

**問題 1**

求不定積分

$$\int \frac{dx}{x(x-1)^2}$$

解. 設

$$\text{与式} = \int \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+1} dx$$

則

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A+C=0 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=2 \end{cases}$$

即

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \int \frac{1}{x} + \frac{-x+2}{x^2-2x+1} dx \\ &= \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{x-1-1}{(x-1)^2} d(x-1) \\ &= \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x-1} d(x-1) + \int \frac{1}{(x-1)^2} d(x-1) \\ &= \log|x| - \log|x-1| - \frac{1}{x-1} + C \\ &= \log\left|\frac{x}{x-1}\right| - \frac{1}{x-1} + C \end{aligned}$$

□

**問題 2**

求不定積分

$$\int \frac{\cos 2x - \sin 2x}{\cos x + \sin x} dx$$

解.

$$\text{与式} = \text{unimplemented}$$

□

**問題 3**

求不定積分

$$\int \frac{x+5}{x^2-6x+13} dx$$

解.

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \int \frac{x+5}{x^2+2\cdot 3x+3^2+4} dx \\ &= \int \frac{x-3+8}{(x-3)^2+4} d(x-3) \\ &= \int \frac{x-3}{(x-3)^2+4} d(x-3) + 8 \int \frac{1}{(x-3)^2+4} d(x-3) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x-3)^2+4} d[(x-3)^2+4] + 8 \int \frac{1}{(x-3)^2+2^2} d(x-3) \\ &= \frac{1}{2} \log|x^2-6x+13| + 8 \cdot \frac{1}{2} \arctan \frac{x-3}{2} + C \\ &= \frac{1}{2} \log(x^2-6x+13) + 4 \arctan \frac{x-3}{2} + C \end{aligned}$$

□

符號	物理意義	單位 (MKSA)
$q$	電荷	C
$\boldsymbol{E}$	電場	N/C(或V/m)
$\boldsymbol{B}$	磁場	T
$\Phi_E$	電通量	J · m/C
$\Phi_B$	磁通量	Wb
$\mathbb{S}$	積分曲面	m <sup>2</sup>
$\mathbb{L}$	積分環路	m
$d\boldsymbol{S}$	面元	m <sup>2</sup>
$d\boldsymbol{\ell}$	線元	m
$c$	光速	m/s
$\varepsilon_0$	真空電容率	F/m
$\mu_0$	真空磁導率	H/m

符號	數學意義
$\nabla \cdot$	散度算符
$\nabla \times$	旋度算符
$\Im$	虛部
$\Re$	實部
$a$	純量
$\boldsymbol{v}$	向量
$\hat{\boldsymbol{v}}$	$\boldsymbol{v}$ 的單位向量
$\ \boldsymbol{v}\ $	範數
$\mathbb{R}^n$	$n$ 維歐幾里得空間