一元函数微积分

1. 数列极限
- 单调有界准则
- 递推数列求极限
  - 1 证明极限存在 2 liman+1=limf(an)

2.函数极限与连续性
- 函数极限存在的充要条件 — 左右极限存在且相等
- 间断点
  - 一类间断点
    - 可去间断点
    - 跳跃间断点
  - 二类间断点
    - 无穷间断点
    - 振荡间断点
    - 其它二类间断点
  - 判断二类间断点时只需要先找无穷和振荡间断点
- 海涅定理
- 无穷小
  - 本质上是一定精度下函数在x=0处的泰勒展开
    - $f(x)$在x_0处：$f(x)=\frac{f(x_0)}{0!}+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R(x)$
  - 补充—个(1+x)^1/x，lim x -> 0的泰勒展开
    - $(1+x)^{\frac{1}{x}}\sim e(1-\frac{1}{2}x+\frac{11}{24}x^2)$
    - 注意$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\cdots$
    - $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\cdots$
    - 那么$\frac{\ln(1+x)}{x}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{5}-\frac{x^5}{6}+\cdots$
    - $(1+x)^{\frac{1}{x}}=\exp\frac{\ln(1+x)}{x}=\exp\left[1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{5}-\frac{x^5}{6}+\cdots\right]$
    - $=e\cdot\exp\left[-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{5}-\frac{x^5}{6}+\cdots\right]$
    - $=e\cdot e^{-\frac{x}{2}}\cdot e^{\frac{x^2}{3}}\cdot e^{-\frac{x^3}{4}}\cdots$
    - $=e\left[1+\left(-\frac{1}{2}x\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x\right)^2+\cdots\right]\left[1+\left(\frac{1}{3}x^2\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x^2\right)^2+\cdots\right]\left[1+\left(-\frac{1}{4}x^3\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}x^3\right)^2+\cdots\right]\cdots$
    - $=e\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{11}{24}x^2-\frac{7}{16}x^3+\frac{2447}{5760}x^4-\frac{959}{2304}x^5+\cdots\right)$
    - $\lim_{u\to 1, v\to\infty}u^v \overset{令u=1+t}{=} \lim_{t\to 0, v\to\infty}(1+t)^v=\lim\exp[v\ln(1+t)]=\lim\exp[vt]=\lim e^{v(u-1)}$
- 七种未定式 — 1^∞型 — u^v=e^v(u-1)

3.一元函数微分
- 某处可导的充要条件 — 左右导数存在且相等
- 导数极限定理 — 去心邻域连续可导，则可用导函数极限表示导数真值
- 微分
  - Δy=dy+o(Δx)=AΔx+o(Δx)
  - Δx=dx
- 可微的判别
- 基本求导公式
  - $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}$
- 高阶导数
  - 参数方程的二阶导
  - 反函数的二阶导
    - $y=f(x)$且$f'(x)\neq0$，则$x=\varphi(y)$的导函数为
    - $\frac{dx}{dy}=\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}$，$\frac{d^2x}{dy^2}=\varphi''(y)=-\frac{f''(x)}{(f'(x))^3}$
  - 隐函数的二阶导
    - $-\frac{F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_x^2F_{yy}}{F_y^3}$ — ~~…~~，另外这太复杂了
    - 对一阶导直接求，一般是用除法公式
    - $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{F_x}{F_y}$
    - $F(x,y)=0\Rightarrow\frac{dF}{dx}=F_x+F_yy'\Rightarrow y'=-\frac{F_x}{F_y}$
    - $y''=\frac{d}{dx}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)=-\frac{\frac{d(F_x)}{dx}F_y-\frac{d(F_y)}{dx}F_x}{(F_y)^2}$
    - $=-\frac{(F_{xx}+F_{xy}y')F_y-(F_{yx}+F_{yy}y')F_x}{(F_y)^2}$
    - $=-\frac{F_{xx}F_y-F_{xy}F_x-F_{yx}F_x+F_{yy}\frac{(F_x)^2}{F_y}}{(F_y)^2}$
    - $=-\frac{F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$ 混合偏导相等 $F_{xy}=F_{yx}$
  - 可能涉及麦克劳林展开
  - 莱布尼茨公式：求复合函数高阶导数 — (uv)^(n)=ΣCnku^(n-k)v^(k)
    - $(uv)^{(n)}=\sum C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$

4.一元微分几何应用
- 极值点
  - 三个充分条件
    - 邻域变号
    - 一阶导为零，二阶导非零
    - 低阶导为零，偶阶导非零
  - 一个必要条件：一阶导为零
- 拐点
  - 三个充分条件
    - 邻域变号
    - 二阶导为零，三阶导非零
    - 低阶导为零，奇阶导非零
  - 一个必要条件：二阶导为零
- 渐近线
  - 铅锤渐近线 $\lim_{x\to a}f(x)$
  - 水平渐近线 $\lim_{x\to\infty}f(x)$
  - 斜渐近线 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k$，$\lim_{x\to\infty}f(x)-kx=b$
- 曲率
  - 曲率公式 $K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$
  - $K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$

5.中值定理
- 最值定理
- 介值定理 — 可证存在f(ξ)介于Max与Min
- 平均值定理 — 可证存在f(ξ)=Σf(xi)/n
- 零点定理 — 满足：①f(a)f(b)<0 ➡ f(ξ)=0
- 费马定理 — 满足：x0处①可导②取极值 ➡ f'(x)=0
- 罗尔定理 — 满足：①闭连续②开可导③相等 ➡ f'(ξ)=0
- 拉格朗日中值定理 — 满足：①闭连续②开可导 ➡ f'(ξ) =fa-fb/a-b
- 柯西中值定理 — 满足：①闭连续②开可导③分母导函数非零 ➡ f'(ξ)/g'(ξ)=fb-fa/gb-ga
  - 为什么是开区间可导？因为区间左侧的左导数未知，无法确定端点处导数的存在性
- 泰勒公式
  - 拉格朗日余项 — 余项带ξ，有点像拉格朗日中值定理
  - 佩亚诺余项 — 余项为前一项的等价无穷小
  - 麦克劳林公式 — 即：x0=0时的泰勒公式
- 积分中值定理 — 满足：①闭连续 ➡ integral = f(ξ)(b-a)
  - $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$

6.零点问题与微分不等式
- 零点定理
- 罗尔原话
  - $f^{(n)}(x)=0$至多有K个根 ⇒ $f(x)$至多有 n+K 个根
- 实系数奇次方程至少有一个实根
- 微分不等式
- 连续、可导、可微、可积、原函数、变限积分
  - 可导<=>可微<=>导函数左右极限存在且相等
  - 可导一定连续
  - 连续一定闭区间有界
  - 连续一定极限存在
  - 连续一定闭区间可积
  - 连续一定原函数存在
  - 原函数存在<=>不定积分存在
  - 变限积分一定连续且原函数存在，但不一定可导

7.一元函数积分
- 不定积分（原函数）
  - $\int_a^x f(t)dt$ / $f(x)$
  - 不定积分存在定理
    - 连续函数必有原函数
    - 含有第一类或无穷间断点的函数在包含该间断点的区间内必没有原函数
    - 推论：可导函数的导函数不一定是连续函数，若有间断点，一定是第二类间断点
- 定积分（黎曼积分或常义积分）
  - 定义 — 精确定义
    - $$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(a+\frac{b-a}{n}i)\frac{b-a}{n}$$
    - 可用于计算一些特殊形式的数列极限，这类题往往看着可以用夹逼写，反正我是没写过...
  - 定积分存在定理（一元函数的常义可积）
    - $\int_a^b f(x)dx$
    - 充分条件（有三种）
      - 闭区间连续
      - 闭区间单调
      - 闭区间有界且只有有限个间断点
      - 则定积分必然存在
    - 必要条件 — 可积函数必定在有限区间内有界
  - 积分中值定理（前面有）
- 变限积分
  - 若函数可积，则其变限积分连续
  - 若函数连续，则其变限积分可导
  - 由此推出变限积分只要存在，其必然连续
  - 变限积分求导公式 — ✅ 仅当求变量只出现在积分上下限才能用
- 反常积分（广义积分）
  - 破坏区间有限性->无穷区间上反常积分
  - 破坏函数有界性->无界函数的反常积分：瑕积分
  - 二者的敛散性判定很相似，都是使用极限
  - 反常积分敛散性判别：有些时候可以用极限判别
    - 公式：$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ { 收敛，p>1；发散，p≤1 }
    - $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}$ { 收敛，p>1；发散，p<1；p=1 { 收敛，q>1；发散，q≤1 } }
    - $\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^p}$ { 收敛，0<p<1；发散，p≥1 }
- 不定积分的积分法
  - 某些记不住的公式 — 见下页
  - 凑微分aka第一换元法 — 实现 $u'(x)dx=du(x)$
  - 换元法aka第二换元法：凑微分倒着来
    - 令 $x=u(t)$，$dx=u'(t)dt$
    - 三角代换
    - 根式代换
    - 倒代换
    - 复杂函数代换 — a^x、e^x、lnx、arcsinx、arctanx等，直接代换。如果含有lnx、arcsinx、arctanx与多项式或e^ax相乘，用分部积分法
  - 分布积分法
    - $\int u\,dv=uv-\int v\,du$
  - 有理函数积分
    - $f(x)=\frac{1}{(x+a)(x+b)^2}=\frac{A}{x+a}+\frac{B}{x+b}+\frac{C}{(x+b)^2}$
    - $f(x)=\frac{1}{(x+a)(x^2+bx+c)^2}=\frac{A}{x+a}+\frac{Bx+C}{x^2+bx+c}+\frac{Dx+E}{(x^2+bx+c)^2}$
- 定积分的计算
  - 使用积分法
  - 利用奇偶性、周期性
  - 区间再现公式
    - $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$
  - 华里士公式计算高阶三角函数的积分
    - $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}=\frac{(n-1)!!}{n!!}, & n=odd\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2}, & n=even\end{cases}$
  - 子主题 5

8.一元积分的几何应用
- 平面图形面积
  - $S=\int_a^b|f_1(x)-f_2(x)|dx=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}|r_1^2(\theta)-r_2^2(\theta)|d\theta$
  - 弧长：$L=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}dx=\int_a^b\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$
- 旋转体体积
  - 圆盘法
  - 圆柱壳法
  - 圆柱壳的侧面积
- 函数平均值
  - $\int_{b-a}$

9.积分等式与积分不等式
- 积分等式
  - 用中值定理
  - 用夹逼准则
  - 用积分法
- 积分不等式
  - 用单调性
  - 用拉格朗日中值定理
  - 用泰勒公式
  - 用积分法

用中值定理
用夹逼准则
用积分法
积分等式
9.积分等式与积分不等式

1. $(c)'=0$;

2. $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in R)$;

3. $(\sin x)'=\cos x$, $(\cos x)'=-\sin x$;

4. $(\tan)'=\sec^2 x$, $(\cot)'=-\csc^2 x$,

$(\sec x)'=\sec x \cdot \tan x$, $(\csc x)'=-\csc x \cdot ctgx$;

5. $(a^x)'=a^x \ln a$, $(e^x)'=e^x$;

6. $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$, $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$;

7. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$, $(arc\cot x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

9. $y = \operatorname{ctg} x \qquad y' = -\csc^2 x = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

10. $y = \arcsin x \qquad y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11. $y = \arccos x \qquad y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12. $y = \operatorname{arctg} x \qquad y' = \dfrac{1}{1+x^2}$

13. $y = \operatorname{arcctg} x \qquad y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

高阶导数
隐函数的二阶导
对一阶导直接求，一般是用除法公式
可能涉及麦克劳林展开
莱布尼茨公式：求复合函数高阶导数 — (uv)^(n)=ΣCnku^(n-k)v^(k)

4.一元微分几何应用
极值点
三个充分条件
邻域变号
一阶导为零，二阶导非零
低阶导为零，偶阶导非零
一个必要条件：一阶导为零
拐点
三个充分条件
邻域变号
二阶导为零，三阶导非零
低阶导为零，奇阶导非零
一个必要条件：二阶导为零
渐近线
铅锤渐近线
水平渐近线
斜渐近线
曲率
曲率公式 $K=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$

泰勒公式
佩亚诺余项 — 余项为前一项的等价无穷小
麦克劳林公式 — 即：x0=0时的泰勒公式
积分中值定理 — 满足：①闭连续 integral = f(ξ)(b-a)

1. $\int k dx = kx + C$

2. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq 1)$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

可用于计算一些特殊
往看着可以用夹逼写,

4. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

则定积分或原函数存在

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C$

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$

可导<=>可微<=

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$

变限积分一定连续

10. $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$

11. $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

12. $\int e^x dx = e^x + C$

13. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

14. $\int \sinh x dx = \cosh x + C$

15. $\int \cosh x dx = \sinh x + C$

16. $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$

17. $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$

18. $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

19. $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$

中间是先y后x的混合偏导，另外这太复杂了

20. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

21. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

23. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + C$

24. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C$