Лабораторная работа № 4

Метод простых итераций решения трансцендентного уравнения f(x)=0

Цель работы:

1. Освоить метод простых итераций решения трансцендентных уравнений.

1. Общие сведения

Суть метода простых итераций заключается в последовательном приближении к решению путём многократного применения рекуррентных процедур, то есть исходными данными для каждой последующей процедуры являются результаты применения предыдущих процедур.

Для решения уравнения $f(x)=0$ методом простых итераций его приводят к виду $x=\varphi(x)$. Например, уравнение $x^5-3\cdot x^2+1=0$ можно привести к виду $x=\sqrt{\frac{x^5+1}{3}}$. Затем выбирают некоторое начальное приближение $x^{[0]}$ и вычисляют последовательные приближения:

$$x^{[j+1]}=\varphi\left(x^{[j]}\right),\ \text{где } j = 0, 1, 2, \ldots \text{– номер итерации.} \tag{1}$$

Итерации заканчиваются тогда, когда отношение $\frac{\left|x^{[j]}-x^{[j-1]}\right|}{x^{[j]}}$ становится достаточно малым, меньшим заранее заданного значения, называемого относительной погрешностью.

Строго говоря, начальное приближение и вид $x=\varphi(x)$ должны выбираться из условия сходимости. На практике часто проще и быстрее перебрать несколько вариантов выражения $x=\varphi(x)$ и начального приближения с выбором наилучшего, чем добиваться выполнения условия сходимости. Часто хорошо сходятся уравнения, не удовлетворяющие условию сходимости.

2. Пример применения метода простых итераций

Решить задачу:

Дано: плотность стационарного теплового потока через однослойную стенку q = 40000 Вт/м^2; температура внутренней поверхности стенки t_1 = 300 К; толщина стенки r = 0,1 м. Коэффициент теплопроводности стенки имеет следующую зависимость от температуры:

$$\lambda(t_s)=\lambda_0\cdot\left(1+a_1\cdot t_1+a_2\cdot t_2^2\right) \tag{2}$$

где λ_0 = 40 Вт/(м·К); a_1 = 0,012 К$^{-1}$, a_2 = – 0,000052 К$^{-2}$.

Найти: температуру внутренней поверхности стенки t_2 с погрешностью 0.001%.

Замечания по постановке задачи:

Тепловой поток связан с температурами стенки t_1 и t_2 следующей формулой: $q = \dfrac{t_1 - t_2}{\dfrac{r}{\lambda(t_S)}}$ (3), где $t_S = \dfrac{t_1 + t_2}{2}$ (4) – средняя температура по сечению стенки.

Если подставить в выражение (3) зависимость для $\lambda(t_S)$, то получится неудобное для решения относительно t_2 уравнение:

$$q = \lambda_0 \cdot \left[1 + a_1 \cdot \frac{t_1 + t_2}{2} + a_2 \cdot \left(\frac{t_1 + t_2}{2} \right)^2 \right] \cdot \frac{t_1 - t_2}{r} \qquad (5)$$

Поэтому используем для решения метод простых итераций.

Алгоритм решения задачи:

1. Примем в начальном приближении, что $t_S^{[0]} = t_1$. Тогда из уравнения (3) можно легко выразить t_2 в виде: $t_2^{[0]} = t_1 - \dfrac{q \cdot r}{\lambda\left(t_S^{[0]}\right)}$ (6).
2. Теперь можно уточнить среднюю температуру стенки по формуле (4) $t_S^{[1]} = \dfrac{t_1 + t_2^{[0]}}{2}$, а, следовательно, и t_2: $t_2^{[1]} = t_1 - \dfrac{q \cdot r}{\lambda\left(t_S^{[1]}\right)}$. Таким образом, мы получим итерационный механизм последовательного уточнения t_2.
3. Признаком окончания расчёта будет выполнение условия $\left| \dfrac{t_2^{[j]} - t_2^{[j-1]}}{t_2^{[j]}} \right| \cdot 100 \le \varepsilon_{\max}$.

Фрагмент рабочего документа с решением задачи показан на рис. 4.1.

Указания к выполнению задачи:

1. Введите исходные данные как показано на рис. 4.1. Нижние индексы возле переменных t_1, t_2, t_{20} λ_0, a_1 и a_2 – это не ‘‘рабочие’’ индексы, а ‘‘декоративные’’, т.е. эти переменные являются не элементами массивов, а обычными переменными. Такие нижние индексы можно ввести, нажав на клавишу с изображением буквы ‘‘*Ю*’’ или ‘‘**.**’’ – точки.
2. Введите функцию для определения теплопроводности $\lambda(t)$.
3. Начальное значение температуры внутренней поверхности стенки t_0 принимается равным:

$$t_{20} := t_1 - \frac{q \cdot r}{\lambda(t_1)}$$

4. Для создания программного модуля нажмите на панели программных элементов кнопку < Add Line > – появится вертикальная черта с двумя пустыми позициями; курсор будет установлен в нижней позиции. Нажмите кнопку < Add Line > ещё два раза, чтобы число пустых позиций стало равным четырём.

5. Заполните пустые позиции (шаблоны) программного модуля как показано на рис. 4.1.

<u>Необходимо запомнить правило</u>: *в теле программного модуля нельзя изменять значения глобальных переменных.*

6. Выведите результат расчёта.

Исходные данные :

$$q := 40000 \cdot \frac{W}{m^2} \qquad t_1 := 300 \cdot K \qquad \lambda_0 := 40 \cdot \frac{W}{m \cdot K} \qquad \varepsilon_{max} := 0.001$$

$$a_1 := 0.012 \cdot \frac{1}{K} \qquad a_2 := -0.0000052 \cdot \frac{1}{K^2} \qquad r := 0.1 \cdot m$$

Функция для расчёта λ: $\lambda(t) := \lambda_0 \cdot \left(1 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2\right)$

Принимаем в первом приближении $t_{20} := t_1 - \dfrac{q \cdot r}{\lambda(t_1)}$ $\quad t_{20} = 275.799 \cdot K$

Программный модуль для расчёта t_2 **методом простой итерации:**

$$t_2 := \left|\begin{array}{l} pog \leftarrow 100 \\ t_{20} \leftarrow t_{20} \\ \text{while } pog \ge \varepsilon_{max} \\ \quad \left|\begin{array}{l} t_s \leftarrow \dfrac{t_{20} + t_1}{2} \\ t_{2k} \leftarrow t_1 - \dfrac{q \cdot r}{\lambda(t_s)} \\ pog \leftarrow 100 \cdot \left|\dfrac{t_{2k} - t_{20}}{t_{2k}}\right| \\ t_{20} \leftarrow t_{2k} \end{array}\right. \\ t_{2k} \end{array}\right.$$

Результат: $t_2 = 275.129 \cdot K$

Рис. 4.1. Решение задачи методом простых итераций

Задание для самостоятельной работы

Решить уравнение методом простой итерации при максимальной относительной погрешности $\varepsilon_{max} = 0.01\%$. Вариант задания взять из таблицы 4.1 согласно порядковому номеру студента по журналу.

<u>Указание к выполнению</u>: перед вводом расчётной части в ЭВМ необходимо первые два итерационные шага сделать вручную с обязательным отражением их в отчёте по лабораторной работе.

Таблица 4.1

Варианты заданий для самостоятельной работы

№ вар	Уравнение	№ вар	Уравнение
1	$3 \cdot x^5 + 2 \cdot x^2 - 3 = 0$	9	$0{,}2 \cdot x^4 - 2 \cdot x^3 + 1 = 0$
2	$2 \cdot x + 0{,}5 \cdot e^x = 0$	10	$2 \cdot x^2 - 3 \cdot x^3 + 10 = 0$
3	$e^X - 2 \cdot x^2 = 0$	11	$2 \cdot \cos(x) - 3 \cdot x + 10 = 0$
4	$x + x^3 = 4$	12	$x - 5 \cdot x^3 = 24$
5	$0{,}5 \cdot x + x^4 = 7$	13	$0{,}1 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 1 = 0$
6	$0{,}1 \cdot e^x - 2 \cdot x^2 = 0$	14	$3 \cdot \ln(x) - 0{,}5 \cdot x + 3 = 0$
7	$x - x^3 = 4$	15	$2 \cdot x + x^2 = 0{,}2$
8	$0{,}2 \cdot e^x - 2 \cdot x^2 + 1 = 0$	16	$2 \cdot x + 82 \cdot x^2 = 39$

Требования к отчёту

Отчет о лабораторной работе должен включать цель работы, кратко оформленный реферат первого раздела и протокол действий, выполненных студентом на компьютере. Рабочий документ выполнения лабораторной работы должен быть сохранён на ПЭВМ в личной папке студента.

При сдаче лабораторной работы студент должен продемонстрировать умение составлять простейшие программные конструкции в среде **MathCAD Pro**, а также ответить на следующие контрольные вопросы:

1. В чём суть метода простых итераций?
2. Какова последовательность решения уравнения вида $f(x)=0$ методом простых итераций?
3. Объясните назначение кнопки ‘‘**Add Line**’’ панели программирования.
4. Объясните назначение кнопки ‘‘**while**’’ панели программирования.
5. Что является условием окончания расчёта при использовании метода простых итераций?
6. Как ввести простой и ‘‘декоративный’’ индексы?
7. Объясните назначение кнопки ‘‘**←**’’ панели программирования.
8. Что называется трансцендентным уравнением?
9. Приведите примеры присвоения функции и присвоения переменной.
10. Можно ли изменять значение глобальной переменной в программном блоке?