Satanya@張睿 (2020 年 11 月 6 日)

問題 1

次の関数をラプラス逆変換せよ

$$\frac{2s+3}{(s+3)^2(s+4)}$$

解. 与式は

$$\frac{2s+3}{(s+3)^2(s+4)} = \frac{A}{(s+3)^2} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s+4} \tag{1}$$

とする. (1) 式の両辺には $(s+3)^2(s+4)$ をかけると,

$$2s+3 = A(s+4) + B(s+3)(s+4) + C(s+3)^2 \tag{2}$$

になる. そこで, $s=-3$ とすると, $A=-3$. $s=-4$ とすると, $C=-5$. A と C は (2) 式に代入すると,

$$\begin{aligned} 2s+3 &= -3s - 12 + Bs^2 + 7Bs + 12B + Cs^2 + 6Cs + 9C \\ &= (B+C)s^2 + (7B+6C-3)s + (12B+9C-12) \end{aligned}$$

両辺の係数を比較すると, $B+C=0$, $7B+6C-3=2$, $12B+9C-12=3$. それで,

$$\begin{cases} A=-3 \\ B=5 \\ C=-5 \end{cases}$$

(1) 式には A,B と C の値を代入すると,

$$\frac{2s+3}{(s+3)^2(s+4)} = \frac{-3}{(s+3)^2} + \frac{5}{s+3} + \frac{-5}{s+4}$$

ラプラス変換表より,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[\text{与式}] &= -3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+3)^2}\right] + 5\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right] - 5\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+4}\right] \\ &= -3t\mathrm{e}^{-3t} + 5\mathrm{e}^{-3t} - 5\mathrm{e}^{-4t} \end{aligned}$$

□

① 与式を部分分数に分解する

② ラプラス変換表及びラプラス逆変換の性質を利用し、結果を求める.

$$\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{at}\right] = \frac{1}{s-a}$$

$$\mathcal{L}\left[t^m \mathrm{e}^{at}\right] = \frac{\Gamma(m+1)}{(s-a)^{m+1}}$$

問題 2

下図の回路に於いて，インダクタンス L_1，L_2 に電流は流れていないものとする．今 $t=0$ でスイッチ S を閉じたとき L_1，L_2 にはいくらの電流が流れるか． ただし，キャパシタンス C の初期電荷を Q とする．

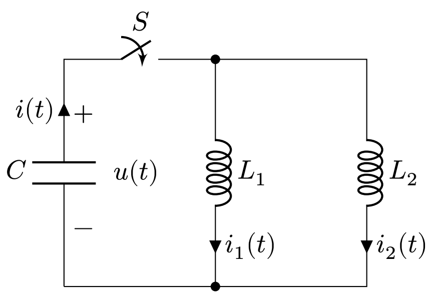

図 1　問題 2 の回路

① KCL と VCR で回路方程式を導出する

解.

$$i = i_1 + i_2 \tag{3}$$

ただし

$$i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \tag{4}$$

$$u = L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \tag{5}$$

(3) 式には (4),(5) を代入すると

$$C\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)u \tag{6}$$

ただし, $t=0$ のとき $u = \dfrac{Q}{C}$, 即ち,

$$u(0) = \frac{Q}{C}$$

(6) 式を整理すると,

$$u'' - \frac{L_1+L_2}{L_1L_2C}u = 0 \tag{7}$$

という微分方程式を得る.

② 微分方程式を解く

(7) 式の特性方程式は

$$p^2 - \frac{L_1+L_2}{L_1L_2C} = 0$$

即ち

$$p = \pm\sqrt{\frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C}} \tag{8}$$

だから,

$$u = A_1 \mathrm{e}^{\sqrt{\frac{L_1+L_2}{L_1L_2C}}t} + A_2 \mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{L_1+L_2}{L_1L_2C}}t} \tag{9}$$

$$i = C\sqrt{\frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C}} \left(A_1 \mathrm{e}^{\sqrt{\frac{L_1+L_2}{L_1L_2C}}t} - A_2 \mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{L_1+L_2}{L_1L_2C}}t} \right) \tag{10}$$

$u(0) = \dfrac{Q}{C}$, $i(0) = 0$ という初期条件は代入すれば,

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = \dfrac{Q}{C} \\ A_1 - A_2 = 0 \end{cases} \tag{11}$$

即ち,

$$A_1 = A_2 = \frac{Q}{2C} \tag{12}$$

(9) 式に代入しれば,

$$u = \frac{Q}{2C} \left(\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{L_1+L_2}{L_1L_2C}}t} + \mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{L_1+L_2}{L_1L_2C}}t} \right)$$

③ i_1 と i_2 を求める

(5) 式より

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{1}{L_1}\int u \,\mathrm{d}t + C \\ &= \frac{Q}{2CL_1\sqrt{\frac{L_1+L_2}{L_1L_2C}}} \left(\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{L_1+L_2}{L_1L_2C}}t} - \mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{L_1+L_2}{L_1L_2C}}t} \right) + C \end{aligned}$$

$i_1(0) = 0$ であるから $C = 0$.

$$i_1 = \frac{Q}{2CL_1\sqrt{\frac{L_1+L_2}{L_1L_2C}}} \left(\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{L_1+L_2}{L_1L_2C}}t} - \mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{L_1+L_2}{L_1L_2C}}t} \right)$$

同じように

$$i_2 = \frac{Q}{2CL_2\sqrt{\frac{L_1+L_2}{L_1L_2C}}} \left(\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{L_1+L_2}{L_1L_2C}}t} - \mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{L_1+L_2}{L_1L_2C}}t} \right) \qquad \square$$

問題 3

$|\mathcal{E}| = 100$ V, $|I| = 20$ A, $P = 1.5$ kW の電力を消費する回路の力率 $\cos\varphi$, インピーダンス Z, 抵抗 R 及びリアクタンス X_L を求めよ.

① $\cos\varphi$ を求める

解.

$$\begin{aligned} P &= |\mathcal{E}||I|\cos\varphi \\ &= 2000\cos\varphi = 1.5 \text{ kW} \end{aligned}$$

だから, $\cos\varphi = 0.75$ である

②インピーダンス Z を求める

$\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} \approx 0.66$ であるから,

$$Z = \frac{\mathcal{E}}{I} = \frac{|\mathcal{E}|\underline{/\phi_e}}{|I|\underline{/\phi_i}} = \frac{|\mathcal{E}|}{|I|}\underline{/\phi_e - \phi_i} = \frac{|\mathcal{E}|}{|I|}\underline{/\varphi} \approx 3.75 + \text{j}3.3\ \Omega$$

③抵抗 R 及びリアクタンス X_L を求める

$$\begin{aligned} R &= \Re Z = 3.75\ \Omega \\ X_L &= \Im Z = 3.3\ \Omega \end{aligned}$$

□

問題 4

下図の LC 並列回路に電圧 $\mathcal{E}$ を加えたとき, 電流計の指示が 0 となる周波数はいくら.

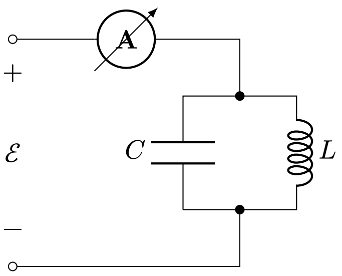

図 2　問題 2 の回路

① インピーダンス Z を求める

解.

$$Z = \frac{1}{\text{j}\omega C} // (\text{j}\omega L) = \frac{1}{\dfrac{1}{\omega L} - \omega C}\text{j}$$

② 電流 I を求める

$$\begin{aligned} I &= \frac{E}{Z} = E\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\text{j} \\ |I| &= E\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \end{aligned}$$

であるから, $\omega C = \dfrac{1}{\omega L}$ である限り, 電流計の指示が 0, 即ち

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \square$$

問題 5

RLC 並列共振回路の共振の鋭さ Q は共振周波数を ω_0 と示せ.

$$Q = \omega_0 CR$$

解.

$$Q = \omega_0 CR = \frac{R}{\omega_0 L} \qquad \square$$

① $\frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C}//(\mathrm{j}\omega_0 L)//R = 0$ とする