Разработка итерационных алгоритмов поиска автоморфизмов и изоморфизмов комбинаторных объектов.

Автор:

Ефремов Степан Сергеевич (419 группа)

Научный руководитель:

доцент, к.ф.- м.н.

Егоров Владимир Николаевич

Содержание

Существующие решения

Направления исследований

На данный момент сформированы два направления изучения и решения проблемы поиска изоморфизмов графов:

- Теоретическое, в котором проблема изоморфизма рассматривается с позиций современной теории сложности алгоритмов и вычислений (подход использует понятие инвариантов графа).
- Практическое, предполагающее разработку алгоритмов, решающих задачу изоморфизма графов за «практически приемлемое» время (направленный перебор).

Сравнение сложностей алгоритмов

Алгоритм	**Ограничения**	**Сложность**
Полный перебор	без ограничений	$n!$
Егоров В.Н., Егоров А.В.	без ограничений	$O(n^2(\frac{e}{2})^{\ln(n)^2}\ln(n))$
László Babai	без ограничений	$e^{(\log n)^{O(1)}}$
László Babai, Eugene M.	без ограничений	$O(e^{\sqrt{n \times \log(n)}})$
Daniel A. Spielman	сильно регулярные	$n^{\emptyset(n^{1/3}\log^2 n)}$
Vaibhav Amit Patel	специальный вид	$O(n^4)$

Таблица 1: Алгоритмы поиска автоморфизмов

Постановка задачи

Постановка задачи

1. Исследование свойств алгоритма:

Постановка задачи

1. Исследование свойств алгоритма:
    - Определение класса решаемых задач
    - Вероятностная сложность
    - Теоретическая возможность распараллеливания
    - Модернизация алгоритма на основе исследований

Постановка задачи

1. Исследование свойств алгоритма:
    - Определение класса решаемых задач
    - Вероятностная сложность
    - Теоретическая возможность распараллеливания
    - Модернизация алгоритма на основе исследований
2. Задачи, связанные с реализацией для ПК:

Постановка задачи

1. Исследование свойств алгоритма:
   - Определение класса решаемых задач
   - Вероятностная сложность
   - Теоретическая возможность распараллеливания
   - Модернизация алгоритма на основе исследований
2. Задачи, связанные с реализацией для ПК:
   - Реализация в виде программы с графическим интерфейсом
   - Эксперименты поиска автоморфизмов на известных графах
   - Поддержка функционала нахождения изоморфного вложения графов

Постановка задачи

1. Исследование свойств алгоритма:
    - Определение класса решаемых задач
    - Вероятностная сложность
    - Теоретическая возможность распараллеливания
    - Модернизация алгоритма на основе исследований
2. Задачи, связанные с реализацией для ПК:
    - Реализация в виде программы с графическим интерфейсом
    - Эксперименты поиска автоморфизмов на известных графах
    - Поддержка функционала нахождения изоморфного вложения графов
3. Задачи, связанные с реализацией для суперкомьютера:

Постановка задачи

1. Исследование свойств алгоритма:
    - Определение класса решаемых задач
    - Вероятностная сложность
    - Теоретическая возможность распараллеливания
    - Модернизация алгоритма на основе исследований
2. Задачи, связанные с реализацией для ПК:
    - Реализация в виде программы с графическим интерфейсом
    - Эксперименты поиска автоморфизмов на известных графах
    - Поддержа функционала нахождения изоморфного вложения графов
3. Задачи, связанные с реализацией для суперкомьютера:
    - Исследование ресурса параллелизма
    - Реализация в виде программы для запуска на суперкомпьютере
    - Эксперименты поиска автоморфизмов графов на суперкомпьютере

Постановка задачи

1. Исследование свойств алгоритма:
    - Определение класса решаемых задач
    - Вероятностная сложность
    - Теоретическая возможность распараллеливания
    - Модернизация алгоритма на основе исследований
2. Задачи, связанные с реализацией для ПК:
    - Реализация в виде программы с графическим интерфейсом
    - Эксперименты поиска автоморфизмов на известных графах
    - Поддержка функционала нахождения изоморфного вложения графов
3. Задачи, связанные с реализацией для суперкомьютера:
    - Исследование ресурса параллелизма
    - Реализация в виде программы для запуска на суперкомпьютере
    - Эксперименты поиска автоморфизмов графов на суперкомпьютере
4. Исследование практического применения алгоритма для задачи Коши

Разработанные решения

Модернизированный алгоритм

Разработан алгоритм с предполагаемой сложностью:

$$O(n^2(\frac{e}{2})^{\ln(n)^2}\ln(n))$$

Алгоритм является универсальным и может применяться для решения большого количества задач (как минимум всех указанных в пункте 4.1 дипломной работы).

Написанная программа с интерфейсом имеет масштабируемые функционал. На данный момент поддерживает функционал решения следующих задач:

- Поиск автоморфизмов
- Поиск изоморфизмов
- Поиск гомоморфизмов
- Решение задачи Коши в подстановках

Разработанные приложения

Разработано 2 программы:

1. Приложение с графическим интерфейсом, написанное на *Qt*
   - не поддерживает распараллеливание
   - справляется с графами размера до 500 вершин
   - удобный анализ графов
   - помимо нахождения автоморфизмов, решает задачи изоморфизма и гомоморфизма графов
2. Программа на языки $C++$ с поддержкой *OpenMPI*
   - поддерживает распараллеливание средствами *OpenMPI*
   - помимо нахождения автоморфизмов, сохраняет много информации для анализа графов с большим количеством вершин

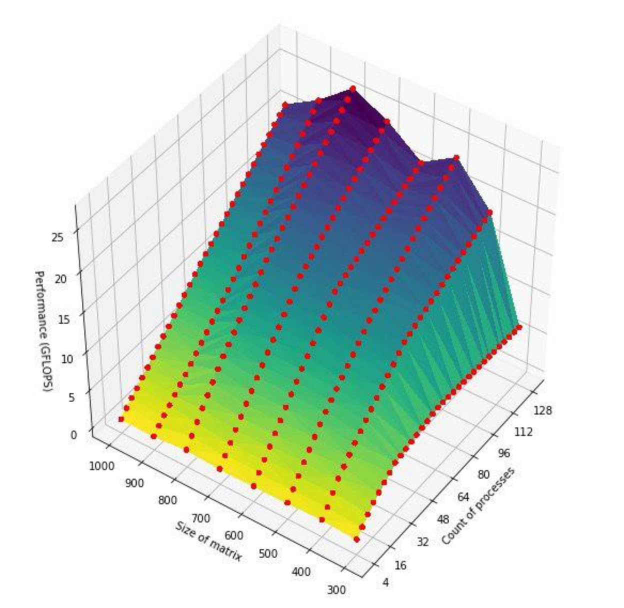
Тестирование на суперкомпьютере

Набор и границы значений изменяемых параметров запуска реализации алгоритма:

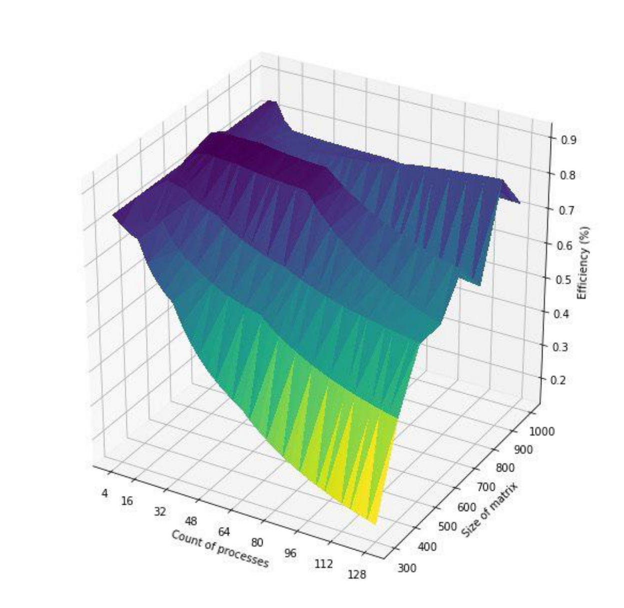
1. Число процессоров [4 : 128] с шагом 2^n (точки отображены с шагом 4, усреднив результаты);
2. Размер матрицы [300 : 1000].

Результаты

Изменение производительности



Изменение эффективности



Результаты

Разработка итерационного алгоритма поиска автоморфизмов графов:

- Выполнена модернизация алгоритма
- Сформулирована гипотеза сложности алгоритма
- Реализовано 2 программы:
  - с графическим интерфейсом для удобного использования
  - с консольным интерфейсом для запуска на суперкомпьютере
- Проведены опыты на суперкомпьютере «Ломоносов»

Вопросы

Примечание к гипотезе

$$|M_1| = n$$

$$|M_1'| = \frac{3}{2} \times \frac{n}{2}$$

$$|M_2| = \frac{3}{2} \times \frac{n}{2} \times (n-1)$$

$$|M_2'| = \frac{3}{2}^2 \times \frac{n}{2} \times \frac{n-1}{2^3}$$

$$\dots$$

$$|M_i| = (n+1-i) \times |M_{i-1}'|$$

$$|M_i'| = \frac{3}{2}^i \times \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n+1-i)}{2^{1+3+\dots+(2i-1)}} = \frac{3}{2}^i \times \frac{n!}{(n-i)! \times 2^{i^2}}$$

Примечание к гипотезе 2

$$x_i = \{1, p = \frac{1}{2i-1}; 0, q = 1 - p\}$$

$$M_{x_i} = \frac{1}{2^{2i-1}}$$

$$D_{x_i} = \frac{2^{2i-1} - 1}{2^{4i-2}}$$

$$S_i = \frac{n+1-i}{2^{2i-1}}$$

Примечание к гипотезе 3

$$P \leq P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n$$

$$P_i = P(0 < S_i < \frac{3}{2} \times \frac{n + 1 - i}{2^{2i-1}})$$