

流体力学

福島 肇

2024 年 11 月 17 日

目次

1	流体の場合	4
1.1	流体素片	4
1.2	運動の記述	4
1.2.1	流線	4
1.2.2	粒跡線	4
1.2.3	流条線	4
1.3	ラグランジュ微分	5
1.4	相対運動	5
1.4.1	純変形運動	6
1.4.2	局所剛体回転運動	7
2	基礎方程式	8
2.1	質量の保存	8
2.2	運動量の保存	9
2.2.1	面積力と体積力	9
2.2.2	完全流体の運動方程式	9
2.2.3	粘性	10
2.2.4	粘性流体の運動方程式	10
2.3	エネルギーの保存	12
2.3.1	完全流体の場合	12
2.3.2	粘性流体の場合	13
3	完全流体	14
3.1	基礎方程式と境界条件	14
3.2	ベルヌーイの定理	14
3.3	ケルヴィンの循環定理	15
3.4	渦なしの流れ (ポテンシャル流)	16
4	水波	17
4.1	静水圧	17
4.2	深い水の表面波	18
4.2.1	境界条件 1: 表面圧力の条件	18
4.2.2	境界条件 2: 表面運動の条件	19
4.2.3	境界条件 3: 深部での条件	19
4.3	微小振幅の波	19
4.3.1	方程式と境界条件	19
4.3.2	進行波の解	20
4.3.3	微小振幅の意味	20
4.3.4	位相速度と群速度	21
4.3.5	有限の深さの表面波	21

5	渦運動	21
5.1	渦度方程式	22
5.1.1	非粘性流体の場合	22
5.2	ヘルムホルツの渦定理	22
6	音波と衝撃波	23
6.1	音波	23
7	粘性流体の流れ	25
7.1	レイノルズ数	25
7.2	レイノルズ数と相似法則	26

1 流体の場

1.1 流体素片

流体とは、空気や水などの液体や気体のように決まった形を持たず、容易に変形する物質の総称である。これまでの力学で行ってきたように、物質の運動を記述する際に、個々の粒子の運動を計算できれば良いが、流体を構成する分子や原子は莫大な数になるため、現実的には不可能である。そこで流体力学では、速度や密度、エネルギーといった物理量が流体中に連続的に分布する物質であるときみなして運動を記述する。

上記の物理量は、空間のある一部分の平均量を表す物理量であるが、その空間を流体素片と呼ぶことにする。流体力学では、この仮想的な粒子である流体素片の物理量の変化を記述する。それでは、物理量の平均値を記述できる流体素片の大きさのスケール (l) について考察する。もし、流体素片が非常に小さく、流体を構成している粒子の出入りに影響を受けてしまうと、激しく時間変動し物理量が連続的に分布しなくなる。このため、粒子同士が移動してぶつかるスケール (λ , 平均自由行程という) よりも、流体素片が大きくなる必要があり、つまり $l \gg \lambda$ を満たすことが必要である。

1.2 運動の記述

流体力学では、流体を連続的に変化する流体場としてみなす場合と、各流体素片の物理量に着目した2つの記述法がある。これらは各々オイラー的記述とラグランジュ的記述と呼び、以下のように物理量を定義する。

- オイラー的記述: 座標点 \boldsymbol{x} における物理量の変化を記載する方法。物理量は座標 \boldsymbol{x} と時刻 t の関数となる。
- ラグランジュ的記述: 各流体素片における物理量の変化について記載する方法。

上記の記述法と関連して、流体の速度の様子を示す、流線・粒跡線・流条線を紹介する。流体場が定常である場合は、流線・粒跡線・流条線は一致する。

1.2.1 流線

流線は流体場における速度ベクトル \boldsymbol{v} が各点での接線となるように結んだ曲線である。このため、流線は各時刻 t ごとに決まる。流線は流体を流体場としてみた場合の描像なので、オイラー的記述における流体の流れの様子を表す。

1.2.2 粒跡線

粒跡線は、初期時刻 t_0 に座標 \boldsymbol{a} における流体素片がたどる経路として定義される。例えば、小川に笹舟を浮かべた際に、笹舟がたどる経路が粒跡線に対応する。粒跡線は流体素片がたどる経路なので、ラグランジュ的記述に対応している。

1.2.3 流条線

流条線は、ある点を各時間に通過した流体素片を繋いだ線として定義される。

1.3 ラグランジュ微分

流体力学では、力学などと同様に偏微分方程式を用いて運動を記述する。この際、流体を粒子に見立てた流体素片についての運動を考えた方が見通しが良い場合が多い。一方、ある点の物理量の時間変化を考えたいときは、オイラー的な記述が適当である。そこで、この節では流体素片における物理量の時間微分 (ラグランジュ的記述) が流体場において (オイラー的記述)、どのように表されるかを調べてみる。

ラグランジュ的記述において、粒子 a の時刻 t での座標と速度を $\mathbf{X}_a(t) = (X, Y, Z)$, $\mathbf{v}_a(t) = (v_{x,a}, v_{y,a}, v_{z,a})$ とすると、粒子 a の位置での温度 $T_a(t) = T(\mathbf{X}_a, t)$ の変化は、微分の連鎖律を用いると、

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} T_a(t) &= \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{dX}{dt} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{dY}{dt} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{dZ}{dt} \frac{\partial T}{\partial z} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) T. \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $dX/dt = v_x$ の関係を用いた (y, z 方向についても同じ)。上の式の左辺での D/Dt は、ラグランジュ的記述における微分であることを表す。また、温度以外の物理量についても同様に記述できる。これより、ラグランジュ微分とオイラー微分の関係式は

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (2)$$

となる。また、微分演算子 $\nabla = \text{grad}$ を用いると、

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad}, \quad (3)$$

となる。

また、このノートではベクトルの縮約を以下のように用いる。

$$\mathbf{v} \cdot \text{grad} = \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial}{\partial x_i} = v_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (4)$$

上の式では、添え字の i が重なっているが、この場合は $i = 1, 2, 3$ について加算することを表す。また、 $i = 1, 2, 3$ は各々 x, y, z 方向に対応する (例: $\partial/\partial x_2 = \partial/\partial y$)。

1.4 相対運動

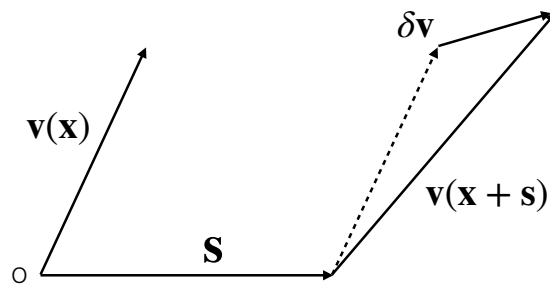


図 1: 隣接する 2 点の速度差

流体は剛体とは異なり、近接した2点間であっても一様に動くとは限らない。このため、近接2点間の局所的な運動に関して、どのような種類があるかを調べてみる。隣接する2点、点 $O(\mathbf{x})$ での速度を \mathbf{v} 、その近傍点 $P(\mathbf{x} + \mathbf{s})$ での速度を $\mathbf{v} + \delta\mathbf{v}$ とし、その流体速度の差 $\delta\mathbf{v}$ を求める (図1参照)。この2点の速度差は、

$$\delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{s}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{s} \cdot \nabla)\mathbf{v}, \quad (5)$$

となる。ここで、成分表示すると

$$\delta v_i = s_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}. \quad (6)$$

$\partial v_i / \partial x_j$ を次のように変形する。

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = e_{ij} + g_{ij}, \quad (7)$$

ここで、

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (8)$$

$$g_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (9)$$

となる。 e_{ij} と g_{ij} は2階のテンソルで、各々添字の入れ替えについて $e_{ij} = e_{ji}$ と $g_{ij} = -g_{ji}$ を満たすために、対称テンソルと反対称テンソルである。まとめると、近接2点間の速度差 $\delta\mathbf{v}$ は、 $\delta v_i^{(s)} = e_{ij}s_j$ と $\delta v_i^{(a)} = g_{ij}s_j$ とおくと、

$$\delta v_i = e_{ij}s_j + g_{ij}s_j = \delta v_i^{(s)} + \delta v_i^{(a)}, \quad (10)$$

と対称・反対称テンソルが表される成分に分解されることがわかる。次に、 e_{ij} と g_{ij} が持つ意味について考えてみる。

1.4.1 純変形運動

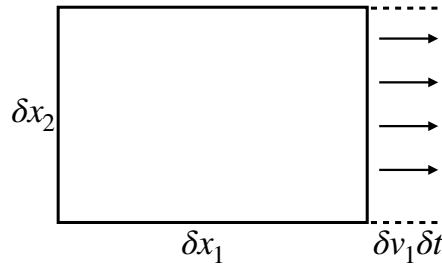


図 2: 純変形運動の様子

簡単のため、 e_{11} 以外の成分が0の場合を考える。この際、

$$\delta v_1 = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \delta x_1 = e_{11} \delta x_1, \quad (11)$$

$$\delta v_2 = \delta v_3 = 0, \quad (12)$$

となる。これはちょうど、図 2 に示すように、微小な流体中の直方体が、時刻 δt 後には、 x 方向に $\delta v_1 \delta t = e_{11} \delta x_1 \delta t$ だけ長くなることを表している。この時の直方体の体積は $\delta V = \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3$ なので、 δt 後の体積は、

$$\begin{aligned}\delta V' &= \prod_{i=1}^3 (\delta x_i + \delta v_i \delta t) \\ &= [1 + (e_{11} + e_{22} + e_{33} \delta t)] \delta V,\end{aligned}\tag{13}$$

となる。故に、 e_{ij} の対角成分の和

$$\begin{aligned}e_{11} + e_{22} + e_{33} &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \\ &= \operatorname{div} \mathbf{v} \equiv D,\end{aligned}\tag{14}$$

は体積変化を表す。ここで、 e_{ij} は変形速度テンソルと呼ばれる。また、変形速度テンソルを用いて、次の体積保存の変形テンソルを定義できる

$$D_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{3} D \delta_{ij}.\tag{15}$$

ちなみに、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。

1.4.2 局所剛体回転運動

まず、新しく渦度ベクトルは次のように定義される。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= \nabla \times \mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{v} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (v_x, v_y, v_z) \\ &= \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right).\end{aligned}\tag{16}$$

成分表示すると、

$$(\nabla \times \mathbf{v})_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial v_j}.\tag{17}$$

ここで、 ε_{ijk} は Levi-Civita 記号である。この渦度ベクトルを用いると、反対称テンソル g_{ij} は

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 & g_{12} & g_{13} \\ -g_{12} & 0 & g_{23} \\ -g_{13} & -g_{23} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},\tag{18}$$

となる。式 (12) と同様に、 ω_3 だけ 0 でない場合には、

$$\delta v_1 = -\frac{1}{2} \omega_3 \delta x_2,\tag{19}$$

$$\delta v_2 = \frac{1}{2} \omega_3 \delta x_1,\tag{20}$$

$$\delta v_3 = 0,\tag{21}$$

となる。この運動は図 2 の直方体を回転させる運動に相当する。このため、 g_{ij} は局所剛体回転を表す。

2 基礎方程式

流体の運動は節 1.2 で述べたように、オイラー的記述により場として表現される。流体の場の運動は、保存則によって決まる式により記述され、それは力学における 3 つの保存則、質量の保存、運動量の保存、エネルギーの保存によって決まる。この節では、これらの保存則から流体の基礎方程式を導出する。また、これらの保存則を適用するのにあたり、接する領域ごとに各保存が移動する。これは、輸送現象と呼ばれ、流体の基礎方程式の中に組み込む必要がある。

2.1 質量の保存

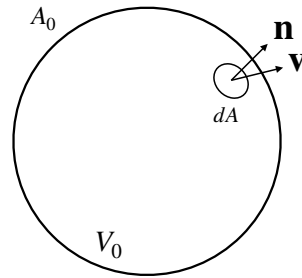


図 3: 体積 V_0 の様子

時刻 t に空間に固定した体積 V_0 の質量は (図 3 参照)

$$M_0(t) = \int_{V_0} \rho dV, \quad (22)$$

となる。この質量の時間変化は、

$$\frac{\partial}{\partial t} M_0(t) = \int_{V_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV, \quad (23)$$

となる。体積 V_0 の面要素 dA での単位時間あたりの流出量は

$$\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA, \quad (24)$$

となる。ここで \mathbf{n} は面要素 dA での法線ベクトルを表す。体積 V_0 全体から流出する総量は、ガウスの定理を用いると

$$\int_{A_0} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = \int_{V_0} \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV, \quad (25)$$

となる。この値は、全体の質量 M_0 の時間変化と一致するはずなので、式 (23) と (25) より、質量保存の式は、

$$\int_{V_0} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0, \quad (26)$$

となる。今、体積 V_0 は任意に選んだ領域なので、式 26 は、 V_0 の選び方によらず成り立つ必要がある。このため、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (27)$$

が成り立つ。この式は連続の式と呼ばれ、質量の保存則に対応する。また、連続の式は、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (28)$$

と変形できる。流体素片の密度が時間で変化しない、非圧縮流体では、 $D\rho/Dt = 0$ なので、

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (29)$$

が成り立つ。

2.2 運動量の保存

2.2.1 面積力と体積力

次に運動量の保存について考える。力学における質点とは異なり、となりあった流体素片の境界面では絶えず分子運動により、分子が行き来している。例えば、流体素片間に速度差がある場合には、流体素片間を分子が行き来することで、運動量が次第に輸送される。また、圧力差がある場合にも圧力による力が生じる。このように、流体素片の境界面において働く短距離力のことを面積力と言う。ここでは、図3で示したような、流体中の微小面積要素 dA と、その法線ベクトル \mathbf{n} を考える。微小面積要素の \mathbf{n} と同じ向きを正の側として、反対側を負の側とする。 dA の正の側から負の側に作用する面積力は

$$\mathbf{F}(\mathbf{n})dA = (\sigma_{xn}, \sigma_{yn}, \sigma_{zn})dA, \quad (30)$$

と書く。 $\mathbf{F}(\mathbf{n})$ は単位面積あたりの面積力を表し、応力と呼ばれる。流体が運動していない場合でも、常に圧力が面積力として作用する。圧力は常に面に垂直の成分を持ち、

$$\mathbf{F}^{(p)}(\mathbf{n})dA = (-pn_x, -pn_y, -pn_z)dA, \quad (31)$$

となる。また、一般的な応力は応力テンソル σ_{ij} を用いて、

$$\mathbf{F}^{(p)}(\mathbf{n})dA = \sigma_{ij}n_j dA, \quad (32)$$

となる。右辺では和の縮約をとっている。また、重力などの長距離力として、流体内部まで直接作用する力のことを体積力と呼ぶ。

2.2.2 完全流体の運動方程式

面積力として圧力のみを考慮する流体を完全流体と呼ぶ。図3で体積 V_0 の表面 A_0 に働く全圧力は、

$$-\int_{A_0} p \mathbf{n} dA = -\int_{V_0} \operatorname{grad} p dV. \quad (33)$$

これより、単位体積あたりに働く圧力は $-\operatorname{grad} p$ である。流体素片についての運動方程式は、外力を \mathbf{f} とすると、

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\operatorname{grad} p + \rho \mathbf{f}, \quad (34)$$

となる。式(34)では、流体素片についての運動方程式なので、ラグランジュ記述を用いている。これをオイラー記述にすると、流体場の運動方程式を以下のように得ることができる。

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v} \right] = -\operatorname{grad} p + \rho \mathbf{f}, \quad (35)$$

となる。この式は、オイラーの運動方程式と呼ばれる。左辺の \mathbf{v} の 2 次項を非線形項（移流項）という。

次に、運動方程式を保存形で記述する。運動量密度 $\rho \mathbf{v}$ の時間変化は、

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = \frac{\partial \rho}{\partial t} v_i + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t}, \quad (36)$$

となる。ここで、連続の式 (27) とオイラーの運動方程式 (35) を用いると、

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\frac{\partial(\rho v_k v_i)}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho f_i, \quad (37)$$

となる。ここで、運動量流束テンソル $P_{ik} = \rho v_k v_i + p \delta_{ik}$ を用いると、

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_k} P_{ik} = \rho f_i, \quad (38)$$

と運動量の保存形式でかける。

2.2.3 粘性

この節でも述べたように、接する流体素片間をミクロな視点で見ると、絶えず分子が境界面を行き来しているはずである。流体素片間に速度差がある場合を考える。例えば、 x 方向に速度の早い流体素片から遅い方へ移動した分子達は、平均としては遅い流体素片よりも x 方向に少し早い速度を持つ。このため、遅い流体素片は少し x 方向に加速される（逆方向についても同様に言える）。このようにミクロな粒子の運動で流体素片間に速度差がある場合に運動量輸送が起こるが、これはマクロな視点で見ると面積力として表現される。図 3 の微小面積要素 dA を考え、この面を正の方向に通過する運動量の i 成分は、 $\sigma_{ij}^{(v)} n_j dA$ と表され、 $\sigma_{ij}^{(v)}$ は応力テンソルと言われる。

次に、応力テンソルの具体的な形について考察する。流体素片間の速度差が小さいとすると、粘性は速度勾配 ($\partial v_i / \partial x_k$) の 1 次式で記載される。また、粘性は流体素片間の速度差によって生じるため、流体が一樣回転している場合には、運動量の輸送は粘性によって生じない。ここで、節 1.4 で相対運動は、純変形運動と局所剛体回転運動にわけることができることを議論した。つまり、粘性で考慮すべきなのは、純変形運動の成分であるため、粘性応力テンソル $\sigma_{ij}^{(v)}$ は変形速度テンソル e_{ij} の多項式で表される。さらに、変形速度テンソル e_{ij} は、式 (15) のように体積保存・非保存を表すテンソル D_{ij} と $D\delta_{ij}$ に分解できるように、純変形運動も体積保存と非保存の 2 つの運動に分解される。この 2 種類の変形運動に起因する粘性による運動量輸送の効率は異なることが予想されるため、これを考慮すると、粘性テンソルは次のように表される

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(v)} &= 2\mu D_{ij} + \zeta D\delta_{ij} \\ &= \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \mathbf{v} \delta_{ij} \right) + \zeta \operatorname{div} \mathbf{v} \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (39)$$

ここで、 μ をずり粘性率、 ζ を体積粘性率と呼ぶ。このように、応力を表せる流体をニュートン流体と呼ぶ。

2.2.4 粘性流体の運動方程式

まず、圧力の寄与まで考慮した全応力テンソルを

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij}^{(v)}, \quad (40)$$

と定義する。また、完全流体の運動量の保存形式の式 (38) で用いた運動量流速テンソルについても粘性の寄与まで考慮すると

$$P_{ik}^{(v)} = \rho v_i v_k + p \delta_{ik} - \sigma_{ij}^{(v)}, \quad (41)$$

となる。よって、粘性流体の運動量保存則は、

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_k} P_{ik}^{(v)} = \rho f_i, \quad (42)$$

となる。さらに、この式は、

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \sigma_{ik}^{(v)} + \rho f_i, \quad (43)$$

となる。ここで、式 (39) のニュートン流体の粘性応力を用いると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ik}^{(v)}}{\partial x_k} &= \mu \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} + \frac{\partial D}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial D}{\partial x_i} \right) + \zeta \frac{\partial D}{\partial x_i} \\ &= \mu \Delta v_i + \left(\frac{1}{3} \mu + \zeta \right) \frac{\partial D}{\partial x_i}, \end{aligned} \quad (44)$$

この式を (43) に代入すると、

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta v_i + \left(\frac{1}{3} \mu + \zeta \right) \frac{\partial D}{\partial x_i} + \rho f_i, \quad (45)$$

となる。この式は、ナヴィエ-ストークス方程式と呼ばれる。さらに、非圧縮流体の ($D = \text{div } \mathbf{v} = 0$) の場合には、

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta v_i + f_i, \quad (46)$$

となる。 $\nu = \mu/\rho$ は動粘性係数と言われる。

次に、非圧縮かつ外力が保存力 $\mathbf{f} = -\nabla \chi$ のとき、渦度 $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}$ と

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}, \quad (47)$$

を用いると、式 (46) は、

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + \chi \right) + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad (48)$$

さらに両辺に rot をかけ、 $\text{rot grad} = 0$ を用いると、

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = \nu \Delta \boldsymbol{\omega}, \quad (49)$$

となる。次に、

$$\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \quad (50)$$

を式 (49) に代入すると、

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}, \quad (51)$$

$$\frac{D \boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}, \quad (52)$$

となる。式 (49) と (51), (52) はいずれも渦度方程式と呼ばれる。

2.3 エネルギーの保存

2.3.1 完全流体の場合

完全流体は圧力以外に流体素片間で運動量・エネルギー輸送に寄与する機構がない流体である。このため、熱伝導がないために、完全流体の運動は断熱的、つまりエントロピーに変化がない。流体素片の断熱運動では

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) s = 0, \quad (53)$$

となる。連続の式 (27) と組み合わせると、

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho s \mathbf{v}) = 0, \quad (54)$$

となる。

次に、単位体積あたりの全エネルギー $(\rho v^2/2 + \rho e)$ の時間変化を考える。ここで e は内部エネルギーを表す。内部エネルギーは熱力学関係式より、微小の変化について比体積を $V = 1/\rho$ とすると

$$de = Tds - pdV = Tds + \frac{p}{\rho^2} d\rho, \quad (55)$$

を満たす。また、エンタルピー $h = e + pV$ についても同様に、

$$dh = Tds + Vdp = Tds + \frac{1}{\rho} dp, \quad (56)$$

となる。まず全エネルギーの運動エネルギーの項の時間微分について

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) &= \frac{1}{2} v^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho v_i \frac{\partial v_i}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\rho v_k \left(\frac{v^2}{2} \right) \right] - v_k \frac{\partial p}{\partial x_k} + \rho v_k f_k, \end{aligned} \quad (57)$$

ちなみに、2つ目のイコールで連続の式 (27) とオイラー方程式 (35) を用いて変形した。ここで、熱力学関係式 (56) から $dp = \rho dh - \rho T ds$ を用いると

$$-v_k \frac{\partial p}{\partial x_k} = -\rho v_x \frac{\partial h}{\partial x_k} + \rho T v_k \frac{\partial s}{\partial x_k}, \quad (58)$$

となる。これを式 (57) に代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\rho v_k \left(\frac{v^2}{2} \right) \right] - \rho v_k \frac{\partial h}{\partial x_k} + \rho T v_k \frac{\partial s}{\partial x_k} + \rho v_k f_k, \quad (59)$$

となる。また、式 (55) から

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho e) &= e \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left(T \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \\ &= h \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho T \frac{\partial s}{\partial t} \\ &= -h \frac{\partial (\rho v_k)}{\partial x_k} + \rho T \frac{\partial s}{\partial t}, \end{aligned} \quad (60)$$

3つめの等号で連続の式 (27) を用いた。式 (59) と (60)、断熱の式 (53) を組み合わせると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho e \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\rho v_k \left(\frac{v^2}{2} + h \right) \right] = \rho v_k f_k, \quad (61)$$

とエネルギー保存則の式を得る。ここで、エネルギー流束が $\rho v_k (v^2/2 + h)$ と運動エネルギーの項とエンタルピーになっている。ここが内部エネルギー e でないのは、内部エネルギーの流入に加えて圧力によって行われる仕事の寄与が含まれているためである。

2.3.2 粘性流体の場合

粘性流体の場合には、完全流体で議論したものに加え、粘性の寄与、そして熱伝導の効果を考慮する必要がある。ある流体素片がある場合に、体積力から受ける仕事率は

$$\int_V v f_i \rho dV, \quad (62)$$

となる。面積力からの仕事率は、

$$\begin{aligned} \int_S v_i \sigma_{ik} n_k dS &= \int_V \frac{\partial}{\partial x_k} (v_i \sigma_{ik}) dV \\ &= \int_V \left(v_i \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \sigma_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) dV, \end{aligned} \quad (63)$$

となる。よって単位質量あたりの仕事率は、

$$\begin{aligned} \delta W &= v_i f_i + v_i \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho} \sigma_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \\ &= \frac{1}{2} \frac{Dv^2}{Dt} + \frac{1}{\rho} \sigma_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}, \end{aligned} \quad (64)$$

ここで、2つ目の等号で運動方程式 (43) を用いて変形した。

次に、熱伝導について考える。粘性では運動量の輸送について考察したが、同様に流体素片間を分子が移動することにより、エネルギーの輸送もおこる。このときの、粘性ベクトルでの議論と同様に、温度分布が連続的であり温度勾配が大きくない場合に、エネルギー輸送を表す熱流束ベクトル \mathbf{q} は

$$\mathbf{q} = -k \text{ grad } T, \quad (65)$$

となる。ここで、 k は熱伝導係数と呼ばれる。この熱伝導がある場合、流体素片が単位時間あたりに得る熱量は、

$$\int_S k \frac{\partial T}{\partial x_k} n_k dS = \int_V \frac{\partial}{\partial x_k} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) dV, \quad (66)$$

となる。よって、単位質量あたりに流体受ける熱量は、

$$\delta Q = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_k} \right), \quad (67)$$

となる。

流体素片の全エネルギーは

$$\Delta E = \frac{1}{2} v^2 + e, \quad (68)$$

である。流体素片についての単位時間あたりの全エネルギーの変化は、体積力・面積力による寄与と、熱伝導の寄与を考慮すると、式 (64) と式 (67) より、

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} v^2 + e \right) = \frac{1}{2} \frac{Dv^2}{Dt} + \frac{1}{\rho} \sigma_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_k} \right), \quad (69)$$

となる。連続の式 (28) と熱力学関係式 (55), 応力テンソル (40) を用いると、

$$T \frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ik}^{(v)} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_k} \right), \quad (70)$$

を得る。この式は、熱伝導方程式と呼ばれる。左辺は、単位質量あたりの熱の獲得量を表す。右辺は、粘性により生じる散逸熱と熱伝導による効果を示す。特に、粘性の散逸熱は、

$$H_{\text{vis}} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ik}^{(v)} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = 2\mu D_{ik}^2 + \zeta D^2, \quad (71)$$

となる。

次に、粘性流体のエネルギー保存の式を導出する。まず全エネルギーの時間微分を求めると

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho e \right) = \left(\frac{1}{2} v^2 + e \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho v_k \frac{\partial v_k}{\partial t} + \rho \frac{\partial e}{\partial t}, \quad (72)$$

これに、連続の式 (28) と運動方程式 (43)、熱力学関係式 (55)、熱伝導方程式 (70) を用いると、次の粘性流体のエネルギー保存則の式を得る、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho e \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\rho v_k \left(\frac{v^2}{2} + h \right) - v_i \sigma_{ik}^{(v)} - k \frac{\partial T}{\partial x_k} \right] = \rho v_k f_k. \quad (73)$$

3 完全流体

3.1 基礎方程式と境界条件

節 2 から完全流体の基礎方程式は、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (74)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \mathbf{f}, \quad (75)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) s = 0, \quad (76)$$

これらは各々、連続の式、オイラー方程式、断熱の式である。また、完全流体は面積力としては、圧力しか運動に寄与しない。これは、流体素片間での速度差による運動量輸送は起きない。特にこの効果は、流体の境界となる速度を持たない物体がある場合に完全流体の特徴を顕著にする。今、ある境界面について、その法線方向の単位ベクトルを \mathbf{n} 、接線方向の単位ベクトルを \mathbf{t} とすると、法線方向の流体速度 $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ は境界の接線方向速度と等しい。一方、接線方向の速度 $v_t = \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}$ については、完全流体は、たとえ境界との間に速度差があっても運動量の輸送は生じないので、境界面の接線方向速度と同じとならなくてよい。

3.2 ベルヌーイの定理

この節では、完全流体の性質を述べていくが、まずはじめにベルヌーイの定理についてみていく。流体のエントロピーが一様の場合、 $ds = 0$ なので、式 (56) より $dh = dp/\rho$ となる。これより、

$$\frac{1}{\rho} \text{grad} p = \text{grad} h, \quad (77)$$

となる。さらに、外力が保存力 $\mathbf{f} = -\text{grad} \chi$ の場合、ベクトル恒等式

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}, \quad (78)$$

を用いると、運動方程式 (75) は、

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\text{grad} \left(\frac{1}{2}v^2 + h + \chi \right), \quad (79)$$

ここで、 $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ である。さらに、定常流を仮定すると式 (79) の左辺の第一項が 0 になるため、

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\text{grad} \left(\frac{1}{2}v^2 + h + \chi \right), \quad (80)$$

となる。 $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ は、 \mathbf{v} に垂直なので、速度 \mathbf{v} に沿った方向（接線方向）のベクトルを \mathbf{s} とすると、 $\mathbf{s} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = 0$ となる。よって、

$$\mathbf{s} \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{2}v^2 + h + \chi \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{2}v^2 + h + \chi \right) = 0, \quad (81)$$

となる。なお s は接線上に定義された座標を表す。この式から、

$$H \equiv \frac{1}{2}v^2 + h + \chi, \quad (82)$$

は、各流線に沿って一定となり、これをベルヌーイの定理と呼ぶ。ベルヌーイの定理は、式が示すように流体素片についての力学的エネルギーの保存則に相当する。また、重力場中の一様密度流体においては、重力ポテンシャルを重力加速度 g を用いて $\chi = gz$ とし、密度を $\rho = \rho_0$ とすると、 $ds = 0$, $d\rho = 0$ から、 $de = 0$ となる。この時、ベルヌーイの定理は、

$$\frac{1}{2}\rho_0 v^2 + p + \rho_0 gz = \text{const}, \quad (83)$$

となる。

3.3 ケルヴィンの循環定理

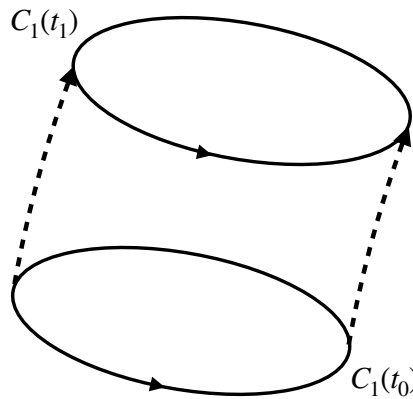


図 4: 循環, 点線は循環上の点の粒跡線になっている

次に、ケルヴィンの循環定理を導出する。循環とは、速度場 $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ の閉曲線に沿った一周積分

$$\Gamma = \oint_{C_1} \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \oint_{C_1} (v_x dx + v_y dy + v_z dz), \quad (84)$$

で定義される。ある閉曲線 C_1 について、

$$\frac{D}{Dt} \Gamma_{C_1} = \frac{D}{Dt} \oint_{C_1} \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0, \quad (85)$$

が成り立つ。これをケルヴィンの循環定理という。図4に示すように、ある閉曲線がつくる循環は時間変化せず一定である ($\Gamma_{C_1} = \text{const}$) ということである。ここでは、このケルヴィンの循環定理を証明する。まず、

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \oint_{C_1} \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\ell} &= \oint_{C_1} \frac{D}{Dt} (\mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\ell}) \\ &= \oint_{C_1} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot d\boldsymbol{\ell} + \oint_{C_1} \mathbf{v} \cdot \frac{D}{Dt} d\boldsymbol{\ell}. \end{aligned} \quad (86)$$

ここで、微小距離離れた2つの点 $\boldsymbol{\ell}$, $\boldsymbol{\ell} + d\boldsymbol{\ell}$ での速度を \mathbf{v} , $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ とすると、

$$d\mathbf{v} = \frac{D}{Dt} (\boldsymbol{\ell} + d\boldsymbol{\ell}) - \frac{D}{Dt} (\boldsymbol{\ell}) = \frac{D}{Dt} d\boldsymbol{\ell}, \quad (87)$$

この式から、

$$\oint_{C_1} \mathbf{v} \cdot \frac{D}{Dt} d\boldsymbol{\ell} = \oint_{C_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \oint_{C_1} d\left(\frac{v^2}{2}\right) = 0. \quad (88)$$

式 (88) の最後の等号は、曲線を一周するとスカラーは同じ値になることを用いた。さらに、完全流体の運動方程式 (75) と式 (77), 外力が保存力とすると、

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\text{grad} (h + \chi), \quad (89)$$

となることを用いると、

$$\oint_{C_1} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot d\boldsymbol{\ell} = - \oint_{C_1} \text{grad} (h + \chi) \cdot d\boldsymbol{\ell} = - \oint_{C_1} d(h + \chi) = 0, \quad (90)$$

となる。これより、ケルヴィンの循環定理の循環定理が成り立つ。

次に循環とケルヴィンの循環定理の意味するところを考察する。渦度ベクトル $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ を接線としてつないだ線を渦線と呼ぶ。ここで、循環について、

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_S \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dA, \quad (91)$$

ここで2つめの等号で、ストークスの定理を用いた。式 (91) の $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dA$ は、微小面積 dA を貫く渦線の束の強さを表す。つまり、循環はそれを定義する閉曲線を貫く渦線束の総量を表す。ケルヴィンの循環定理は、ある閉曲線を貫く渦管の強さは時間変化について不変を意味する。また、1つの閉曲線 C に関する循環 $\Gamma[C]$ は、 C から構成される渦管上で一定となる。

3.4 渦なしの流れ (ポテンシャル流)

全ての点で渦度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ が0の流れを渦なしの流れ、もしくはポテンシャル流と呼ぶ。

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v} = 0, \quad (92)$$

が成り立つことと、任意のベクトル \mathbf{b} について、ベクトル公式 $\text{rot grad } \mathbf{b} = 0$ が成り立つことを用いると、速度場は速度ポテンシャル Φ を用いて、

$$\mathbf{v} = \text{grad } \Phi = \nabla \Phi, \quad (93)$$

とかける。この式と運動方程式 (79)、渦なしの条件 $\omega = 0$ を用いると、

$$\text{grad} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + h + \chi \right) = 0, \quad (94)$$

となる。よって、時間 t だけに依存する関数 $F(t)$ を用いて、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + h + \chi = F(t) + \text{const}, \quad (95)$$

となる。 $-\int F(t)dt$ を Φ に含めて Φ を再定義すると、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + h + \chi = \text{const}, \quad (96)$$

となる。これを運動の積分という。

さらに、渦なしかつ非圧縮流体 (密度 ρ_0) の場合、運動の積分は

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho_0} + \chi = \text{const}, \quad (97)$$

となる。連続の式 (29) に $\mathbf{v} = \text{grad } \Phi$ を代入すると、

$$\Delta \Phi = 0, \quad (98)$$

と速度場は速度ポテンシャルのラプラス方程式により与えられる。また、重力場がある場合には $\chi = gz$ となるため、式 (97) より、

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2}\rho_0 v^2 - \rho_0 gz + c, \quad (99)$$

となる。これより、圧力の総和は、

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= - \int_S p \mathbf{n} dA, \\ &= \int_S \left(\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\rho_0 v^2 + \rho_0 gz \right) \mathbf{n} dA. \end{aligned} \quad (100)$$

この式は、圧力に寄与する力を表して、第一項からそれぞれ、流れが定常でない場合に現れる力、動圧の総和、浮力を表す。

4 水波

この節では、水波について述べる。公園の池などの静かな水面の上をよく見てみると小さな波が水面上を移動しているのをみることがある。これが水波であり、その性質を調べていくことにする。

4.1 静水圧

まず水波の性質を調べるにあたり、水面から下の水がどのような状態にあるのかを調べる。一様重力 $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ の中で静止している流体が満たすべき運動方程式は式 (75) より、

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\text{grad } p + \rho \mathbf{g} = 0, \quad (101)$$

となる。成分表示すると、圧力 p について、

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g, \quad (102)$$

となる。この式から、 x, y 方向については圧力勾配は存在しないが、 z 方向については重力との釣り合いをとるために、圧力勾配が生じている（静水圧平衡）。密度一定の場合（ $\rho = \rho_0$ ）、

$$p = -\rho_0 g z + \text{const}, \quad (103)$$

となる。流体表面（ $z = 0$ ）で圧力 $p = p_0$ （大気圧）とすると、流体内部の圧力は深さ z を用いて

$$p = p_0 - \rho_0 g z, \quad (104)$$

となる。

4.2 深い水の表面波

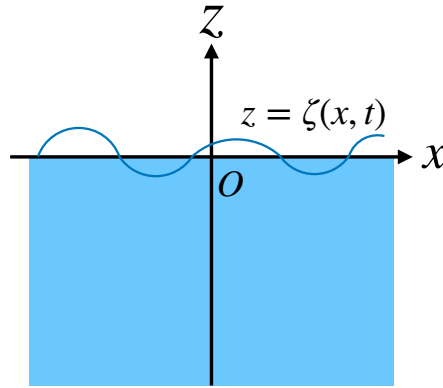


図 5: 水波と表面の変形 ζ の様子

次に、静水圧平衡が成り立つ流体における表面波について考察していく。まず、はじめに深さが十分深い場合（底なし）における表面波について調べていく。静止状態の流体表面は $z = 0$ にあるとする。表面波があると流体面も変形し、その座標を $z = \zeta(x, t)$ とする（図 5 参照）。

非圧縮、渦なしの流体を仮定すると、速度は速度ポテンシャル Φ を用いて式 (93) のようになる。さらに、連続の式から (98) が成り立つが、ここで、簡単のために速度成分は x と z 成分だけしか持たないとする、速度ポテンシャルについて

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad (105)$$

が成り立つ。

4.2.1 境界条件 1: 表面圧力の条件

次に、表面波が満たす境界条件を導出していく。一様密度、渦なし完全流体の運動の積分 (97) に一様重力 $\chi = gz$ を代入すると、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho_0} + gz = C, \quad (106)$$

となる。この式は、静水圧平衡における流体表面でも成立するために、大気圧 p_0 を用いて、 $C = p_0/\rho_0$ となる。また、表面 $z = \zeta(x, t)$ での圧力も p_0 なので、表面波では

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + g\zeta = 0, \quad (107)$$

4.2.2 境界条件 2: 表面運動の条件

表面変形は $z = \zeta(x, t)$ なので、表面では $f(x, z, t) \equiv z - \zeta(x, t) = 0$ が全ての時間で成り立つ。このため

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad (108)$$

となる。ここで、

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 1, \quad (109)$$

を用いると、表面運動についての式

$$-\frac{\partial \zeta}{\partial t} - v_x \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v_z = 0, \quad (110)$$

を得る。

4.2.3 境界条件 3: 深部での条件

水の内部では、運動は減衰するので、

$$v = |\text{grad } \Phi(x, z, t)| = \sqrt{v_x^2 + v_z^2} \rightarrow 0, \quad \text{at } z \rightarrow -\infty, \quad (111)$$

となる。

4.3 微小振幅の波

4.3.1 方程式と境界条件

ラプラス方程式 (105) と得られた境界条件 (107), (110) と (111) について解けば表面波についての解が得られる。ここでは、表面変形 $\zeta(x, t)$ 、速度ポテンシャル Φ と速度 v が十分小さい場合（微小量）について考える。この仮定をおくことで、微量量の2次以上の項を無視して議論する進めることが可能となる。ちなみに、このような操作を行うと、式の項が微量量の一次式で表されることになる。このため、この操作を線形近似とも呼ぶ。

境界条件 1 の表面圧力の条件式 (107) を線形近似すると、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\zeta = 0, \quad (112)$$

となる。さらに、速度ポテンシャル $\Phi(x, z, t)$ を $z = 0$ の周りでテイラー展開すると、

$$\frac{\partial \Phi(x, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial \Phi(x, 0, t)}{\partial t} + \zeta \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Phi(x, 0, t)}{\partial t} \right) + \mathcal{O}(\zeta^2) \rightarrow \frac{\partial \Phi(x, 0, t)}{\partial t}, \quad (113)$$

となる。よって、式 (112) は、

$$\frac{\partial \Phi(x, 0, t)}{\partial t} + g\zeta = 0, \quad (114)$$

となる。境界条件 2 の表面運動の式 (110) についても同様に、

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + v_x \frac{\partial \zeta}{\partial x} = v_z \rightarrow \frac{\partial \zeta}{\partial t} = v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (115)$$

となる。式 (114) を t で微分して式 (115) を用いると、 $z = 0$ で、

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, 0, t)}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad (116)$$

となる。

4.3.2 進行波の解

表面変形が x 方向の進行波として、

$$\Phi = f(z) \sin(kx - \omega t), \quad (117)$$

となる場合を考える。ちなみに、 k は波数、 ω は角振動数である。これをラプラス方程式 (105) に代入すると、

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -k^2 f(z) \sin(kx - \omega t) + \frac{d^2 f(z)}{dz^2} \sin(kx - \omega t) = 0, \quad (118)$$

より、

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} = k^2 f(z). \quad (119)$$

この式の一般解は

$$f(z) = B e^{kz} + C e^{-kz}, \quad (120)$$

であるが、境界条件 (111) より、この値は $z \rightarrow -\infty$ で 0 となる項のみがこのこる (つまり $C = 0$)。これを式 (117) に代入すると、

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, 0, t)}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = (gk - \omega^2) k B e^{kz} \sin(kx - \omega t), \quad (121)$$

より、次の式を得る

$$\omega^2 = gk, \quad (122)$$

この式のように、波数 k と振動数 ω の関係を与える式を分散関係式という。よって、波の表面は境界条件の式 (107) より、

$$\zeta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi(x, 0, t)}{\partial t} = B \frac{\omega}{g} \cos(kx - \omega t) = B \frac{k}{\omega} \cos(kx - \omega t), \quad (123)$$

となる。ちなみに、この波は重力により起こる波なので、表面重力波と呼ばれる。また、速度分布は、

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = k B e^{kz} \cos(kx - \omega t), \quad (124)$$

$$v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = k B e^{kz} \sin(kx - \omega t), \quad (125)$$

となる。速度は、深さとともに指数関数的に減少していく。

4.3.3 微小振幅の意味

表面圧力の条件式 (107) より、 $z = 0$ での進行波の解と分散関係式 (122) を用いると

$$-\omega B \cos(kx - \omega t) + \frac{1}{2} (kB)^2 + \omega B \cos(kx - \omega t) = 0, \quad (126)$$

となる。線形近似では第 2 項が十分小さいとして無視した。この項が他の項と比べて十分小さい条件は、

$$\frac{1}{2} (kB)^2 \ll \omega B, \quad (127)$$

つまり

$$\frac{1}{2} \frac{k^2 B}{\omega} = \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{kB}{\omega} \right) \ll 1, \quad (128)$$

kB/ω は表面波の振幅なので、これは振幅が波長に比べて十分小さいことを意味する。

4.3.4 位相速度と群速度

表面の変位が

$$\zeta = A \sin(kx - \omega t), \quad (129)$$

で与えられる場合、ある位相の一定値 $\phi_0 = kx - \omega t$ を取る場所の伝播速度は

$$c_p \equiv \left(\frac{dx}{dt} \right)_{\phi_0 = \text{const.}} = \frac{\omega}{k}, \quad (130)$$

となる。この速度 c_p は位相速度と呼ばれる。また波束に関して、位相差の位相差の等しい点が進む速度

$$c_g \equiv \frac{d\omega}{dk}, \quad (131)$$

は群速度と呼ばれる。水の表面波の場合、分散関係式 (122) から、位相速度は

$$c_p = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}, \quad (132)$$

となる。位相速度 c_p は波長 λ に依存することがわかるこのため、波長が異なる波の成分ごとに位相速度が異なるために、それらの重ねあわせとなる波形は、時間の進行によって変化することがわかる。このように、位相速度が波長 λ (もしくは波数 k) に依存するとき、波は分散性であるという。ちなみに、群速度は

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2} c_p, \quad (133)$$

となる。

4.3.5 有限の深さの表面波

これまでは深さが無限大と仮定してきたが、現実の場合は深さは有限である。そこで、境界条件として深さ h ($z = -h$) に水底がある場合を考える。この際、 $z = -h$ において

$$v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad (134)$$

となる。議論はほとんど同じであるが、一般解 (120) における議論で境界条件を満たすように、係数を決めると

$$Ae^{-kh} = Be^{kh} \equiv C/2, \quad (135)$$

を満たす必要がある。これより、速度ポテンシャルは

$$\Phi(x, z, t) = C \cosh k(z + h) \sin(kx - \omega t) \quad (136)$$

となる。あとは、深さが無限大における議論と同様に計算を行っていくと、次の分散関係を得る

$$w^2 = gk \tanh(kh). \quad (137)$$

5 渦運動

この節では、渦度ベクトルの $\omega = \nabla \times \mathbf{v} = \text{rot} \mathbf{v}$ の性質について調べる。

5.1 渦度方程式

節 2.2.4 の式 (51), (52) で示したように、非圧縮粘性流体における渦度方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}, \quad (138)$$

また、この式の左辺をラグランジュ微分に変更すると、

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}, \quad (139)$$

となる。また非圧縮なので、連続の式は式 (29) より

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (140)$$

となる。

5.1.1 非粘性流体の場合

粘性がない場合、式 139 より

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \quad (141)$$

となる。節 1.4 と同様に、十分に近い 2 点 (\mathbf{x} と $\mathbf{x} + \delta \mathbf{s}$) について、

$$\frac{D}{Dt} \delta \mathbf{s} = \mathbf{v}(\mathbf{x} + \delta \mathbf{s}) - \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad (142)$$

が成り立つ。右辺第一項について、テイラー展開した後、 $\delta \mathbf{s}$ の一次の項まで残すと、

$$\frac{D}{Dt} \delta \mathbf{s} = (\delta \mathbf{s} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \quad (143)$$

となる。この式は、流体中における近接 2 点間を結ぶベクトルの時間変化を表す式である。また、 $\delta \mathbf{s}$ を $\boldsymbol{\omega}$ と同方向にとると、

$$\frac{1}{\delta s} \frac{D}{Dt} \delta \mathbf{s} = \frac{1}{\omega} \frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt}, \quad (144)$$

となる。この式は、渦線の伸縮による渦度の変化を表している。

5.2 ヘルムホルツの渦定理

次に、式 (84) で定義される循環 Γ について成り立つヘルムホルツの渦定理について述べる。

ある曲線上の各点を通る渦線 (節 3.3 で定義) のなす面について考える。この面は渦面と呼ばれる。ここでは、図 6 に示すように、ある時刻 t においてある曲線がつくる渦面 S について、時刻 t' において曲面 S' を形成したとする。このとき、面 S' も渦面となることを証明する。まず、 S 上の任意の閉曲線 C についての循環は

$$\Gamma(C) = \int_C (\mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}) = \int_{S(C)} (\boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{s}) = 0, \quad (145)$$

となる。ここで、 $S(C)$ は閉曲線 C がつくる曲面である。また、最後の等式は、 $S(C)$ 上の法線 \mathbf{n} は常に渦ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ と直交することを用いている。ここで、ケルヴィンの循環定理 (式 85) より、循環 $\Gamma(C)$ は一定であるため、閉曲線 C が時刻 t' においてつくる閉曲線 C' の循環 $\Gamma(C')$ についても、

$$\Gamma(C) = \Gamma(C') = \int_{S(C')} (\boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{s}) = 0, \quad (146)$$

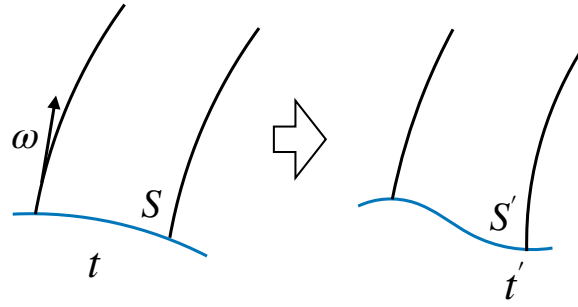


図 6: 時刻 t にある曲線 (青線) 上の各点における渦線により作られる渦面 S 。時刻が t' へと経過後、この面は渦面 S' となる。

が成り立つ。閉曲線 C' は任意なので、これが成り立つには $\omega \cdot ds = 0$ 、つまり曲面 S' も渦面となる。次に、閉曲線 C が作る渦管について考える。渦管とは、閉曲線によって構成される渦面のことであり、その名の通り管の形をしている。上の議論から、閉曲線 C についての渦管 (つまり渦面) は、時刻経過後に C がつくる閉曲線 C' についての渦管 (つまり渦面) となる。また、節 3.3 で述べたように、ある閉曲線についての循環は時間変化しない、かつその値は渦管上で空間的に不変である。これらをまとめると、ある渦管の循環は時間的にも一定となる。これをヘルムホルツの渦定理と呼ぶ。これから、ある時刻に渦度が 0 であるならば、渦度は常に 0 となると言える。

6 音波と衝撃波

この節では、音波と衝撃波等について述べていく。

6.1 音波

音波は、流体中を伝播する疎密波である。特に、空気中を伝播する音波は、我々が普段の生活で音としてとらえているものであり馴染みが深いものである。この節では、音波の伝わる速度について調べていく。密度 ρ_0 と圧力 p_0 が一様な静止流体中における摂動、

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \quad (|\rho_1| \ll |\rho_0|), \quad (147)$$

$$p = p_0 + p_1 \quad (|p_1| \ll |p_0|), \quad (148)$$

を考える。これらの摂動から生じる速度 v も微小量であるとする。これらを用いて、完全流体の式について線形解析を行っていく。また、簡単のために 1 次元で考える。まず、連続の式 (74) について、

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + (\rho_0 + \rho_1) \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \approx \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (149)$$

となる。これまでと同様に、微小量の 2 次以上の項は無視している。次に、オイラー方程式 (75) についても (外力はなし)、非線形項はすでに v の 2 次式になっているので、無視すると

$$\frac{\partial v}{\partial t} \approx -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0 + \rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x} \approx -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial x}, \quad (150)$$

となる。ここで、断熱を仮定すると、密度と圧力の微小量については

$$p_1 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \rho_1, \quad (151)$$

となることを用いると、式 (150) は、

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \frac{\partial \rho_1}{\partial x}, \quad (152)$$

となる。式 (149) から、

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) = 0, \quad (153)$$

となることを用いると、式 (152) と (153) より、

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x^2} = 0, \quad (154)$$

となる。これは、密度の微小量の変化についての波動方程式となっている。その伝播速度は、

$$c \equiv \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s}, \quad (155)$$

より与えられ、これを音速と呼ぶ。断熱の関係式 $p = \rho^\gamma$ (γ : 比熱比) を用いると、

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}, \quad (156)$$

となる。

波動方程式 (154) について述べておく。座標変換を $\xi = x - ct$, $\eta = x + ct$ と置くと、式 (154) は

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \quad (157)$$

となる。この式の一般解は、

$$\rho_1 = f_1(\xi) + f_2(\eta) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct), \quad (158)$$

となる。これは、音速 c で、摂動が x の正方向と負方向に伝播していく解となっている。