(siehe [Bi] Theorem 4.2).

Satz 2: Sei Z eine GL_n-Varietät, $O_z := GL_n \cdot z$ eine Bahn in Z und $Y \subset \overline{O_z}$ eine GL_n-stabile abgeschlossene Teilmenge. Dann gibt es eine 1-PUG λ mit $\lim\limits_{t \to o} \lambda(t)z \in Y$.

Für den Beweis dieses Resultats brauchen wir einige Vorbereitungen. Sei $A = \mathbb{C}[[t]]$ der Potenzreihenring in einer Variablen t und $K = \mathbb{C}((t))$ sein Quotientenkörper. Ist V ein GL_n-Modul, $v \in V$ ein Vektor und $g = (g_{ij}(t)) \in GL_n(K)$ eine Matrix mit Koeffizienten in K und Determinante $\neq o$, so kann man g auf v anwenden und erhält einen Vektor $gv \in K \otimes_{\mathbb{C}} V$, d. h. einen Vektor mit Koordinaten in K . Liegt gv schon in $A \otimes_{\mathbb{C}} V$, so können wir gv an der Stelle $t = o$ auswerten und erhalten einen Vektor in V , welchen wir kurz mit $(gv)_{t=o}$ oder mit $\lim\limits_{t \to o} g(t)v$ bezeichnen.

Lemma 1: Ist V ein GL_n-Modul, $v \in V$ und $w \in \overline{GL_n \cdot v}$, so gibt es eine Matrix $g \in GL_n(K)$ mit $(gv)_{t=o} = w$.

Beweis: Sei $\mu : GL_n \to V$, $h \mapsto hv$, die Orbitabbildung. Das Lemma besagt nun, daß es einen Algebrenhomomorphismus $\eta : \mathcal{O}(GL_n) \to K$ gibt, nämlich $\eta(x_{ij}) = g_{ij}(t)$, und ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(GL_n) & \xrightarrow{\ \eta\ } & K \\ \uparrow{\scriptstyle \mu^*} & & \cup \\ \mathcal{O}(V) & \xrightarrow[\ \eta'\ ]{} & A \end{array}$$

mit $\eta'^{-1}(A \cdot t) = \underline{m}_w$ = Maximalideal von $w \in V$. Dies erhält man auf folgende Weise. Zunächst gibt es eine irreduzible Kurve $C \subset GL_n$ mit $w \in \overline{\mu(C)}$ (AI.4.5 Folgerung). Setzen wir $L := \mathbb{C}(C)$ und $R := \mathcal{O}(\overline{\mu(C)})$, so ergibt sich folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(GL_n) & \longrightarrow & L \\ \uparrow{\scriptstyle \mu^*} & & \cup \\ \mathcal{O}(V) & \longrightarrow & R \end{array}$$

Ist $\tilde{R}$ der ganze Abschluß von R in L und $\underline{m} \subset \tilde{R}$ ein Maximalideal, das über $\underline{m}_w$ liegt (d. h. $\underline{m} \cap R = \underline{m}_w$; vgl. AI.4.3), so ist die $\underline{m}$-adische

Komplettierung $\hat{\tilde{R}} \cong A$ (AI. Satz 5.6 und AI. 6.1 Beispiel 2). Wir können daher das obige Diagramm folgendermassen ergänzen

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{O}(GL_n) & \longrightarrow & L & = & L & \subset & K \\ \uparrow{\scriptstyle \mu^*} & & \cup & & \cup & & \cup \\ \mathcal{O}(V) & \longrightarrow & R & \subset & \tilde{R} & \subset & A \end{array} ,$$

und die horizontalen Kompositionen sind die gesuchten Homomorphismen η und η' . ††

Das zweite Resultat ist eine Version des Elementarteilersatzes; der Beweis bleibt dem Leser überlassen.

<u>Lemma 2</u>: <u>Jedes</u> $g \in GL_n(K)$ <u>kann in der Form</u> $g = h_1 \cdot \tau \cdot h_2$ <u>geschrieben werden mit</u> $h_1, h_2 \in GL_n(A)$ <u>und</u>

$$\tau = \begin{pmatrix} t^{r_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t^{r_n} \end{pmatrix} , \quad r_i \in \mathbb{Z} .$$

<u>Beweis Satz 1 und 2</u>: O. E. ist $Z = V$ ein GL_n-Modul. Nach Lemma 1 gibt es ein $g \in GL_n(K)$ mit $(gz)_{t=o} = y \in Y$, welches nach Lemma 2 die Gestalt $g = h_1 \cdot \tau \cdot h_2$ hat mit $h_1, h_2 \in GL_n(A)$ und $\tau = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & t^{r_i} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$, $r_i \in \mathbb{Z}$. Es folgt $(\tau h_2 z)_{t=o} = h_1(o)^{-1} y \in Y$. Nun ist $h_2 z = \sum_{i=o}^{\infty} t^i z_i$ mit geeigneten $z_i \in V$, $z_o = h_2(o) z$, und folglich

$$\begin{aligned} (\tau h_2 z)_{t=o} &= \sum_{i=o}^{\infty} (\tau t^i z_i)_{t=o} \\ &= (\tau z_o)_{t=o} + (\tau t z_1)_{t=o} + \dots . \end{aligned}$$

Nun gilt

$$\lim_{t'\to o} \tau^{-1}(t')\big((\tau t^i z_i)_{t=o}\big) = \begin{cases} (\tau z_o)_{t=o} & \text{für} \quad i = o , \\ o & \text{sonst} , \end{cases}$$

wie man leicht unter Verwendung einer Basis aus Eigenvektoren bezüglich τ