Satanya@張睿 (2020 年 10 月 7 日)

_問題 1__

求解電偶極子軸線和中垂面上的電場強度

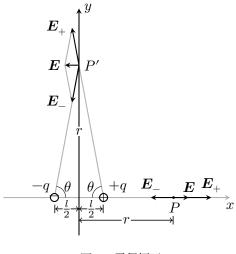


図1 電偶極子

解. 設 $(\hat{\pmb{i}},\hat{\pmb{j}},\hat{\pmb{k}})$ 是 \mathbb{R}^3 的標準基.

1) 對於延長線上的 P點

$$\boldsymbol{E}_{+}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}}\frac{q}{\left(r-\frac{l}{2}\right)^{2}}\hat{\boldsymbol{i}}$$

$$\boldsymbol{E}_{-}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}}\frac{-q}{\left(r+\frac{l}{2}\right)^{2}}\hat{\boldsymbol{i}}$$

因此

$$\begin{split} \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}_{+} + \boldsymbol{E}_{-} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} \left[\frac{q}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^{2}} - \frac{q}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^{2}} \right] \hat{\boldsymbol{i}} \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_{0}r^{2}} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{l}{2r}\right)^{2}} - \frac{1}{\left(1 + \frac{l}{2r}\right)^{2}} \right] \hat{\boldsymbol{i}} \\ &\approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_{0}r^{2}} \left(1 + \frac{l}{r} - 1 + \frac{l}{r}\right) \hat{\boldsymbol{i}} \\ &= \frac{2ql}{4\pi\varepsilon_{0}r^{3}} \hat{\boldsymbol{i}} \end{split}$$

定義 $\boldsymbol{l} = -l\hat{\boldsymbol{i}}$ 及電偶極距矢量 $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{l}$

$$m{E} pprox -rac{1}{4\piarepsilon_0}rac{2m{p}}{r^3}$$

2) 對於中軸線上的 P' 點

$$\begin{split} \boldsymbol{E}_{+} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} \frac{q}{r^{2} + \frac{l^{2}}{4}} (-\cos\theta \hat{\boldsymbol{i}} + \sin\theta \hat{\boldsymbol{j}}) \\ \boldsymbol{E}_{-} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} \frac{-q}{r^{2} + \frac{l^{2}}{4}} (\cos\theta \hat{\boldsymbol{i}} + \sin\theta \hat{\boldsymbol{j}}) \end{split}$$

所以

$$\begin{split} & \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{+} + \boldsymbol{E}_{-} \\ & = -2\frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} \frac{q}{r^{2} + \frac{l^{2}}{4}} \cos\theta \hat{\boldsymbol{i}} \\ & = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_{0}} \frac{q}{r^{2} + \frac{l^{2}}{4}} \frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{r^{2} + \frac{l^{2}}{4}}} \hat{\boldsymbol{i}} \\ & = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} \frac{ql}{\left(r^{2} + \frac{l^{2}}{4}\right)^{3/2}} \hat{\boldsymbol{i}} \\ & = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} \frac{ql}{r^{3} \left(1 + \frac{l^{2}}{4r^{2}}\right)^{3/2}} \hat{\boldsymbol{i}} \end{split}$$

因爲 $r\gg rac{l}{2},\,\left(1+rac{l^2}{4r^2}
ight)^{3/2}pprox 1,\,$ 又可以定義 $m{l}=-l\hat{m{i}}$ 及電偶極距矢量 $m{p}=qm{l},$

$$m{E} pprox rac{1}{4\piarepsilon_0} rac{m{p}}{r^3}$$

問題 2

使用馬克士威方程組 (Maxwell's equations) 推導光速 c.

$$\begin{cases} & \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \\ & \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ & \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ & \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Hint: $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

解. □

問題 3

使用庫倫定律和高斯定理互相證明對方

(庫倫定律)
$$m{E} = rac{1}{4\pi arepsilon_0} rac{q}{r^2} \hat{m{r}}$$
 (高斯定理) $\iint_{\mathbb{S}} m{E} \cdot \mathrm{d} m{S} = rac{1}{arepsilon_0} \sum_{i (\mathbb{S} | \mathbf{h})} q_i$

解. 極座標下,對於半徑為r的一球面面元 dA,

$$dA = (r \sin \theta \, d\varphi)(r \, d\theta)$$

可定義極小立體角爲

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}A}{r^2} = \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\varphi$$

對於更加普遍的有向面元 $dS = dS\hat{n}$ 而言, 可推廣立體角定義爲

$$d\Omega = \frac{(\hat{r} \cdot \hat{n}) dS}{r^2} = \frac{\hat{r} \cdot \hat{n}}{|\hat{r} \cdot \hat{n}|} \sin \theta d\theta d\varphi$$

由立體角的推廣定義,對於任一封閉曲面 S 所張之立體角也就有所定義了,當頂點在曲面内時,對於曲面上的任一立體角元 d Ω ,其 \hat{r} 和 \hat{n} 夾角總小於 $\pi/2$,即 $\frac{\hat{r}\cdot\hat{n}}{|\hat{r}\cdot\hat{n}|}\equiv 1$,於是

$$\oiint_{\mathbb{S}} \mathrm{d}\Omega = \oiint_{\mathbb{S}} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi = \int_{0}^{\pi} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \int_{0}^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = [-\cos\theta]_{0}^{\pi}(2\pi) = 4\pi$$

當頂點在曲面外時,對於曲面上的任一立體角元 $\mathrm{d}\Omega$ 皆存在一個互爲相反數立體角元 $\mathrm{d}\Omega$,使得積分結果爲 0

$$\iint_{\mathbb{S}} d\Omega = 0$$

1) 庫倫定律 → 高斯定理

數學中定義積分式:

$$\iint_{\Sigma} \boldsymbol{A} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S = \iint_{\Sigma} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

爲向量場 A 通過曲面 Σ 向着指定側的通量,其中 \hat{n} 是面元的單位法向量.對於電場 E,自然可定義電通量

$$\Phi_E = \iint_{\Sigma} \boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S = \iint_{\Sigma} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

今假設空間中存在一封閉曲面 $\mathbb S$ 名曰<u>高斯面</u>. 則可依單個點電荷 q 與 $\mathbb S$ 的位置關係而對 $\mathbb S$ 向外側的電通量進行分類討論:

a) q 在 \mathbb{S} 内的情況

$$\Phi_E = \iint_{\mathbb{S}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

$$= \iint_{\mathbb{S}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{S}$$

$$= \iint_{\mathbb{S}} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega$$

$$= \frac{q}{\varepsilon_0}$$

b) q在S外的情况

$$\begin{split} \boldsymbol{\Phi}_E &= \oiint_{\mathbb{S}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d} \boldsymbol{S} \\ &= \oiint_{\mathbb{S}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\boldsymbol{r}} \cdot \mathrm{d} \boldsymbol{S} \\ &= \oiint_{\mathbb{S}} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \, \mathrm{d} \boldsymbol{\Omega} \\ &= 0 \end{split}$$

因爲任何電荷系的點電荷皆可分爲 S 內和 S 外兩個部分, 由 a)、b) 的結論和場強疊加原理得

$$\begin{split} \varPhi_E &= \oiint_{\mathbb{S}} \left(\sum_{i (\mathbb{S} \mid \mathbb{A})} \boldsymbol{E}_i + \sum_{j (\mathbb{S} \not \mathbb{A})} \boldsymbol{E}_j \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &= \sum_{i (\mathbb{S} \mid \mathbb{A})} \oiint_{\mathbb{S}} \boldsymbol{E}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \sum_{j (\mathbb{S} \not \mathbb{A})} \oiint_{\mathbb{S}} \boldsymbol{E}_j \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &= \sum_{i (\mathbb{S} \mid \mathbb{A})} \frac{q_i}{\varepsilon_0} + \sum_{j (\mathbb{S} \not \mathbb{A})} 0 \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i (\mathbb{S} \mid \mathbb{A})} q_i \end{split}$$

2) 高斯定理 → 庫倫定律

設一點電荷 q, 以其爲球心, r 爲半徑假設球形高斯面, 則有

$$\iint_{\mathbb{S}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\mathbb{S}} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

因爲球面上 $\hat{n} = \hat{r}$ 且 E 和 \hat{r} 處處平行, 場強大小在球面上處處相等, 故

$$\boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \oiint_{\mathbb{S}} \mathrm{d}S = \boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{r}} \oiint_{\mathbb{S}} \mathrm{d}S = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

又因爲 $\hat{r}^2 = 1$, \hat{r} 自反, 所以

$${m E} = rac{\hat{m r}}{4\pi r^2} rac{q}{arepsilon_0} = rac{1}{4\pi arepsilon_0} rac{q}{r^2} \hat{m r}$$

符號	物理意義	單位 (MKSA)
\overline{q}	電荷	С
$oldsymbol{E}$	電場	$N/C(\vec{x}V/m)$
\boldsymbol{B}	磁場	${f T}$
Φ_E	電通量	$J\cdot m/C$
Φ_B	磁通量	Wb
S	積分曲面	m^2
L	積分環路	m
$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$	面元	m^2
$\mathrm{d} \boldsymbol{\ell}$	線元	m
c	光速	m/s
ε_0	真空電容率	F/m
μ_0	真空磁導率	$\mathrm{H/m}$

符號	數學意義	
$ abla\cdot$	散度算符	
abla imes	旋度算符	
I	虚部	
\mathfrak{R}	實部	
a	純量	
$oldsymbol{v}$	向量	
$\hat{m{v}}$	$oldsymbol{v}$ 的單位向量	
$\ oldsymbol{v}\ $	範數	
\mathbb{R}^n	n 維歐幾里得空間	