電磁気学 WEEK-1 Homework #

Satanya@張睿 (2020 年 10 月 10 日)

問題 1

求解電偶極子軸線和中垂面上的電場強度

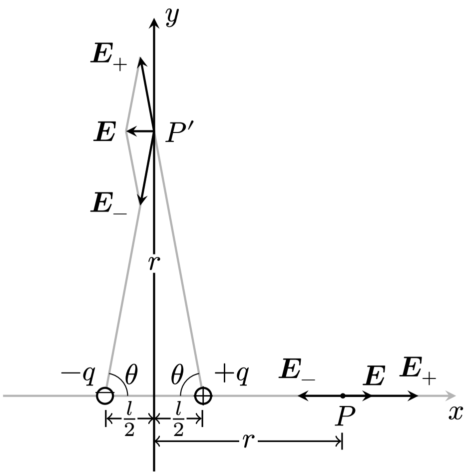

図 1 電偶極子

解. 設 $\hat{\boldsymbol{i}}, \hat{\boldsymbol{j}}, \hat{\boldsymbol{k}}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的標準正交基.

1) 對於延長線上的 P 點

$$\boldsymbol{E}_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{+q}{\left(r - \dfrac{l}{2}\right)^2}\hat{\boldsymbol{i}}$$

$$\boldsymbol{E}_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{\left(r + \dfrac{l}{2}\right)^2}\hat{\boldsymbol{i}}$$

因此

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_+ + \boldsymbol{E}_- &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\left(r-\dfrac{l}{2}\right)^2} - \frac{q}{\left(r+\dfrac{l}{2}\right)^2}\right]\hat{\boldsymbol{i}} \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left[\frac{1}{\left(1-\dfrac{l}{2r}\right)^2} - \frac{1}{\left(1+\dfrac{l}{2r}\right)^2}\right]\hat{\boldsymbol{i}} \\
&\approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(1+\frac{l}{r}-1+\frac{l}{r}\right)\hat{\boldsymbol{i}} \\
&= \frac{2ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\hat{\boldsymbol{i}}
\end{aligned}
$$

定義 $\boldsymbol{l} = -l\hat{\boldsymbol{i}}$ 及電偶極距矢量 $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{l}$

$$
\boldsymbol{E} \approx -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\boldsymbol{p}}{r^3}
$$

2) 對於中軸線上的 P' 點

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_+ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2+\dfrac{l^2}{4}}(-\cos\theta\hat{\boldsymbol{i}} + \sin\theta\hat{\boldsymbol{j}}) \\
\boldsymbol{E}_- &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{r^2+\dfrac{l^2}{4}}(\cos\theta\hat{\boldsymbol{i}} + \sin\theta\hat{\boldsymbol{j}})
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}_+ + \boldsymbol{E}_- \\
&= -2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2+\dfrac{l^2}{4}}\cos\theta\hat{\boldsymbol{i}} \\
&= -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2+\dfrac{l^2}{4}}\frac{\dfrac{l}{2}}{\sqrt{r^2+\dfrac{l^2}{4}}}\hat{\boldsymbol{i}} \\
&= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql}{\left(r^2+\dfrac{l^2}{4}\right)^{3/2}}\hat{\boldsymbol{i}} \\
&= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql}{r^3\left(1+\dfrac{l^2}{4r^2}\right)^{3/2}}\hat{\boldsymbol{i}}
\end{aligned}
$$

因爲 $r \gg \dfrac{l}{2}$, $\left(1+\dfrac{l^2}{4r^2}\right)^{3/2} \approx 1$, 又可以定義 $\boldsymbol{l} = -l\hat{\boldsymbol{i}}$ 及電偶極距矢量 $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{l}$,

$$\boldsymbol{E} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}}{r^3}$$

□

問題 2

使用馬克士威方程組 (Maxwell's equations) 求解光速 c.

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Hint: $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A}$

解. □

問題 3

相互證明庫侖定律和高斯定理

$$\text{(庫侖定律)}\ \boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

$$\text{(高斯定理)}\ \oiint_{\mathbb{S}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i(\mathbb{S}\text{内})} q_i$$

解. 極座標下, 對於半徑爲 r 的一球面面元 $\mathrm{d}A$ 有:

$$\mathrm{d}A = (r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi)(r\,\mathrm{d}\theta)$$

可定義極小立體角爲:

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}A}{r^2} = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

一般地, 對於有向面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \mathrm{d}S\hat{\boldsymbol{n}}$, 可推廣立體角定義爲:

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{(\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}})\,\mathrm{d}S}{r^2} = \frac{\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}}{|\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}|}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

是以, 對於任一封閉曲面 $\mathbb{S}$, 當頂點在曲面内時, 對於曲面上的任一立體角元 $\mathrm{d}\Omega$, 總有 $\langle\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{n}}\rangle < \dfrac{\pi}{2}$, 即 $\dfrac{\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}}{|\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}|} \equiv 1$, 於是

$$\oiint_{\mathbb{S}} \mathrm{d}\Omega = \oiint_{\mathbb{S}} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\pi} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = [-cos\theta]_0^{\pi}(2\pi) = 4\pi$$

當頂點在曲面外時, 對於頂點所張的任一 $\mathrm{d}\Omega$ 皆存在一個互爲相反數的 $-\mathrm{d}\Omega$, 使得積分結果爲 0:

$$\oiint_{\mathbb{S}} \mathrm{d}\Omega = 0$$

1) 庫侖定律 $\to$ 高斯定理

數學中定義積分式:

$$\iint_{\Sigma} \boldsymbol{A} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}S = \iint_{\Sigma} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

爲向量場 $\boldsymbol{A}$ 通過曲面 Σ 向着指定側的通量, 其中 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 是面元的單位法向量. 對於電場 $\boldsymbol{E}$, 可定義電通量:

$$\varPhi_E = \iint_{\Sigma} \boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}S = \iint_{\Sigma} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

今假設空間中存在一封閉曲面 $\mathbb{S}$ 曰高斯面, 則可依點電荷 q 與 $\mathbb{S}$ 的位置關係而對 $\mathbb{S}$ 向外側的電通量進行分類討論:

a) q 在 $\mathbb{S}$ 內的情況

$$\begin{aligned}\varPhi_E &= \oiint_{\mathbb{S}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &= \oiint_{\mathbb{S}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\boldsymbol{r}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &= \oiint_{\mathbb{S}} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\, \mathrm{d}\Omega \\ &= \frac{q}{\varepsilon_0}\end{aligned}$$

b) q 在 $\mathbb{S}$ 外的情況

$$\begin{aligned}\varPhi_E &= \oiint_{\mathbb{S}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &= \oiint_{\mathbb{S}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\boldsymbol{r}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &= \oiint_{\mathbb{S}} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\, \mathrm{d}\Omega \\ &= 0\end{aligned}$$

因爲任何電荷系的點電荷皆可分爲 $\mathbb{S}$ 內和 $\mathbb{S}$ 外兩個部分, 由 a)、b) 的結論和場強疊加原理得

$$\begin{aligned}\varPhi_E &= \oiint_{\mathbb{S}} \left(\sum_{i(\mathbb{S}\text{內})} \boldsymbol{E}_i + \sum_{j(\mathbb{S}\text{外})} \boldsymbol{E}_j \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &= \sum_{i(\mathbb{S}\text{內})} \oiint_{\mathbb{S}} \boldsymbol{E}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \sum_{j(\mathbb{S}\text{外})} \oiint_{\mathbb{S}} \boldsymbol{E}_j \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &= \sum_{i(\mathbb{S}\text{內})} \frac{q_i}{\varepsilon_0} + \sum_{j(\mathbb{S}\text{外})} 0 \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i(\mathbb{S}\text{內})} q_i\end{aligned}$$

2) 高斯定理 $\to$ 庫侖定律

對於點電荷 q, 以其爲球心, r 爲半徑設一球形高斯面 $\mathbb{S}$, 則有

$$\oiint_{\mathbb{S}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oiint_{\mathbb{S}} \boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

在 $\mathbb{S}$ 上 $\hat{\boldsymbol{n}} \equiv \hat{\boldsymbol{r}}$ 且 $\boldsymbol{E} \parallel \hat{\boldsymbol{r}}$, 場強大小在 $\mathbb{S}$ 上處處相等, 是故

$$\boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{r}} \oiint_{\mathbb{S}} \mathrm{d}S = \boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \oiint_{\mathbb{S}} \mathrm{d}S = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$\hat{\boldsymbol{r}}^2 = 1$, 故 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 自反, 於是

$$\boldsymbol{E} = \frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{4\pi r^2} \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\boldsymbol{r}} \qquad \square$$