1．次の式を因数分解せよ。

(1)　$(x^2+x-5)(x^2+x-7)+1$

(2)　$9b^2+3ab-2a-4$

(3)　$a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+2abc$

(1)　$(x^2+x-5)(x^2+x-7)+1=\{(x^2+x)-5\}\{(x^2+x)-7\}+1$

$=(x^2+x)^2-12(x^2+x)+36$

$=(x^2+x-6)^2$

$=\{(x+3)(x-2)\}^2$

$=(x+3)^2(x-2)^2$

(2)　$9b^2+3ab-2a-4=(3b-2)a+(3b+2)(3b-2)$

$=(3b-2)\{a+(3b+2)\}$

$=(a+3b+2)(3b-2)$

(3)　$a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+2abc$

$=(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+b^2c+bc^2$

$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+(b+c)bc$

$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$

$=(b+c)(a+b)(a+c)$

$=(a+b)(b+c)(c+a)$

2．次の $\boxed{}$ に最も適する語句を(ア)～(エ)から選べ。x，y は実数とする。

(1)　$x<1$ は $x\leqq 1$ であるための $\boxed{}$。

(2)　$x<y$ は $x^4<y^4$ であるための $\boxed{}$。

(3)　$xy+1=x+y$ は x，y のうち少なくとも1つは1であるための $\boxed{}$。

(4)　△ABCにおいて，∠A＜90°は，△ABCが鋭角三角形であるための $\boxed{}$。

(ア)　必要十分条件である　　(イ)　必要条件であるが十分条件ではない

(ウ)　十分条件であるが必要条件ではない　(エ)　必要条件でも十分条件でもない

(1)　$x<1 \Longrightarrow x\leqq 1$ は明らかに真。

$x\leqq 1 \Longrightarrow x<1$ は偽。　(反例)　$x=1$

したがって　(ウ)

(2)　$x<y \Longrightarrow x^4<y^4$ は偽。　(反例)　$x=-1$，$y=0$

$x^4<y^4 \Longrightarrow x<y$ は偽。　(反例)　$x=0$，$y=-1$

したがって　(エ)

(3)　$xy+1=x+y \Longleftrightarrow (x-1)(y-1)=0$

$\Longleftrightarrow$ x，y のうち少なくとも1つは1　は真。

したがって　(ア)

(4)　△ABCにおいて，∠A＜90° $\Longrightarrow$ △ABCが鋭角三角形　は偽。

(反例)　∠A＝30°＜90°，∠B＝100°，∠C＝50°

△ABCが鋭角三角形 $\Longrightarrow$ ∠A＜90°　は真。

したがって　(イ)

3．$a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1)　a^2-a-1　　　(2)　$a^4+a^3+a^2+a+1$

(1)　$a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ から　$2a-1=\sqrt{5}$　　両辺を2乗して　$(2a-1)^2=5$

よって　$4a^2-4a-4=0$　　ゆえに　$a^2-a-1=0$

(2)　(1)から　$a^2=a+1$

よって　$a^3=a^2a=(a+1)a=a^2+a=(a+1)+a=2a+1$，

$a^4=a^3a=(2a+1)a=2a^2+a=2(a+1)+a=3a+2$

したがって　$a^4+a^3+a^2+a+1$

$=(3a+2)+(2a+1)+(a+1)+a+1$

$=7a+5=7\cdot\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+5=\dfrac{17+7\sqrt{5}}{2}$

4．k を $k>2$ を満たす定数とする。このとき，x についての不等式 $5-x\leqq 4x<2x+k$ の解は $^{ア}\boxed{}$ である。また，不等式 $5-x\leqq 4x<2x+k$ を満たす整数 x がちょうど5つ存在するような定数 k の値の範囲は $^{イ}\boxed{}$ である。

$$\begin{cases}5-x\leqq 4x\\ 4x<2x+k\end{cases}$$

$5-x\leqq 4x$ から　$-5x\leqq -5$　　よって　$x\geqq 1$　……①

$4x<2x+k$ から　$2x<k$　　よって　$x<\dfrac{k}{2}$　……②

$k>2$ であるから，①，②の共通範囲を求めて　$^{ア}1\leqq x<\dfrac{k}{2}$

また，これを満たす整数 x がちょうど5つ存在するとき，その整数 x は

$x=1，2，3，4，5$

ゆえに　$5<\dfrac{k}{2}\leqq 6$　　すなわち　$^{イ}10<k\leqq 12$

5．(1)　不等式 $a(x+1)>x+a^2$ を解け。ただし，a は定数とする。

(2)　不等式 $ax<4-2x<2x$ の解が $1<x<4$ であるとき，定数 a の値を求めよ。

(1)　与式から　$(a-1)x>a(a-1)$　……①

[1]　$a-1>0$ すなわち $a>1$ のとき　$x>a$

[2]　$a-1=0$ すなわち $a=1$ のとき　①は　$0\cdot x>0$

これを満たす x の値はない。

[3]　$a-1<0$ すなわち $a<1$ のとき　$x<a$

よって　$\begin{cases}a>1 \text{ のとき} & x>a\\ a=1 \text{ のとき} & \text{解はない}\\ a<1 \text{ のとき} & x<a\end{cases}$

(2)　$4-2x<2x$ から　$-4x<-4$　　よって　$x>1$

ゆえに，解が $1<x<4$ となるための条件は，$ax<4-2x$ ……① の解が $x<4$ となることである。

①から　$(a+2)x<4$　……②

[1]　$a+2>0$ すなわち $a>-2$ のとき，②から　$x<\dfrac{4}{a+2}$

よって　$\dfrac{4}{a+2}=4$　　ゆえに　$4=4(a+2)$

よって　$a=-1$　　これは $a>-2$ を満たす。

[2]　$a+2=0$ すなわち $a=-2$ のとき，②は　$0\cdot x<4$

よって，解はすべての実数となり，条件は満たされない。

[3]　$a+2<0$ すなわち $a<-2$ のとき，②から　$x>\dfrac{4}{a+2}$

このとき条件は満たされない。

[1]～[3]から　$a=-1$

以下の問いでは解決過程も採点対象である。
根拠や記述が不十分な場合は減点対象となる。

6．$x=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，$y=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ のとき，$x+y=^{ア}\boxed{}$，$xy=^{イ}\boxed{}$ であるから，

$x^2+y^2=^{ウ}\boxed{}$，$x^3+y^3=^{エ}\boxed{}$，$x^4+y^4=^{オ}\boxed{}$，$x^5+y^5=^{カ}\boxed{}$ となる。

(ア)　$x+y=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$

$=\dfrac{(3-2\sqrt{6}+2)+(3+2\sqrt{6}+2)}{3-2}=10$

(イ)　$xy=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=1$

(ウ)　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=10^2-2\cdot 1=98$

(エ)　$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=10^3-3\cdot 1\cdot 10=970$

別解　$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=10\cdot(98-1)=970$

(オ)　$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=(x^2+y^2)^2-2(xy)^2$

(イ)，(ウ)の結果から　$x^4+y^4=98^2-2\cdot 1^2=9602$

(カ)　$x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^3-x^3y^2$

$=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-(x+y)(xy)^2$

(ア)～(エ)の結果から　$x^5+y^5=98\cdot 970-10\cdot 1^2=95050$

別解　$x^5+y^5=(x+y)(x^4+y^4)-xy^4-x^4y$

$=(x+y)(x^4+y^4)-xy(x^3+y^3)$

(ア)，(イ)，(エ)，(オ)の結果から　$x^5+y^5=10\cdot 9602-1\cdot 970=95050$

７．不等式 $|x-1|+2|x-3|\leqq 11$ を解け。

(1)　[1]　$x<1$ のとき，不等式は　$-(x-1)-2(x-3)\leqq 11$

よって　　$x\geqq -\dfrac{4}{3}$

$x<1$ との共通範囲は　　$-\dfrac{4}{3}\leqq x<1$　……①

[2]　$1\leqq x<3$ のとき，不等式は　$x-1-2(x-3)\leqq 11$

よって　　$x\geqq -6$

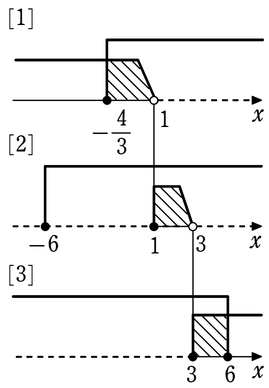
$1\leqq x<3$ との共通範囲は　　$1\leqq x<3$　……②

[3]　$3\leqq x$ のとき，不等式は　　$x-1+2(x-3)\leqq 11$

よって　　$x\leqq 6$

$3\leqq x$ との共通範囲は　　$3\leqq x\leqq 6$　……③

求める解は，①～③ を合わせた範囲で　$-\dfrac{4}{3}\leqq x\leqq 6$



(2)　[1]　$x<7$ のとき，不等式は　　$-(x-7)-(x-8)<3$

よって　　$x>6$

$x<7$ との共通範囲は　　$6<x<7$　……①

[2]　$7\leqq x<8$ のとき，不等式は　$(x-7)-(x-8)<3$

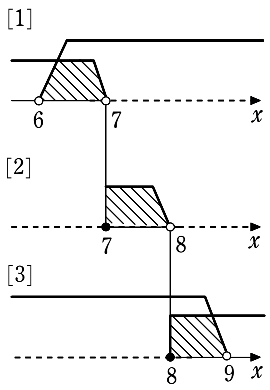
よって，$1<3$ となり，常に成り立つから，[2] の場合の不等式の解は　　$7\leqq x<8$　……②

[3]　$8\leqq x$ のとき，不等式は　　$(x-7)+(x-8)<3$

よって　　$x<9$

$8\leqq x$ との共通範囲は　　$8\leqq x<9$　……③

求める解は，①～③ を合わせた範囲で　　$6<x<9$



８．(1)　a，b が有理数のとき，$a+b\sqrt{2}=0$ ならば $a=b=0$ であることを証明せよ。ただし，$\sqrt{2}$ は無理数である。

(2)　等式 $(2+3\sqrt{2})x+(1-5\sqrt{2})y=13$ を満たす有理数 x，y の値を求めよ。

(1)　$a+b\sqrt{2}=0$ であって $b\neq 0$ である有理数 a，b がある，と仮定する。

$b\neq 0$ である有理数 b があるとすると，$a+b\sqrt{2}=0$ から

$$\sqrt{2}=-\frac{a}{b}\quad\cdots\cdots①$$

a，b は有理数であるから，① の右辺は有理数であるが，これは $\sqrt{2}$ が無理数であることと矛盾する。

したがって　　「a，b が有理数であるとき，$a+b\sqrt{2}=0$ ならば $b=0$」

$a+b\sqrt{2}=0$ であって $b=0$ のとき，$a=0$ であるから，

a，b が有理数のとき

$a+b\sqrt{2}=0$ ならば $a=b=0$ である。

(2)　与式を変形して　　$2x+y-13+(3x-5y)\sqrt{2}=0$

x，y が有理数のとき，$2x+y-13$，$3x-5y$ も有理数であり，$\sqrt{2}$ は無理数であるから，(1) により　　$2x+y-13=0$ ……①，　$3x-5y=0$ ……②

①，② を連立して解くと　　$x=5$，$y=3$

場合分けの意味の違いについて

5(1)の「不等式 $a(x+1)>x+a^2$ を解け。」という問題は、定数 a の値によって、不等式の解が異なる。定数 a がどんな値なのかわからない以上は、すべてのケースを答える必要がある。そのために、定数 a によって場合分けをして、$\begin{cases} a>1 \text{ のとき } & x>a \\ a=1 \text{ のとき } & \text{解はない} \\ a<1 \text{ のとき } & x<a \end{cases}$

と書いたものすべてがこの不等式の解となる。

5(2)の問題では、不等式 $ax<4-2x<2x$ の解自体は、(1)と同様に定数 a の値により異なり、$\begin{cases} a>-2 \text{ のとき } & x<\dfrac{4}{a+2} \\ a=-2 \text{ のとき } & \text{すべての実数} \\ a<-2 \text{ のとき } & x>\dfrac{4}{a+2} \end{cases}$ となる。しかし、問題で問われているのはこの不等式の解が「$1<x<4$ であるとき，定数 a の値」であり、この不等式の解ではない。

条件をみたす a を調べる段階では、当然場合分けをしなければいけないが、最終的には条件をみたす a は何かということであり、$\begin{cases} a>-2 \text{ のとき } & a=-1 \\ a=-2 \text{ のとき } & \text{存在しない} \\ a<-2 \text{ のとき } & \text{存在しない} \end{cases}$ という解答は誤りであり、「$a=-1$」が問題に対する解答となる。

７は、「不等式 $|x-1|+2|x-3|\leqq 11$ を解け」という問題である。不等式を解けというのは、不等式を満たす x の範囲（不等式の解）を求めよということである。今回は、絶対値が含まれているためにこのままでは処理ができない。そこで、調べる x の範囲を一端３つに分けて、絶対値を外して調べている。

絶対値の外した不等式をまずは解くが、その解がそのまま元の不等式の解（条件をみたす x の範囲）になるわけではない。各々のケースのように絶対値を外せるのはあくまでその範囲内のみの話であるので、出てきた不等式の解と、絶対値をそのように外せる x の範囲の共通部分のみが、元の不等式の解となる。

また、３つにわけて調べて出てきたものを $\begin{cases} x<1 \text{のとき} & -\dfrac{4}{3}\leqq x<1 \\ 1\leqq x<3 \text{のとき} & 1\leqq x<3 \\ x\geqq 3 \text{ のとき} & 3\leqq x\leqq 6 \end{cases}$ と解答するのも意味を分かっていない。この３つの場合分けはあくまで絶対値を外す都合で、いきなり実数全体を調査するのではなく、一端調査区間を限定して調べただけである。問題で問われているのは「結局 不等式を満たす x の範囲（不等式の解）はどこなのか？」ということであり、最終的にまとめなければならない。

背理法について

背理法は命題の結論の否定を成立すると仮定し、そこから矛盾を導くことで命題が真であるということを証明する方法である。

８の問題で、圧倒的に多い誤答が「$a\neq 0$ かつ $b\neq 0$」と仮定して背理法を実行しようとする答案である。このように仮定して矛盾が生じた際に背理法で導かれる結論は、「$a\neq 0$ かつ $b\neq 0$」の否定である「$a=0$ または $b=0$」であり、「$a=b=0$」ではない。

今回の解答のポイントは、まずは「$b=0$」であることを背理法を用いて「$b\neq 0$」の仮定から矛盾を導いて示した後に、「$a=0$ を $b=0$ から導く」と２段階に分けて示すことにある。論理を考えず、何となくそれっぽいことを書いても証明では何の意味も為さない。背理法では、結論を何にしているのかを強く意識すること。

前提条件の確認

定理や公式を用いる際には前提条件のチェックが必要不可欠である。特に、問題の中で誘導があり前問の事実を使う場合には、出題者が最も注目しているポイントであり、他の問題以上に意識して答案に起こさなければならない。８の問題では(1)の事実を使って(2)を求めなさいということである。(1)で示した事実は「a，b が有理数のとき，$a+b\sqrt{2}=0$ ならば $a=b=0$ である」ということで、前提条件は「a，b が有理数」ということである。(2)において a，b に相当するのは「$a=2x+y-13$, $b=3x-5y$」であるから、言及すべきは「$2x+y-13$，$3x-5y$ も有理数」である。しっかりと出題者と会話ができるようになってください。出題者が寂しくて泣いています。

内田碧　11-2 数学　解答

(2) $(与式)=2x^2+(3y+1)x-(2y^2-7y+3)$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & -3 & \longrightarrow & -6 \\ 2 & & -1 & \longrightarrow & -1 \\ \hline 2 & & 3 & & -7 \end{array}$$

$=2x^2+(3y+1)x-(y-3)(2y-1)$

$=\{x+(2y-1)\}\{2x-(y-3)\}$

$=(x+2y-1)(2x-y+3)$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & 2y-1 & \longrightarrow & 4y-2 \\ 2 & & -(y-3) & \longrightarrow & -y+3 \\ \hline 2 & & -(y-3)(2y-1) & & 3y+1 \end{array}$$

(3) $(与式)=a^2b-ab^2+b^2c-bc^2+c^2a-ca^2$

$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+(b^2c-bc^2)$

$=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

$=-(a-b)(b-c)(c-a)$

(4) $(与式)=(x^4-2x^2+1)-16x^2=(x^2-1)^2-(4x)^2$

$=\{(x^2-1)+4x\}\{(x^2-1)-4x\}$

$=(x^2+4x-1)(x^2-4x-1)$

8 (1) $(与式)=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2=2\sqrt{6}$

よって $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

$=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}$

$=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}$

$=\dfrac{\sqrt{6}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{2\cdot 6}$

$=\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$

(2) (ア) $(与式)=\sqrt{28+2\sqrt{25\times 3}}=\sqrt{25}+\sqrt{3}$

$=5+\sqrt{3}$

(イ) $(与式)=\sqrt{\dfrac{54-2\sqrt{49\times 5}}{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{49}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\dfrac{7-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{7\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2}$

(3) $\sqrt{a^2}-2\sqrt{a^2-2a+1}$

$=\sqrt{a^2}-2\sqrt{(a-1)^2}$

$=|a|-2|a-1|$

[1] $a<0$ のとき

$|a|-2|a-1|=(-a)-2\{-(a-1)\}=a-2$

[2] $0\leqq a<1$ のとき

$|a|-2|a-1|=a-2\{-(a-1)\}=3a-2$

[3] $1\leqq a$ のとき

$|a|-2|a-1|=a-2(a-1)=-a+2$

9 $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=\{a+(b+c)\}\{a^2-(b+c)a+b^2-bc+c^2\}$

$=a^3+\{(b+c)-(b+c)\}a^2$

$\quad+\{-(b+c)^2+(b^2-bc+c^2)\}a$

$\quad+(b+c)(b^2-bc+c^2)$

$=a^3-3bca+b^3+c^3={}^{ア}a^3+b^3+c^3-3abc$

また　$8x^3+27y^3+18xy-1$

$=(2x)^3+(3y)^3+(-1)^3-3\cdot 2x\cdot 3y\cdot(-1)$

よって，(ア) から

$8x^3+27y^3+18xy-1$

$=(2x+3y-1)\{(2x)^2+(3y)^2+(-1)^2$

$\quad-2x\cdot 3y-3y\cdot(-1)-(-1)\cdot 2x\}$

$=(2x+3y-1)(4x^2+9y^2+1-6xy+3y+2x)$

$={}^{イ}(2x+3y-1)(4x^2-6xy+9y^2+2x+3y+1)$

10 (1) $(与式)=(x+y)^2-2xy$

$=\left(\dfrac{5}{6}\right)^2-2\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{13}{36}$

(2) $(与式)=\dfrac{x^2+y^2}{xy}=\dfrac{13}{36}\div\dfrac{1}{6}=\dfrac{13}{6}$

(3) $(与式)=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=\left(\dfrac{5}{6}\right)^3-3\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{5}{6}=\dfrac{35}{216}$

別解　$(与式)=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

$=(x+y)\{(x^2+y^2)-xy\}$

$=\dfrac{5}{6}\left(\dfrac{13}{36}-\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{35}{216}$

11 $x+y=\dfrac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\dfrac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

$=\dfrac{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})+4(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}=\dfrac{8\sqrt{6}}{6-2}$

$=2\sqrt{6}$,

$xy=\dfrac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\cdot\dfrac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\dfrac{16}{6-2}=4$

したがって

$x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy=(2\sqrt{6})^2-4={}^{ア}20$,

$x^3+x^2y+xy^2+y^3=(x+y)^3-2xy(x+y)$

$=(2\sqrt{6})^3-2\cdot 4\cdot 2\sqrt{6}$

$={}^{イ}32\sqrt{6}$

12 (1) $3^2<14<4^2$ より　$3<\sqrt{14}<4$

よって　$a=3$，$b=\sqrt{14}-a=\sqrt{14}-3$

(2) $\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{\sqrt{14}-3}=\dfrac{\sqrt{14}+3}{(\sqrt{14}-3)(\sqrt{14}+3)}$

$=\dfrac{\sqrt{14}+3}{5}$

$3<\sqrt{14}<4$ より　$6<\sqrt{14}+3<7$

＜内田碧　11-2 数学　解答＞

よって　$\dfrac{6}{5}<\dfrac{\sqrt{14}+3}{5}<\dfrac{7}{5}$

$\dfrac{6}{5}=1.2$，$\dfrac{7}{5}=1.4$ であるから　$c=1$

ゆえに　$d=\dfrac{\sqrt{14}+3}{5}-c=\dfrac{\sqrt{14}-2}{5}$

13　$\dfrac{x+y}{3}=\dfrac{y+z}{6}=\dfrac{z+x}{7}=k$ とおくと，

$k\neq0$ で　$x+y=3k$　……①，

$y+z=6k$　……②，

$z+x=7k$　……③

①＋②＋③ から　$2(x+y+z)=16k$

よって　$x+y+z=8k$　……④

④－②，④－③，④－① から，それぞれ

$x=2k$，$y=k$，$z=5k$

よって　$\dfrac{x^3+y^3+z^3}{xyz}=\dfrac{(2k)^3+k^3+(5k)^3}{2k\cdot k\cdot 5k}$

$=\dfrac{134k^3}{10k^3}=\dfrac{67}{5}$

14　(1)　$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2x\cdot\dfrac{1}{x}$

$=(2\sqrt{7})^2-2={}^{ア}26$，

$x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3x\cdot\dfrac{1}{x}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$=(2\sqrt{7})^3-3\cdot2\sqrt{7}={}^{イ}50\sqrt{7}$，

$x^4+\dfrac{1}{x^4}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2-2x^2\cdot\dfrac{1}{x^2}$

$=26^2-2={}^{ウ}674$，

$x^5+\dfrac{1}{x^5}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$=26\cdot50\sqrt{7}-2\sqrt{7}={}^{エ}1298\sqrt{7}$

別解　(イ)　$x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2-x\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$

$=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left\{\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-1\right\}$

$=2\sqrt{7}(26-1)={}^{イ}50\sqrt{7}$

(2)　$a+b=-1$ であるから

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=(-1)^3-3ab\cdot(-1)=-1+3ab$

$a^3+b^3=-19$ であるから　$-1+3ab=-19$

よって　$ab=-6$

ゆえに　$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=(-1)^2-2\cdot(-6)={}^{ア}13$

よって　$a^5+b^5=(a^2+b^2)(a^3+b^3)-a^2b^2(a+b)$

$=13\cdot(-19)-(-6)^2\cdot(-1)$

$={}^{イ}-211$

15　$\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{7+2\sqrt{12}}$

$=\sqrt{(4+3)+2\sqrt{4\cdot3}}$

$=\sqrt{4}+\sqrt{3}=2+\sqrt{3}$

$1<\sqrt{3}<2$ であるから　$3<2+\sqrt{3}<4$

よって　$a=3$，

$b=(2+\sqrt{3})-a=(2+\sqrt{3})-3$

$=\sqrt{3}-1$

ゆえに　$\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a+b-1}$

$=\dfrac{3}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{\sqrt{3}-1}{3+(\sqrt{3}-1)-1}$

$=\dfrac{3(\sqrt{3}+1)-(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$

$=\dfrac{3\sqrt{3}+3-(3-2\sqrt{3}+1)}{3-1}=\dfrac{5\sqrt{3}-1}{2}$

16　$\alpha^2+\sqrt{3}\beta=\sqrt{6}$　……①

$\beta^2+\sqrt{3}\alpha=\sqrt{6}$　……②

①－② より　$\alpha^2-\beta^2-\sqrt{3}(\alpha-\beta)=0$

整理すると　$(\alpha-\beta)\{(\alpha+\beta)-\sqrt{3}\}=0$

$\alpha\neq\beta$ より，$\alpha-\beta\neq0$ であるから

$\alpha+\beta-\sqrt{3}=0$

したがって　$\alpha+\beta={}^{ア}\sqrt{3}$

①＋② より　$\alpha^2+\beta^2+\sqrt{3}(\alpha+\beta)=2\sqrt{6}$

よって　$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+\sqrt{3}(\alpha+\beta)=2\sqrt{6}$

ゆえに　$(\sqrt{3})^2-2\alpha\beta+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{6}$

したがって　$\alpha\beta={}^{イ}3-\sqrt{6}$

また　$\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$=\dfrac{(\sqrt{3})^2-2(3-\sqrt{6})}{3-\sqrt{6}}=\dfrac{2\sqrt{6}-3}{3-\sqrt{6}}$

$=\dfrac{(2\sqrt{6}-3)(3+\sqrt{6})}{(3-\sqrt{6})(3+\sqrt{6})}$

$=\dfrac{3+3\sqrt{6}}{9-6}={}^{ウ}1+\sqrt{6}$

17　(1)　$(x-2)(y-2)(z-2)$

$=(xy-2x-2y+4)(z-2)$

$=xyz-2xy-2zx+4x-2yz+4y+4z-8$

$=xyz-2(xy+yz+zx)+4(x+y+z)-8$

$xyz=2(xy+yz+zx)$，$x+y+z=a$ であるから

$(x-2)(y-2)(z-2)=4a-8$

(2)　x，y，z のうち少なくとも 1 つが 2 であるとき

$(x-2)(y-2)(z-2)=0$

よって，(1) より　$4a-8=0$

これを解くと　$a=2$

また，このとき $x+y+z=a=2$ であるから

＜内田碧　11-3 数学　解答＞

$x^3+y^3+z^3$
$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$
$=2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$
$\quad+3\cdot 2(xy+yz+zx)$
$=2(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)$
$=2(x+y+z)^2=2\cdot 2^2=8$

１８ (1)　両辺に 2 を掛けて　$3(x-1)\leqq 4(3x+1)$
すなわち　$3x-3\leqq 12x+4$
よって　$-9x\leqq 7$　　ゆえに　$x\geqq -\dfrac{7}{9}$
(2)　両辺に 10 を掛けて　$3x-50\geqq 10-12x$
すなわち　$15x\geqq 60$　　よって　$x\geqq 4$

１９　$-x<2(x+9)$ から　$-x<2x+18$
よって　$-3x<18$　　ゆえに　$x>-6$　…… ①
$\dfrac{3x-4}{6}<-2x+7$ の両辺に 6 を掛けると
$$3x-4<-12x+42$$
よって　$15x<46$　　ゆえに　$x<\dfrac{46}{15}$　…… ②
① と ② の共通範囲を求めると　$-6<x<\dfrac{46}{15}$
これを満たす整数 x の値は
$-5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$

２０ (1)　$|2x-1|<9$ から　$-9<2x-1<9$
よって　$-8<2x<10$　　ゆえに　$-4<x<5$
(2)　$|2x+1|>9$ から　$2x+1<-9,\ 9<2x+1$
よって　$x<-5,\ 4<x$

２１　1 人に 7 個ずつ分けると 36 個余るから
$$x=7y+{}^{ア}36 \quad \cdots\cdots ①$$
また，1 人に 16 個ずつ分けると最後の 1 人に不足が生じるから　$0\leqq x-{}^{イ}16(y-1)<16$
これに $x=7y+36$ を代入すると
$$0\leqq (7y+36)-16(y-1)<16$$
よって　$0\leqq -9y+52<16$
ゆえに　$-52\leqq -9y<-36$
したがって　$4<y\leqq \dfrac{52}{9}$
y は自然数であるから　$y=5$
このとき，① から　$x=7\cdot 5+36=71$
したがって　$(x,\ y)={}^{ウ}(71,\ 5)$

２２ (1)　$ax\leqq -2x+3$ から　$(a+2)x\leqq 3$
$a+2>0$ から　$x\leqq \dfrac{3}{a+2}$　…… ①
また，$-2x+3\leqq bx+2$ から　$1\leqq (b+2)x$
$b+2>0$ から　$\dfrac{1}{b+2}\leqq x$　…… ②
不等式の解は，①，② の共通範囲であるから
$$\frac{1}{b+2}\leqq x\leqq \frac{3}{a+2}$$
よって　$\dfrac{1}{b+2}=\dfrac{1}{10}$，$\dfrac{3}{a+2}=\dfrac{1}{5}$
これを解いて　$a=13,\ b=8$
(2)　$5x+3\geqq x+a$　…… ① から　$x\geqq \dfrac{a-3}{4}$
$x-2\geqq 3x-a$　…… ② から　$x\leqq \dfrac{a-2}{2}$
① を満たす x のうち，最小の整数が 2 である a の範囲は　$1<\dfrac{a-3}{4}\leqq 2$
すなわち　${}^{ア}7<a\leqq {}^{イ}11$　…… ③
また，② を満たす x のうち，最大の整数が 2 である a の範囲は　$2\leqq \dfrac{a-2}{2}<3$
すなわち　$6\leqq a<8$　…… ④
③，④ から，①，② を同時に満たす x のうち，整数が 2 だけである a の値の範囲は
$${}^{ウ}7<a<{}^{エ}8$$

２３ (1)　[1]　$5x-41<0$ すなわち $x<\dfrac{41}{5}$ のとき
不等式は　$-(5x-41)<2x+1$
これを解くと　$x>\dfrac{40}{7}$
$x<\dfrac{41}{5}$ との共通範囲は　$\dfrac{40}{7}<x<\dfrac{41}{5}$　…… ①
[2]　$5x-41\geqq 0$ すなわち $x\geqq \dfrac{41}{5}$ のとき
不等式は　$5x-41<2x+1$
これを解くと　$x<14$
$x\geqq \dfrac{41}{5}$ との共通範囲は　$\dfrac{41}{5}\leqq x<14$　…… ②
不等式の解は，① と ② を合わせた範囲で
$$\frac{40}{7}<x<14$$
これを満たす整数 x の最大値は 13，最小値は 6
(2)　[1]　$x<1$ のとき
不等式は　$-2(x-2)-(x-1)<3$
すなわち　$3x>2$　　よって　$x>\dfrac{2}{3}$
$x<1$ との共通範囲は　$\dfrac{2}{3}<x<1$
[2]　$1\leqq x<2$ のとき
不等式は　$-2(x-2)+(x-1)<3$
すなわち　$x>0$
$1\leqq x<2$ との共通範囲は　$1\leqq x<2$

〈内田碧　11-3 数学　解答〉

[3]　$2 \leqq x$ のとき

不等式は　$2(x-2)+(x-1)<3$

すなわち　$3x<8$

よって　　$x<\dfrac{8}{3}$

$2 \leqq x$ との共通範囲は　$2 \leqq x<\dfrac{8}{3}$

[1]～[3] から，求める解は　$\dfrac{2}{3}<x<\dfrac{8}{3}$

24　A さんが初めに持っていたボールペンの本数を x 本とすると，B さんが初めに持っていたボールペンの本数は　$(52-x)$ 本

条件から

$$\begin{cases} x-\dfrac{1}{3}x>(52-x)+\dfrac{1}{3}x & \cdots\cdots ① \\ x-\dfrac{1}{3}x-3<(52-x)+\dfrac{1}{3}x+3 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① から　$\dfrac{4}{3}x>52$　　よって　$x>39$　$\cdots\cdots$ ③

② から　$\dfrac{4}{3}x<58$　　よって　$x<\dfrac{87}{2}$　$\cdots\cdots$ ④

③ と ④ の共通範囲は　$39<x<\dfrac{87}{2}$

すなわち　$39<x<43.5$

初めに A さんが B さんにあげるボールペンの本数 $\dfrac{x}{3}$ は整数であるから，x は 3 の倍数である。

よって　$x=42$　　　したがって，42 本。

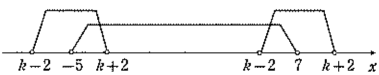
25　$|x-1|<6$ から　$-6<x-1<6$

よって　$-5<x<7$

$|x-k|<2$ から　$-2<x-k<2$

よって　$k-2<x<k+2$

与えられた連立不等式を満たす実数 x が存在するための条件は　$-5<k+2$ かつ $k-2<7$



よって　　$-7<k<9$

26　(1)　$U=\{1,\ 3,\ 5,\ 8,\ 10,\ 13,\ 17\}$，

$A=\{1,\ 5,\ 8,\ 10\}$ から　$\overline{A}=\{3,\ 13,\ 17\}$

これと $B=\{8,\ 10,\ 17\}$ から

$\overline{A}\cup B=\{3,\ 8,\ 10,\ 13,\ 17\}$

(2)　逆：「$x>0$ または $y>0$ ならば $x+y>0$」

これは偽である。

(反例)　$x=1$，$y=-2$

対偶：「$x \leqq 0$ かつ $y \leqq 0$ ならば $x+y \leqq 0$」

これは真である。

27　$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$，$B=\{3,\ 6,\ 9,\ 12\}$，$C=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$

(1)　$A\cap C=\{3,\ 5,\ 7\}$

(2)　$B\cup C=\{2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 12\}$ であるから

$A\cap(B\cup C)=\{3,\ 5,\ 7,\ 9\}$

(3)　$A\cup B\cup C=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 12\}$ であるから　$\overline{A\cup B\cup C}=\{4,\ 8,\ 10,\ 11\}$

(4)　$A\cup C=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$ であるから

$\overline{A\cup C}=\{4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 11,\ 12\}$

よって　$B\cap(\overline{A\cup C})=\{6,\ 12\}$

28　(1)　「$x=3 \Longrightarrow x^2=9$」は真である。

「$x^2=9 \Longrightarrow x=3$」は偽である。

(反例)　$x=-3$

よって，$x=3$ であることは，$x^2=9$ であるための十分条件ではあるが，必要条件ではない。

(ア(b))

(2)　「$ab=0 \Longrightarrow a=0$ かつ $b=0$」は偽である。

(反例)　$a=0$，$b=1$

「$a=0$ かつ $b=0 \Longrightarrow ab=0$」は真である。

よって，$ab=0$ であることは，$a=0$ かつ $b=0$ であるための必要条件ではあるが，十分条件ではない。　(イ(a))

(3)　a，b は実数であるから

$a^2+b^2-2a-2b+2=0$

$\Longleftrightarrow (a-1)^2+(b-1)^2=0$

$\Longleftrightarrow a-1=0$，$b-1=0$

$\Longleftrightarrow a=1$，$b=1$

ゆえに，$a^2+b^2-2a-2b+2=0$ であることは，$a=b=1$ であるための必要十分条件である。

(ウ(c))

29　(1)　命題 P の対偶は，次の命題である。

「a，b，c がすべて奇数ならば，$a^2+b^2+c^2$ は奇数である」

(2)　a，b，c がすべて奇数ならば，

$a=2p+1$，$b=2q+1$，$c=2r+1$

(p，q，r は整数) と表される。

よって　$a^2+b^2+c^2$

$=(2p+1)^2+(2q+1)^2+(2r+1)^2$

$=4p^2+4p+1+4q^2+4q+1+4r^2+4r+1$

$=2(2p^2+2p+2q^2+2q+2r^2+2r+1)+1$

$2p^2+2p+2q^2+2q+2r^2+2r+1$ は整数であるから，$a^2+b^2+c^2$ は奇数である。

したがって，対偶が真であるから，命題 P も真である。