

## 問題 1

求解電偶極子軸線和中垂面上的電場強度

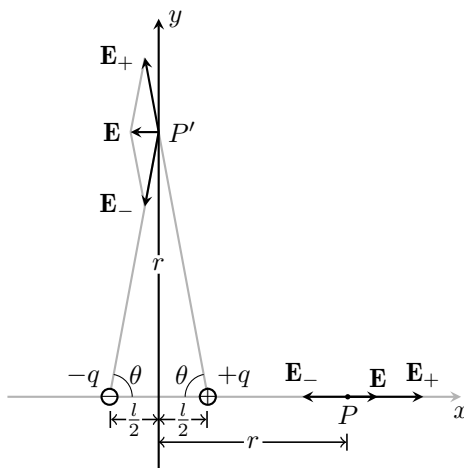


Figure 1: 電偶極子

解. 設  $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$  是  $\mathbb{R}^3$  的標準基.1) 對於延長線上的  $P$  點

$$\mathbf{E}_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} \hat{\mathbf{i}}$$

$$\mathbf{E}_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} \hat{\mathbf{i}}$$

因此

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{q}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} \right] \hat{\mathbf{i}} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[ \frac{1}{\left(1 - \frac{l}{2r}\right)^2} - \frac{1}{\left(1 + \frac{l}{2r}\right)^2} \right] \hat{\mathbf{i}} \\ &\approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left( 1 + \frac{l}{r} - 1 + \frac{l}{r} \right) \hat{\mathbf{i}} \\ &= \frac{2ql}{4\pi\epsilon_0 r^3} \hat{\mathbf{i}} \end{aligned}$$

定義  $\mathbf{l} = -l\hat{\mathbf{i}}$  及電偶極距矢量  $\mathbf{p} = ql$ 

$$\mathbf{E} \approx -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\mathbf{p}}{r^3}$$

2) 對於中軸線上的  $P'$  點

$$\mathbf{E}_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2 + \frac{l^2}{4}} (-\cos\theta \hat{\mathbf{i}} + \sin\theta \hat{\mathbf{j}})$$

$$\mathbf{E}_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q}{r^2 + \frac{l^2}{4}} (\cos\theta \hat{\mathbf{i}} + \sin\theta \hat{\mathbf{j}})$$

所以

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- &= -2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2 + \frac{l^2}{4}} \cos\theta \hat{\mathbf{i}} \\
 &= -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2 + \frac{l^2}{4}} \frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}}} \hat{\mathbf{i}} \\
 &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{3/2}} \hat{\mathbf{i}} \\
 &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{r^3 \left(1 + \frac{l^2}{4r^2}\right)^{3/2}} \hat{\mathbf{i}}
 \end{aligned}$$

因爲  $r \gg \frac{l}{2}$ ,  $\left(1 + \frac{l^2}{4r^2}\right)^{3/2} \approx 1$ , 又可以定義  $\mathbf{l} = -l\hat{\mathbf{i}}$  及電偶極距矢量  $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$ ,

$$\mathbf{E} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}}{r^3}$$

□

## 問題 2

使用馬克士威方程組 (Maxwell's equations) 推導光速  $c$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

Hint:  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

解.

$$\begin{aligned}
 \text{与式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) + 3 \sin 3x}{e^x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x)^2 + (-2)[\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}] + 9 \cos 3x}{e^x} \\
 &= 8
 \end{aligned}$$

□

## 問題 3

庫倫定律和高斯定理互相推導過程

$$\begin{aligned}
 \text{庫倫定律 : } \mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \\
 \text{高斯定理 : } \Phi_E &= \oiint_{\mathbb{S}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i(\mathbb{S} \text{ 內})} q_i
 \end{aligned}$$

解. 極座標下, 對於半徑爲  $r$  的一球面面元  $dA$ ,

$$dA = (r \sin \theta d\varphi)(r d\theta)$$

可定義極小立體角爲

$$d\Omega = \frac{dA}{r^2} = \sin \theta d\theta d\varphi$$

對於更加普遍的有向面元  $d\mathbf{S} = dS\hat{\mathbf{n}}$  而言, 可推廣立體角定義為

$$d\Omega = \frac{(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS}{r^2} = \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{\|\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}}\|} \sin\theta d\theta d\varphi$$

由立體角的推廣定義, 對於任一封閉曲面  $S$  所張之立體角也就有所定義了, 當頂點在曲面內時, 對於曲面上的任一立體角元  $d\Omega$ , 其  $\hat{\mathbf{r}}$  和  $\hat{\mathbf{n}}$  夾角總小於  $\pi/2$ , 即  $(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}})/\|\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}}\| \equiv 1$

$$\oint_S d\Omega = \oint_S \sin\theta d\theta d\varphi = \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = [-\cos\theta]_0^\pi (2\pi) = 4\pi$$

當頂點在曲面外時, 對於曲面上的任一立體角元  $d\Omega$  皆存在一個互為相反數立體角元  $d\Omega$ , 使得積分結果為 0

$$\oint_S d\Omega = 0$$

### 1) 庫倫定律 → 高斯定理

電通量  $\Phi_E$  乃電場在高斯面各處的法向分量的總和.

a)  $q$  在高斯面內的情況

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \oint_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \oint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \\ &= \frac{q}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

b)  $q$  在高斯面外的情況

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \oint_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \oint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \\ &= 0\end{aligned}$$

c) 數個點電荷組成電荷系的情況

電荷系可分為面內和面外兩個部分, 由 a)、b) 的結論和場強疊加原理得

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \oint_S \left( \sum_{i(\text{S內})} \mathbf{E}_i + \sum_{j(\text{S外})} \mathbf{E}_j \right) \cdot d\mathbf{S} \\ &= \sum_{i(\text{S內})} \oint_S \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{S} + \sum_{j(\text{S外})} \oint_S \mathbf{E}_j \cdot d\mathbf{S} \\ &= \sum_{i(\text{S內})} \frac{q_i}{\epsilon_0} + \sum_{j(\text{S外})} 0 \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i(\text{S內})} q_i\end{aligned}$$

### 2) 高斯定理 → 庫倫定律

設一點電荷  $q$ , 以其為球心,  $r$  為半徑假設球形高斯面, 則有

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{r}} dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

因爲  $\mathbf{E}$  和  $\hat{\mathbf{r}}$  處處平行, 場強大小在球面上處處相等, 故

$$\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{r}} \oint_S dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

又因爲  $\hat{\mathbf{r}}^2 = 1$ ,  $\hat{\mathbf{r}}$  自反, 所以

$$\mathbf{E} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{4\pi r^2} \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

□

---

符號	物理意義	單位 (MKSA)
$q$	電荷	C
$\mathbf{E}$	電場	N/C(或V/m)
$\mathbf{B}$	磁場	T
$\Phi_E$	電通量	J · m/C
$\Phi_B$	磁通量	Wb
$\mathbb{S}$	積分曲面	m <sup>2</sup>
$\mathbb{L}$	積分環路	m
$d\mathbf{S}$	面元	m <sup>2</sup>
$d\ell$	線元	m
$c$	光速	m/s
$\varepsilon_0$	真空電容率	F/m
$\mu_0$	真空磁導率	H/m

---

符號	數學意義
$\nabla \cdot$	散度算符
$\nabla \times$	旋度算符
$\Im$	虛部
$\Re$	實部
$a$	純量
$\mathbf{v}$	向量
$\hat{\mathbf{v}}$	$\mathbf{v}$ 的單位向量
$\ \mathbf{v}\ $	範數
$\mathbb{R}^n$	$n$ 維歐幾里得空間

---