

Глава 2. Математическое моделирование

2.1. Основные понятия и определения

Математическая модель – совокупность математических объектов (уравнений, систем уравнений и неравенств, алгебраических выражений и т.д.), описывающих языком математических символов исследуемый объект и его отношения с окружающим миром.

Под математическим моделированием в технике понимают адекватную замену исследуемого технического устройства или процесса соответствующей математической моделью и ее последующее изучение методами вычислительной математики с привлечением средств современной вычислительной техники.

Преимущества математического моделирования перед натурным экспериментом:

- экономичность (сбережение материальных, человеческих, временных и финансовых ресурсов);
- возможность моделирования гипотетических объектов;
- возможность реализации режимов, опасных или трудновоспроизводимых в реальности;
- возможность изменения масштаба времени;
- простота многоаспектного анализа;
- возможность построения прогнозов на основе выявления общих закономерностей;
- наличие и универсальность технического и программного обеспечения для моделирования.

2.2. Требования к математической модели

Чтобы математическую модель можно было использовать для исследования реального объекта, она должна удовлетворять следующим требованиям:

- быть практически полезной;
- быть адекватной реальному объекту;
- быть адекватной решаемым задачам;
- быть простой в содержательном смысле и легко интерпретируемой;
- быть «адаптированной» к имеющимся исходным данным об объекте и легко модифицироваться при появлении новых данных;
- быть полной с точки зрения решаемых задач;
- быть ориентированной на психологию пользователя, простой и понятной ему;
- гарантировать отсутствие абсурдных результатов.

2.3. Структура математической модели

Математическая модель представляет собой комбинацию следующих элементов:

- переменных (входных и выходных) – всегда имеют область определения;
- параметров – принимают числовые значения;
- функциональных зависимостей;
- ограничений (искусственных и естественных);
- целевых функций (в задачах оптимизации).

2.4. Классификация математических моделей

Математические модели можно классифицировать по следующим признакам:

1. *Сложность объекта*

Все объекты моделирования можно разделить на две группы: простые объекты и объекты-системы.

При моделировании простых объектов не рассматривается внутреннее строение объекта, не выделяются составляющие его элементы или подпроцессы.

Простым объектом, например, является материальная точка в классической механике.

Для сложных систем характерно наличие большого числа взаимосвязанных и взаимодействующих элементов. Их поведение многовариантно.

При моделировании объектов-систем возникают большие трудности.

Модели объектов-систем, учитывающие свойства и поведение отдельных элементов, а также взаимосвязи между ними, называются *структурными* моделями.

2. *Оператор модели*

Оператор модели определяется совокупностью уравнений.

Если оператор обеспечивает линейную зависимость выходных факторов от входных, то математическая модель называется *линейной*.

В противном случае модель называется *нелинейной*.

3. *Параметры модели*

В зависимости от вида используемых множеств параметров модели делятся на *качественные* и *количественные*, *дискретные* и *непрерывные*, *смешанные*.

4. *Цели моделирования*

В зависимости от цели моделирования выделяют *дескриптивные*, *оптимизационные*, *управленческие* модели.

Целью *дескриптивных* моделей является установление законов изменения параметров модели.

Оптимизационные модели предназначены для определения оптимальных (наилучших) с точки зрения некоторого критерия параметров объекта и технологических режимов.

Управленческие модели применяются для принятия эффективных управленческих решений.

5. *Метод реализации модели*

В зависимости от метода реализации выделяют *аналитические* и *алгоритмические* математические модели.

Метод является *аналитическим*, если он позволяет получить выходные факторы в виде аналитических выражений.

Аналитические методы бывают *алгебраическими* и *приближенными*.

В *алгоритмических* моделях математические соотношения для объекта исследования заменяются алгоритмом.

Алгоритмические модели бывают *численными* и *имитационными*.

При моделировании технических систем и процессов классификация математических моделей приобретает дополнительные признаки:

- по этапам жизненного цикла создания объекта выделяют модели *анализа*, модели *проектирования*, модели *внедрения* и т.д.;
- по уровню формализации модели можно выделить *концептуальную* модель (для пользователя и аналитика), *формализованное* (или *алгоритмическое*) описание и *программу-имитатор*;

- по методам построения различают модели, созданные с помощью *аналитических* и *статистических* методов.

В основе *аналитических* моделей процессов лежат фундаментальные законы тепло- и массопереноса, выраженные в виде функциональных соотношений (алгебраических, интегрально-дифференциальных, конечно-разностных и т.д.).

Поэтому аналитические модели описывают и раскрывают сущность процессов и явлений, протекающих в исследуемом объекте и определяющих его свойства и поведение.

Методы исследования аналитических моделей: *аналитические* (получают общее решение в явном виде и подставляют в него значения граничных и начальных условий) и *численные* (общие решения в явном виде заменяются приближенными).

В качестве примера аналитических моделей можно назвать дифференциальные уравнения.

В основе *статистических* моделей лежат результаты экспериментального исследования объекта.

Статистические модели рассматривают исследуемый объект как «черный ящик» и не раскрывают сущность процессов и явлений, протекающих в нем.

Они отражают одну из возможных зависимостей выходных переменных от входных, т.е. носят частный характер.

Примеры эмпирических моделей – корреляционные, регрессионные модели.

2.5. Цели математического моделирования для технических объектов и технологических процессов

1. Помочь при решении задач стратегического и тактического управления.

Существует иерархия задач управления технологическими процессами и комплексами.

На верхнем уровне решаются задачи стратегического планирования и управления.

На нижних уровнях – тактические задачи календарного планирования и текущего управления.

Этой иерархии задач соответствует иерархия математических моделей.

2. Заменить недопустимые на реальном техническом объекте опыты экспериментами на его модели.

Опыты на реальном объекте заменяются компьютерными (вычислительными) экспериментами, что позволяет существенно повысить качество принимаемых инженерных и управленческих решений, снизить сроки и затраты на достижение оптимальных результатов.

3. Свести исследование реального объекта к решению математической задачи.

Имеющееся в настоящее время математическое, программное, компьютерное обеспечение позволяет смоделировать и исследовать большое количество вариантов решаемой задачи, выбрать и обосновать наиболее целесообразное решение.

4. Получить эффективный инструмент исследования сложных систем и процессов.

Математическое моделирование позволяет рассмотреть ряд одновременно протекающих в системе процессов и выбрать оптимальный инструмент их исследования.

5. Обобщить знания, накопленные об объекте.

Модели служат аккумуляторами знаний об объектах и выполняют особую смыслообразующую роль в системе научно-технических знаний.