電磁気学　WEEK-2　　Homework #

Satanya@張睿 (2020 年 11 月 6 日)

問題 1

求解單位長度倔強係數爲 k, 線密度爲 μ 的無限長線性彈簧上的一維線性波動方程

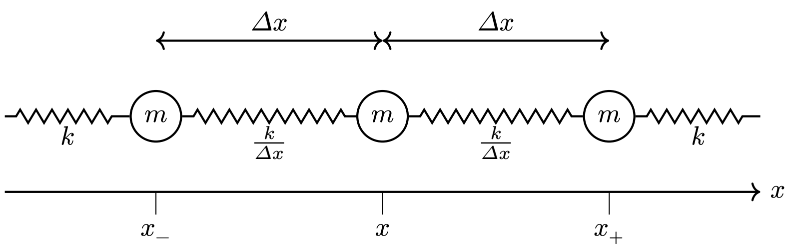

図 1　無限長線性彈簧

解. 對於該系統, 設 $u(x,t)$ 爲 x 處的 m 在 t 時偏離平衡位置的偏移量. (x_-, x) 段彈簧的原始長度爲

$$[x - u(x,t)] - [x_- - u(x_-,t)] = \Delta x + u(x_-,t) - u(x,t)$$

① 對於彈簧上位於 x 處的質點 m 進行受力分析, 其受到緊鄰其左右的兩個質點, 即 x_- 和 x_+ 處的質點的彈力.

於是, 該段彈簧撓度等於

$$\Delta x + u(x_-,t) - u(x,t) - \Delta x = u(x_-,t) - u(x,t)$$

同理 (x, x_+) 段彈簧的撓度等於

$$u(x,t) - u(x_+,t)$$

由彈簧串聯可知, 每一 Δx 的倔強係數爲 $\dfrac{k}{\Delta x}$ 因此,m 在 x 方向上所受合力

② 設 x 方向爲正方向, 則撓度爲正時,x_- 對 x 的彈力方向爲 x 正向, x_+ 對 x 的彈力方向爲 x 負向.

$$\begin{aligned} F(x,t) &= \frac{k}{\Delta x}[u(x_-,t) - u(x,t)] - k[u(x,t) - u(x_+,t)] \\ &= \frac{k}{\Delta x}[u(x-\Delta x,t) - 2u(x,t) + u(x+\Delta x,t)] \end{aligned}$$

因爲彈簧線密度爲 μ, 故 $m = \mu\Delta x$, 由牛頓第二定律 $F = ma$, 因此有

$$\frac{k}{\Delta x}[u(x-\Delta x,t) - 2u(x,t) + u(x+\Delta x,t)] = a\mu\Delta x$$

因爲

$$\frac{u(x-\Delta x,t) - 2u(x,t) + u(x+\Delta x,t)}{(\Delta x)^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

又因爲

$$a = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

所以

$$k\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \mu\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \tag{1}$$

波動方程是變量可分離的, 因此設 $u(x,t) = X(x)T(t)$, 則 (4) 化約爲:

$$kT(t)\frac{\mathrm{d}^2 X}{\Delta x^2} = \mu X(x)\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}t^2}$$

變量分離至等號兩邊:

$$\frac{k}{X(x)}\frac{\mathrm{d}^2 X}{\Delta x^2} = \frac{\mu}{T(t)}\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}t^2} \tag{2}$$

設

$$\begin{cases} X(x) = \mathrm{e}^{ax} \\ T(t) = \mathrm{e}^{bt} \end{cases} \tag{3}$$

代入 (5) 得

$$ka^2 = \mu b^2$$

解得

$$b = \pm a\sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

代入 (6) 式後有

$$\begin{aligned} u(x,t) &= X(x)T(t) && (4) \\ &= \mathrm{e}^{ax}\mathrm{e}^{\pm a\sqrt{\frac{k}{\mu}}t} && (5) \\ &= \mathrm{e}^{a}\mathrm{e}^{x\pm\sqrt{\frac{k}{\mu}}t} && (6) \end{aligned}$$

因指數函數的定義域和值域, e^a 是大於 0 的任意實數, 記作 C, 則有

$$u(x,t) = C\mathrm{e}^{x\pm\sqrt{\frac{k}{\mu}}t}$$

□

問題 2

求證柱座標中

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

解. 對於座標下向量場 $\boldsymbol{A} = (A_\rho, A_\varphi, A_z)$, 通量

$$\begin{aligned} \Phi_A &= \iint_\Sigma \boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S && (7) \\ &= && (8) \end{aligned}$$

不會

□

問題 3

利用旋度定義證明斯托克斯定理

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{rot}\, \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_{\Gamma} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$$

解. 將曲面 Σ 劃分爲 i 個有向面元 ΔS, 是故

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{rot}\, \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \lim_{\Delta S \to 0} \sum_i \mathbf{rot}\, \boldsymbol{A} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \Delta S \tag{9}$$

<u>旋度是環量的面密度</u>, 即

$$\lim_{S \to 0} \frac{\oint_{\Gamma} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}}{S} = \mathbf{rot}\, \boldsymbol{A} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \tag{10}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 是有向曲面 $\boldsymbol{S}$ 的單位法向量, 又因爲, 當 $\Delta S_i \to 0$ 時可認爲面元 ΔS_i 中旋度均等:

$$\lim_{\Delta S_i \to 0} \mathbf{rot}\, \boldsymbol{A} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \Delta S_i = \oint_{\Gamma_i} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$$

對於每個面元 ΔS_i 的環路 Γ_i, 其和其鄰接面元鄰邊上的線積分大小相等方向相反, 相互消去, 只有在 Σ 的邊界 Γ 時, 該項才得以留存. 綜上

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma} \mathbf{rot}\, \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \lim_{\Delta S_i \to 0} \sum_i \mathbf{rot}\, \boldsymbol{A} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \Delta S_i && (11) \\
&= \sum_i \lim_{\Delta S_i \to 0} \mathbf{rot}\, \boldsymbol{A} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \Delta S_i && (12) \\
&= \sum_i \oint_{\Gamma_i} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} && (13) \\
&= \oint_{\Gamma} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} && (14)
\end{aligned}$$

□