Satanya@張睿 (10/4)

問題 1

求解電偶極子軸線和中垂面上的電場強度

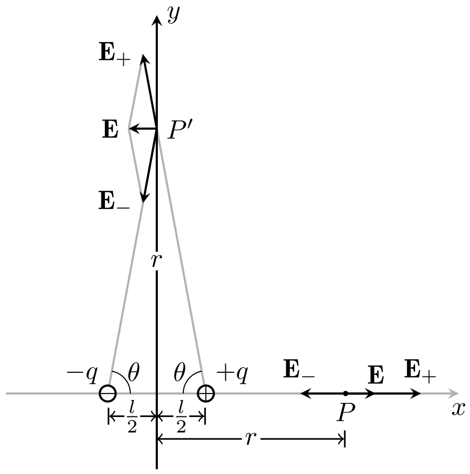

Figure 1: 電偶極子

解. 設 $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的標準基.

1) 對於延長線上的 P 點

$$\mathbf{E}_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\left(r-\frac{l}{2}\right)^2}\hat{\mathbf{i}}$$
$$\mathbf{E}_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{\left(r+\frac{l}{2}\right)^2}\hat{\mathbf{i}}$$

因此

$$\begin{aligned}\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\left(r-\frac{l}{2}\right)^2} - \frac{q}{\left(r+\frac{l}{2}\right)^2}\right]\hat{\mathbf{i}} \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{l}{2r}\right)^2} - \frac{1}{\left(1+\frac{l}{2r}\right)^2}\right]\hat{\mathbf{i}} \\ &\approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(1+\frac{l}{r}-1+\frac{l}{r}\right)\hat{\mathbf{i}} \\ &= \frac{2ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\hat{\mathbf{i}}\end{aligned}$$

定義 $\mathbf{l} = -l\hat{\mathbf{i}}$ 及電偶極距矢量 $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$

$$\mathbf{E} \approx -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\mathbf{p}}{r^3}$$

2) 對於中軸線上的 P' 點

$$\mathbf{E}_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2+\frac{l^2}{4}}(-\cos\theta\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\hat{\mathbf{j}})$$
$$\mathbf{E}_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{r^2+\frac{l^2}{4}}(\cos\theta\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\hat{\mathbf{j}})$$

所以

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- &= -2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2+\frac{l^2}{4}}\cos\theta\hat{\mathbf{i}} \\
&= -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2+\frac{l^2}{4}}\frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{r^2+\frac{l^2}{4}}}\hat{\mathbf{i}} \\
&= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql}{\left(r^2+\frac{l^2}{4}\right)^{3/2}}\hat{\mathbf{i}} \\
&= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql}{r^3\left(1+\frac{l^2}{4r^2}\right)^{3/2}}\hat{\mathbf{i}}
\end{aligned}
$$

因爲 $r \gg \frac{l}{2}$, $\left(1+\frac{l^2}{4r^2}\right)^{3/2} \approx 1$, 又可以定義 $\mathbf{l} = -l\hat{\mathbf{i}}$ 及電偶極距矢量 $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$,

$$\mathbf{E} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p}}{r^3}$$

□

問題 2

使用馬克士威方程組 (Maxwell's equations) 推導光速 c.

$$
\begin{cases}
\nabla\cdot\mathbf{E} = 0 \\
\nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \\
\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \\
\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}
\end{cases}
$$

Hint: $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$

解.

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)+3\sin 3x}{e^x-1} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x)^2+(-2)[\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}]+9\cos 3x}{e^x} \\
&= 8
\end{aligned}
$$

□

問題 3

庫侖定律和高斯定理互相推導過程

$$
\begin{aligned}
\text{庫倫定律}:\mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \\
\text{高斯定理}:\Phi_E &= \oiint_{\mathbb{S}}\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i(\mathbb{S}\text{内})} q_i
\end{aligned}
$$

解. 極座標下，對於半徑爲 r 的一球面面元 $\mathrm{d}A$,

$$\mathrm{d}A = (r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi)(r\,\mathrm{d}\theta)$$

可定義極小立體角爲

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}A}{r^2} = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

對於更加普遍的有向面元 $\mathrm{d}\mathbf{S} = \mathrm{d}S\hat{\mathbf{n}}$ 而言, 可推廣立體角定義爲

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}})\,\mathrm{d}S}{r^2} = \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{\|\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}}\|} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

由立體角的推廣定義，對於任一封閉曲面 $\mathbb{S}$ 所張之立體角也就有所定義了，當頂點在曲面内時, 對於曲面上的任一立體角元 $\mathrm{d}\Omega$，其 $\hat{\mathbf{r}}$ 和 $\hat{\mathbf{n}}$ 夾角總小於 $\pi/2$, 即 $(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}})/\|\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}}\| \equiv 1$

$$\oiint_{\mathbb{S}} \mathrm{d}\Omega = \oiint_{\mathbb{S}} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\pi} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = [-cos\theta]_0^{\pi}(2\pi) = 4\pi$$

當頂點在曲面外時, 對於曲面上的任一立體角元 $\mathrm{d}\Omega$ 皆存在一個互爲相反數立體角元 $\mathrm{d}\Omega$, 使得積分結果爲 0

$$\oiint_{\mathbb{S}} \mathrm{d}\Omega = 0$$

1) 庫倫定律 $\rightarrow$ 高斯定理

電通量 Φ_E 乃電場在高斯面各處的法向分量的總和.

a) q 在高斯面内的情況

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \oiint_{\mathbb{S}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \\ &= \oiint_{\mathbb{S}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \\ &= \oiint_{\mathbb{S}} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\mathrm{d}\Omega \\ &= \frac{q}{\varepsilon_0}\end{aligned}$$

b) q 在高斯面外的情況

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \oiint_{\mathbb{S}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \\ &= \oiint_{\mathbb{S}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \\ &= \oiint_{\mathbb{S}} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\mathrm{d}\Omega \\ &= 0\end{aligned}$$

c) 數個點電荷組成電荷系的情況

電荷系可分爲面内和面外兩個部分, 由 a)、b) 的結論和場強疊加原理得

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \oiint_{\mathbb{S}} \left(\sum_{i(\mathbb{S}\text{内})} \mathbf{E}_i + \sum_{j(\mathbb{S}\text{外})} \mathbf{E}_j \right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \\ &= \sum_{i(\mathbb{S}\text{内})} \oiint_{\mathbb{S}} \mathbf{E}_i \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \sum_{j(\mathbb{S}\text{外})} \oiint_{\mathbb{S}} \mathbf{E}_j \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \\ &= \sum_{i(\mathbb{S}\text{内})} \frac{q_i}{\varepsilon_0} + \sum_{j(\mathbb{S}\text{外})} 0 \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i(\mathbb{S}\text{内})} q_i\end{aligned}$$

2) 高斯定理 $\rightarrow$ 庫倫定律

設一點電荷 q, 以其爲球心, r 爲半徑假設球形高斯面, 則有

$$\oiint_{\mathbb{S}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\oiint_{\mathbb{S}} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{r}}\,\mathrm{d}S = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

因爲 $\mathbf{E}$ 和 $\hat{\mathbf{r}}$ 處處平行, 場強大小在球面上處處相等, 故

$$\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{r}}\oiint_{\mathbb{S}}\mathrm{d}S=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

又因爲 $\hat{\mathbf{r}}^2=1$, $\hat{\mathbf{r}}$ 自反, 所以

$$\mathbf{E}=\frac{\hat{\mathbf{r}}}{4\pi r^2}\frac{q}{\varepsilon_0}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

□

符號	物理意義	單位 (MKSA)
q	電荷	C
$\mathbf{E}$	電場	N/C(或V/m)
$\mathbf{B}$	磁場	T
Φ_E	電通量	$\mathrm{J \cdot m/C}$
Φ_B	磁通量	Wb
$\mathbb{S}$	積分曲面	m^2
$\mathbb{L}$	積分環路	m
$\mathrm{d}\mathbf{S}$	面元	m^2
$\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$	線元	m
c	光速	m/s
ε_0	真空電容率	F/m
μ_0	真空磁導率	H/m

符號	數學意義
$\nabla\cdot$	散度算符
$\nabla\times$	旋度算符
$\Im$	虛部
$\Re$	實部
a	純量
$\mathbf{v}$	向量
$\hat{\mathbf{v}}$	$\mathbf{v}$ 的單位向量
$\|\mathbf{v}\|$	範數
$\mathbb{R}^n$	n 維歐幾里得空間