電磁気学 第一回 Homework #

Satanya@張睿 (10/4)

問題 1

求解電偶極子軸線和中垂面上的電場強度

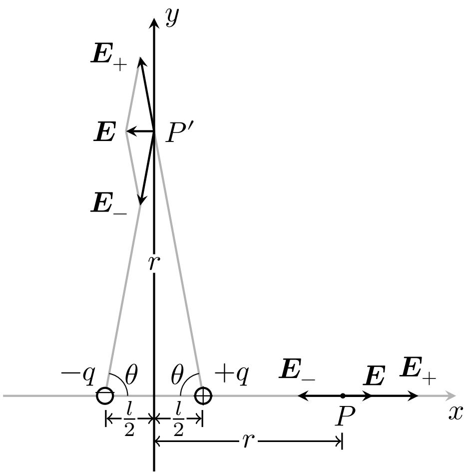

図 1　電偶極子

解. 設 $(\hat{\boldsymbol{i}}, \hat{\boldsymbol{j}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的標準基.

1) 對於延長線上的 P 點

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_+ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\left(r-\frac{l}{2}\right)^2}\hat{\boldsymbol{i}} \\
\boldsymbol{E}_- &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{\left(r+\frac{l}{2}\right)^2}\hat{\boldsymbol{i}}
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_+ + \boldsymbol{E}_- &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\left(r-\frac{l}{2}\right)^2} - \frac{q}{\left(r+\frac{l}{2}\right)^2}\right]\hat{\boldsymbol{i}} \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{l}{2r}\right)^2} - \frac{1}{\left(1+\frac{l}{2r}\right)^2}\right]\hat{\boldsymbol{i}} \\
&\approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(1+\frac{l}{r}-1+\frac{l}{r}\right)\hat{\boldsymbol{i}} \\
&= \frac{2ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\hat{\boldsymbol{i}}
\end{aligned}
$$

定義 $\boldsymbol{l} = -l\hat{\boldsymbol{i}}$ 及電偶極距矢量 $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{l}$

$$\boldsymbol{E} \approx -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\boldsymbol{p}}{r^3}$$

2) 對於中軸線上的 P' 點

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_+ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2+\frac{l^2}{4}}(-\cos\theta\hat{\boldsymbol{i}}+\sin\theta\hat{\boldsymbol{j}}) \\
\boldsymbol{E}_- &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{r^2+\frac{l^2}{4}}(\cos\theta\hat{\boldsymbol{i}}+\sin\theta\hat{\boldsymbol{j}})
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_+ + \boldsymbol{E}_- &= -2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2+\frac{l^2}{4}}\cos\theta\hat{\boldsymbol{i}} \\
&= -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2+\frac{l^2}{4}}\frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{r^2+\frac{l^2}{4}}}\hat{\boldsymbol{i}} \\
&= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql}{\left(r^2+\frac{l^2}{4}\right)^{3/2}}\hat{\boldsymbol{i}} \\
&= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql}{r^3\left(1+\frac{l^2}{4r^2}\right)^{3/2}}\hat{\boldsymbol{i}}
\end{aligned}$$

因爲 $r \gg \frac{l}{2}$, $\left(1+\frac{l^2}{4r^2}\right)^{3/2} \approx 1$, 又可以定義 $\boldsymbol{l} = -l\hat{\boldsymbol{i}}$ 及電偶極距矢量 $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{l}$,

$$\boldsymbol{E} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}}{r^3}$$ □

問題 2

使用馬克士威方程組 (Maxwell's equations) 推導光速 c.

$$\begin{cases}
\nabla\cdot\boldsymbol{E} = 0 \\
\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0 \\
\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \\
\nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}
\end{cases}$$

Hint: $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A}$

解. □

問題 3

庫侖定律和高斯定理互相推導過程

$$(\text{庫倫定律})\ \boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

$$(\text{高斯定理})\ \oiint_{\mathbb{S}} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i(\mathbb{S}\text{內})} q_i$$

解. 極座標下，對於半徑爲 r 的一球面面元 $\mathrm{d}A$,

$$\mathrm{d}A = (r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi)(r\,\mathrm{d}\theta)$$

可定義極小立體角爲

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}A}{r^2} = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

對於更加普遍的有向面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \mathrm{d}S\hat{\boldsymbol{n}}$ 而言, 可推廣立體角定義爲

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{(\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})\,\mathrm{d}S}{r^2} = \frac{\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}}{|\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}|}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

由立體角的推廣定義，對於任一封閉曲面 $\mathbb{S}$ 所張之立體角也就有所定義了，當頂點在曲面内時，對於曲面上的任一立體角元 $\mathrm{d}\Omega$，其 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 夾角總小於 $\pi/2$, 即 $\dfrac{\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}}{|\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}|} \equiv 1$, 於是

$$\oiint_{\mathbb{S}} \mathrm{d}\Omega = \oiint_{\mathbb{S}} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = [-cos\theta]_0^{\pi}(2\pi) = 4\pi$$

當頂點在曲面外時，對於曲面上的任一立體角元 $\mathrm{d}\Omega$ 皆存在一個互爲相反數立體角元 $\mathrm{d}\Omega$，使得積分結果爲 0

$$\oiint_{\mathbb{S}} \mathrm{d}\Omega = 0$$

1) 庫倫定律 $\rightarrow$ 高斯定理

數學中定義積分式:

$$\iint_{\Sigma} \boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma} \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

爲向量場 $\boldsymbol{A}$ 通過曲面 Σ 向着指定側的通量, 其中 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 是面元的單位法向量. 對於電場 $\boldsymbol{E}$, 自然可定義電通量

$$\Phi_E = \iint_{\Sigma} \boldsymbol{E}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma} \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

今假設空間中存在一封閉曲面 $\mathbb{S}$ 名曰高斯面. 則可依單個點電荷 q 與 $\mathbb{S}$ 的位置關係而對 $\mathbb{S}$ 向外側的電通量進行分類討論:

a) q 在 $\mathbb{S}$ 內的情況

$$\begin{aligned}\varPhi_E &= \oiint_{\mathbb{S}} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &= \oiint_{\mathbb{S}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &= \oiint_{\mathbb{S}} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\mathrm{d}\varOmega \\ &= \frac{q}{\varepsilon_0}\end{aligned}$$

b) q 在 $\mathbb{S}$ 外的情況

$$\begin{aligned}\varPhi_E &= \oiint_{\mathbb{S}} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &= \oiint_{\mathbb{S}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &= \oiint_{\mathbb{S}} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\mathrm{d}\varOmega \\ &= 0\end{aligned}$$

因爲任何電荷系的點電荷皆可分爲 $\mathbb{S}$ 內和 $\mathbb{S}$ 外兩個部分, 由 a)、b) 的結論和場強疊加原理得

$$\begin{aligned}\varPhi_E &= \oiint_{\mathbb{S}} \left(\sum_{i(\mathbb{S}\text{內})}\boldsymbol{E}_i + \sum_{j(\mathbb{S}\text{外})}\boldsymbol{E}_j\right)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &= \sum_{i(\mathbb{S}\text{內})}\oiint_{\mathbb{S}}\boldsymbol{E}_i\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \sum_{j(\mathbb{S}\text{外})}\oiint_{\mathbb{S}}\boldsymbol{E}_j\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &= \sum_{i(\mathbb{S}\text{內})}\frac{q_i}{\varepsilon_0} + \sum_{j(\mathbb{S}\text{外})} 0 \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i(\mathbb{S}\text{內})} q_i\end{aligned}$$

2) 高斯定理 $\to$ 庫倫定律

設一點電荷 q, 以其爲球心, r 爲半徑假設球形高斯面, 則有

$$\oiint_{\mathbb{S}} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oiint_{\mathbb{S}} \boldsymbol{E}\cdot \hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

因爲球面上 $\hat{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{r}}$ 且 $\boldsymbol{E}$ 和 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 處處平行, 場強大小在球面上處處相等, 故

$$\boldsymbol{E}\cdot \hat{\boldsymbol{n}}\oiint_{\mathbb{S}} \mathrm{d}S = \boldsymbol{E}\cdot \hat{\boldsymbol{r}}\oiint_{\mathbb{S}} \mathrm{d}S = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

又因爲 $\hat{\boldsymbol{r}}^2 = 1$, $\hat{\boldsymbol{r}}$ 自反, 所以

$$\boldsymbol{E} = \frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{4\pi r^2}\frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \qquad \square$$

符號	物理意義	單位 (MKSA)
q	電荷	C
$\boldsymbol{E}$	電場	N/C(或V/m)
$\boldsymbol{B}$	磁場	T
$\varPhi_E$	電通量	$\mathrm{J \cdot m/C}$
$\varPhi_B$	磁通量	Wb
$\mathbb{S}$	積分曲面	m^2
$\mathbb{L}$	積分環路	m
$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$	面元	m^2
$\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$	線元	m
c	光速	m/s
ε_0	真空電容率	F/m
μ_0	真空磁導率	H/m

符號	數學意義
$\nabla\cdot$	散度算符
$\nabla\times$	旋度算符
$\mathfrak{I}$	虛部
$\mathfrak{R}$	實部
a	純量
$\boldsymbol{v}$	向量
$\hat{\boldsymbol{v}}$	$\boldsymbol{v}$ 的單位向量
$\lVert\boldsymbol{v}\rVert$	範數
$\mathbb{R}^n$	n 維歐幾里得空間