2x+1$ を満たす整数 x の最大値と最小値を求めよ。 [12 明治大]
 (2) 不等式 $2|x-2|+|x-1| < 3$ を解け。 [13 甲南大]

- 24 AさんとBさん合わせて52本のボールペンを持っている。いま、AさんがBさんに自分が持っているボールペンのちょうど $\frac{1}{3}$ をあげてもまだAさんの方が多く、さらに3本あげるとBさんの方が多くなる。Aさんが初めに持っていたボールペンの本数を求めよ。 [06 国士館大]

B 問題

- *25 k を実数の定数とする。2つの不等式

$$\begin{cases} |x-1| < 6 \\ |x-k| < 2 \end{cases}$$
 をともに満たす実数 x が存在するような k の値の範囲を求めよ。 [12 金沢工大]



- 22 (1) $ax \leq -2x+3, -2x+3 \leq bx+2$ をそれぞれ解く。
 (2) ②を満たす x のうち、最大の整数が2である場合を考える。
 23 (2) 3つの場合に分けて考える。
 25 まず不等式 $|x-1| < 6, |x-k| < 2$ をそれぞれ解く。
 その解を数直線上に表して考えるとわかりやすい。

1. 次の式を因数分解せよ。

- (1) $(x^2+x-5)(x^2+x-7)+1$
$$\begin{aligned} &= (x^2+x)^2 - 12(x^2+x) + 36 \\ &= (x^2+x-6)^2 \\ &= \{(x+3)(x-2)\}^2 \\ &= (x+3)^2(x-2)^2 \end{aligned}$$
- (2) $9b^2+3ab-2a-4=(3b-2)a+(3b+2)(3b-2)$
$$\begin{aligned} &= (3b-2)\{a+(3b+2)\} \\ &= (a+3b+2)(3b-2) \end{aligned}$$
- (3) $a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+2abc$
$$\begin{aligned} &= (b+c)a^2 + (b^2+2bc+c^2)a + b^2c+bc^2 \\ &= (b+c)a^2 + (b+c)^2a + (b+c)bc \\ &= (b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\} \\ &= (b+c)(a+b)(a+c) \\ &= (a+b)(b+c)(c+a) \end{aligned}$$

2. 次の に最も適する語句を (ア)～(工) から選べ。 x, y は実数とする。

- (1) $x < 1$ は $x \leq 1$ であるための 。
(2) $x < y$ は $x^4 < y^4$ であるための 。
(3) $xy+1=x+y$ は x, y のうち少なくとも 1 つは 1 であるための 。
(4) $\triangle ABC$ において、 $\angle A < 90^\circ$ は、 $\triangle ABC$ が鋭角三角形であるための 。
(ア) 必要十分条件である (イ) 必要条件であるが十分条件ではない
(ウ) 十分条件であるが必要条件ではない (工) 必要条件でも十分条件でもない
(1) $x < 1 \implies x \leq 1$ は明らかに真。
 $x \leq 1 \implies x < 1$ は偽。 (反例) $x = 1$
したがって (ウ)
(2) $x < y \implies x^4 < y^4$ は偽。 (反例) $x = -1, y = 0$
 $x^4 < y^4 \implies x < y$ は偽。 (反例) $x = 0, y = -1$
したがって (エ)
(3) $xy+1=x+y \iff (x-1)(y-1)=0$
 $\iff x, y$ のうち少なくとも 1 つは 1 は真。
したがって (ア)
(4) $\triangle ABC$ において、 $\angle A < 90^\circ \implies \triangle ABC$ が鋭角三角形 は偽。
(反例) $\angle A = 30^\circ < 90^\circ, \angle B = 100^\circ, \angle C = 50^\circ$
 $\triangle ABC$ が鋭角三角形 $\implies \angle A < 90^\circ$ は真。
したがって (イ)

3. $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ のとき、次の式の値を求めよ。

- (1) a^2-a-1 (2) $a^4+a^3+a^2+a+1$
(1) $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ から $2a-1=\sqrt{5}$ 両辺を 2 乗して $(2a-1)^2=5$
よって $4a^2-4a-4=0$ ゆえに $a^2-a-1=0$
(2) (1) から $a^2=a+1$
よって $a^3=a^2a=(a+1)a=a^2+a=(a+1)+a=2a+1,$
 $a^4=a^3a=(2a+1)a=2a^2+a=2(a+1)+a=3a+2$
したがって $a^4+a^3+a^2+a+1$
 $= (3a+2)+(2a+1)+(a+1)+a+1$
 $= 7a+5=7 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}+5=\frac{17+7\sqrt{5}}{2}$

4. k を $k > 2$ を満たす定数とする。このとき、 x についての不等式 $5-x \leq 4x < 2x+k$ の解は $\supset \square$ である。また、不等式 $5-x \leq 4x < 2x+k$ を満たす整数 x がちょうど 5 つ存在するような定数 k の値の範囲は $\supset \square$ である。

$$\begin{cases} 5-x \leq 4x \\ 4x < 2x+k \end{cases}$$

$5-x \leq 4x$ から $-5x \leq -5$ よって $x \geq 1$ …… ①

$4x < 2x+k$ から $2x < k$ よって $x < \frac{k}{2}$ …… ②

$k > 2$ であるから、①、② の共通範囲を求めて $\supset 1 \leq x < \frac{k}{2}$

また、これを満たす整数 x がちょうど 5 つ存在するとき、その整数 x は $x=1, 2, 3, 4, 5$

ゆえに $5 < \frac{k}{2} \leq 6$ すなわち $\supset 10 < k \leq 12$

5. (1) 不等式 $a(x+1) > x+a^2$ を解け。ただし、 a は定数とする。
(2) 不等式 $ax < 4-2x < 2x$ の解が $1 < x < 4$ であるとき、定数 a の値を求めよ。

- (1) 与式から $(a-1)x > a(a-1)$ …… ①
- [1] $a-1 > 0$ すなわち $a > 1$ のとき $x > a$
[2] $a-1 = 0$ すなわち $a = 1$ のとき ① は $0 \cdot x > 0$
これを満たす x の値はない。
[3] $a-1 < 0$ すなわち $a < 1$ のとき $x < a$
- よって $\begin{cases} a > 1 \text{ のとき } x > a \\ a = 1 \text{ のとき } \text{解はない} \\ a < 1 \text{ のとき } x < a \end{cases}$

(2) $4-2x < 2x$ から $-4x < -4$ よって $x > 1$
ゆえに、解が $1 < x < 4$ となるための条件は、 $ax < 4-2x$ …… ① の解が $x < 4$ となることである。
① から $(a+2)x < 4$ …… ②

[1] $a+2 > 0$ すなわち $a > -2$ のとき、② から $x < \frac{4}{a+2}$

よって $\frac{4}{a+2} = 4$ ゆえに $4 = 4(a+2)$

よって $a = -1$ これは $a > -2$ を満たす。

[2] $a+2 = 0$ すなわち $a = -2$ のとき、② は $0 \cdot x < 4$
よって、解はすべての実数となり、条件は満たされない。

[3] $a+2 < 0$ すなわち $a < -2$ のとき、② から $x > \frac{4}{a+2}$

このとき条件は満たされない。

[1]～[3] から $a = -1$

以下の問いでは解決過程も採点対象である。
根拠や記述が不十分な場合は減点対象となる。

6. $x = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}, y = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ のとき、 $x+y = \supset \square$, $xy = \supset \square$ であるから、
 $x^2+y^2 = \supset \square$, $x^3+y^3 = \supset \square$, $x^4+y^4 = \supset \square$, $x^5+y^5 = \supset \square$ となる。

(ア) $x+y = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$
 $= \frac{(3-2\sqrt{6}+2) + (3+2\sqrt{6}+2)}{3-2} = 10$

(イ) $xy = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = 1$

(ウ) $x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 10^2 - 2 \cdot 1 = 98$

(エ) $x^3+y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 10^3 - 3 \cdot 1 \cdot 10 = 970$

別解 $x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2) = 10 \cdot (98-1) = 970$

(オ) $x^4+y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 = (x^2+y^2)^2 - 2(xy)^2$

(イ), (ウ) の結果から $x^4+y^4 = 98^2 - 2 \cdot 1^2 = 9602$

(カ) $x^5+y^5 = (x^2+y^2)(x^3+y^3) - x^2y^3 - x^3y^2$
 $= (x^2+y^2)(x^3+y^3) - (x+y)(xy)^2$

(ア)～(エ) の結果から $x^5+y^5 = 98 \cdot 970 - 10 \cdot 1^2 = 95050$

別解 $x^5+y^5 = (x+y)(x^4+y^4) - xy^4 - x^4y$
 $= (x+y)(x^4+y^4) - xy(x^3+y^3)$

(ア), (イ), (エ), (オ) の結果から $x^5+y^5 = 10 \cdot 9602 - 1 \cdot 970 = 95050$

7. 不等式 $|x-1|+2|x-3|\leq 11$ を解け。

(1) [1] $x<1$ のとき、不等式は $-(x-1)-2(x-3)\leq 11$

よって $x\geq -\frac{4}{3}$

$x<1$ との共通範囲は $-\frac{4}{3}\leq x<1$ …… ①

[2] $1\leq x<3$ のとき、不等式は $x-1-2(x-3)\leq 11$

よって $x\geq -6$

$1\leq x<3$ との共通範囲は $1\leq x<3$ …… ②

[3] $3\leq x$ のとき、不等式は $x-1+2(x-3)\leq 11$

よって $x\leq 6$

$3\leq x$ との共通範囲は $3\leq x\leq 6$ …… ③

求める解は、①～③ を合わせた範囲で $-\frac{4}{3}\leq x\leq 6$

(2) [1] $x<7$ のとき、不等式は $-(x-7)-(x-8)<3$

よって $x>6$

$x<7$ との共通範囲は $6<x<7$ …… ①

[2] $7\leq x<8$ のとき、不等式は $(x-7)-(x-8)<3$

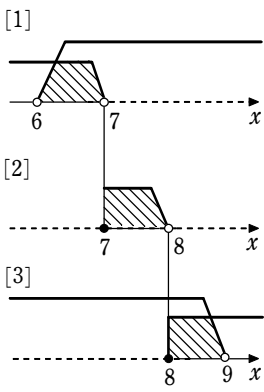
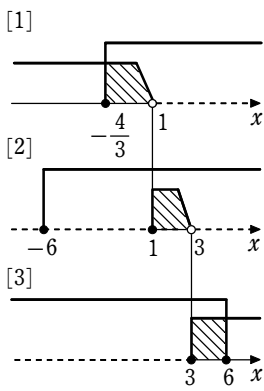
よって、 $1<3$ となり、常に成り立つから、[2] の場合の不等式の解は $7\leq x<8$ …… ②

[3] $8\leq x$ のとき、不等式は $(x-7)+(x-8)<3$

よって $x<9$

$8\leq x$ との共通範囲は $8\leq x<9$ …… ③

求める解は、①～③ を合わせた範囲で $6<x<9$



8. (1) a, b が有理数のとき、 $a+b\sqrt{2}=0$ ならば $a=b=0$ であることを証明せよ。ただし、 $\sqrt{2}$ は無理数である。

(2) 等式 $(2+3\sqrt{2})x+(1-5\sqrt{2})y=13$ を満たす有理数 x, y の値を求めよ。

(1) $a+b\sqrt{2}=0$ であって $b\neq 0$ である有理数 a, b がある、と仮定する。

$b\neq 0$ である有理数 b があるとする、 $a+b\sqrt{2}=0$ から

$$\sqrt{2}=-\frac{a}{b} \quad \text{…… ①}$$

a, b は有理数であるから、① の右辺は有理数であるが、これは $\sqrt{2}$ が無理数であることと矛盾する。

したがって 「 a, b が有理数であるとき、 $a+b\sqrt{2}=0$ ならば $b=0$ 」

$a+b\sqrt{2}=0$ であって $b=0$ のとき、 $a=0$ であるから、

a, b が有理数のとき

$a+b\sqrt{2}=0$ ならば $a=b=0$ である。

(2) 与式を変形して $2x+y-13+(3x-5y)\sqrt{2}=0$

x, y が有理数のとき、 $2x+y-13, 3x-5y$ も有理数であり、 $\sqrt{2}$ は無理数であるから、(1) により $2x+y-13=0$ …… ①, $3x-5y=0$ …… ②

①, ② を連立して解くと $x=5, y=3$

場合分けの意味の違いについて

5(1)の「不等式 $a(x+1)>x+a^2$ を解け。」という問題は、定数 a の値によって、不等式の解が異なる。定数 a がどんな値なのかわからない以上は、すべてのケースを答える必要

がある。そのために、定数 a によって場合分けをして、
$$\begin{cases} a>1 \text{ のとき} & x>a \\ a=1 \text{ のとき} & \text{解はない} \\ a<1 \text{ のとき} & x<a \end{cases}$$

と書いたものすべてがこの不等式の解となる。

5(2)の問題では、不等式 $ax<4-2x<2x$ の解自体は、(1)と同様に定数 a の値により異な

り、
$$\begin{cases} a>-2 \text{ のとき} & x<\frac{4}{a+2} \\ a=-2 \text{ のとき} & \text{すべての実数} \\ a<-2 \text{ のとき} & x>\frac{4}{a+2} \end{cases}$$

等式の解が「 $1<x<4$ であるとき、定数 a の値」であり、この不等式の解ではない。

条件をみたま a を調べる段階では、当然場合分けをしなければいけないが、最終的には

条件をみたま a は何かということであり、
$$\begin{cases} a>-2 \text{ のとき} & a=-1 \\ a=-2 \text{ のとき} & \text{存在しない} \\ a<-2 \text{ のとき} & \text{存在しない} \end{cases}$$

誤りであり、「 $a=-1$ 」が問題に対する解答となる。

7 は、「不等式 $|x-1|+2|x-3|\leq 11$ を解け」という問題である。不等式を解けというのは、不等式を満たす x の範囲（不等式の解）を求めよということである。今回は、絶対値が含まれているためにこのままでは処理ができない。そこで、調べる x の範囲を一端3つに分けて、絶対値を外して調べている。

絶対値の外した不等式をまずは解くが、その解がそのまま元の不等式の解（条件をみたま x の範囲）になるわけではない。各々のケースのように絶対値を外せるのはあくまでその範囲内のみの話であるので、出てきた不等式の解と、絶対値をそのように外せる x の範囲の共通部分のみが、元の不等式の解となる。

また、3つにわけて調べて出てきたものを
$$\begin{cases} x<1 \text{ のとき} & -\frac{4}{3}\leq x<1 \\ 1\leq x<3 \text{ のとき} & 1\leq x<3 \\ x\geq 3 \text{ のとき} & 3\leq x\leq 6 \end{cases}$$

意味を分かっている。この3つの場合分けはあくまで絶対値を外す都合で、いきなり実数全体を調査するのではなく、一端調査区間を限定して調べただけである。問題で問われているのは「結局 不等式を満たす x の範囲（不等式の解）はどこなのか？」ということであり、最終的にまとめなければならない。

背理法について

背理法は命題の結論の否定を成立すると仮定し、そこから矛盾を導くことで命題が真であるということを証明する方法である。

8の問題で、圧倒的に多い誤答が「 $a\neq 0$ かつ $b\neq 0$ 」と仮定して背理法を実行しようとする答案である。このように仮定して矛盾が生じた際に背理法で導かれる結論は、「 $a\neq 0$ かつ $b\neq 0$ 」の否定である「 $a=0$ または $b=0$ 」であり、「 $a=b=0$ 」ではない。今回の解答のポイントは、まずは「 $b=0$ 」であることを背理法を用いて「 $b\neq 0$ 」の仮定から矛盾を導いて示した後に、「 $a=0$ を $b=0$ から導く」と2段階に分けて示すことにある。論理を考えず、何となくそれっぽいことを書いても証明では何の意味も為さない。背理法では、結論を何にしているのかを強く意識すること。

前提条件の確認

定理や公式を用いる際には前提条件のチェックが必要不可欠である。特に、問題の中で誘導があり前問の事実を使う場合には、出題者が最も注目しているポイントであり、他の問題以上に意識して答案に起こさなければならない。8の問題では(1)の事実を使って(2)を求めなさいということである。(1)で示した事実は「 a, b が有理数のとき、 $a+b\sqrt{2}=0$ ならば $a=b=0$ である」ということで、前提条件は「 a, b が有理数」ということである。(2)において a, b に相当するのは「 $a=2x+y-13, b=3x-5y$ 」であるから、言及すべきは「 $2x+y-13, 3x-5y$ も有理数」である。しっかりと出題者と会話ができるようになってください。出題者が寂しくて泣いています。

$$\begin{aligned}
 (2) \text{ (与式)} &= 2x^2 + (3y+1)x - (2y^2 - 7y + 3) \\
 &= 2x^2 + (3y+1)x - (y-3)(2y-1) \\
 &= (x + (2y-1))(2x - (y-3)) \\
 &= (x + 2y - 1)(2x - y + 3) \\
 &\quad \begin{array}{r} 1 \quad \quad 2y-1 \quad \rightarrow 4y-2 \\ 2 \quad \quad -(y-3) \quad \rightarrow -y+3 \\ \hline 2 \quad -(y-3)(2y-1) \quad 3y+1 \end{array}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \text{ (与式)} &= a^2b - ab^2 + b^2c - bc^2 + c^2a - ca^2 \\
 &= (b-c)a^2 - (b^2-c^2)a + (b^2c - bc^2) \\
 &= (b-c)a^2 - (b+c)(b-c)a + bc(b-c) \\
 &= (b-c)\{a^2 - (b+c)a + bc\} \\
 &= (b-c)(a-b)(a-c) \\
 &= -(a-b)(b-c)(c-a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \text{ (与式)} &= (x^4 - 2x^2 + 1) - 16x^2 = (x^2 - 1)^2 - (4x)^2 \\
 &= \{(x^2 - 1) + 4x\}\{(x^2 - 1) - 4x\} \\
 &= (x^2 + 4x - 1)(x^2 - 4x - 1)
 \end{aligned}$$

$$8 \quad (1) \text{ (与式)} = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2 = 2\sqrt{6}$$

$$\begin{aligned}
 \text{よって} &\quad \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}} \\
 &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}{(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})} \\
 &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}{2\sqrt{6}} \\
 &= \frac{\sqrt{6}(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})}{2 \cdot 6} \\
 &= \frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - \sqrt{30}}{12}
 \end{aligned}$$

$$(2) \text{ (ア)} \text{ (与式)} = \sqrt{28 + 2\sqrt{25 \times 3}} = \sqrt{25} + \sqrt{3} = 5 + \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned}
 (イ) \text{ (与式)} &= \sqrt{\frac{54 - 2\sqrt{49 \times 5}}{2}} \\
 &= \frac{\sqrt{49} - \sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{7 - \sqrt{5}}{\sqrt{2}} \\
 &= \frac{7\sqrt{2} - \sqrt{10}}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad &\sqrt{a^2} - 2\sqrt{a^2 - 2a + 1} \\
 &= \sqrt{a^2} - 2\sqrt{(a-1)^2} \\
 &= |a| - 2|a-1|
 \end{aligned}$$

$$[1] \quad a < 0 \text{ のとき} \quad |a| - 2|a-1| = (-a) - 2\{-(a-1)\} = a - 2$$

$$[2] \quad 0 \leq a < 1 \text{ のとき} \quad |a| - 2|a-1| = a - 2\{-(a-1)\} = 3a - 2$$

$$[3] \quad 1 \leq a \text{ のとき} \quad |a| - 2|a-1| = a - 2(a-1) = -a + 2$$

$$\begin{aligned}
 9 \quad &(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\
 &= \{a+(b+c)\}\{a^2-(b+c)a+b^2-bc+c^2\} \\
 &= a^3 + \{(b+c) - (b+c)\}a^2 \\
 &\quad + \{-(b+c)^2 + (b^2-bc+c^2)\}a \\
 &\quad + (b+c)(b^2-bc+c^2) \\
 &= a^3 - 3bca + b^3 + c^3 = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\
 \text{また} \quad &8x^2 + 27y^3 + 18xy - 1 \\
 &= (2x)^2 + (3y)^3 + (-1)^3 - 3 \cdot 2x \cdot 3y \cdot (-1) \\
 \text{よって, (ア) から} &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &8x^2 + 27y^3 + 18xy - 1 \\
 &= (2x + 3y - 1)\{(2x)^2 + (3y)^2 + (-1)^2 \\
 &\quad - 2x \cdot 3y - 3y \cdot (-1) - (-1) \cdot 2x\} \\
 &= (2x + 3y - 1)(4x^2 + 9y^2 + 1 - 6xy + 3y + 2x) \\
 &= (2x + 3y - 1)(4x^2 - 6xy + 9y^2 + 2x + 3y + 1)
 \end{aligned}$$

$$10 \quad (1) \text{ (与式)} = (x+y)^2 - 2xy = \left(\frac{5}{6}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{13}{36}$$

$$(2) \text{ (与式)} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{13}{36} \div \frac{1}{6} = \frac{13}{6}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \text{ (与式)} &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) \\
 &= \left(\frac{5}{6}\right)^3 - 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{35}{216}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{別解} \text{ (与式)} &= (x+y)(x^2 - xy + y^2) \\
 &= (x+y)\{(x^2 + y^2) - xy\} \\
 &= \frac{5}{6} \left\{ \frac{13}{36} - \frac{1}{6} \right\} = \frac{35}{216}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11 \quad x+y &= \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} \\
 &= \frac{4(\sqrt{6} - \sqrt{2}) + 4(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})} = \frac{8\sqrt{6}}{6-2} \\
 &= 2\sqrt{6},
 \end{aligned}$$

$$xy = \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \cdot \frac{4}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{16}{6-2} = 4$$

したがって

$$\begin{aligned}
 x^2 + xy + y^2 &= (x+y)^2 - xy = (2\sqrt{6})^2 - 4 = 20, \\
 x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 &= (x+y)^3 - 2xy(x+y) \\
 &= (2\sqrt{6})^3 - 2 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{6} \\
 &= 32\sqrt{6}
 \end{aligned}$$

$$12 \quad (1) \quad 3^2 < 14 < 4^2 \text{ より } 3 < \sqrt{14} < 4$$

$$\text{よって } a=3, \quad b=\sqrt{14}-a=\sqrt{14}-3$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \frac{1}{b} &= \frac{1}{\sqrt{14}-3} = \frac{\sqrt{14}+3}{(\sqrt{14}-3)(\sqrt{14}+3)} \\
 &= \frac{\sqrt{14}+3}{5}
 \end{aligned}$$

$$3 < \sqrt{14} < 4 \text{ より } 6 < \sqrt{14} + 3 < 7$$

$$\text{よって } \frac{6}{5} < \frac{\sqrt{14}+3}{5} < \frac{7}{5}$$

$$\frac{6}{5} = 1.2, \frac{7}{5} = 1.4 \text{ であるから } c=1$$

$$\text{ゆえに } d = \frac{\sqrt{14}+3}{5} - c = \frac{\sqrt{14}-2}{5}$$

$$13 \quad \frac{x+y}{3} = \frac{y+z}{6} = \frac{z+x}{7} = k \text{ とおくと,}$$

$$k \neq 0 \text{ で } x+y=3k \quad \cdots \textcircled{1},$$

$$y+z=6k \quad \cdots \textcircled{2},$$

$$z+x=7k \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} \text{ から } 2(x+y+z) = 16k$$

$$\text{よって } x+y+z=8k \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{4} - \textcircled{2}, \textcircled{4} - \textcircled{3}, \textcircled{4} - \textcircled{1} \text{ から, それぞれ}$$

$$x=2k, y=k, z=5k$$

$$\begin{aligned} \text{よって } \frac{x^3+y^3+z^3}{xyz} &= \frac{(2k)^3+k^3+(5k)^3}{2k \cdot k \cdot 5k} \\ &= \frac{134k^3}{10k^3} = \frac{67}{5} \end{aligned}$$

$$14 \quad (1) \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2x \cdot \frac{1}{x}$$

$$= (2\sqrt{7})^2 - 2 = {}^{r}26,$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= (2\sqrt{7})^3 - 3 \cdot 2\sqrt{7} = {}^{r}50\sqrt{7},$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2x^2 \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$= 26^2 - 2 = {}^{r}674,$$

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= 26 \cdot 50\sqrt{7} - 2\sqrt{7} = {}^{r}1298\sqrt{7}$$

$$\text{別解 (1)} \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(x^2 - x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right) \left\{ \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 1 \right\}$$

$$= 2\sqrt{7}(26-1) = {}^{r}50\sqrt{7}$$

$$(2) \quad a+b=-1 \text{ であるから}$$

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$$

$$= (-1)^3 - 3ab \cdot (-1) = -1 + 3ab$$

$$a^3+b^3=-19 \text{ であるから } -1+3ab=-19$$

$$\text{よって } ab=-6$$

$$\text{ゆえに } a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$$

$$= (-1)^2 - 2 \cdot (-6) = {}^{r}13$$

$$\text{よって } a^5+b^5=(a^2+b^2)(a^3+b^3)-a^2b^2(a+b)$$

$$= 13 \cdot (-19) - (-6)^2 \cdot (-1)$$

$$= {}^{r}-211$$

15

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{7+2\sqrt{12}}$$

$$= \sqrt{(4+3)+2\sqrt{4 \cdot 3}}$$

$$= \sqrt{4} + \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}$$

$$1 < \sqrt{3} < 2 \text{ であるから } 3 < 2 + \sqrt{3} < 4$$

$$\text{よって } a=3,$$

$$b=(2+\sqrt{3})-a=(2+\sqrt{3})-3$$

$$= \sqrt{3}-1$$

$$\text{ゆえに } \frac{a}{b} = \frac{b}{a+b-1}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}-1}{3+(\sqrt{3}-1)-1}$$

$$= \frac{3(\sqrt{3}+1)-(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}+3-(3-2\sqrt{3}+1)}{3-1} = \frac{5\sqrt{3}-1}{2}$$

$$16 \quad \alpha^2 + \sqrt{3}\beta = \sqrt{6} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\beta^2 + \sqrt{3}\alpha = \sqrt{6} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ より } \alpha^2 - \beta^2 - \sqrt{3}(\alpha - \beta) = 0$$

$$\text{整理すると } (\alpha - \beta)(\alpha + \beta - \sqrt{3}) = 0$$

$$\alpha \neq \beta \text{ より, } \alpha - \beta \neq 0 \text{ であるから}$$

$$\alpha + \beta - \sqrt{3} = 0$$

$$\text{したがって } \alpha + \beta = {}^{r}\sqrt{3}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{ より } \alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{3}(\alpha + \beta) = 2\sqrt{6}$$

$$\text{よって } (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + \sqrt{3}(\alpha + \beta) = 2\sqrt{6}$$

$$\text{ゆえに } (\sqrt{3})^2 - 2\alpha\beta + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{6}$$

$$\text{したがって } \alpha\beta = {}^{r}3 - \sqrt{6}$$

$$\text{また } \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$

$$= \frac{(\sqrt{3})^2 - 2(3 - \sqrt{6})}{3 - \sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6} - 3}{3 - \sqrt{6}}$$

$$= \frac{(2\sqrt{6} - 3)(3 + \sqrt{6})}{(3 - \sqrt{6})(3 + \sqrt{6})}$$

$$= \frac{3 + 3\sqrt{6}}{9 - 6} = {}^{r}1 + \sqrt{6}$$

$$17 \quad (1) \quad (x-2)(y-2)(z-2)$$

$$= (xy-2x-2y+4)(z-2)$$

$$= xyz - 2xy - 2zx + 4x - 2yz + 4y + 4z - 8$$

$$= xyz - 2(xy + yz + zx) + 4(x + y + z) - 8$$

$$xyz = 2(xy + yz + zx), x + y + z = a \text{ であるから}$$

$$(x-2)(y-2)(z-2) = 4a - 8$$

$$(2) \quad x, y, z \text{ のうち少なくとも } 1 \text{ つが } 2 \text{ であるとき}$$

$$(x-2)(y-2)(z-2) = 0$$

$$\text{よって, (1) より } 4a - 8 = 0$$

$$\text{これを解くと } a=2$$

$$\text{また, このとき } x+y+z=a=2 \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned}
 & x^3 + y^3 + z^3 \\
 &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) + 3xyz \\
 &= 2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \\
 &\quad + 3 \cdot 2(xy+yz+zx) \\
 &= 2(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx) \\
 &= 2(x+y+z)^2 = 2 \cdot 2^2 = 8
 \end{aligned}$$

18 (1) 両辺に2を掛けて $3(x-1) \leq 4(3x+1)$
すなわち $3x-3 \leq 12x+4$

よって $-9x \leq 7$ ゆえに $x \geq -\frac{7}{9}$

(2) 両辺に10を掛けて $3x-50 \geq 10-12x$
すなわち $15x \geq 60$ よって $x \geq 4$

19 $-x < 2(x+9)$ から $-x < 2x+18$
よって $-3x < 18$ ゆえに $x > -6$ ①

$\frac{3x-4}{6} < -2x+7$ の両辺に6を掛けると

$$3x-4 < -12x+42$$

よって $15x < 46$ ゆえに $x < \frac{46}{15}$ ②

①と②の共通範囲を求めると $-6 < x < \frac{46}{15}$

これを満たす整数 x の値は

$$-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

20 (1) $|2x-1| < 9$ から $-9 < 2x-1 < 9$
よって $-8 < 2x < 10$ ゆえに $-4 < x < 5$

(2) $|2x+1| > 9$ から $2x+1 < -9, 9 < 2x+1$
よって $x < -5, 4 < x$

21 1人に7個ずつ分けると36個余るから

$$x = 7y + 36 \quad \text{..... ①}$$

また、1人に16個ずつ分けると最後の1人に不足が生じるから

$$0 \leq x - 16(y-1) < 16$$

これに $x = 7y + 36$ を代入すると

$$0 \leq (7y+36) - 16(y-1) < 16$$

よって $0 \leq -9y + 52 < 16$

ゆえに $-52 \leq -9y < -36$

したがって $4 < y \leq \frac{52}{9}$

y は自然数であるから $y = 5$

このとき、①から $x = 7 \cdot 5 + 36 = 71$

したがって $(x, y) = (71, 5)$

22 (1) $ax \leq -2x+3$ から $(a+2)x \leq 3$

$a+2 > 0$ から $x \leq \frac{3}{a+2}$ ①

また、 $-2x+3 \leq bx+2$ から $1 \leq (b+2)x$

$b+2 > 0$ から $\frac{1}{b+2} \leq x$ ②

不等式の解は、①、②の共通範囲であるから

$$\frac{1}{b+2} \leq x \leq \frac{3}{a+2}$$

よって $\frac{1}{b+2} = \frac{1}{10}, \frac{3}{a+2} = \frac{1}{5}$

これを解いて $a = 13, b = 8$

(2) $5x+3 \geq x+a$ ① から $x \geq \frac{a-3}{4}$

$x-2 \geq 3x-a$ ② から $x \leq \frac{a-2}{2}$

①を満たす x のうち、最小の整数が2である a

の範囲は $1 < \frac{a-3}{4} \leq 2$

すなわち $7 < a \leq 11$ ③

また、②を満たす x のうち、最大の整数が2である a の範囲は

$$2 \leq \frac{a-2}{2} < 3$$

すなわち $6 \leq a < 8$ ④

③、④から、①、②を同時に満たす x のうち、

整数が2だけである a の値の範囲は

$$7 < a < 8$$

23 (1) [1] $5x-41 < 0$ すなわち $x < \frac{41}{5}$ のとき

不等式は $-(5x-41) < 2x+1$

これを解くと $x > \frac{40}{7}$

$x < \frac{41}{5}$ との共通範囲は $\frac{40}{7} < x < \frac{41}{5}$ ①

[2] $5x-41 \geq 0$ すなわち $x \geq \frac{41}{5}$ のとき

不等式は $5x-41 < 2x+1$

これを解くと $x < 14$

$x \geq \frac{41}{5}$ との共通範囲は $\frac{41}{5} \leq x < 14$ ②

不等式の解は、①と②を合わせた範囲で

$$\frac{40}{7} < x < 14$$

これを満たす整数 x の最大値は13、最小値は6

(2) [1] $x < 1$ のとき

不等式は $-2(x-2)-(x-1) < 3$

すなわち $3x > 2$ よって $x > \frac{2}{3}$

$x < 1$ との共通範囲は $\frac{2}{3} < x < 1$

[2] $1 \leq x < 2$ のとき

不等式は $-2(x-2)+(x-1) < 3$

すなわち $x > 0$

$1 \leq x < 2$ との共通範囲は $1 \leq x < 2$

内田碧 11-3 数学 解答

[3] $2 \leq x$ のとき

不等式は $2(x-2) + (x-1) < 3$

すなわち $3x < 8$

よって $x < \frac{8}{3}$

$2 \leq x$ との共通範囲は $2 \leq x < \frac{8}{3}$

[1] ~ [3] から、求める解は $\frac{2}{3} < x < \frac{8}{3}$

2.4 Aさんが初めて持っていたボールペンの本数を x 本とすると、Bさんが初めて持っていたボールペンの本数は $(52-x)$ 本
条件から

$$\begin{cases} x - \frac{1}{3}x > (52-x) + \frac{1}{3}x & \cdots \cdots ① \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - \frac{1}{3}x - 3 < (52-x) + \frac{1}{3}x + 3 & \cdots \cdots ② \end{cases}$$

① から $\frac{4}{3}x > 52$ よって $x > 39$ $\cdots \cdots ③$

② から $\frac{4}{3}x < 58$ よって $x < \frac{87}{2}$ $\cdots \cdots ④$

③ と ④ の共通範囲は $39 < x < \frac{87}{2}$

すなわち $39 < x < 43.5$

最初に AさんがBさんにあげるボールペンの本数 $\frac{x}{3}$ は整数であるから、 x は 3 の倍数である。

よって $x = 42$ したがって、42 本。

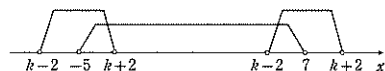
2.5 $|x-1| < 6$ から $-6 < x-1 < 6$

よって $-5 < x < 7$

$|x-k| < 2$ から $-2 < x-k < 2$

よって $k-2 < x < k+2$

与えられた連立不等式を満たす実数 x が存在するための条件は $-5 < k+2$ かつ $k-2 < 7$



よって $-7 < k < 9$

2.6 (1) $U = \{1, 3, 5, 8, 10, 13, 17\}$,

$A = \{1, 5, 8, 10\}$ から $\bar{A} = \{3, 13, 17\}$

これと $B = \{8, 10, 17\}$ から

$$\bar{A} \cup B = \{3, 8, 10, 13, 17\}$$

(2) 逆: 「 $x > 0$ または $y > 0$ ならば $x+y > 0$ 」

これは偽である。

(反例) $x = 1, y = -2$

対偶: 「 $x \leq 0$ かつ $y \leq 0$ ならば $x+y \leq 0$ 」

これは真である。

2.7 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}, B = \{3, 6, 9, 12\},$
 $C = \{2, 3, 5, 7\}$

(1) $A \cap C = \{3, 5, 7\}$

(2) $B \cup C = \{2, 3, 5, 6, 7, 9, 12\}$ であるから

$$A \cap (B \cup C) = \{3, 5, 7, 9\}$$

(3) $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 12\}$ であるから

$$\overline{A \cup B \cup C} = \{4, 8, 10, 11\}$$

(4) $A \cup C = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$ であるから

$$\overline{A \cup C} = \{4, 6, 8, 10, 11, 12\}$$

よって $B \cap (\overline{A \cup C}) = \{6, 12\}$

2.8 (1) 「 $x=3 \Rightarrow x^2=9$ 」は真である。

「 $x^2=9 \Rightarrow x=3$ 」は偽である。

(反例) $x = -3$

よって、 $x=3$ であることは、 $x^2=9$ であるための十分条件ではあるが、必要条件ではない。

(∇ (b))

(2) 「 $ab=0 \Rightarrow a=0$ かつ $b=0$ 」は偽である。

(反例) $a=0, b=1$

「 $a=0$ かつ $b=0 \Rightarrow ab=0$ 」は真である。

よって、 $ab=0$ であることは、 $a=0$ かつ $b=0$ であるための必要条件ではあるが、十分条件ではない。

(∇ (a))

(3) a, b は実数であるから

$$a^2 + b^2 - 2a - 2b + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a-1=0, b-1=0$$

$$\Leftrightarrow a=1, b=1$$

ゆえに、 $a^2 + b^2 - 2a - 2b + 2 = 0$ であることは、 $a=b=1$ であるための必要十分条件である。

(∇ (c))

2.9 (1) 命題 P の対偶は、次の命題である。

「 a, b, c がすべて奇数ならば、

$$a^2 + b^2 + c^2 \text{ は奇数である}」$$

(2) a, b, c がすべて奇数ならば、

$$a = 2p+1, b = 2q+1, c = 2r+1$$

(p, q, r は整数) と表される。

よって $a^2 + b^2 + c^2$

$$= (2p+1)^2 + (2q+1)^2 + (2r+1)^2$$

$$= 4p^2 + 4p + 1 + 4q^2 + 4q + 1 + 4r^2 + 4r + 1$$

$$= 2(2p^2 + 2p + 2q^2 + 2q + 2r^2 + 2r + 1) + 1$$

$2p^2 + 2p + 2q^2 + 2q + 2r^2 + 2r + 1$ は整数であるから、 $a^2 + b^2 + c^2$ は奇数である。

したがって、対偶が真であるから、命題 P も真である。