Satanya@張睿 (2020 年 11 月 6 日)

---

**問題 1**

求解電偶極子軸線和中垂面上的電場強度

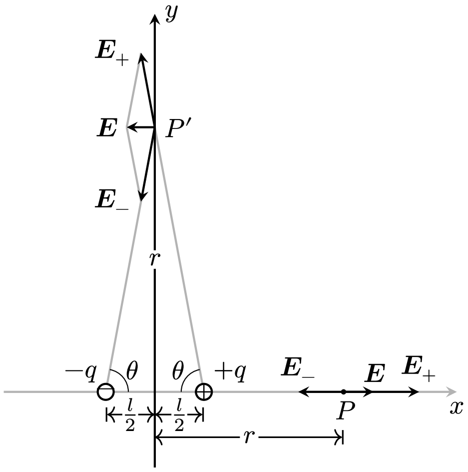


図 1　電偶極子

*解.* 設 $\hat{\boldsymbol{i}}, \hat{\boldsymbol{j}}, \hat{\boldsymbol{k}}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的標準正交基.

**1)** 對於延長線上的 $P$ 點

$$\boldsymbol{E}_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{+q}{\left(r-\dfrac{l}{2}\right)^2}\hat{\boldsymbol{i}}$$

$$\boldsymbol{E}_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{\left(r+\dfrac{l}{2}\right)^2}\hat{\boldsymbol{i}}$$

因此

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_+ + \boldsymbol{E}_- &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\left(r-\dfrac{l}{2}\right)^2} - \frac{q}{\left(r+\dfrac{l}{2}\right)^2}\right]\hat{\boldsymbol{i}} \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left[\frac{1}{\left(1-\dfrac{l}{2r}\right)^2} - \frac{1}{\left(1+\dfrac{l}{2r}\right)^2}\right]\hat{\boldsymbol{i}} \\
&\approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(1+\frac{l}{r}-1+\frac{l}{r}\right)\hat{\boldsymbol{i}} \\
&= \frac{2ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\hat{\boldsymbol{i}}
\end{aligned}$$

定義 $\boldsymbol{l} = -l\hat{\boldsymbol{i}}$ 及電偶極距矢量 $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{l}$

$$\boldsymbol{E} \approx -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\boldsymbol{p}}{r^3}$$

**2)** 對於中軸線上的 $P'$ 點

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_+ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{+q}{r^2+\dfrac{l^2}{4}}(-\cos\theta\hat{\boldsymbol{i}}+\sin\theta\hat{\boldsymbol{j}}) \\
\boldsymbol{E}_- &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{r^2+\dfrac{l^2}{4}}(\cos\theta\hat{\boldsymbol{i}}+\sin\theta\hat{\boldsymbol{j}})
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}_+ + \boldsymbol{E}_- \\
&= -2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2+\dfrac{l^2}{4}}\cos\theta\hat{\boldsymbol{i}} \\
&= -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2+\dfrac{l^2}{4}}\frac{\dfrac{l}{2}}{\sqrt{r^2+\dfrac{l^2}{4}}}\hat{\boldsymbol{i}} \\
&= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql}{\left(r^2+\dfrac{l^2}{4}\right)^{3/2}}\hat{\boldsymbol{i}} \\
&= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql}{r^3\left(1+\dfrac{l^2}{4r^2}\right)^{3/2}}\hat{\boldsymbol{i}}
\end{aligned}$$

因爲 $r \gg \dfrac{l}{2}$, $\left(1+\dfrac{l^2}{4r^2}\right)^{3/2} \approx 1$, 又可以定義 $\boldsymbol{l} = -l\hat{\boldsymbol{i}}$ 及電偶極距矢量 $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{l}$,

$$\boldsymbol{E} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}}{r^3}$$

□

**問題 1**

使用馬克士威方程組 (Maxwell's equations) 求解光速 $c$.

$$\begin{cases}
\nabla\cdot\boldsymbol{E} = 0 \\
\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0 \\
\nabla\times\boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \\
\nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}
\end{cases}$$

Hint: $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A}$

**解**. 以 $\boldsymbol{E}$ 方向爲 $x$ 軸，$v$ 方向爲 $y$ 軸, $\boldsymbol{B}$ 方向爲 $z$ 軸, 建立右手系，對於 $x$ 軸上分佈的 $\boldsymbol{E}(x,y,z,t)$, 可簡化爲純量函數 $E(x,t)$, 滿足:

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\nabla^2\boldsymbol{E}$$

由 Maxwell's equation

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=\nabla\times\left(-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right)=-\frac{\partial(\nabla\times\boldsymbol{B})}{\partial t}=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

由 Hint

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=-\nabla^2\boldsymbol{E}$$

故有

$$\begin{aligned}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}&=-\nabla^2\boldsymbol{E}\\ \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}&=\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial z^2}\end{aligned}$$

因爲 $\boldsymbol{E}$ 在 $y$, $z$ 方向沒有分量, $\dfrac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial y^2}$ 同 $\dfrac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial z^2}$ 皆爲 0, 於是

$$\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}$$

可分離變量的偏微分方程, 設 $E(x,t)=E_1(x)E_2(t)$

□

**問題 2**

相互證明庫侖定律和高斯定理

$$\begin{aligned}&(\text{庫侖定律})\ \boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}\\ &(\text{高斯定理})\ \oiint_{\mathbb{S}}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i\in\mathbb{S}_{\text{內}}}q_i\end{aligned}$$

**解**. 極座標下, 對於半徑爲 $r$ 的一球面面元 $\mathrm{d}A$ 有:

$$\mathrm{d}A=(r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi)(r\,\mathrm{d}\theta)$$

可定義極小立體角爲:

$$\mathrm{d}\Omega=\frac{\mathrm{d}A}{r^2}=\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

一般地, 對於有向面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\mathrm{d}S\hat{\boldsymbol{n}}$, 可推廣立體角定義爲:

$$\mathrm{d}\Omega=\frac{(\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})\,\mathrm{d}S}{r^2}=\frac{\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}}{|\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}|}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

是以, 對於任一封閉曲面 $\mathbb{S}$, 當頂點在曲面内時, 對於曲面上的任一立體角元 $\mathrm{d}\Omega$, 總有 $\langle\hat{\boldsymbol{r}},\hat{\boldsymbol{n}}\rangle<\dfrac{\pi}{2}$, 即 $\dfrac{\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}}{|\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}|}\equiv 1$, 於是

$$\oiint_{\mathbb{S}}\mathrm{d}\Omega=\oiint_{\mathbb{S}}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi=\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi=[-cos\theta]_0^{\pi}(2\pi)=4\pi$$

當頂點在曲面外時, 對於頂點所張的任一 $\mathrm{d}\Omega$ 皆存在一個互爲相反數的 $-\mathrm{d}\Omega$, 使得積分結果爲 0:

$$\oiint_{\mathbb{S}}\mathrm{d}\Omega=0$$

**1) 庫侖定律 $\rightarrow$ 高斯定理**

數學中定義積分式:

$$\iint_{\Sigma}\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

爲向量場 $\boldsymbol{A}$ 通過曲面 $\Sigma$ 向着指定側的通量, 其中 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 是面元的單位法向量. 對於電場 $\boldsymbol{E}$, 可定義電通量:

$$\varPhi_E=\iint_{\Sigma}\boldsymbol{E}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

今假設空間中存在一封閉曲面 $\mathbb{S}$ 曰高斯面, 則可依點電荷 $q$ 與 $\mathbb{S}$ 的位置關係而對 $\mathbb{S}$ 向外側的電通量進行分類討論:

a) $q$ 在 $\mathbb{S}$ 内的情況

$$\begin{aligned}\varPhi_E&=\oiint_{\mathbb{S}}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\&=\oiint_{\mathbb{S}}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\&=\oiint_{\mathbb{S}}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\mathrm{d}\Omega\\&=\frac{q}{\varepsilon_0}\end{aligned}$$

b) $q$ 在 $\mathbb{S}$ 外的情況

$$\begin{aligned}\varPhi_E&=\oiint_{\mathbb{S}}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\&=\oiint_{\mathbb{S}}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\&=\oiint_{\mathbb{S}}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\mathrm{d}\Omega\\&=0\end{aligned}$$

因爲任何電荷系的點電荷皆可分爲 $\mathbb{S}_{内}$ 和 $\mathbb{S}_{外}$ 外兩個部分, 由 a), b) 的結論和場強疊加原理得

$$\begin{aligned}\varPhi_E&=\oiint_{\mathbb{S}}\left(\sum_{i\in\mathbb{S}_{内}}\boldsymbol{E}_i+\sum_{j\in\mathbb{S}_{外}}\boldsymbol{E}_j\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\&=\sum_{i\in\mathbb{S}_{内}}\oiint_{\mathbb{S}}\boldsymbol{E}_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\sum_{j\in\mathbb{S}_{外}}\oiint_{\mathbb{S}}\boldsymbol{E}_j\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\&=\sum_{i\in\mathbb{S}_{内}}\frac{q_i}{\varepsilon_0}+\sum_{j\in\mathbb{S}_{外}}0\\&=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i\in\mathbb{S}_{内}}q_i\end{aligned}$$

**2)** 高斯定理 $\rightarrow$ 庫侖定律

對於點電荷 $q$, 以其爲球心, $r$ 爲半徑設一球形高斯面 $\mathbb{S}$, 則有

$$\oiint_{\mathbb{S}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oiint_{\mathbb{S}} \boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}S = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

在 $\mathbb{S}$ 上 $\hat{\boldsymbol{n}} \equiv \hat{\boldsymbol{r}}$ 且 $\boldsymbol{E} \parallel \hat{\boldsymbol{r}}$, 場強大小在 $\mathbb{S}$ 上處處相等, 是故

$$\boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{r}} \oiint_{\mathbb{S}} \mathrm{d}S = \boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \oiint_{\mathbb{S}} \mathrm{d}S = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$\hat{\boldsymbol{r}}^2 = 1$, 故 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 自反, 於是

$$\boldsymbol{E} = \frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{4\pi r^2} \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\boldsymbol{r}}$$ □

**問題 3**

對課程安排的意見和建議

解. 無し □