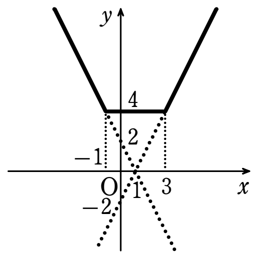
内田碧　12－1

1．関数 $y=|x+1|+|x-3|$ のグラフをかけ。

$x<-1$ のとき　$y=-(x+1)-(x-3)$
ゆえに　$y=-2x+2$
$-1\leqq x<3$ のとき　$y=(x+1)-(x-3)$
ゆえに　$y=4$
$3\leqq x$ のとき　$y=(x+1)+(x-3)$
ゆえに　$y=2x-2$
よって，グラフは右の図の実線部分。



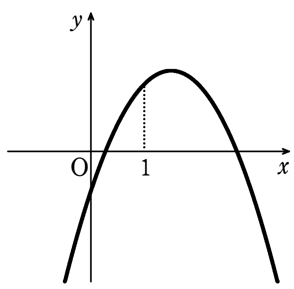
2．2 次関数のグラフが 3 点 $(-1,\ 16)$，$(4,\ -14)$，$(5,\ -8)$ を通るとき，その 2 次関数を求めよ。

求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする。
このグラフが 3 点 $(-1,\ 16)$，$(4,\ -14)$，$(5,\ -8)$ を通るから

$$\begin{cases} a-b+c=16 & \cdots\cdots ① \\ 16a+4b+c=-14 & \cdots\cdots ② \\ 25a+5b+c=-8 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

②−① から　$15a+5b=-30$　すなわち　$3a+b=-6$　……④
③−② から　$9a+b=6$　……⑤
④，⑤ を解いて　$a=2,\ b=-12$
よって，① から　$c=2$
したがって，求める 2 次関数は　$y=2x^2-12x+2$

3．2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが右の図のようになるとき，次の値の符号を調べよ。
(1)　a　(2)　b　(3)　c　(4)　b^2-4ac
(5)　$a+b+c$



(1)　グラフは上に凸であるから　$a<0$

(2)　$y=ax^2+bx+c$ の頂点の座標は　$\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$

頂点の x 座標が正であるから　$-\dfrac{b}{2a}>0$　よって　$\dfrac{b}{2a}<0$

(1) より，$a<0$ であるから　$b>0$

(3)　グラフは y 軸と $y<0$ の部分で交わるから　$c<0$

(4)　頂点の y 座標が正であるから　$-\dfrac{b^2-4ac}{4a}>0$

(1) より，$a<0$ であるから　$b^2-4ac>0$

(5)　$x=1$ のとき　$y=a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=a+b+c$
グラフより，$x=1$ のとき $y>0$ であるから　$a+b+c>0$

4．放物線 $y=x^2+ax+b$ を原点に関して対称移動し，更に x 軸方向に -1，y 軸方向に 8 だけ平行移動すると，放物線 $y=-x^2+5x+11$ が得られるという。このとき，定数 a，b の値を求めよ。

放物線 $y=x^2+ax+b$ を原点に関して対称移動した放物線の方程式は

$-y=(-x)^2+a(-x)+b$　すなわち　$y=-x^2+ax-b$

また，この放物線を更に x 軸方向に -1，y 軸方向に 8 だけ平行移動した放物線の方程式は　$y-8=-(x+1)^2+a(x+1)-b$　すなわち　$y=-x^2+(a-2)x+a-b+7$

これが $y=-x^2+5x+11$ と一致するから　$a-2=5,\ a-b+7=11$
これを解いて　$a=7,\ b=3$

別解　放物線 $y=-x^2+5x+11$ を x 軸方向に 1，y 軸方向に -8 だけ平行移動した放物線の方程式は

$y+8=-(x-1)^2+5(x-1)+11$　すなわち　$y=-x^2+7x-3$

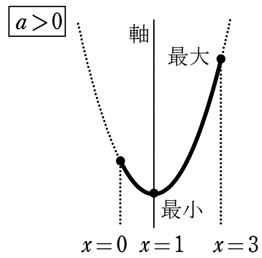
この放物線を，更に原点に関して対称移動した放物線の方程式は

$-y=-(-x)^2+7(-x)-3$　すなわち　$y=x^2+7x+3$

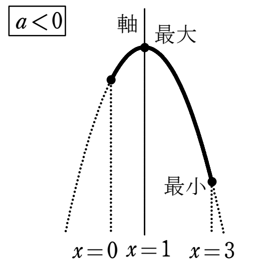
これが $y=x^2+ax+b$ と一致するから　$a=7,\ b=3$

5．定義域を $0\leqq x\leqq 3$ とする関数 $f(x)=ax^2-2ax+b$ の最大値が 9，最小値が 1 のとき，定数 a，b の値を求めよ。

関数の式を変形して　$f(x)=a(x-1)^2-a+b$
[1]　$a=0$ のとき，$f(x)=b$（一定）となり，条件を満たさない。
[2]　$a>0$ のとき，$f(x)$ のグラフは下に凸の放物線となり，
$0\leqq x\leqq 3$ の範囲で $f(x)$ は
$x=3$ で最大値 $f(3)=3a+b$，
$x=1$ で最小値 $f(1)=-a+b$
をとる。
したがって　$3a+b=9,\ -a+b=1$
これを解いて　$a=2,\ b=3$
これは $a>0$ を満たす。



[3]　$a<0$ のとき，$f(x)$ のグラフは上に凸の放物線となり，
$0\leqq x\leqq 3$ の範囲で $f(x)$ は
$x=1$ で最大値 $f(1)=-a+b$，
$x=3$ で最小値 $f(3)=3a+b$
をとる。
したがって　$-a+b=9,\ 3a+b=1$
これを解いて　$a=-2,\ b=7$
これは $a<0$ を満たす。



以上から
$a=2,\ b=3$ または $a=-2,\ b=7$

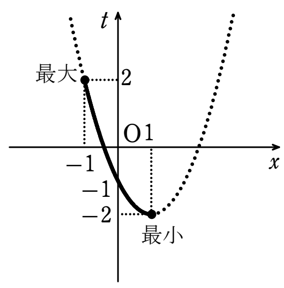
6．$x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$2x+y=8$ のとき，xy の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x，y の値を求めよ。

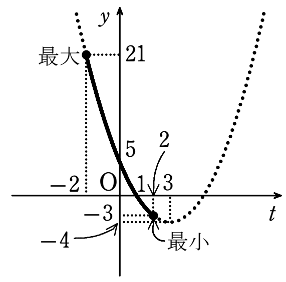
$2x+y=8$ から　$y=-2x+8$　……①
$y\geqq 0$ であるから　$-2x+8\geqq 0$　ゆえに　$x\leqq 4$
$x\geqq 0$ との共通範囲は　$0\leqq x\leqq 4$　……②
また　$xy=x(-2x+8)=-2x^2+8x$
$=-2(x^2-4x+2^2)+2\cdot 2^2$
$=-2(x-2)^2+8$
② の範囲において，xy は，$x=2$ で最大値 8 をとり，$x=0,\ 4$ で最小値 0 をとる。
① から，x の値に対応した y の値を求めて
$(x,\ y)=(2,\ 4)$ のとき最大値 8
$(x,\ y)=(0,\ 8)$，$(4,\ 0)$ のとき最小値 0

以下の問いでは解決過程も採点対象である。 根拠や記述が不十分な場合は減点対象となる。

7．$-1\leqq x\leqq 1$ のとき，関数 $y=(x^2-2x-1)^2-6(x^2-2x-1)+5$ の最大値，最小値を求めよ。

$x^2-2x-1=t$ とおくと
$t=(x-1)^2-2$
$-1\leqq x\leqq 1$ から　$-2\leqq t\leqq 2$　……①
y を t の式で表すと
$y=t^2-6t+5=(t-3)^2-4$
① の範囲において，y は
$t=-2$ で最大値 21,
$t=2$　で最小値 -3　をとる。
$t=-2$ のとき　$(x-1)^2-2=-2$
ゆえに　$(x-1)^2=0$
よって　$x=1$
$t=2$ のとき　$(x-1)^2-2=2$
ゆえに　$(x-1)^2=4$
よって　$x=-1,\ 3$
$-1\leqq x\leqq 1$ を満たす解は　$x=-1$
以上から　$x=1$ のとき最大値 21,
$x=-1$ のとき最小値 -3





8．a を定数とする。$a \leqq x \leqq a+2$ における関数 $f(x)=x^2-2x+2$ について，次のものを求めよ。

(1)　最大値

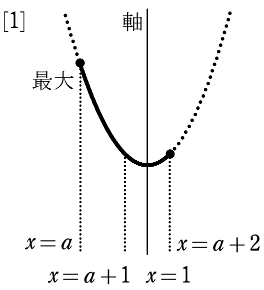
(2)　最大値を $M(a)$ とする。$M(a)$ を求めよ。

$$f(x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$$

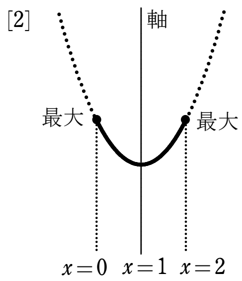
$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=1$

(1)　区間 $a \leqq x \leqq a+2$ の中央の値は　$a+1$

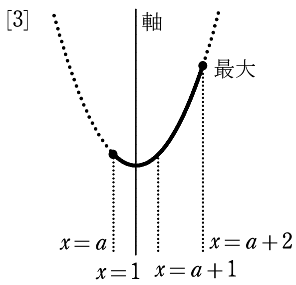
[1]　$a+1<1$ すなわち $a<0$ のとき
右のグラフから，$x=a$ で最大となる。
最大値は　$f(a)=a^2-2a+2$



[2]　$a+1=1$ すなわち $a=0$ のとき
右のグラフから，$x=0$，2 で最大となる。
最大値は　$f(0)=f(2)=2$



[3]　$a+1>1$ すなわち $a>0$ のとき
右のグラフから，$x=a+2$ で最大となる。
最大値は　$f(a+2)=(a+2)^2-2(a+2)+2$
$=a^2+2a+2$



以上から　$\begin{cases} a<0 \text{ のとき} & x=a \text{ で最大値 } a^2-2a+2 \\ a=0 \text{ のとき} & x=0,\ 2 \text{ で最大値 } 2 \\ a>0 \text{ のとき} & x=a+2 \text{ で最大値 } a^2+2a+2 \end{cases}$

(2)　(1)より

$M(a)=\begin{cases} a^2-2a+2 & (a \leqq 0) \\ a^2+2a+2 & (a>0) \end{cases}$

※　$M(a)=\begin{cases} a^2-2a+2 & (a<0) \\ a^2+2a+2 & (a \geqq 0) \end{cases}$　も可

9．関数 $y=x^2-2lx+l^2-2l$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ の最小値が 11 になるような正の定数 l の値を求めよ。

$y=x^2-2lx+l^2-2l$ を変形して

$y=(x-l)^2-2l$

[1]　$0<l \leqq 2$ のとき，$x=l$ で最小値 $-2l$ をとる。

$-2l=11$ とすると　　$l=-\dfrac{11}{2}$　　　これは $0<l \leqq 2$ を満たさない。

[2]　$2<l$ のとき，$x=2$ で最小値 $2^2-2l \cdot 2+l^2-2l$ つまり l^2-6l+4 をとる。

$l^2-6l+4=11$ とすると　　$l^2-6l-7=0$　　　これを解くと　　$l=-1,\ 7$

$2<l$ を満たすものは　　$l=7$

以上から，求める l の値は　　$l=7$

内田碧　12-2

$\boxed{1}$

次の 2 次不等式を解け。

(1)　$2x^2-x-4\geqq 0$　　　(2)　$4x\geqq 4x^2+1$

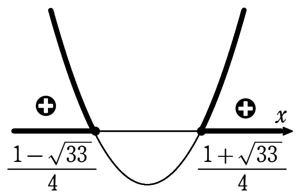
(3)　$\begin{cases} 2x^2-5x-3<0 \\ 3x^2-4x-4\leqq 0 \end{cases}$　　　(4)　$|x^2-2x-3|\geqq 3-x$

解説

(1)　$2x^2-x-4=0$ を解くと　　$x=\dfrac{1\pm\sqrt{33}}{4}$

よって，$2x^2-x-4\geqq 0$ の解は

$x\leqq\dfrac{1-\sqrt{33}}{4}$，$\dfrac{1+\sqrt{33}}{4}\leqq x$

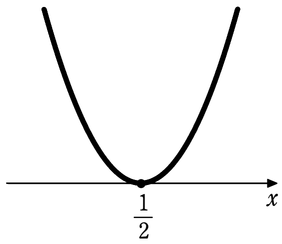


(2)　不等式から　　$4x^2-4x+1\leqq 0$

$4x^2-4x+1=(2x-1)^2$ であるから，

不等式は　　$(2x-1)^2\leqq 0$

よって，解は　　$x=\dfrac{1}{2}$



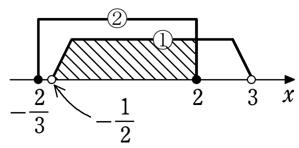
(3)　$2x^2-5x-3<0$ から　　$(2x+1)(x-3)<0$

よって　　$-\dfrac{1}{2}<x<3$　……①

$3x^2-4x-4\leqq 0$ から　　$(3x+2)(x-2)\leqq 0$

よって　　$-\dfrac{2}{3}\leqq x\leqq 2$　……②

①，② の共通範囲を求めて　　$-\dfrac{1}{2}<x\leqq 2$



(4)　$x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$ であるから

$x^2-2x-3\geqq 0$ の解は　　$x\leqq -1$，$3\leqq x$

$x^2-2x-3<0$ の解は　　$-1<x<3$

[1]　$x\leqq -1$，$3\leqq x$ のとき，不等式は

$x^2-2x-3\geqq 3-x$

ゆえに　　$x^2-x-6\geqq 0$

よって　　$(x+2)(x-3)\geqq 0$

したがって　　$x\leqq -2$，$3\leqq x$　……①

これは $x\leqq -1$，$3\leqq x$ を満たす。

[2]　$-1<x<3$ のとき，不等式は

$-(x^2-2x-3)\geqq 3-x$

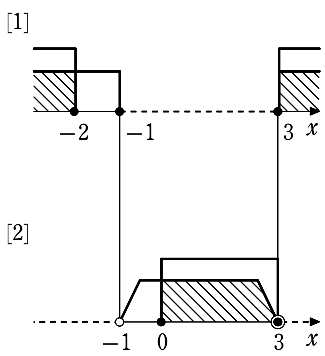
ゆえに　　$x^2-3x\leqq 0$

よって　　$x(x-3)\leqq 0$

したがって　　$0\leqq x\leqq 3$

$-1<x<3$ との共通範囲は　　$0\leqq x<3$　……②

求める解は，① と ② を合わせた範囲で　　$x\leqq -2$，$0\leqq x$



別解　不等式から　　$x^2-2x-3\leqq -(3-x)$　または　$3-x\leqq x^2-2x-3$

$x^2-2x-3\leqq -(3-x)$ を解くと　　$0\leqq x\leqq 3$　……①

$3-x\leqq x^2-2x-3$ を解くと　　$x\leqq -2$，$3\leqq x$　……②

求める解は，① と ② を合わせた範囲で　　$x\leqq -2$，$0\leqq x$

$\boxed{2}$

2 次不等式 $ax^2+bx-24\geqq 0$ の解が $x\leqq -2$，$4\leqq x$ であるように，
定数 a，b の値を定めよ。

解説

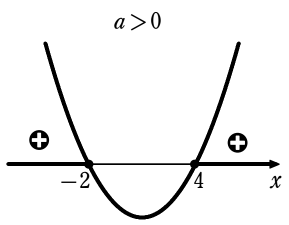
条件から，2 次関数 $y=ax^2+bx-24$ のグラフは，$x<-2$，$4<x$ のときだけ x 軸より上側にある。
すなわち，グラフは下に凸の放物線で 2 点 $(-2,\ 0)$，$(4,\ 0)$ を通るから

$a>0$，

$4a-2b-24=0$　……①，

$16a+4b-24=0$　……②

①，② を解いて　　$a=3$，$b=-6$



これは $a>0$ を満たす。

別解　$x\leqq -2$，$4\leqq x \iff (x+2)(x-4)\geqq 0 \iff x^2-2x-8\geqq 0$

$\iff 3x^2-6x-24\geqq 0$

$ax^2+bx-24\geqq 0$ と係数を比較して　　$a=3$，$b=-6$

$\boxed{3}$

2 次関数 $y=-x^2$ のグラフと直線 $y=-2x+k$ の共有点の個数を調べよ。
ただし，k は定数とする。

解説

$y=-x^2$ と $y=-2x+k$ から y を消去して　　$-x^2=-2x+k$

整理すると　　$x^2-2x+k=0$

判別式を D とすると　　$\dfrac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot k=1-k$

$D>0$　すなわち　$1-k>0$ となるのは

$k<1$

$D=0$　すなわち　$1-k=0$ となるのは

$k=1$

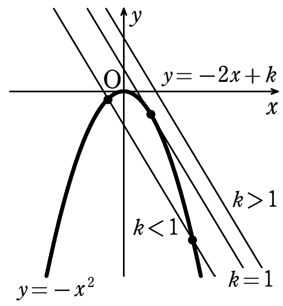
$D<0$　すなわち　$1-k<0$ となるのは

$k>1$

よって，求める共有点の個数は

$k<1$ のとき 2 個，$k=1$ のとき 1 個，

$k>1$ のとき 0 個



$\boxed{4}$

x についての不等式 $x^2-(a+1)x+a<0$，$3x^2+2x-1>0$ を同時に満たす整数 x がちょうど 3 つ存在するような定数 a の値の範囲を求めよ。

解説

$x^2-(a+1)x+a<0$ を解くと　　$(x-a)(x-1)<0$ から

$\left.\begin{array}{ll} a<1 \text{ のとき} & a<x<1 \\ a=1 \text{ のとき} & \text{解なし} \\ a>1 \text{ のとき} & 1<x<a \end{array}\right\}$　……①

$3x^2+2x-1>0$ を解くと　　$(x+1)(3x-1)>0$ から　　$x<-1$，$\dfrac{1}{3}<x$　……②

①，② を同時に満たす整数 x がちょうど 3 つ存在するのは，

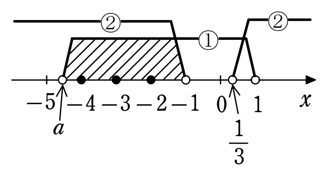
$a<1$　または　$a>1$　の場合である。

[1]　$a<1$ のとき

3 つの整数 x は

$x=-4$，-3，-2

よって　　$-5\leqq a<-4$

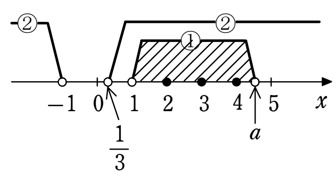


[2]　$a>1$ のとき

3 つの整数 x は

$x=2$，3，4

よって　　$4<a\leqq 5$



[1]，[2] から，求める a の値の範囲は

$-5\leqq a<-4$，$4<a\leqq 5$

内田碧　12-2

5

(1)　a は定数とする。次の方程式を解け。

$$2ax^2-(6a^2-1)x-3a=0$$

(2)　任意の実数 x に対して，不等式 $ax^2-2\sqrt{3}x+a+2\leqq 0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。

解説

(1)　[1]　$2a=0$ すなわち $a=0$ のとき，方程式は　$x=0$

すなわち，解は　$x=0$

[2]　$a\neq 0$ のとき，方程式から　$(x-3a)(2ax+1)=0$

よって　$x=3a,\ -\dfrac{1}{2a}$

したがって　$\begin{cases} a=0 \text{ のとき} & x=0 \\ a\neq 0 \text{ のとき} & x=3a,\ -\dfrac{1}{2a} \end{cases}$

(2)　$a=0$ のとき，不等式は $-2\sqrt{3}x+2\leqq 0$ となり，例えば $x=0$ のとき成り立たない。

$a\neq 0$ のとき，$ax^2-2\sqrt{3}x+a+2=0$ の判別式を D とすると，常に不等式が成り立つための必要十分条件は

$$a<0 \quad \text{かつ} \quad \frac{D}{4}=(-\sqrt{3})^2-a(a+2)\leqq 0$$

すなわち　$a<0$　かつ　$a^2+2a-3\geqq 0$

$a^2+2a-3\geqq 0$ から　$(a+3)(a-1)\geqq 0$　　よって　$a\leqq -3,\ 1\leqq a$

$a<0$ との共通範囲を求めて　$a\leqq -3$

6

$0\leqq x\leqq 8$ のすべての x の値に対して，不等式 $x^2-2mx+m+6>0$ が成り立つような定数 m の値の範囲を求めよ。

解説

求める条件は，$0\leqq x\leqq 8$ における $f(x)=x^2-2mx+m+6$ の最小値が正となることである。$f(x)=(x-m)^2-m^2+m+6$ であるから，軸は　直線 $x=m$

[1]　$m<0$ のとき，$f(x)$ は $0\leqq x\leqq 8$ で増加するから，最小値は　$f(0)=m+6$

ゆえに　$m+6>0$　　よって　$m>-6$

$m<0$ であるから　$-6<m<0$　……①

[2]　$0\leqq m\leqq 8$ のとき，最小値は　$f(m)=-m^2+m+6$

ゆえに　$-m^2+m+6>0$　すなわち　$m^2-m-6<0$

これを解くと，$(m+2)(m-3)<0$ から　$-2<m<3$

$0\leqq m\leqq 8$ であるから　$0\leqq m<3$　……②

[3]　$8<m$ のとき，$f(x)$ は $0\leqq x\leqq 8$ で減少するから，最小値は　$f(8)=-15m+70$

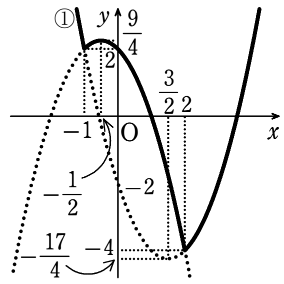
ゆえに，$-15m+70>0$ から　$m<\dfrac{14}{3}$　　これは $8<m$ を満たさない。

求める m の値の範囲は，①，② を合わせて　$-6<m<3$

7

k は定数とする。方程式 $|x^2-x-2|=2x+k$ の異なる実数解の個数を調べよ。

解説



$|x^2-x-2|=2x+k$ から　$|x^2-x-2|-2x=k$

$y=|x^2-x-2|-2x$ …… ① とする。

$x^2-x-2=(x+1)(x-2)$ であるから

$x^2-x-2\geqq 0$ の解は　$x\leqq -1,\ 2\leqq x$

$x^2-x-2<0$ の解は　$-1<x<2$

よって，① は $x\leqq -1,\ 2\leqq x$ のとき

$$y=(x^2-x-2)-2x=x^2-3x-2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{17}{4}$$

$-1<x<2$ のとき

$$y=-(x^2-x-2)-2x=-x^2-x+2=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$

ゆえに，① のグラフは右上の図の実線部分のようになる。

与えられた方程式の実数解の個数は，① のグラフと直線 $y=k$ の共有点の個数に等しい。これを調べて

$k<-4$ のとき 0 個；$k=-4$ のとき 1 個；$-4<k<2,\ \dfrac{9}{4}<k$ のとき 2 個；

$k=2,\ \dfrac{9}{4}$ のとき 3 個；$2<k<\dfrac{9}{4}$ のとき 4 個

8

方程式 $x^2+(2-a)x+4-2a=0$ が $-1<x<1$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

解説

判別式を D とし，$f(x)=x^2+(2-a)x+4-2a$ とする。

$f(-1)=-a+3,\ f(1)=-3a+7$

[1]　2 つの解がともに $-1<x<1$ の範囲にあるための条件は

$$\begin{cases} D=(2-a)^2-4\cdot 1\cdot(4-2a)\geqq 0 \ \cdots\cdots ① \\ \text{軸 } x=-\dfrac{2-a}{2} \text{ について} \quad -1<-\dfrac{2-a}{2}<1 \ \cdots\cdots ② \\ f(-1)=-a+3>0 \ \cdots\cdots ③,\ f(1)=-3a+7>0 \ \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

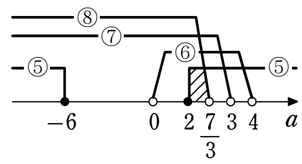
① から　$a^2+4a-12\geqq 0$　　よって　$(a-2)(a+6)\geqq 0$

ゆえに　$a\leqq -6,\ 2\leqq a$　……⑤

②～④ を解くと，解は順に

$0<a<4$ ……⑥，$a<3$ ……⑦，

$a<\dfrac{7}{3}$ ……⑧



⑤～⑧ の共通範囲は　$2\leqq a<\dfrac{7}{3}$

[2]　解の 1 つが $-1<x<1$，他の解が $x<-1$ または $1<x$ にあるための条件は

$f(-1)f(1)<0$　　ゆえに　$(-a+3)(-3a+7)<0$

よって　$(a-3)(3a-7)<0$　　ゆえに　$\dfrac{7}{3}<a<3$

[3]　解の 1 つが $x=-1$ のときは　$f(-1)=0$

よって　$-a+3=0$　　ゆえに　$a=3$

このとき，方程式は　$x^2-x-2=0$　　よって　$(x+1)(x-2)=0$

ゆえに，他の解は $x=2$ となり，条件を満たさない。

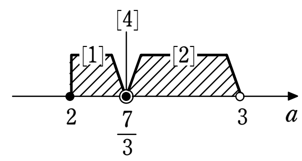
[4]　解の 1 つが $x=1$ のときは　$f(1)=0$

よって　$-3a+7=0$　　ゆえに　$a=\dfrac{7}{3}$

このとき，方程式は　$3x^2-x-2=0$

よって　$(x-1)(3x+2)=0$

ゆえに，他の解は $x=-\dfrac{2}{3}$ となり，条件を満たす。



[1]～[4] から　$2\leqq a<3$

1．次のデータは，ある都市のある年の月ごとの最高気温を並べたものである。

5，4，8，12，17，24，27，28，22，30，9，6（単位は ℃）

(1)　このデータの平均値を求めよ。

(2)　このデータの中で入力ミスが見つかった。30 ℃ となっている月の最高気温は正しくは 18 ℃ であった。この入力ミスを修正すると，このデータの平均値は修正前より何℃減少するか。

(3)　このデータの中で入力ミスが見つかった。正しくは 6 ℃ が 10 ℃，30 ℃ が 26 ℃ であった。この入力ミスを修正すると，このデータの平均値は ア$\boxed{}$ し，分散は イ$\boxed{}$ する。

ア$\boxed{}$，イ$\boxed{}$ に当てはまるものを次の①，②，③から選べ。

①　修正前より増加　②　修正前より減少　③　修正前と一致

解答　(1)　16 ℃　(2)　1 ℃　(3)（ア）③　（イ）②

(1)　$\frac{1}{12}(5+4+8+12+17+24+27+28+22+30+9+6)=16$（℃）

(2)　データの総和は 12 ℃ 減少するから，データの平均値は修正前より $\frac{12}{12}=1$（℃）減少する。

(3)（ア）$6+30=10+26$ であるから，データの総和は変化せず，平均値は修正前と一致する。

よって　③

（イ）(1)，(ア) より，修正後のデータの平均値は 16 ℃ であるから，修正した 2 つのデータの平均値からの偏差の 2 乗の和は

修正前：$(6-16)^2+(30-16)^2=296$

修正後：$(10-16)^2+(26-16)^2=136$

ゆえに，偏差の 2 乗の和は減少するから，分散は修正前より減少する。

よって　②

2．変量 x のデータの平均値 $\overline{x}$ が $\overline{x}=21$，分散 $s_x{}^2$ が $s_x{}^2=12$ であるとする。このとき，次の式によって得られる新しい変量 y のデータについて，平均値 $\overline{y}$，分散 $s_y{}^2$，標準偏差 s_y を求めよ。

ただし，$\sqrt{3}=1.73$ とし，標準偏差は小数第 2 位を四捨五入して，小数第 1 位まで求めよ。

(1)　$y=3x$　(2)　$y=-2x+3$

解答　(1)　$\overline{y}=63$，$s_y{}^2=108$，$s_y\fallingdotseq 10.4$　(2)　$\overline{y}=-39$，$s_y{}^2=48$，$s_y\fallingdotseq 6.9$

(1)　$\overline{y}=3\overline{x}=3\times 21=63$

$s_y{}^2=3^2\times s_x{}^2=9\times 12=108$

$s_y=3s_x=3\times 2\sqrt{3}=6\sqrt{3}\fallingdotseq 10.4$

(2)　$\overline{y}=-2\overline{x}+3=-2\times 21+3=-39$

$s_y{}^2=(-2)^2 s_x{}^2=4\times 12=48$

$s_y=|-2|s_x=2\times 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}\fallingdotseq 6.9$

3．次の方程式・不等式を解け。

(1)　$\sin\theta\tan\theta=-\frac{3}{2}$（$90^\circ<\theta\leqq 180^\circ$）　(2)　$2\cos^2\theta+3\sin\theta<3$（$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$）

解答　(1)　$\theta=120^\circ$　(2)　$0^\circ\leqq\theta<30^\circ$，$150^\circ<\theta\leqq 180^\circ$

(1)　$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ であるから　$\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}=-\frac{3}{2}$　ゆえに　$2\sin^2\theta=-3\cos\theta$

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ であるから　$2(1-\cos^2\theta)=-3\cos\theta$

整理して　$2\cos^2\theta-3\cos\theta-2=0$

$\cos\theta=t$ とおくと，$90^\circ<\theta\leqq 180^\circ$ のとき　$-1\leqq t<0$　……①

方程式は　$2t^2-3t-2=0$

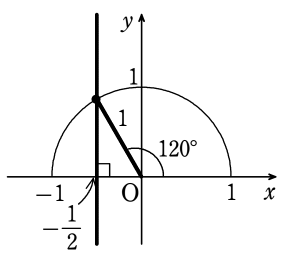
ゆえに　$(t-2)(2t+1)=0$

よって　$t=2,\ -\frac{1}{2}$

① を満たすものは　$t=-\frac{1}{2}$

求める解は，$t=-\frac{1}{2}$ すなわち $\cos\theta=-\frac{1}{2}$ を解いて

$\theta=120^\circ$



(2)　$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ であるから　$2(1-\sin^2\theta)+3\sin\theta<3$

整理すると　$2\sin^2\theta-3\sin\theta+1>0$

$\sin\theta=t$ とおくと，$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ のとき　$0\leqq t\leqq 1$　……①

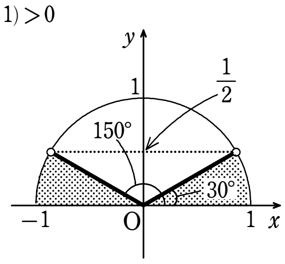
不等式は　$2t^2-3t+1>0$　ゆえに　$(2t-1)(t-1)>0$

よって　$t<\frac{1}{2},\ 1<t$

① との共通範囲を求めて　$0\leqq t<\frac{1}{2}$

求める解は，$0\leqq t<\frac{1}{2}$ すなわち $0\leqq\sin\theta<\frac{1}{2}$

を解いて　$0^\circ\leqq\theta<30^\circ$，$150^\circ<\theta\leqq 180^\circ$



4．$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$（$0^\circ<\theta<180^\circ$）のとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\sin\theta\cos\theta$　(2)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta$　(3)　$\sin\theta-\cos\theta$

解答　(1)　$\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{4}$　(2)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta=\frac{5\sqrt{2}}{8}$

(2)　$\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{2}$

(1)　$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ の両辺を 2 乗すると

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{2}$　よって　$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$

ゆえに　$\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{4}$　……①

(2)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{4}\right)\right\}=\frac{5\sqrt{2}}{8}$

(3)　$0^\circ<\theta<180^\circ$ では $\sin\theta>0$ であるから，① より　$\cos\theta<0$

ゆえに　$\sin\theta-\cos\theta>0$　……②

① から　$(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{2}$

よって，② から　$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

5．1 辺の長さが 1 の正八角形の面積を求めよ。

解答　$2(1+\sqrt{2})$

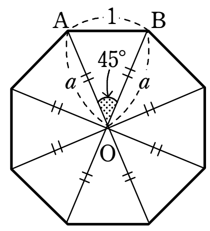
図のように，正八角形を 8 個の合同な三角形に分け，3 点 O，A，B をとると　$\angle\mathrm{AOB}=360^\circ\div 8=45^\circ$

$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=a$ とすると，余弦定理により

$1^2=a^2+a^2-2a\cdot a\cos 45^\circ$

整理して　$(2-\sqrt{2})a^2=1$

ゆえに　$a^2=\frac{1}{2-\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$



よって，求める面積は　$8\triangle\mathrm{OAB}=8\cdot\frac{1}{2}a^2\sin 45^\circ=2(1+\sqrt{2})$

6．1 辺の長さが 6 の正四面体 OABC がある。辺 OA，OB，OC 上に，それぞれ点 L，M，N を OL＝3，OM＝4，ON＝2 となるようにとる。このとき，△LMN の面積を求めよ。

解答　$\frac{5\sqrt{3}}{2}$

△OLM において，余弦定理により

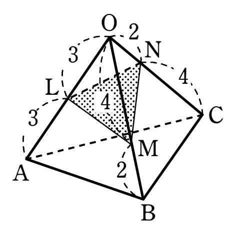
$\mathrm{LM}^2=\mathrm{OL}^2+\mathrm{OM}^2-2\cdot\mathrm{OL}\cdot\mathrm{OM}\cos 60^\circ$

$=3^2+4^2-2\cdot 3\cdot 4\cdot\frac{1}{2}=13$

△OMN において，余弦定理により

$\mathrm{MN}^2=\mathrm{OM}^2+\mathrm{ON}^2-2\cdot\mathrm{OM}\cdot\mathrm{ON}\cos 60^\circ$

$=4^2+2^2-2\cdot 4\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=12$



△ONL において，余弦定理により

$\mathrm{NL}^2=\mathrm{ON}^2+\mathrm{OL}^2-2\cdot\mathrm{ON}\cdot\mathrm{OL}\cos 60^\circ=2^2+3^2-2\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{1}{2}=7$

ゆえに　$\mathrm{LM}=\sqrt{13}$，$\mathrm{MN}=2\sqrt{3}$，$\mathrm{NL}=\sqrt{7}$

よって　$\cos\angle\mathrm{MLN}=\frac{\mathrm{LM}^2+\mathrm{NL}^2-\mathrm{MN}^2}{2\cdot\mathrm{LM}\cdot\mathrm{NL}}=\frac{13+7-12}{2\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{7}}=\frac{4}{\sqrt{91}}$

したがって　$\sin\angle\mathrm{MLN}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{\sqrt{91}}\right)^2}=\sqrt{\frac{75}{91}}=\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{91}}$

ゆえに　$\triangle\mathrm{LMN}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{LM}\cdot\mathrm{NL}\sin\angle\mathrm{MLN}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{7}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{91}}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$

以下の問いでは解決過程も採点対象である。
根拠や記述が不十分な場合は減点対象となる。

7．$30^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ のとき，関数 $y=\sin^2\theta+\cos\theta+1$ の最大値，最小値を求めよ。また，そのときの θ の値も求めよ。

解答　$\theta=60^\circ$ のとき最大値 $\dfrac{9}{4}$，$\theta=90^\circ$ のとき最小値 2

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ であるから

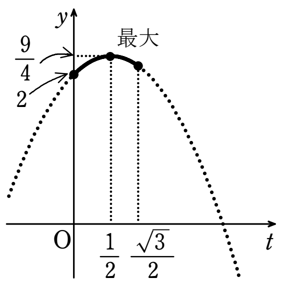
$$y=\sin^2\theta+\cos\theta+1=(1-\cos^2\theta)+\cos\theta+1=-\cos^2\theta+\cos\theta+2$$

$\cos\theta=t$ とおくと，$30^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ のとき

$$0 \leqq t \leqq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cdots\cdots ①$$

y を t の式で表すと

$$y=-t^2+t+2=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$



① の範囲において，y は

$t=\dfrac{1}{2}$ で最大値 $\dfrac{9}{4}$，

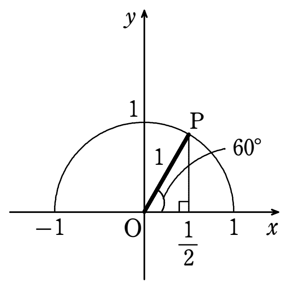
$t=0$ で最小値 2

をとる。

$30^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ であるから

$t=\dfrac{1}{2}$ となるのは，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ から　　$\theta=60^\circ$

$t=0$ となるのは，$\cos\theta=0$ から　　$\theta=90^\circ$



よって　　$\theta=60^\circ$ のとき最大値 $\dfrac{9}{4}$，

$\theta=90^\circ$ のとき最小値 2

8．$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。x の 2 次方程式 $x^2-2\sqrt{2}(\cos\theta)x+\cos\theta=0$ が，異なる 2 つの実数解をもち，それらがともに正となるような θ の値の範囲を求めよ。

解答　$0^\circ \leqq \theta < 60^\circ$

判別式を D とし，$f(x)=x^2-2\sqrt{2}(\cos\theta)x+\cos\theta$ とする。

2 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの正の実数解をもつための条件は，放物線 $y=f(x)$ が x 軸の正の部分と，異なる 2 点で交わることである。

したがって，次の [1]，[2]，[3] が同時に成り立つ。

[1]　$D>0$　　[2]　軸 >0　　[3]　$f(0)>0$

また，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき　　$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$　$\cdots\cdots$ ①

[1]　$\dfrac{D}{4}=(-\sqrt{2}\cos\theta)^2-\cos\theta=\cos\theta(2\cos\theta-1)$

$D>0$ から　　$\cos\theta<0$，$\dfrac{1}{2}<\cos\theta$　$\cdots\cdots$ ②

[2]　放物線の軸は直線 $x=\sqrt{2}\cos\theta$ であるから

$$\sqrt{2}\cos\theta>0$$

よって　　$\cos\theta>0$　$\cdots\cdots$ ③

[3]　$f(0)>0$ から　　$\cos\theta>0$　$\cdots\cdots$ ④

① ～ ④ の共通範囲を求めて　　$\dfrac{1}{2}<\cos\theta \leqq 1$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ であるから　　$0^\circ \leqq \theta < 60^\circ$

9．円に内接する四角形 ABCD がある。$\mathrm{AB}=4$，$\mathrm{BC}=5$，$\mathrm{CD}=7$，$\mathrm{DA}=10$ のとき

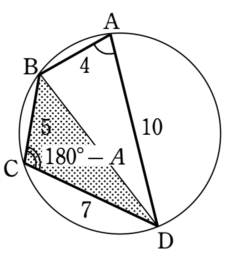
(1)　$\cos A$ の値を求めよ。　　(2)　四角形 ABCD の面積を求めよ。

解答　(1)　$\cos A=\dfrac{7}{25}$　　(2)　36

(1)　四角形 ABCD は円に内接するから　　$C=180^\circ-A$

△ABD において，余弦定理により

$$\mathrm{BD}^2=10^2+4^2-2\cdot10\cdot4\cos A$$
$$=116-80\cos A \quad \cdots\cdots ①$$



△BCD において，余弦定理により

$$\mathrm{BD}^2=7^2+5^2-2\cdot7\cdot5\cos(180^\circ-A)$$
$$=74+70\cos A \quad \cdots\cdots ②$$

①，② から　　$116-80\cos A=74+70\cos A$

ゆえに　　$\cos A=\dfrac{42}{150}=\dfrac{7}{25}$

(2)　$\sin A>0$ であるから　　$\sin A=\sqrt{1-\left(\dfrac{7}{25}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{576}}{25}=\dfrac{24}{25}$

また　　$\sin C=\sin(180^\circ-A)=\sin A=\dfrac{24}{25}$

よって，求める面積は

$$\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{BCD}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\sin A+\frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}\sin C$$
$$=\frac{1}{2}\cdot4\cdot10\cdot\frac{24}{25}+\frac{1}{2}\cdot5\cdot7\cdot\frac{24}{25}=36$$