

問題 1

求解電偶極子軸線和中垂面上的電場強度

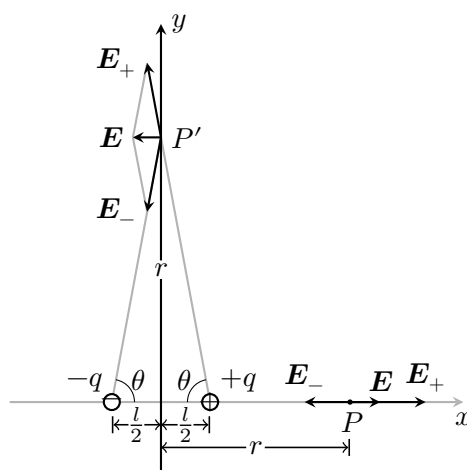


圖 1 電偶極子

解. 設 $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ 是 \mathbb{R}^3 的標準基.

1) 對於延長線上的 P 點

$$\mathbf{E}_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} \hat{i}$$

$$\mathbf{E}_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} \hat{i}$$

因此

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{q}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} \right] \hat{\mathbf{i}} \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{l}{2r}\right)^2} - \frac{1}{\left(1 + \frac{l}{2r}\right)^2} \right] \hat{\mathbf{i}} \\
 &\approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(1 + \frac{l}{r} - 1 + \frac{l}{r} \right) \hat{\mathbf{i}} \\
 &= \frac{2ql}{4\pi\epsilon_0 r^3} \hat{\mathbf{i}}
 \end{aligned}$$

定義 $\mathbf{l} = -l\hat{\mathbf{i}}$ 及電偶極距矢量 $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$

$$\mathbf{E} \approx -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\mathbf{p}}{r^3}$$

2) 對於中軸線上的 P' 點

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_+ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2 + \frac{l^2}{4}} (-\cos\theta\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\hat{\mathbf{j}}) \\
 \mathbf{E}_- &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q}{r^2 + \frac{l^2}{4}} (\cos\theta\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\hat{\mathbf{j}})
 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} &= \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- \\
 &= -2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2 + \frac{l^2}{4}} \cos\theta\hat{\mathbf{i}} \\
 &= -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2 + \frac{l^2}{4}} \frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}}} \hat{\mathbf{i}} \\
 &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{3/2}} \hat{\mathbf{i}} \\
 &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{r^3 \left(1 + \frac{l^2}{4r^2}\right)^{3/2}} \hat{\mathbf{i}}
 \end{aligned}$$

因爲 $r \gg \frac{l}{2}$, $\left(1 + \frac{l^2}{4r^2}\right)^{3/2} \approx 1$, 又可以定義 $\mathbf{l} = -l\hat{\mathbf{i}}$ 及電偶極距矢量 $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$,

$$\mathbf{E} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}}{r^3}$$

□

問題 2

使用馬克士威方程組 (Maxwell's equations) 推導光速 c .

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Hint: $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

解.

□

問題 3

使用庫倫定律和高斯定理互相證明對方

$$(\text{庫倫定律}) \quad \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

$$(\text{高斯定理}) \quad \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i \in (S \text{ 內})} q_i$$

解. 極座標下, 對於半徑爲 r 的一球面面元 dA ,

$$dA = (r \sin \theta d\varphi)(r d\theta)$$

可定義極小立體角爲

$$d\Omega = \frac{dA}{r^2} = \sin \theta d\theta d\varphi$$

對於更加普遍的有向面元 $d\mathbf{S} = dS\hat{\mathbf{n}}$ 而言, 可推廣立體角定義爲

$$d\Omega = \frac{(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS}{r^2} = \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{|\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}}|} \sin \theta d\theta d\varphi$$

由立體角的推廣定義, 對於任一封閉曲面 S 所張之立體角也就有所定義了, 當頂點在曲面內時, 對於曲面上的任一立體角元 $d\Omega$, 其 $\hat{\mathbf{r}}$ 和 $\hat{\mathbf{n}}$ 夾角總小於 $\pi/2$, 即 $\frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{|\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}}|} \equiv 1$, 於是

$$\oint_S d\Omega = \oint_S \sin \theta d\theta d\varphi = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = [-\cos \theta]_0^\pi (2\pi) = 4\pi$$

當頂點在曲面外時，對於曲面上的任一立體角元 $d\Omega$ 皆存在一個互為相反數立體角元 $d\Omega$ ，使得積分結果為 0

$$\oiint_{\Sigma} d\Omega = 0$$

1) 庫倫定律 → 高斯定理

數學中定義積分式：

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

為向量場 \mathbf{A} 通過曲面 Σ 向着指定側的通量，其中 $\hat{\mathbf{n}}$ 是面元的單位法向量。對於電場 \mathbf{E} ，自然可定義電通量

$$\Phi_E = \iint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

今假設空間中存在一封閉曲面 Σ 名曰高斯面。則可依單個點電荷 q 與 Σ 的位置關係而對 Σ 向外側的電通量進行分類討論：

a) q 在 Σ 內的情況

$$\begin{aligned} \Phi_E &= \oiint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \oiint_{\Sigma} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \oiint_{\Sigma} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \\ &= \frac{q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

b) q 在 Σ 外的情況

$$\begin{aligned} \Phi_E &= \oiint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \oiint_{\Sigma} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \oiint_{\Sigma} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \\ &= 0 \end{aligned}$$

因為任何電荷系的點電荷皆可分為 Σ 內和 Σ 外兩個部分，由 a)、b) 的結論和場強疊加原理得

$$\begin{aligned} \Phi_E &= \oiint_{\Sigma} \left(\sum_{i(\Sigma\text{內})} \mathbf{E}_i + \sum_{j(\Sigma\text{外})} \mathbf{E}_j \right) \cdot d\mathbf{S} \\ &= \sum_{i(\Sigma\text{內})} \oiint_{\Sigma} \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{S} + \sum_{j(\Sigma\text{外})} \oiint_{\Sigma} \mathbf{E}_j \cdot d\mathbf{S} \\ &= \sum_{i(\Sigma\text{內})} \frac{q_i}{\epsilon_0} + \sum_{j(\Sigma\text{外})} 0 \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i(\Sigma\text{內})} q_i \end{aligned}$$

2) 高斯定理 → 庫倫定律

設一點電荷 q , 以其爲球心, r 爲半徑假設球形高斯面, 則有

$$\oiint_{\mathbb{S}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_{\mathbb{S}} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

因爲球面上 $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{r}}$ 且 \mathbf{E} 和 $\hat{\mathbf{r}}$ 處處平行, 場強大小在球面上處處相等, 故

$$\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} \oiint_{\mathbb{S}} dS = \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{r}} \oiint_{\mathbb{S}} dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

又因爲 $\hat{\mathbf{r}}^2 = 1$, $\hat{\mathbf{r}}$ 自反, 所以

$$\mathbf{E} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{4\pi r^2} \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

□

符號	物理意義	單位 (MKSA)
q	電荷	C
\boldsymbol{E}	電場	N/C(或V/m)
\boldsymbol{B}	磁場	T
Φ_E	電通量	J · m/C
Φ_B	磁通量	Wb
\mathbb{S}	積分曲面	m ²
\mathbb{L}	積分環路	m
$d\boldsymbol{S}$	面元	m ²
$d\boldsymbol{\ell}$	線元	m
c	光速	m/s
ε_0	真空電容率	F/m
μ_0	真空磁導率	H/m

符號	數學意義
$\nabla \cdot$	散度算符
$\nabla \times$	旋度算符
\Im	虛部
\Re	實部
a	純量
\boldsymbol{v}	向量
$\hat{\boldsymbol{v}}$	\boldsymbol{v} 的單位向量
$\ \boldsymbol{v}\ $	範數
\mathbb{R}^n	n 維歐幾里得空間
