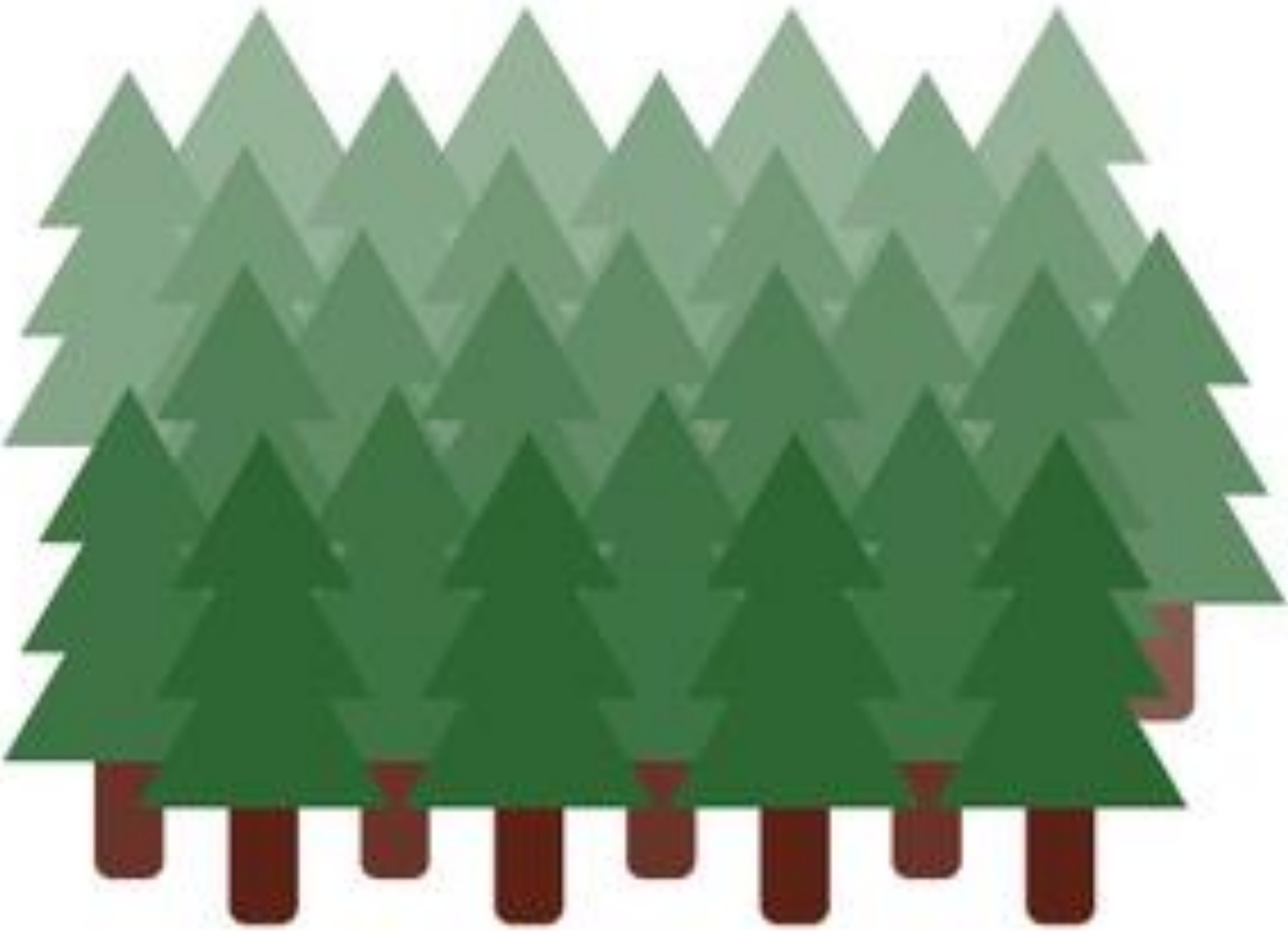
名問の林



数学

数と式，方程式と不等式

$\boxed{1}$ [2015 千葉大]

a を実数とする。x に関する方程式 $|x^2-6x-|x-6||+x=a$ の実数解の個数を求めよ。

$\boxed{2}$ [〔1〕2015 星薬科大，〔2〕2012 立命館大，〔3〕2012 立教大]

〔1〕 $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，$\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a+b-1}$ の値は

$$\frac{{}^{ア}\boxed{}\sqrt{{}^{イ}\boxed{}}-{}^{ウ}\boxed{}}{{}^{エ}\boxed{}}$$ である。

〔2〕 $x=\dfrac{\sqrt{13}+1}{2}$ のとき，x^2-x，x^3-4x，x^4-7x の値を求めよ。

〔3〕 互いに異なる定数 a，b，c が $\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{c+a}{b}=\dfrac{a+b}{c}$ を満たすとき，$\dfrac{(b+c)(c+a)(a+b)}{abc}$ の値を求めよ。ただし，$abc \neq 0$ とする。

$\boxed{3}$ [2015 慶応義塾大]

a は $2^{2\log_4 48-\log_2 \frac{3}{4}}$ である。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。このとき，

(1) a の値を整数で表すと $\boxed{}$ である。

(2) a^{30} は $\boxed{}$ 桁の数である。

(3) b は，b^{50} を小数で表すと小数第 25 位に初めて 0 でない数字が現れる正の数である。このとき $\left(\dfrac{b}{a}\right)^4$ を小数で表すと，小数第 $\boxed{}$ 位に初めて 0 でない数字が現れる。

$\boxed{4}$ [2003 大阪教育大]

実数 x に対して，$t=2^x+2^{-x}$，$y=4^x-6\cdot 2^x-6\cdot 2^{-x}+4^{-x}$ とおく．

(1) x が実数全体を動くとき，t の最小値を求めよ．

(2) y を t の式で表せ．

(3) x が実数全体を動くとき，y の最小値を求めよ．

(4) a を実数とするとき，$y=a$ となるような x の個数を求めよ．

5 [2015 同志社大]

10個の玉を3個の箱に分けて入れる。ただし，どの箱にも必ず1個以上の玉を入れるものとする。

(1) 10個の玉に区別がなく，また3個の箱にも区別がない場合，玉の入れ方の総数は何通りあるか。

(2) 10個の玉に区別がなく，また3個の箱にはそれぞれ区別がある場合，玉の入れ方の総数は何通りあるか。

(3) 10個の玉にはそれぞれ区別があるが，3個の箱には区別がないとする。そのとき，2つの箱に4個ずつ，残り1つの箱に2個の玉を入れるとするとき，入れ方の総数は何通りあるか。

(4) 10個の玉にはそれぞれ区別があるが，また3個の箱のうち2つの箱は同じで区別がなく，残りのもう1つの箱とは区別ができる場合を考える。3つの箱のうち2つに4個の玉を入れ，残り1つの箱に2個の玉を入れるとするとき，入れ方の総数は何通りあるか。

6 [2014 東京工科大]

箱Aには，赤球が1個，青球が3個，白球が6個，合計で10個の球が入っている。一方，箱Bには10本のくじが入っており，そのうち当たりくじは2本である。いま，箱Aから球を1つ無作為に取り出し，それが赤球のときには箱Bからくじを6本，青球のときには3本，白球のときには1本引くものとする。

(1) 赤球を取り出し，かつ，当たりくじを引く確率 p_1 を求めよ。

(2) ちょうど1本当たる確率 p_2 を求めよ。

(3) 少なくとも1本当たる確率 p_3 を求めよ。

(4) 引いたくじが，はずれくじばかりであったとき，もともと赤球を取り出していた確率 p_4 を求めよ。

$\boxed{7}$ [2010 富山大]

青球6個と赤球n個 ($n \geqq 2$) が入っている袋から，3個の球を同時に取り出すとき，青球が1個で赤球が2個である確率をP_nとする。

(1) P_nをnの式で表せ。

(2) $P_n > P_{n+1}$を満たす最小のnを求めよ。

(3) P_nを最大にするnの値を求めよ。

$\boxed{8}$ [2015 岐阜薬科大]

ある病気Xにかかっている人が4％いる集団Aがある。病気Xを診断する検査で，病気Xにかかっている人が正しく陽性と判定される確率は80％である。また，この検査で病気Xにかかっていない人が誤って陽性と判定される確率は10％である。

(1) 集団Aのある人がこの検査を受けたところ陽性と判定された。この人が病気Xにかかっている確率はいくらか。

(2) 集団Aのある人がこの検査を受けたところ陰性と判定された。この人が実際には病気Xにかかっている確率はいくらか。

整数

$\boxed{9}$ [2011 熊本大]

x, y を整数とするとき，次の問いに答えよ。

(1) x^5-x は30の倍数であることを示せ。

(2) x^5y-xy^5 は30の倍数であることを示せ。

$\boxed{10}$ [[1] 2013 慶応義塾大，[2] 2014 名古屋市立大，[3] 2018 関西大]

〔1〕 50! を計算すると，末尾には0が連続してちょうど $\boxed{}$ 個並ぶ。

〔2〕 $\sqrt{x^2+84}$ が整数となるような正の整数 x をすべて求めよ。

〔3〕 $\dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{2n}=\dfrac{1}{10}$ を満たす自然数の組 $(m,\ n)$ をすべて求めると，$\boxed{}$ である。

11 [〔1〕2016 東京理科大，〔2〕2010 群馬大]

〔1〕 (1) 等式 $mn=4m-3n+24$ を満たす自然数 m，n の組の総数は $\boxed{}$ である。

(2) 等式 $m^2n-2mn+3n-36=0$ を満たす自然数 m，n の組の総数は $\boxed{}$ である。

(3) 等式 $m^3-m^2n+(2n+3)m-3n+6=0$ を満たす自然数 m，n の組の総数は $\boxed{}$ である。

〔2〕 $2 \leqq p < q < r$ を満たす整数 p，q，r の組で，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r} \geqq 1$ となるものをすべて求めよ。

12 [2018 神戸学院大]

n を1より大きい自然数とする。n 進法で表された正の数 M を $M_{(n)}$ のように表す。

(1) $53_{(10)}$ を2進法で表すと $^{ア}\boxed{}_{(2)}$ であり，5進法で表すと $^{イ}\boxed{}_{(5)}$ である。

(2) $101001_{(2)}=$ $^{ウ}\boxed{}_{(10)}$ であり，$101101_{(2)}=$ $^{エ}\boxed{}_{(8)}$ である。

(3) ある数 $A_{(10)}$ を，

5進法で表すと3桁の数　$aab_{(5)}$

8進法で表すと3桁の数　$baa_{(8)}$

になるという。このとき，$a=$ $^{オ}\boxed{}$，$b=$ $^{カ}\boxed{}$ であり，$A_{(10)}$ は $^{キ}\boxed{}_{(10)}$ である。

(4) $0.43_{(5)}=$ $^{ク}\boxed{}_{(10)}$ である。

ベクトル

$\boxed{13}$ [〔1〕1998 佐賀大，〔2〕2013 福井大]

〔1〕 各辺の長さが1の正四面体OABCに対し，辺OBを2：1に内分する点をD，辺OCを2等分する点をE，辺BCを2等分する点をFとする．線分DEと線分OFとの交点をGとするとき

(1) 線分OGの長さを求めよ．

(2) 線分AGの長さを求めよ．

〔2〕 四面体OABCの各辺の長さをそれぞれ$AB=\sqrt{7}$，$BC=3$，$CA=\sqrt{5}$，$OA=2$，$OB=\sqrt{3}$，$OC=\sqrt{7}$ とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) 内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$ を求めよ。

(2) 三角形OABを含む平面をαとし，点Cから平面αに下ろした垂線とαとの交点をHとする。このとき，$\overrightarrow{OH}$ を$\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(3) 四面体OABCの体積を求めよ。

$\boxed{14}$ [〔1〕1999 近畿大，〔2〕2015 北里大]

〔1〕 三角形ABCにおいて，$AB=3$，$BC=4$，$CA=2$ とする．このとき，$\angle A$ と $\angle B$ の2等分線の交点をIとすると，$\overrightarrow{AI}=$ ア$\boxed{}$ $\overrightarrow{AB}+$ イ$\boxed{}$ $\overrightarrow{AC}$ である．また，三角形ABCの面積は ウ$\boxed{}$ であり，三角形IBCの面積は エ$\boxed{}$ である．

〔2〕 $\triangle ABC$ において，$AB=3$，$AC=4$，$\angle A=\dfrac{\pi}{3}$ である。$\triangle ABC$ の外心をOとする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とおく。

(1) $\triangle ABC$ の外接円の半径は ア$\boxed{}$ である。

(2) $\overrightarrow{AO}$ を$\vec{b}$と$\vec{c}$を用いて表すと$\overrightarrow{AO}=$ イ$\boxed{}$ $\vec{b}+$ ウ$\boxed{}$ $\vec{c}$ である。

(3) 直線BOと辺ACの交点をPとするとき，AP：PCは エ$\boxed{}$ である。

$\boxed{15}$ [〔1〕1998 鳥取大，〔2〕2000 神戸大]

〔1〕 平面上において同一直線上にない異なる3点A, B, Cがあるとき，次の各問いに対して，それぞれの式を満たす点Pの集合を求めよ.

(1) $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AC}$

(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$

(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AP}\leqq\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}$

〔2〕 $\triangle ABC$において$\overrightarrow{CA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{CB}=\vec{b}$とする.

(1) 実数s，tが$0\leqq s+t\leqq 1$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$の範囲を動くとき，次の条件(a)，(b)を満たす点Pの存在する範囲をそれぞれ図示せよ.

(a) $\overrightarrow{CP}=s\vec{a}+t(\vec{a}+\vec{b})$

(b) $\overrightarrow{CP}=(2s+t)\vec{a}+(s-t)\vec{b}$

(2) (1)の(a)，(b)それぞれの場合に，点Pの存在する範囲の面積は$\triangle ABC$の面積の何倍か.

$\boxed{16}$ [2006 大分大]

空間内に4点A(0, 0, 0)，B(2, 1, 1)，C(−2, 2, −4)，D(1, 2, −4)がある。

(1) $\angle BAC=\theta$とおくとき，$\cos\theta$の値と$\triangle ABC$の面積を求めよ。

(2) $\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{AC}$の両方に垂直なベクトルを1つ求めよ。

(3) 点Dから，3点A，B，Cを含む平面に垂直な直線を引き，その交点をEとするとき，線分DEの長さを求めよ。

(4) 四面体ABCDの体積を求めよ。

数列

$\boxed{17}$ [2006 名古屋市立大]

数列 1，1，3，1，3，5，1，3，5，7，1，3，5，7，9，1，…… において，次の問いに答えよ。ただし，k，m，n は自然数とする。

(1) $k+1$ 回目に現れる 1 は第何項か。

(2) m 回目に現れる 17 は第何項か。

(3) 初項から $k+1$ 回目の 1 までの項の和を求めよ。

(4) 初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，$S_n>1300$ となる最小の n を求めよ。

$\boxed{18}$ [〔1〕2005 岐阜大，〔2〕2009 秋田大]

〔1〕 次の条件で定まる数列 $\{a_n\}$ について，以下の問いに答えよ。

$$a_1=3,\ a_{n+1}=3a_n+2n+3\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1) $b_n=a_n+n+2\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定まる数列 $\{b_n\}$ は等比数列となることを示せ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を求めよ。

〔2〕 数列 $\{a_n\}$ を次の式

$$a_1=1,\ a_2=3,\ a_{n+2}+a_{n+1}-6a_n=0\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定める。また，α と β を

$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

を満たす実数とする。ただし，$\alpha<\beta$ とする。

(1) a_3，a_4 を求めよ。

(2) α，β を求めよ。

(3) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対し $b_n=a_{n+1}-\alpha a_n$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(4) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対し $c_n=a_{n+1}-\beta a_n$ とおくとき，数列 $\{c_n\}$ は等比数列である。数列 $\{c_n\}$ の公比と一般項を求めよ。

(5) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{19}$ [〔1〕2019 京都産業大，〔2〕2009 新潟大]

〔1〕 和 $S=\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}(2k-1)$ を n の式で表すと $\boxed{}$ である。

〔2〕 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1=\frac{1}{6},\ \frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=2 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

を満たしている。また数列 $\{b_n\}$ は

$$b_1=8a_1a_2,\ b_{n+1}-b_n=8a_{n+1}a_{n+2} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

を満たしている。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n を用いて表せ。

(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を n を用いて表せ。

$\boxed{20}$ [2017 大分大]

$a_1=3,\ \sum_{k=1}^{n+1} a_k=4a_n+1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) n を 2 以上の自然数とするとき，a_{n+1} を a_n，a_{n-1} で表せ。

(2) $a_{n+1}-2a_n$ を n の式で表せ。

(3) a_n を n の式で表せ。

関数，図形と方程式

$\boxed{21}$ [〔1〕2010 津田塾大，〔2〕2019 同志社大]

〔1〕 座標平面上で点 $(0,\ 2)$ を中心とする半径 1 の円を C とする。C に外接し x 軸に接する円の中心 $\mathrm{P}(a,\ b)$ が描く図形の方程式を求めよ。

〔2〕 k を実数とし，放物線 $C : y=x^2-3x-1$ と直線 $\ell : y=kx-(k^2+1)$ について考える。放物線 C と直線 ℓ とが異なる 2 点 P と Q とで交わるための k の値の範囲は ${}^{ア}\boxed{} < k < {}^{イ}\boxed{}$ である。このとき，この線分 PQ の中点 M の x 座標は ${}^{ウ}\boxed{}$ であり，y 座標は ${}^{エ}\boxed{}$ である。また，k の値が変化するとき，中点 M の軌跡を表す方程式は $y={}^{オ}\boxed{}$ であり，x の値の範囲は ${}^{カ}\boxed{} < x < {}^{キ}\boxed{}$ である。

$\boxed{22}$ [2003 大阪市立大]

実数 a，b に対し，x についての 2 次方程式 $x^2-2ax+b=0$ は，$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつとする．このとき，a，b が満たす条件を求め，点 $(a,\ b)$ の存在範囲を図示せよ．

$\boxed{23}$ [2015 宮崎大]

座標平面において，連立不等式

$$\begin{cases} \log_2(2y+x+10) \leqq \log_2(10-x)+\log_8(x+1)^3 \\ \log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x}{6} \geqq 0 \end{cases}$$

を満たす点$(x,\ y)$の全体が表す図形をDとするとき，次の各問いに答えよ。

(1) 図形Dを図示せよ。

(2) 図形D上の点$(x,\ y)$に対し，$x-y$のとりうる値の範囲を求めよ。

$\boxed{24}$ [[1] 2009 関西大，[2] 2020 島根大]

[1] 原点がOである座標平面上に点A(7, 1)がある。また，直線$y=\dfrac{x}{2}$をℓとする。

(1) x軸に関して点Aと対称な点Bの座標は$^{ア}\boxed{}$であり，直線ℓに関して点Aと対称な点Cの座標は$^{イ}\boxed{}$である。

(2) 点Pはx軸上を動き，点Qは直線ℓ上を動くものとする。このとき，AP＋PQ＋QA を最小にする点Pの座標は$^{ウ}\boxed{}$であり，Qの座標は$^{エ}\boxed{}$である。

[2] $a \fallingdotseq 1$とする。円$C_1: x^2+y^2-4ax-2ay=5-10a$，円$C_2: x^2+y^2=10$，円$C_3: x^2+y^2-8x-6y=-10$について，次の問いに答えよ。

(1) 円C_1が原点を通るとき，円C_1の中心と半径を求めよ。

(2) 定数aの値にかかわらず円C_1は定点Aを通る。この定点Aの座標を求めよ。

(3) 円C_2と円C_3の2つの交点と原点を通る円の中心と半径を求めよ。

【数Ⅱ】微積分

$\boxed{25}$ [2004 名古屋大]

a を実数とする．$f(x)=x^3+ax^2+(3a-6)x+5$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $y=f(x)$ が極値をもつ a の値の範囲を求めよ．

(2) 関数 $y=f(x)$ が極値をもつ a に対して，関数 $y=f(x)$ は $x=p$ で極大値，$x=q$ で極小値をとるとする．関数 $y=f(x)$ のグラフ上の2点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ を結ぶ直線の傾き m を a を用いて表せ．

$\boxed{26}$ [2015 東京電機大]

曲線 C : $y=|x^2-4|$ と直線 ℓ : $y=2x+4$ で囲まれた2つの図形の面積の和を求めよ。

$\boxed{27}$ [2015 東京理科大]

$a>0$ を定数とし，座標平面上の点 P$(p,\ 0)$ から放物線 $C: y=ax^2+2a$ に 2 本の接線 PQ_1，PQ_2 を引く。ここで Q_1，Q_2 は接点で，Q_1 の x 座標 q_1 は Q_2 の x 座標 q_2 より小さいとする。

(1) q_1 と q_2 を，p を用いて表せ。

(2) 直線 Q_1Q_2 の方程式を，a と p を用いて表せ。

(3) S_1 を直線 Q_1Q_2 と曲線 C で囲まれた部分の面積，S_2 を曲線 C と線分 PQ_1，PQ_2 で囲まれた部分の面積とする。S_1 と S_2 を，a と p を用いて表し，$\dfrac{S_1}{S_2}$ の値を求めよ。

(4) $PQ_1 \perp PQ_2$ となるとき，a の値を求めよ。

$\boxed{28}$ [〔1〕2014 中央大，〔2〕2012 埼玉大]

〔1〕 $f(x)+\int_0^1 xf(t)\,dt=x^2$ となる関数 $f(x)$ を求めよ。

〔2〕 次の関係式を満たす定数 a および関数 $g(x)$ を求めよ。

$$\int_a^x (g(t)+tg(a))\,dt=x^2-2x-3$$

命題と論証

$\boxed{29}$ [〔1〕2008 群馬大，〔2〕2018 東京都市大]

〔1〕 次の$\boxed{}$に，必要条件である，十分条件である，必要十分条件である，必要条件でも十分条件でもない，のうち，最も適当であるものをあてはめよ。また，その理由を書け。

(1) $|x+1|>|x-1|>|x-2|$ は $-1<x<2$ であるための$\boxed{}$。

(2) $|x+1|<|x-1|<|x-2|$ は $x<-1$ であるための$\boxed{}$。

〔2〕 x を実数とし，a，b を正の定数とする。「$|2x-3|\leqq 4$」を条件 p，「$(x-1)^2\leqq a$」を条件 q，「$(x-b)^2\geqq 1$」を条件 r とする。このとき，p を満たす x の値の範囲は ${}^{ア}\boxed{}$ である。

p が q の十分条件であるとき，a のとりうる値の範囲は ${}^{イ}\boxed{}$ である。p が r の十分条件であるとき，b のとりうる値の範囲は ${}^{ウ}\boxed{}$ である。

$\boxed{30}$ [〔1〕2009 広島大，〔2〕2014 鹿児島大]

〔1〕 以下のそれぞれの命題が真であるか偽であるかを答え，真の場合は証明を，偽の場合は反例を示せ。

(1) $x<y$ ならば $x^2<y^2$ である。

(2) $\log_2 x=\log_3 y$ ならば $x\leqq y$ である。

(3) 微分可能な関数 $f(x)$ が $f'(a)=0$ を満たすならば，$f(x)$ は $x=a$ において極値をとる。

(4) n が 2 以上の自然数ならば，$1+2+\cdots\cdots+n$ の約数の中に 3 以上の奇数がある。

〔2〕 正の実数 x，y に関する次の各命題の真偽を述べよ。また，真ならば証明し，偽ならば反例をあげよ。

(1) x が無理数かつ y が有理数ならば，その和 $x+y$ は無理数である。

(2) x が無理数かつ y が無理数ならば，その和 $x+y$ は無理数である。