

Mémoire présenté le :

**pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA
et l'admission à l'Institut des Actuaires**

Par : DE LA CROIX ALEXANDRE

Titre _____

Confidentialité : ☒ NON ☐ OUI (Durée : ☐ 1 an ☐ 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membre présents du jury de l'Institut
des Actuaires signature

Entreprise :

Membres présents du jury de l'ISFA

Nom : Caisse des dépôts et de

Signature : Consignations

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : HAEUW

Signature : [Signature]

Invité :

Nom :

Signature :

**Autorisation de publication et de mise
en ligne sur un site de diffusion de
documents actuariels (après expiration
de l'éventuel délai de confidentialité)**

Signature du responsable entreprise

**CAISSE DES DÉPÔTS
ET CONSIGNATIONS**
56, rue de Lille
75356 PARIS 07 SP

Secrétariat

Bibliothèque :

Signature du candidat

[Signature]

Mémoire d'actuaire

Evaluation du risque de contrepartie

Credit valuation Adjustment

Delacroix Alexandre



Caisse des Dépôts et Consignations

56 rue de Lille, 75007 Paris



Institut de Science Financière et d'Assurances

50 avenue Tony Garnier, 69007 Lyon

Remerciements

Mes premiers remerciements s'adressent à la Caisse des Dépôts et Consignations et à l'ensemble de ses collaborateurs pour m'avoir accueilli au sein de ce prestigieux établissement. Je tiens particulièrement à remercier Stéphane Haeuw pour m'avoir intégré au sein du service des financements de la Caisse des Dépôts pendant cette année.

Je remercie ensuite tout particulièrement Marlène Raillard, ma responsable d'alternance, pour son suivi dans le cadre de mon mémoire. Elle a su me transmettre son enthousiasme et sa motivation pour mon projet. Sa connaissance fine des mathématiques financières a été un atout important dans la réalisation de ce mémoire et de mes missions. Ainsi que sa réflexion et son recul dans la finalisation de l'évaluation du risque de contrepartie.

J'adresse également mes remerciements à Thibaud Grimard et Frédéric Bonnardel, permanents au sein de l'équipe, pour leurs conseils et d'avoir contribué à une ambiance de travail agréable.

Enfin, je tiens à remercier l'Institut de Science Financière et d'Assurances pour l'ensemble des connaissances acquises au long de ma scolarité, qui ont permis l'aboutissement de ce mémoire d'actuaire.

Sommaire

| | |
|---|---------------|
| Remerciements | 2 |
| Sommaire | 3 |
| Résumé | 6 |
| Abstract | 7 |
| Introduction générale | 8 |
| Première partie : Présentation générale..... | 9 |
| I. Les principales exigences pour la gestion du risque de contrepartie sous Bâle II..... | 11 |
| 1. Introduction..... | 11 |
| 2. Exposition aux contreparties | 14 |
| II. Bâle III : Nouvelle réglementation concernant la gestion du risque de contrepartie | 15 |
| 1. Introduction..... | 15 |
| 2. Effective Expected Positive Exposure stressé (EEPE)..... | 15 |
| 3. Le risque de variation de CVA d'un portefeuille | 16 |
| 4. General « Wrong way risk »..... | 17 |
| 5. Impact du risque de contrepartie sur les résultats..... | 18 |
| III. Réduction du risque de contrepartie | 19 |
| 1. Accord unilatéral ou bilatéral..... | 19 |
| 2. Netting et Close-out..... | 20 |
| a) Close-out | 20 |
| b) Netting..... | 21 |
| 3. Les Collatéraux | 23 |
| IV. Marché et produits de taux | 24 |
| 1. Courbes des taux zéro-coupons, taux forwards et taux swaps :..... | 25 |
| a) Obligations zéro-coupon et taux spot zéro-coupon :..... | 25 |
| b) Contrats FRA et taux forwards : | 27 |
| c) Taux court et taux forward instantané : | 28 |
| d) Swaps de taux d'intérêts : | 29 |
| V. Marché et produits de dérivés de crédit | 29 |
| 1. Crédit default swap | 30 |
| a) Définition :..... | 30 |
| b) Evaluation d'un CDS : | 31 |
| c) Le taux de recouvrement R : | 33 |
| 2. Les Collateralised Debt Obligation..... | 35 |
| a) Définition :..... | 35 |
| b) Evaluation d'un CDO :..... | 36 |

Deuxième partie : Evaluation du risque de crédit37

| | |
|---|-----------|
| I. Introduction..... | 38 |
| II. Les modèles structurels | 38 |
| 1. Le modèle de Merton | 38 |
| 2. Le modèle de Black & Cox..... | 39 |
| III. Les modèles à intensité de défaut | 41 |
| 1. Cadre d'évaluation des modèles à intensité de défaut | 41 |
| 2. Processus de Cox, probabilité de défaut et de survie | 42 |
| 3. Présentation de la calibration de CDS sous les modèles réduits et taux de hasard | 43 |
| 4. Analyse des résultats pour la France et l'Allemagne | 44 |
| 5. Présentation de résultats pour des « corporate »..... | 47 |
| IV. Le modèle SSRD..... | 52 |
| 1. Présentation du cadre théorique | 52 |
| 2. Prix de quelques produits vanilles dans le cadre du modèle SSRD | 53 |
| 3. Procédure de calibrage du modèle SSRD sous la probabilité risque-neutre | 55 |
| 4. Euler et Milstein : solutions pour simuler (λ, r) | 58 |

Troisième partie : Evaluation de la Credit Valuation Adjustment59

| | |
|--|-----------|
| I. Modélisation de la Credit Valuation Adjustment(CVA)..... | 60 |
| 1. Introduction (Unilateral CVA) | 60 |
| 2. Le risque de contrepartie bilatéral (<i>Bilateral CVA</i>) | 63 |
| 3. Evaluation de la CVA de produits nettés ou collatéralisés..... | 69 |
| a) Formule du CVA avec un collatéral | 69 |
| b) Formule du CVA avec un accord de netting..... | 70 |
| II. Swap et Swaption..... | 71 |
| 1. Swap | 71 |
| 2. Swaption | 73 |
| 3. CVA/DVA pour les swaps sur taux d'intérêt | 76 |
| a) L'approche par une formule fermée | 76 |
| b) L'approche par une formule semi-analytique | 78 |
| III. Credit Valuation Adjustment sous Wrong-way Risk. | 82 |
| 1. Introduction..... | 82 |
| 2. Credit Valuation Adjustment des CDSs..... | 83 |
| IV. Hedging de la Credit Valuation Adjustment..... | 86 |
| 1. Introduction..... | 86 |
| 2. Le <i>hedging</i> de la CVA en pratique..... | 87 |
| V. Credit Valuation Adjustment – Sensibilité sous Bâle III..... | 89 |
| 1. Introduction..... | 89 |
| 2. La sensibilité de la CVA sous Bâle III | 90 |
| a) La sensibilité de la CVA aux ratings des contreparties | 91 |
| b) La sensibilité de la CVA à la maturité | 92 |
| c) La sensibilité de la CVA à la diversification de l'exposition..... | 93 |

| | |
|--|------------|
| d) La sensibilité de la CVA à la diversification des contreparties..... | 95 |
| Conclusion | 96 |
| Quatrième partie : Annexes | 97 |
| Annexe 1 : Les fondamentaux de pricing sur le marché obligataire (Caps et Floors) | 98 |
| Annexe 2 : La valeur actuelle nette (VAN)..... | 100 |
| Annexe 3 : Recuit Simulé : | 101 |
| Annexe 4 : Evaluation de l'exposition sous l'hypothèse de distribution normale | 102 |
| Annexe 5 : Introduction à la théorie des copules - copule gaussienne | 103 |

Résumé

Mots clés : risque de crédit, credit valuation adjustment, probabilité de défaut, Expected Exposure, Bâle III, crise économique, modèle de taux, modèle d'intensité, risques croissants, optimisation de modèle.

L'objectif de ce mémoire est de présenter la modélisation du risque de contrepartie et plus précisément de la *Credit Valuation Adjustment (CVA)* et de la *Debit Valuation Adjustment (DVA)*. Ainsi, nous développerons les principaux points réglementaires et les bases de la modélisation du risque de crédit. Préalablement, nous introduirons les produits standards et leur *pricing* sur le marché du crédit. Cette modélisation, nous permettra de simuler les expositions des différents *payoffs* sous les accords entre les contreparties. Et, elle fournira la probabilité de défaut implicite dans un environnement risque-neutre. L'importance de la mise en place d'un cadre général pour bien comprendre la Credit Valuation Adjustment (CVA) est primordiale car la modélisation du risque de contrepartie est l'aboutissement final d'un *pricing* pour un produit.

Ce mémoire a été réalisé dans le cadre d'une alternance pour la Caisse des Dépôts dans le service des financements à moyen et long terme. L'étude proposée vise à donner un outil d'évaluation de la CVA/DVA au *front-office* pour savoir où est notre risque de contrepartie et celui de la contrepartie sur les swaps. De plus, le sujet est transversal avec les différentes équipes du *middle-office* et de la comptabilité qui reporte la CVA/DVA de nos portefeuilles aux commissaires aux comptes pour la Caisse des Dépôts.

À la Caisse des Dépôts, l'évaluation de la CVA intervient après l'étude de nos expositions sur les produits dérivés puis du calcul de la probabilité de défaut implicite dans un environnement risque-neutre avec nos différentes contreparties. Ensuite, nous agrégeons les montants de CVA/DVA pour le rapporter dans nos comptes en application des normes IFRS 13¹. Ainsi, le rapport financier de la Caisse des dépôts établit que « la première application de la norme IFRS 13, d'application prospective, n'entraîne pas d'impact significatif sur les comptes consolidés du groupe au 31 décembre 2013 ». Cependant, les travaux effectués sur la Credit Valuation Adjustment rentrent dans le cadre d'un contrôle de nos risques par la direction financière et donc du risque management dans le groupe.

Le mémoire se déroulera comme suit : nous présenterons les outils théoriques permettant d'évaluer la *Credit Valuation Adjustment (CVA)* dans les premières et deuxièmes parties. Puis, nous l'évaluerons dans la dernière partie pour les swaps.

¹ IFRS 13 : Evaluation de la juste valeur

Abstract

Keywords : credit risk, credit valuation adjustment, default probability, Expected Exposure, Bâle III, economic crisis, interest rate model, financial models, Credit Default Swaps.

The aim of this actuarial thesis is to present counterparty risk and Credit valuation Adjustment (CVA) / Debit Valuation Adjustment (DVA) models. After briefly introducing standard interest rate products and pricing methods for credit derivative products we will lay out the basics of credit risk modelling and discuss various regulatory issues relating to it. We will then calibrate interest rate and intensity models in order to simulate different exposures for each payoff under regulatory agreements between counterparties. We will then use the intensity model to derive the default probability for counterparty in a risk-neutral area. This will then allow us to understand and model the Credit Valuation Adjustment (CVA) / Debit Valuation Adjustment (DVA) – which is an important issue for the Caisse des Dépôts.

This actuarial thesis is based on work carried out over the course of my work-study program at the Caisse des Dépôts' financing department. It seeks to present counterparty risk and Credit valuation Adjustment (CVA) / Debit Valuation Adjustment (DVA) models and then provide an evaluation tool for CVA/DVA on Swap as well as documentation which should enable the front office team to have a better understanding of counterparty risk. This topic will also bring added value to other functions as it is of importance to the middle office team and also the accounting team, who must write CVA/DVA in the Caisse des Dépôts's financial statement.

In order to evaluate the CVA, we have to study our exposure on derivatives and then calculate the default probability for counterparties in a risk-free universe. Then, we can aggregate CVA/DVA amounts in order to write these in our financial statements in accordance with the IFRS 13 standard. As such, the *Caisse des Dépôts's* financial statement states that "*la première application de la norme IFRS 13, d'application prospective, n'entraîne pas d'impact significatif sur les comptes consolidés du groupe au 31 décembre 2013*" (In application of IFRS 13, CVA/DVA have no significant impact on the consolidated financial statements as of December 31st, 2013). However, Credit Valuation Adjustment studies made within the framework of our risks are controlled by the Caisse des Dépôts's accounting department.

The report is structured as follows: in the first and second parts we will discuss the theoretical basis of Credit Valuation Adjustment (CVA) which we will then evaluate in the third and final part.

Introduction générale

Le risque de contrepartie est interprété comme le risque de crédit sur les produits dérivés. Le risque de contrepartie est donc une autre forme de risque de crédit où la cause d'une perte économique sur un produit OTC est le résultat d'un défaut de la contrepartie. Cependant, il y a deux caractéristiques mettant le risque de contrepartie en dehors des formes plus traditionnelles de risque de crédit : l'incertitude d'exposition et la nature bilatérale du risque. Après la crise de 2008, la faillite de Lehman Brothers, Bear Sterns et Fannie Mae, le risque de contrepartie a été reconnu par la majorité des acteurs sur les marchés financiers comme une des clés des risques financiers et la cause majeure des pertes lors de la dernière crise. Il est donc devenu primordial pour les acteurs sur les marchés financiers de l'évaluer de manière précise pour leur propre gestion du risque et pour pouvoir le rapporter aux législateurs réglementaires.

Lorsqu'un trader donne le prix d'un produit dérivé, il charge le risque de défaut de la contrepartie dans le prix total avant l'exécution. Cette charge représente la possibilité de défaut de la contrepartie durant la période du contrat avec les informations initiales. Cependant, lorsque nous évaluons le risque de contrepartie pour une transaction déjà exécutée ou bien pour un portefeuille, la modélisation devient plus complexe car il y a une variation des pertes et des gains potentielles en cas de défaut selon l'exposition au cours du temps du produits dérivées. De plus, il faut prendre en compte les accords de netting et les collatéraux. Par ailleurs, les contrats en question peuvent avoir une forte dépendance entre eux et influencer sérieusement le profil de risque à cause d'un manque de diversification.

La déclaration du niveau de Credit Valuation Adjustment est aujourd'hui obligatoire pour toutes les banques grâce à IFRS 13 et de la réglementation de Bâle III. Par conséquent, la Credit Valuation Adjustment (CVA) est devenue un standard de marché pour expliquer le risque de contrepartie pour les deals avec un collatéral ou avec un collatéral partiel. Certaines banques ont donc adopté un modèle interne pour évaluer le risque de crédit et le limiter dans leurs comptes, elles ont développé des *desks* complets qui fournissent une protection contre le risque de crédit et gèrent la CVA/DVA des portefeuilles. Ces *desks* sont en charge d'évaluer les portefeuilles de la banque et de les couvrir dynamiquement, cette stratégie a un impact significatif dans la gestion *Asset Liabilities Management* (ALM) de l'institution financière et réduit considérablement les risques de contreparties pour les banques.

Première partie

Présentation générale

En 1988, le comité de Bâle, composé des 13 pays de l'Organisation de Coopération et de Développement Economiques publie les premiers « accords de Bâle », appelés aujourd'hui Bâle I. C'est un ensemble de recommandations dont le pivot est la mise en place d'un ratio minimal de fonds propres par rapport à l'ensemble des crédits accordés : le ratio Cooke, du nom de Peter Cooke.

$$\text{Ratio Cooke} = \frac{\text{Fonds propres et assimilés}}{\text{risque de crédit} + \text{risque de marché}}$$

De plus, le comité de Bâle discutait d'un système comptable précis pour mettre en avant et calculer les fonds propres réglementaires et les engagements de crédit. Le traité, constitué de recommandations, précise notamment que le rapport des fonds propres sur la somme des crédits accordés doit être supérieur à 8%. Par ailleurs, la Banque des Règlements Internationaux (BRI), située à Bâle édit les règles favorisant une stabilité monétaire et financière. Alors, le risque de crédit est calculé comme la somme pondérée des encours, pondération s'effectuant selon la qualité du crédit. Le risque de marché est fondé sur la *Value-At-Risk* à 95%.

En 2004, le comité de Bâle, prenant conscience des limites du ratio Cooke en ce qui concerne le risque de crédit car ne tenant pas en compte le rating des compagnies sous-jacentes aux portefeuilles, rédige les accords intitulés Bâle II. Ces nouveaux textes prennent en compte de manière plus pertinente les notions incluses dans le risque de crédit et notamment celles concernant la qualité de l'émetteur par l'intermédiaire d'un système de notation interne pour chaque établissement. L'application d'un nouveau ratio est instauré: ratio de solvabilité bancaire (ratio Mc Donough).

$$\text{Ratio Mc Donough} = \frac{\text{Fonds propres et assimilés}}{\text{risque de crédit} + \text{risque de marché} + \text{risque opérationnel}} \geq 8\%$$

Le risque opérationnel est le risque de pertes résultant de la défaillance des systèmes internes. L'évaluation du risque de crédit a évolué pour répondre aux exigences des marchés et des risques. Le comité de Bâle II propose alors plusieurs approches aux banques, qu'elles peuvent choisir :

- Une approche par formule standard.
- Une approche par modèle interne.

Suite à la crise financière, le comité de Bâle décida de compléter Bâle II par Bâle III pour mieux répondre à l'environnement financier et aux pertes de 2007-2010. Le cadre établi sous Bâle II s'est élargi, les banques cherchant à utiliser leurs propres modèles internes pour calculer leur capital réglementaire du risque de contrepartie doivent gérer de nouvelles règles et contraintes. Tandis que les enjeux pour l'utilisation de modèles internes en matière de capital deviennent de plus en plus importants et parfois stratégiques pour les banques d'investissement.

Les principes de base concernant les exigences réglementaires de la gestion du risque de contrepartie ont changé sous Bâle III. Nous les présenterons ci-dessous de manière non exhaustive.

I. Les principales exigences pour la gestion du risque de contrepartie sous Bâle II

1. Introduction

Le risque de contrepartie est le risque que la contrepartie fasse défaut avant la date finale de règlement des *cash flows* d'une transaction. Une perte économique apparaît si le portefeuille de la contrepartie a une valeur positive pour la banque à l'instant du défaut. Contrairement à un prêt, où seulement les banques font face aux risques de pertes, le risque de contrepartie crée un risque bilatéral car la banque peut aussi faire défaut. La valeur de marché des futurs paiements peut être positive ou négative pour l'une ou pour l'autre des contreparties selon les variations des marchés financiers. Par exemple, lorsqu'une entreprise contracte un swap de taux la valeur *Mark-to-Market* peut être positive ou négative vis-à-vis de la banque ou de l'entreprise entraînant donc un risque de contrepartie bilatéral. Pour anecdote, lorsque Lehman Brothers a fait faillite les contreparties avec une valeur de marché positive pour elle vis-à-vis de Lehman Brothers se sont retrouvées avec aucune contrepartie... Nous verrons dans cette partie les mesures prises pour éviter cette catastrophe.

Suite à la crise des *subprimes*, la réglementation Bâle II introduit des exigences vis-à-vis des risques de contrepartie liés aux transactions sur les marchés financiers. Ces exigences détaillent les calculs en capitaux pour les transactions *Over-The-Counter (OTC)* et les cessions temporaires de titres comme les *repo*, les accords de crédit, les valorisations des expositions du risque de contrepartie sur un an pour les produits dérivés de crédit.

Ce risque prend en compte le coût immédiat du remplacement de la contrepartie ayant fait défaut, ainsi que le risque de variation potentiel futur de cette exposition, reflétant les variations *Mark-to-Market* et donc les possibles fluctuations de l'exposition.

L'évaluation du risque de contrepartie sur les opérations de marché est directement liée à l'évaluation du montant d'exposition considérée comme approprié. Bâle II a fourni deux principales approches pour estimer ceci :

- Le CEM² (*Current Exposure Method*) est basé sur une évaluation du prix de marché, offrant une mesure hybride entre l'exposition et le volume.
- Les modèles internes ont été créés par les banques pour simuler les variations futures *Mark-to-Market* avec l'objectif d'une double utilisation, pour le contrôle interne de leurs risques et pour le calcul réglementaire.

La mise en œuvre d'une approche par un modèle interne est beaucoup plus exigeante en termes de documentation et de validation contrairement à la méthode CEM. Elle nécessite également une validation formelle de l'autorité de réglementation avant son utilisation pour le calcul du capital réglementaire car l'approche par le modèle interne permet l'application de modèles dynamiques plus proche de la réalité. Il en résulte un calcul du capital réglementaire plus

²<http://www.bis.org/publ/bcbs254.pdf>

précis, ce qui conduit à une meilleure allocation des fonds propres. Il apparaît souvent un gain de capital réglementaire avec le modèle interne en comparaison avec le CEM.

Malgré les avantages d'une approche à partir d'un modèle interne, la majorité des banques européennes sujettes à Bâle II ont décidé d'utiliser la méthode CEM pour calculer le capital réglementaire pour les raisons suivantes :

- La méthode CEM apparaît plus simple à implémenter, compte tenu des données nécessaires à sa mise en œuvre (sous-jacent, valeur du nominal, maturité,...) ainsi que la nature des collatéraux.
- Les banques européennes semblent utiliser les probabilités de défaut, la perte en cas de défaut (LGD) et le facteur de conversion de crédit (CCF) comme paramètres pour calculer les actifs pondérés avec le risque de crédit. Toutefois, il semble qu'en raison du faible ratio entre le coût d'implémentation et le capital réglementaire économisé, elles ont laissé de côté l'approche par un modèle interne.

- **L'approche CEM**

$$Eposure At Default (EAD) = [(RC + Add_on) - volatilité ajusté au collatéral]$$

Où

RC est le coût de remplacement.

Add_on est le montant estimé de la potentielle exposition future.

La volatilité ajustée au collatéral est la valeur du collatéral.

Figure 1 : Current Exposure Method ou l'approche CEM

- **L'approche par un modèle interne**

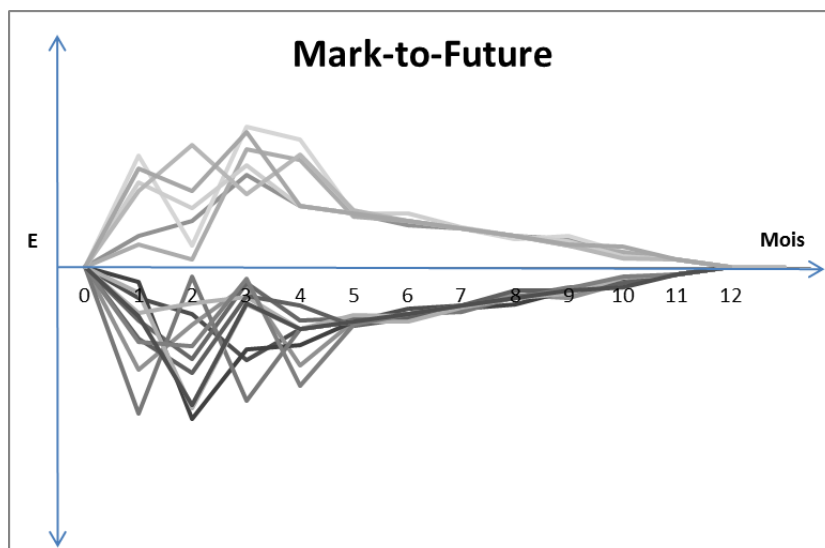


Figure 2 : Le **Mark-to-Future** est calculé par l'évaluation de l'instrument à chaque instant sur un an. E est l'exposition au produit.

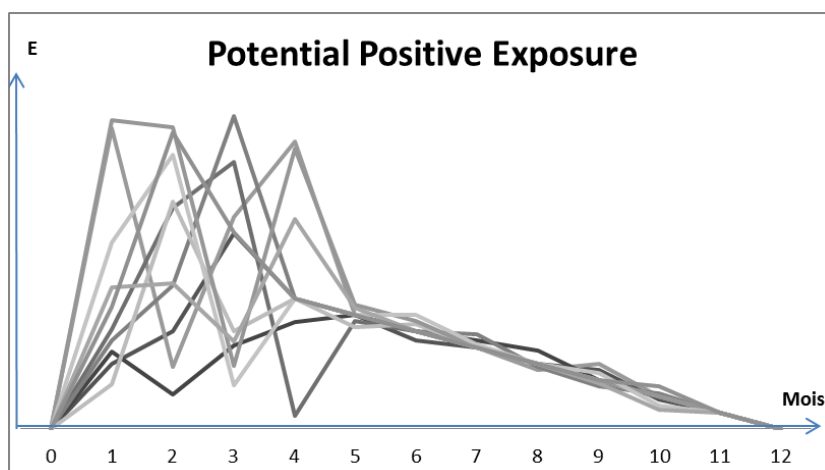


Figure 3 : La **Potential Positive Exposure** est calculée à chaque instant soit par le prix Mark-to-Future soit par zéro si le prix Mark-to-Future est négatif. E est l'exposition au produit.

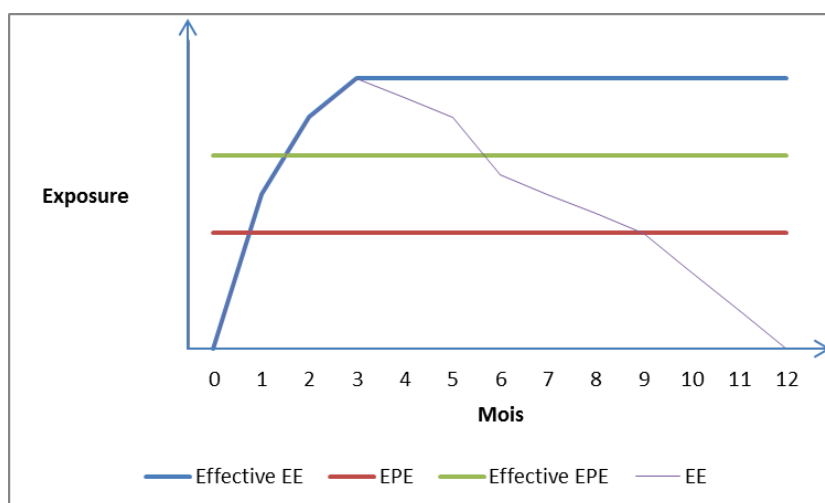


Figure 4 : L'**Expected Exposure** (EE) est calculée à chaque instant comme la moyenne des simulations de la **Potential Positive Exposure**.

L'**Expected Positive Experience** (EPE) est calculée comme la moyenne de l'EE sur la période d'un an.

L'**Effective EE** est calculée à chaque instant comme le maximum de tous les EE observé sur le delta de temps.

L'**Effective EPE** est calculée comme la moyenne de l'Effective EE sur la période d'un an.

Nous allons donc effectuer dans la partie suivante une présentation de l'exposition aux contreparties lors d'une approche par un modèle interne. La notion d'exposition sur les produits OTC est clé dans l'évaluation de la Credit Valuation Adjustment.

2. Exposition aux contreparties

Nous définissons l'exposition aux contreparties $E(t)$ de la banque à l'instant t comme une perte, encourue sur toutes les transactions OTC avec la contrepartie si elle fait défaut à l'instant t , en prenant en compte le *netting*³ et les collatéraux, mais elle reste non ajustée par les possibles taux de recouvrement pour rester dans une modélisation basique.

Si nous considérons un portefeuille de N produits dérivés d'une banque avec une contrepartie donnée, la maturité du plus long contrat dans le portefeuille est T . Le temps de défaut d'une contrepartie τ avec une distribution risque neutre de la probabilité de défaut $P(\tau \leq t)$ connue. Nous développons l'hypothèse que la distribution des transactions à toutes les dates futures est effectuée sous la probabilité risque neutre.

Nous notons $V_i(t)$ la valeur du $i^{\text{ème}}$ instrument dans le portefeuille à l'instant t du point de vue de la banque. À chaque instant t , le niveau d'exposition à la contrepartie $E(t)$ est déterminé par la valeur de l'ensemble des transactions avec la contrepartie à l'instant t . La valeur du portefeuille de la contrepartie à l'instant t est donnée par

$$V(t) = \sum_{i=1}^N V_i(t)$$

Lorsque le netting n'est pas permis, le niveau d'exposition à la contrepartie est :

$$E(t) = \sum_{i=1}^N \max\{0, V_i(t)\}$$

Pour un portefeuille de contrepartie avec un accord simple de netting, l'exposition « nette » est

$$E(t) = \max\{V(t), 0\}$$

Cependant, lorsque l'accord de netting est supporté par un accord sur les marges, la contrepartie doit payer la banque avec un collatéral quand la valeur du portefeuille excède un seuil, défini dans le contrat. Lorsque la valeur du portefeuille passe sous le seuil, la banque retourne le collatéral à la contrepartie. Le transfert de collatéral intervient seulement quand le montant du collatéral qui doit être transféré excède un montant de transfert minimum.

Ainsi, le niveau d'exposition de la contrepartie est donné par :

$$E(t) = \max\{V(t) - C(t), 0\}$$

Où, $C(t)$ est le collatéral valable de la banque à l'instant t .

³ Le netting est la mise en œuvre d'une compensation réciproque de créances et d'engagements, entre une ou plusieurs parties, concernant des opérations de même nature.

II. Bâle III : Nouvelle réglementation concernant la gestion du risque de contrepartie

1. Introduction

Les régulateurs ont proposé sous Bâle III un nombre de mesures permettant d'augmenter le contrôle et la gestion des risques bancaires.

Bâle I a déposé les bases prudentielles de la gestion des risques bancaires, alors que Bâle II a essayé d'approfondir l'approche micro-prudentielle pour chaque risque pris dans les banques. Quant à Bâle III, il met l'accent sur la sécurisation du système financier en réponse à la crise de 2008. Ces évolutions dans les accords de Bâle mettent en avant les objectifs suivants:

- L'amélioration des fonds propres.
- La proposition de nouvelles provisions permettant d'augmenter le montant des fonds propres.
- L'augmentation de la pondération de certains risques pour des classes d'actifs.
- Le renforcement des exigences liées à la gestion du risque de liquidités.

Bâle III a introduit des contraintes additionnelles pour le management du risque de contrepartie. Les événements de la crise de 2008 ont mis en avant la nécessité de renforcer la gestion du risque dans ce domaine. Par exemple, les deux tiers des pertes inhérentes au risque de contrepartie sur les opérations de marché au cours de la période 2007-2010 ont été causées par des anomalies de valorisation résultant de dégradation des ratings de crédit. Seulement un tiers de ces pertes était dû à de véritables défaillances de contreparties.

De nombreux intervenants pensent que le traitement du risque de contrepartie sur les opérations de marché s'est révélé être insuffisamment orienté vers un point de vue macro-prudentielle, sans prendre assez en compte les effets systémiques. Il semble donc que la réglementation de Bâle III a cherché à remédier à ces lacunes en ajoutant à la gestion du risque de contrepartie de nouvelles exigences, décrites dans la section suivante.

Bâle III inclut une série de nouvelles mesures et d'ajustements à Bâle II pour la gestion du risque de contrepartie. Nous les présenterons dans la suite de ce mémoire pour éclairer le lecteur dans la compréhension de la nouvelle réglementation.

2. Effective Expected Positive Exposure stressé (EEPE).

Sous Bâle III, la mesure d'EEPE est complétée par un calcul stressé d'EEPE basée sur le calibrage des paramètres du modèle de diffusion sur une période de trois ans, comprenant une période de hausses rapides des spreads de crédit.

Les paramètres sont ensuite étalonnés de nouveau et utilisés dans des situations de marché actuelles pour calculer *le Mark-to-Future* et l'EEPE stressé. Les actifs risqués sont calculés deux fois, premièrement avec les paramètres non stressés et deuxièmement avec les paramètres stressés. Le maximum des deux résultats constituera l'Effective Expected Positive Exposure stressé.

3. Le risque de variation de CVA d'un portefeuille

L'ajustement des évaluations de crédit (CVA- Credit Valuation Adjustment) matérialise la valeur de marché du risque de contrepartie sur les opérations de marché d'un portefeuille de trading. Les variations de cette valeur de marché ont causé de lourdes pertes lors de la crise financière de 2008, ce qui a conduit le comité de Bâle à introduire des exigences supplémentaires en capitaux propres pour couvrir le risque de variations de CVA des portefeuilles de trading.

La charge de CVA représente un nouveau capital réglementaire pour les pertes potentielles *Mark-to-Market* associées à la détérioration de la solvabilité d'une contrepartie.

Deux méthodes sont proposées par le comité de Bâle pour évaluer la CVA :

- Pour les portefeuilles valorisés avec la formule standard
 - Credit Default Swaps sur une seule contrepartie
 - Index de CDS
- Pour les portefeuilles valorisés avec un modèle interne
 - La méthode est basée sur un modèle Value-at-Risk (VaR) de la CVA.

Nous allons rapidement introduire la notion de CVA, qui sera développé plus longuement dans la suite du mémoire. Si le défaut de la contrepartie intervient à l'instant τ , la banque touchera le recouvrement de la créance à hauteur du taux de recouvrement R de l'exposition $E(\tau)$. La perte due au défaut de la contrepartie est

$$L = 1_{\{\tau \leq T\}}(1 - R) E(\tau) D(\tau)$$

Avec,

$D(\tau)$ est le facteur d'actualisation.

On obtient donc la CVA en appliquant l'espérance à l'équation précédente, on a donc :

$$CVA = (1 - R) \int_0^T \mathbb{E}[D(t)E(t)|\tau = t] dP(t)$$

Où,

$\mathbb{E}[D(t)E(t)|\tau = t]$ est l'*expected exposure* (EE) actualisé sous la probabilité risque neutre à l'instant t , conditionnellement à un défaut à l'instant t .

Une des options possibles pour calculer la CVA par la formule standard dans Bâle III est donnée par ci-dessous :

K_{CVA}

$$= 2.33\sqrt{h} \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n 0.5w_i(M_i EAD_i^{total} - M_i^{hedge} B_i) - \sum_{ind} w_{ind} M_{ind} B_{ind}\right)^2 + \sum_{i=1}^n 0.75w_i^2 (M_i EAD_i^{total} - M_i^{hedge} B_i)^2}$$

où

- h est l'horizon de risque (en années), $h=1$.
- w_i est le poids applicable à la contrepartie « i ». La contrepartie « i » doit être évaluée sur son rating externe (si disponible).
- M_i est la maturité restante des transactions avec la contrepartie « i ».
- EAD_i^{total} est l'exposition au défaut de la contrepartie « i », incluant les effets de collatéral.
- M_i^{hedge} est la maturité restante du *hedging* d'un nominal B_i .
- B_i est le notionnel d'un *single name CDS*.
- w_{ind} est le poids applicable à l'*index hedges*
- M_{ind} est la maturité restante de l'*index hedges*
- B_{ind} est le notionnel total de l'ensemble des index CDS achetés pour hedger la position.

La simplicité de cette formule permet une application rapide dans les petites banques n'ayant pas l'infrastructure pour développer et appliquer un modèle interne. Le montant de CVA est alors calculé au niveau d'un portefeuille.

Il est intéressant de remarquer la relation proportionnelle entre la mesure de CVA et le montant de l'exposition (EAD), la maturité du contrat (M) et la qualité de crédit d'une contrepartie (w). Le seul facteur négativement corrélé à la CVA est le nombre de contrepartie (n), ce qui souligne les bénéfices d'une diversification classique. Ainsi, la relation de proportionnalité prouve qu'un pic d'exposition chez une contrepartie est très négatif pour la CVA.

4. General « Wrong way risk »

Le risque global de corrélation défavorable quantifie un risque systémique provenant de la corrélation positive entre les facteurs de risque et la solvabilité de la contrepartie. Par exemple, si les prix du pétrole montent, il y a un impact négatif sur la probabilité de défaut d'une compagnie aérienne.

Avec les exigences de Bâle III, les banques n'auront pas à mettre en œuvre une action particulière ou une allocation de capital différente pour ce type de risque, mais devront néanmoins identifier ces risques à travers l'analyse de scénarios stressés, afin d'identifier les facteurs de risque corrélés avec la qualité des contreparties de crédit.

5. Impact du risque de contrepartie sur les résultats

L'entrée en vigueur d'IFRS 13 en janvier 2013, impose de tenir compte du risque de contrepartie dans la réévaluation des instruments financiers de couverture. Chaque année lors de la clôture comptable, les instruments financiers sont réévalués. La valeur juste « fair value » se calcule par la différence entre la VAN (Valeur Actuelle Nette) des instruments financiers et la VAN d'un contrat identique inverse.

Cependant, cette valeur est basée sur les données de marchés « *Mark-to-Market* » et ne tient donc pas compte du risque de contrepartie de l'instrument financier. C'est donc l'idée d'IFRS 13 d'intégrer le risque de contrepartie dans l'évaluation des instruments financiers à la clôture comptable. On prend pour hypothèse les cours « sans risque » pour déterminer si la valeur actualisée de cet instrument est positive ou négative. On appliquera alors la CVA (« Credit Valuation Adjustment ») à cette valeur. En abaissant la valeur de l'instrument du risque de contrepartie, on diminuera (car le passif étant de signe négatif) la valeur négative d'un passif pour reconnaître et enregistrer son propre risque de crédit (« Debit Valuation Adjustment »).

Si on adopte cette approche pour chaque ligne du portefeuille de trading en appliquant l'impact du risque de contrepartie, on arrivera à un résultat global consolidé à enregistrer en comptabilité. Ce montant impactera alors plus ou moins fortement le résultat de l'entreprise.

III. Réduction du risque de contrepartie

Dans ce paragraphe, nous allons présenter les outils mis en œuvre suite à la crise pour réduire le risque de contrepartie lors de l'émission d'un produit et au cours de sa durée de vie. Ces méthodes se concentrent sur la réduction de l'exposition de crédit et de la potentielle exposition. Ils ne réduisent pas la probabilité de subir une perte mais ils réduisent l'exposition réelle entre deux contreparties. Les principales méthodes sont :

- « *Termination events* » qui est l'opportunité de terminer une transaction à certains moments avant la maturité. Cela peut se représenter par une option au sein du contrat avec un *trigger* conditionné à des événements comme un rating qui dépasse un seuil.
- « *Netting* » qui est la capacité de compenser les transactions lorsqu'une contrepartie est en défaut.
- « *Collateralisation* » qui est un accord donnant des compensations selon des paramètres prédéfinis en fonction des variations de l'exposition à des dates préfixées.

1. Accord unilatéral ou bilatéral

Les méthodes rapidement décrites ci-dessus peuvent s'appliquer à une des contreparties ou aux deux contreparties. Ceci permet une réduction de l'exposition pour les deux contreparties lorsque l'accord est bilatéral, et est extrêmement utile en permettant aux deux contreparties de réduire leur exposition actuelle et future.

La réduction du risque n'est pas toujours bilatérale car lorsqu'une contrepartie a une qualité de crédit très supérieure à l'autre contrepartie, elle peut demander une réduction sur les accords avantageux pour elle comme un accord unilatéral et un montant indépendant. Historiquement, les banques ont toujours utilisé ce format lorsqu'elles traitaient avec des « *hedge funds* ». De même, les assureurs utilisaient dans leur business model le fait qu'ils étaient triples A pour ne pas avoir à payer de collatéral. Cependant, suite aux événements comme la faillite de Lehman Brothers, une prise de conscience générale sur le risque de contrepartie a surgi. Cela a rappelé à tout le monde les risques sur les marchés financiers et particulièrement l'illusion de la célèbre phrase « *too big to fail* ».

La standardisation des accords est un point important à souligner et c'est également une des clés de la réussite de l'ensemble des réductions du risque de contreparties sur les marchés. Ainsi, de nombreux contrats dérivés OTC⁴ se sont standardisés contractuellement, ce qui a réduit le coût des transactions et a de fait augmenté la liquidité de ces produits. De même, la standardisation des collatéraux a réduit de manière drastique les coûts de gestion de ces collatéraux. Des organisations comme l'ISDA⁵ ont travaillé à une documentation très étoffée pour détailler l'ensemble des procédures de calcul et tous les détails légaux nécessaires à la gestion du contrat.

⁴ OTC : Over The Counter, marché de gré à gré.

⁵ ISDA : International Swaps and Derivatives Association

C'est donc devenu une norme sur le marché, par exemple la Caisse des Dépôts traitera sous une documentation ISDA avec toutes les contreparties internationales et sous une documentation AFB⁶ lorsque la contrepartie est française pour un swap. Les « *Credit Support Annexes* (CSAs) » couvrent en détail les caractéristiques et les aspects de la réduction du risque de contrepartie.

2. Netting et Close-out

Dans la plupart des industries, le netting n'est pas une problématique importante car il est rare qu'une institution vende et achète à une même contrepartie. Cependant dans les marchés de dérivés, c'est une norme et certaines contreparties se retrouvent avec d'importantes transactions dans un sens et dans l'autre avec une certaine contrepartie. Le Close-out et le netting sont deux droits différents mais fortement liés, ils sont souvent combinés dans un seul contrat :

- *Close-out*. Le droit d'une contrepartie de terminer le contrat unilatéralement sous certaines conditions.
- *Netting*. Le droit de compenser des montants dus à la fin d'un contrat individuel entre les mêmes contreparties.

Une faillite est un événement imprévisible (Parmalat, Lehman Brothers..), lorsqu'elle se produit, les pertes du risque de contrepartie sont incertaines. Ceci n'est pas le cas pour les contrats dérivés car il y a une compensation constante pour maintenir des positions *hedgées*. Une fois que la contrepartie est en défaut, les *cashflows* cessent et l'institution replace un nouveau contrat. De plus, les positions nettées sont plus volatiles que les sous-jacents et demandent donc un suivi plus important.

a) Close-out

Certains contrats contiennent des clauses particulières permettant d'accélérer les futurs paiements aux créanciers s'il y a une baisse de ratings, un défaut ou bien tout événement de crédit. Ces clauses sont là pour protéger les créanciers, cependant ils peuvent mettre en péril la société qui devra faire face à des paiements plus importants alors qu'elle est déjà en difficulté. Ces clauses pourraient donc accentuer les difficultés de la société car elle aura plus de soucis à se refinancer.

Au contraire des clauses particulières d'accélération du remboursement ou de l'amortissement, la condition de close-out implique la fin de l'ensemble des contrats entre la contrepartie solvable et celle faisant défaut. Le close-out annule donc le contrat et crée une réclamation pour compensation basée sur le coût de remplacement d'un contrat identique avec une contrepartie solvable.

Si un défaut intervient ou bien un événement de crédit contractuel, la valeur due est déterminée à partir du prix *Mark-to-Market* (MtM). Si la contrepartie solvable a un prix MtM négatif alors elle règle l'ensemble du montant à la contrepartie insolvable. Au contraire, si elle a une exposition à la contrepartie, elle devient créditrice du montant net récupérable par litige. Cependant, la valeur MtM n'affecte pas la capacité de la contrepartie solvable à clôturer le contrat et de le remplacer avec une autre contrepartie.

⁶ Association française des banques

Le close-out a pour objectif de protéger les contreparties solvables au profit de celles qui sont en mauvaise posture financière. Il permet aux acteurs du marché des dérivés de geler leur exposition dans un événement de crédit selon les clauses du Master Agreement⁷. Sans cette clause, les positions d'une contrepartie insolvable ne peuvent pas être *hedgée* (à cause de l'incertitude sur le taux de recouvrement) et elles sont bloquées.

b) Netting

Les accords de netting entre les contreparties permettent aux expositions individuelles des transactions de s'additionner, ainsi le risque global est réduit par compensation pour une même contrepartie. Le schéma ci-dessous illustre les accords de netting. Par ailleurs, ces accords signifient que l'exposition augmente moins vite que la taille du marché entre les contreparties.

Il y a deux types de netting utilisés largement sur le marché des dérivés :

- *Payment netting*. Cet accord intervient lorsqu'une contrepartie reçoit plus d'un paiement durant la même journée d'une même contrepartie. Cet accord agrège les cashflows entre les contreparties.
- *Close-out netting*. Cet accord intervient sur le netting de la valeur du contrat dans un événement de défaut à une date future.

Par exemple, si une contrepartie doit payer 110 millions de dollars sur une jambe flottante d'un swap mais doit recevoir 100 millions de dollars de cette même contrepartie sur une jambe fixe. Grâce aux accords de netting, le flux sera simplement un flux payeur de 10 millions de dollars.

⁷ Master Agreement : Contrat-type de l'ISDA pour les produits du marché de gré à gré

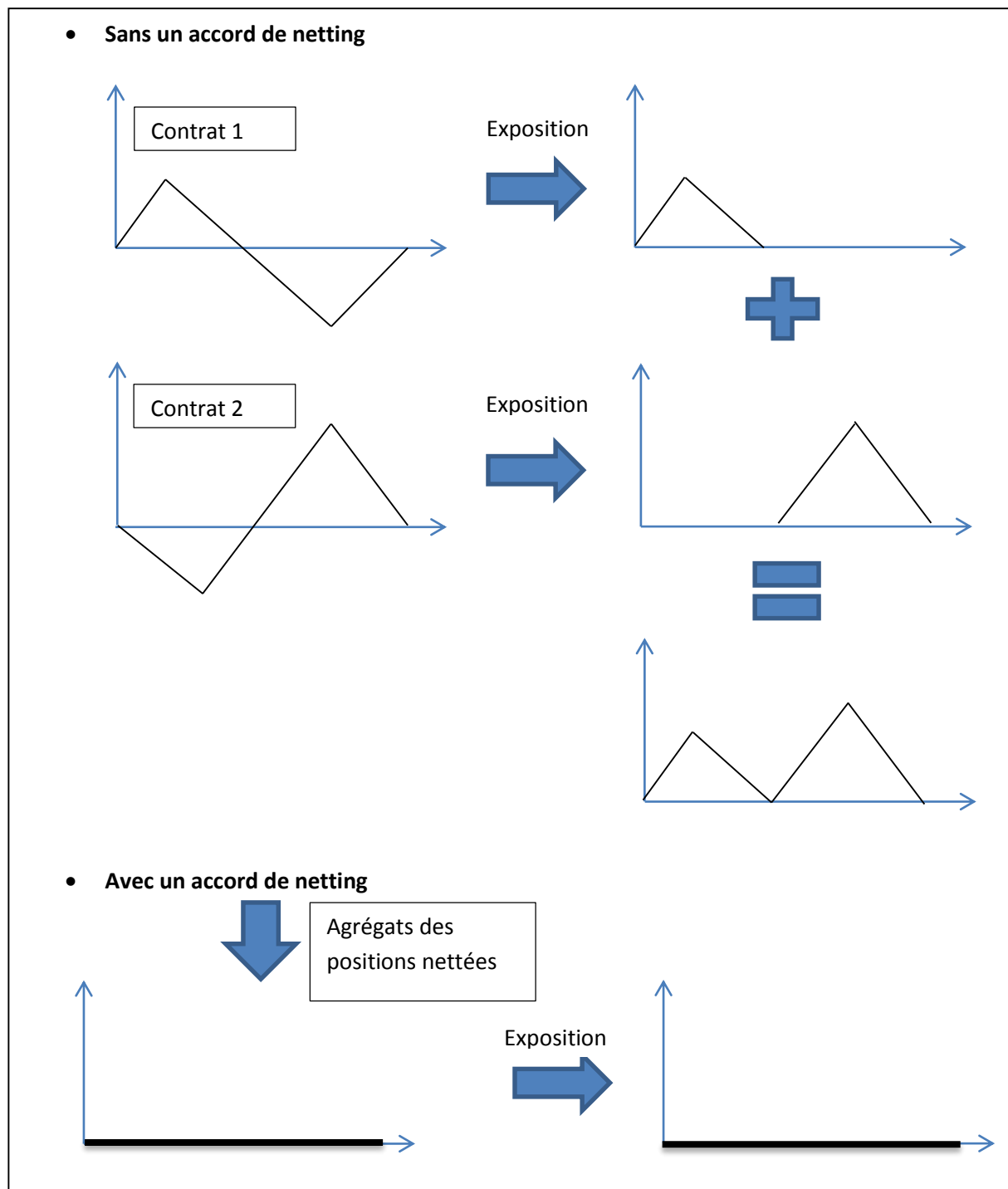


Figure 1 : Illustration de l'impact du netting sur l'exposition.

3. Les Collatéraux

Les collatéraux sont extrêmement importants dans le contrôle du risque des contreparties depuis une vingtaine d'années. L'idée fondamentale est très simple, la contrepartie débitrice remet en garantie des actifs (titres ou liquidités) à la contrepartie créditrice afin de couvrir le risque de contrepartie. Ils commencèrent en 1980 avec Bankers Trust et Salomon Brothers qui postaient du collatéral contre les expositions de crédit. À l'époque, il n'y avait pas de documentations légales pour encadrer ce type de clauses. En 1994, la première documentation ISDA a posé un socle à ce type de clauses et à son traitement.

Les motivations aux développements des collatéraux sont multiples :

- Ils permettent de réduire drastiquement l'exposition aux risques de contrepartie.
- Ils donnent la capacité de faire des deals avec certaines contreparties risquées.
- Ils réduisent fortement les capitaux réglementaires demandés.

Comme nous l'illustrons dans la figure suivante (figure 2), dans une transaction de swap entre deux contreparties A et B, la valeur *Mark-to-Market* (MtM) donne un profit à la contrepartie A et donc une perte à B. Ainsi, la contrepartie B remet un collatéral à la contrepartie A pour compenser l'exposition de crédit due à la positivité du *Mark-to-Market* en faveur de A. Le collatéral peut-être du cash ou des titres dont les caractéristiques sont définies à la signature du contrat.

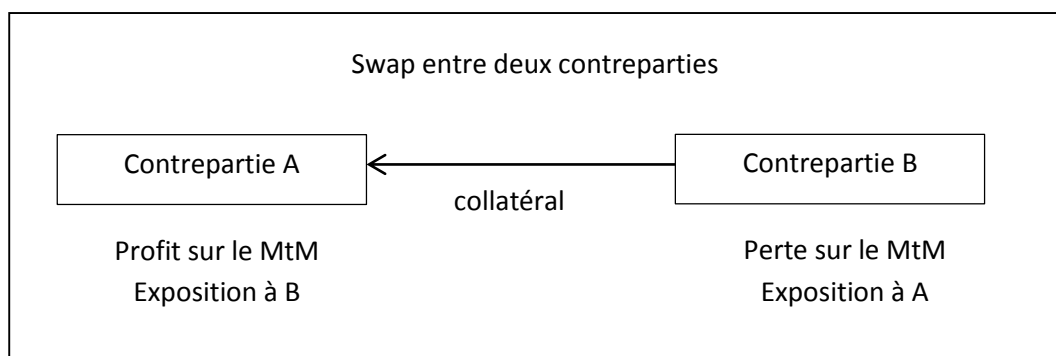


Figure 2 : Illustration des principes de bases du collatéral.

Cet exemple montre le cas dans un sens, ce sens pourrait être opposé si la valeur *Mark-to-Market* du swap était en défaveur de A. Alors A aurait remis un collatéral à la contrepartie B.

Il y a de nombreux types de collatéraux, nous en présentons une liste non-exhaustive :

- Cash(les plus communs).
- Obligations d'états.
- Obligations d'agences gouvernementales.
- Obligations d'entreprises.
- Actions.

Selon le type des collatéraux, les contreparties pourront ajuster le prix de l'opération. Ceci est vrai par exemple pour la réassurance de variable annuités car les collatéraux postés chez la contrepartie fournissent un taux d'intérêt donnant un revenu supplémentaire à la contrepartie.

IV. Marché et produits de taux

Le marché des dérivés de taux d'intérêt est le plus grand marché de produits dérivés dans le monde. La Banque des Règlements Internationaux (BRI) explique dans son rapport⁸ de juin 2013 que les montants notionnels des encours des dérivés (OTC) ont atteint 693 trillions de dollars, avec des dérivés de taux d'intérêt représentant 83% de ce montant, suivis par des contrats de change (12%), des dérivés de crédit (4%) et les contrats indexés sur actions (1%) et matières premières (0,6%).

Les motivations pour l'utilisation de tels produits dérivés sont diverses et variées et vont de la réduction des coûts de financement jusqu'à la pure spéculation. Par exemple les sociétés d'assurance peuvent chercher à obtenir des rendements élevés sur leurs investissements, d'autres acteurs comme les entreprises et les prêteurs hypothécaires chercheront généralement à couvrir leurs expositions au risque de taux. Selon l'ISDA⁹ plus de 88% des 500 plus grandes entreprises du monde entier utilisent des produits dérivés pour gérer leur risque de taux d'intérêt.

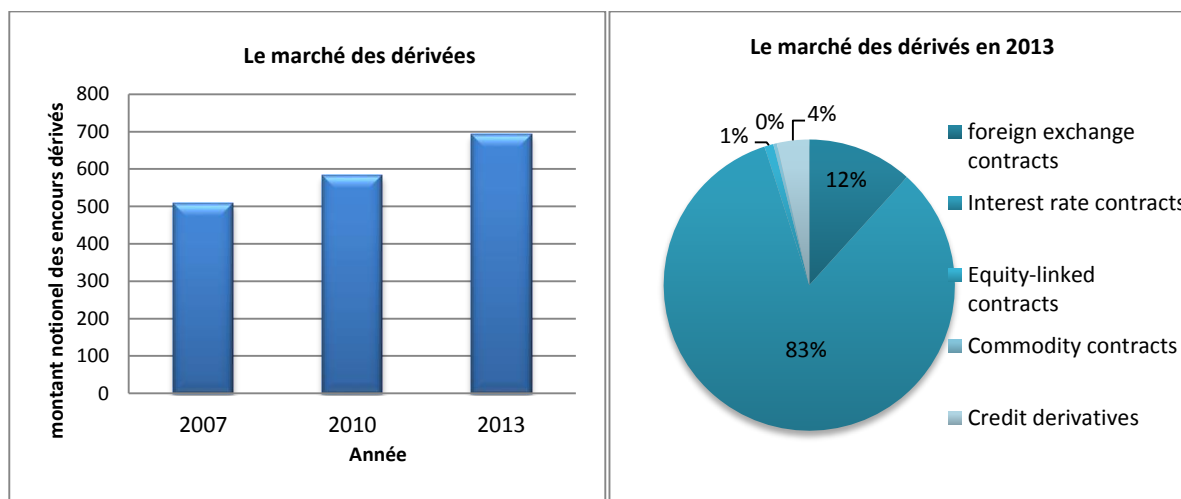


Figure 1 : Evolution des encours sur le marché des dérivés

⁸ http://www.bis.org/publ/otc_hy1311.pdf

⁹ International Swaps and Derivatives Association: 2009 ISDA Derivatives Usage Survey, <http://www.isda.org/researchnotes/pdf/ISDA-Research-Notes2.pdf>

1. Courbes des taux zéro-coupons, taux forwards et taux swaps :

a) Obligations zéro-coupon et taux spot zéro-coupon :

L'obligation zéro-coupon est le produit le plus simple parmi le panel des produits de taux. Cette obligation est un titre de dette dont les intérêts capitalisés sont versés en totalité à maturité. Le prix d'aujourd'hui de ces obligations est la valeur actualisée du flux à maturité versée.

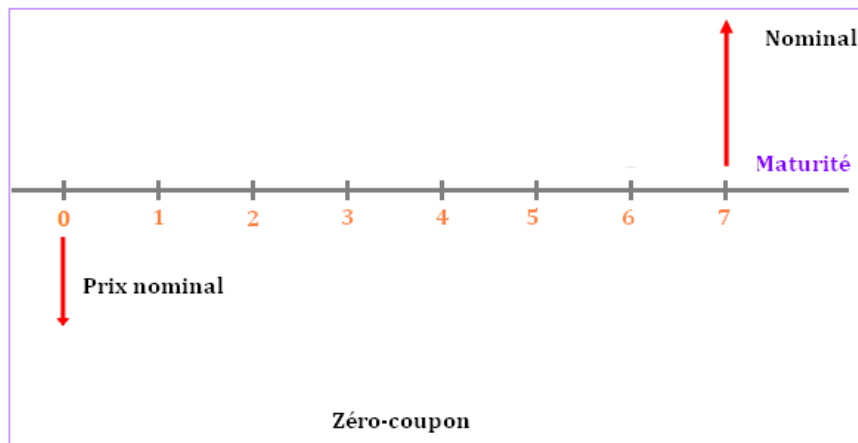


Figure 2: Flux d'une obligation Zéro-coupon de maturité 7 ans

Nous notons par $P(t, T)$ le prix à l'instant $t \leq T$ de l'obligation zéro-coupon. Il est aussi d'usage de caractériser les prix zéro-coupon en fonction des taux d'intérêt. En effet, pour une obligation zéro-coupon un taux d'intérêt constant sur la période $[t, T]$ est défini implicitement dans le cas continu par :

$$R(t, T) = -\frac{\log P(t, T)}{\tau(t, T)}$$

Ou,

$$e^{-R(t, T)\tau(t, T)} P(t, T) = 1$$

$\tau(t, T)$ est la fraction d'années entre la date d'évaluation de l'obligation t et sa maturité T . Les conventions de calcul ainsi que les calendriers de cette quantité diffèrent selon les pays¹⁰ et les produits.

¹⁰ Pour plus de détails sur ce point le lecteur pourra consulter [ISD06] ou encore [AB09] pour les instruments de l'EUR market.

Pour la partie théorique nous supposons que $\tau(t, T)$ est égal simplement à $T - t$, mais nous tiendrons compte des conventions et calendriers de calcul à la phase de récupération des données et du pricing des produits. Le taux d'intérêt continu correspond à une configuration idéale où toute augmentation de capital est immédiatement réinvestie au même taux constant $R(t, T)$. En réalité, sur les marchés les intérêts sont soit :

- Simples : l'intérêt est proportionnel à la durée de l'emprunt, convention qui prévaut pour des emprunts de maturité inférieure à 1 an. Les taux interbancaires de type Libor (London Interbank Offered Rate), Euribor (Euro Interbank Offered Rate) sont définis de la sorte¹¹.
- Composés annuellement : où le capital obtenu après une période de référence (en général une année) est réinvesti au même taux sur les périodes suivantes. Cette convention est utilisée pour les emprunts d'une durée supérieure à 1 an.

Définition : On appelle structure par terme de la courbe des taux la fonction associant à une maturité T un taux $R(t, T)$. De telles courbes sont construites à partir des prix d'obligations observés sur les marchés étudiés. La courbe de référence est la courbe dite « zéro-coupon ». Vous trouverez en annexe une explication de sa construction.

Il existe différents types de courbes de taux zéro-coupon :

- La courbe Trésor construite à partir des obligations émises par l'état.
- La courbe interbancaire construite à partir des taux dépôts, des futurs et des swaps.
- La courbe « corporate » qui caractérise le secteur privé

¹¹ Voir www.bbalibor.com et www.euribor-ebf.eu

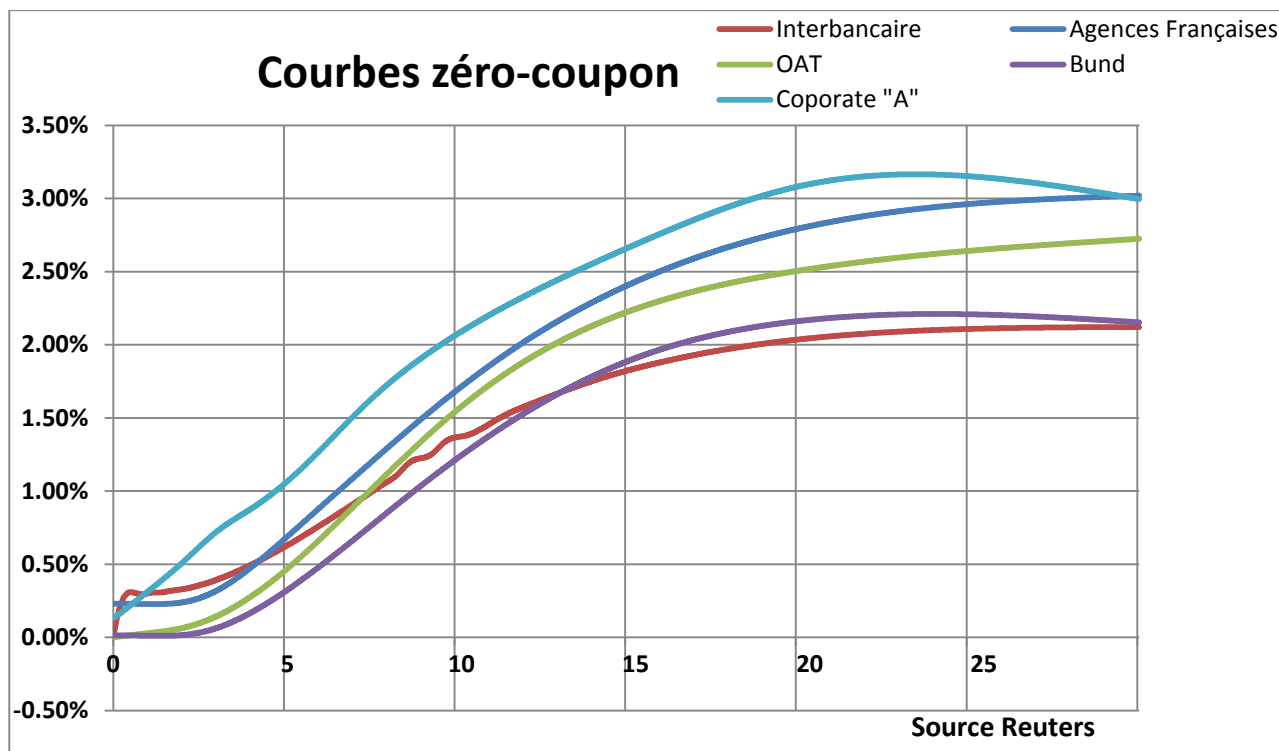


Figure 3 : Courbe de différents Zéro-coupons -12 Juin 2014

b) Contrats FRA et taux forwards :

Un FRA (« Forward rate agreement ») est un contrat qui permet à deux contreparties de fixer à un instant t un taux d'intérêt pour une période future avec un nominal N . Ce contrat implique alors 3 instants $t < T < S$:

- La date t de fixing qui correspond à la date de début de la période d'attente où rien ne se passe.
- La date d'expiration T et début de la période de calcul des intérêts.
- La date de Maturité S et fin de la période de calcul des intérêts.

Le contrat permet d'échanger un taux fixe contre un taux variable.

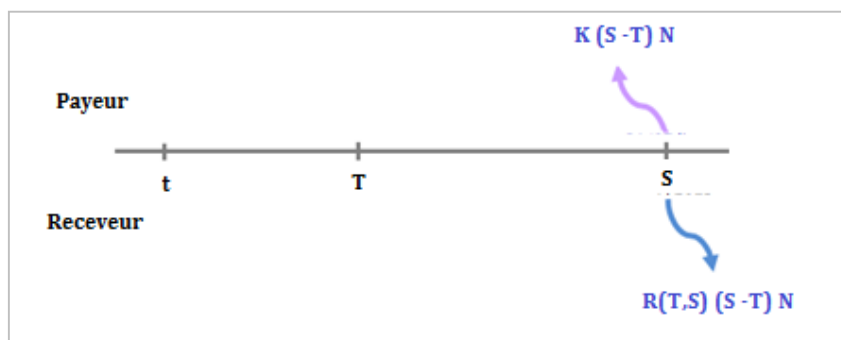


Figure 4 : Flux du FRA

Le payeur paie la jambe fixe et reçoit la jambe variable. Le contrat génère un unique cash-flow en S . La valeur du FRA-receveur à la maturité S est alors :

$$V_{FRA}(S) = (K(S - T) - R(T, S)(S - T)) * N$$

En utilisant la convention de calcul simple, la formule se réécrit en fonction des prix zéro-coupons :

$$V_{FRA}(S) = \left(K(S - T) + 1 - \frac{1}{P(T, S)} \right) * N$$

Cette valeur peut être divisée en deux parties ; une partie déterministe qui ne dépend pas de la courbe des prix ZC, et une partie dont le flux perçu $\frac{1}{P(T, S)}$ en S est égal à : $P(t, T)$

Ainsi, le prix à l'instant t date de fixing d'un FRA-receveur est :

$$V_{FRA}(t) = (K(S - T) * P(t, S) + P(t, S) - P(t, T)) * N$$

Le taux fixe K qui rend équitable le FRA-receveur est appelé taux à terme ou forward et vérifie l'équation suivante :

$$V_{FRA}(t) = 0 \equiv F(t, T, S) := \frac{1}{S - T} \left[\frac{P(t, T)}{P(t, S)} - 1 \right]$$

On peut alors exprimer la valeur de ce contrat en fonction du taux forward :

$$V_{FRA}(t) = (K - F(t, T, S)) * (S - T)P(t, S)N$$

Le taux forward peut être vu comme une estimation en t du taux spot $R(T, S)$ qui est inconnu en t.

c) Taux court et taux forward instantané :

Quand le taux forward défini ci-dessus est contracté sur une période infiniment courte $[T, T + dT]$, on parle de taux forward instantané¹² :

$$f(t, T) := \lim_{T \rightarrow S} F(t, T, S) = - \frac{\partial \log P(t, T)}{\partial T}$$

C'est un taux fictif non observable sur le marché, mais il est souvent utilisé pour modéliser la déformation de la courbe des taux de manière stochastique¹³. On dérive alors une relation qui lie le prix des obligations ZC et le taux forward instantané :

$$P(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, u) du}$$

En faisant tendre la date d'expiration T vers t, on obtient le taux court :

¹² Cette définition n'a de sens que si la courbe des prix ZC est dérivable, c'est pratiquement le cas de toutes les structures par terme des taux ZC reconstruites à partir des cotations du marché.

¹³ Modèles de taux dans le cadre HJM.

$$r(t) := f(t, t)$$

Comme le taux forward instantané cette quantité est purement théorique et n'est pas observable sur le marché.

d) Swaps de taux d'intérêts :

Définition :

Un swap de taux d'intérêt est un contrat d'échange entre deux parties. Le principe du contrat est que chaque contrepartie s'engage à verser ou percevoir des taux d'intérêt de manière périodique, les versements sont effectués sous forme de coupons dont le montant est calculé à partir d'un montant appelé notionnel fixé tout au long de la vie du contrat. Ainsi, quand on est payeur de swap taux fixe, cela signifie qu'on paye un taux fixe pour recevoir un taux variable. A l'inverse, être receveur du taux fixe signifie payer un taux variable et recevoir un taux fixe. L'échéancier du contrat ainsi que les flux sont fixés lors de la conclusion du contrat. Il faut noter aussi que les échéanciers des deux jambes peuvent être différents.

Aujourd'hui, le marché de swap est très sophistiqué et les avantages de cette structure ont entraîné le développement de plusieurs types de swaps : premièrement les swaps de devises, puis les swaps de taux et les basis swaps et enfin les swaps d'indice et de matière première. Vous trouverez en annexe une évaluation du swap de taux.

Le lecteur trouvera dans l'évaluation de la Credit Valuation Adjustment d'un swap en partie III, la valorisation d'une catégorie de swap et des équations nécessaires avec une présentation plus importantes du marché des swaps.

V. Marché et produits de dérivés de crédit

Les premiers dérivés de crédit sont apparus sur les marchés au milieu des années 90 pour se couvrir contre le risque de contrepartie et améliorer le bilan des banques. La Banque des Règlements Internationaux (BRI) explique dans son rapport¹⁴ de juin 2013 que les montants notionnels des encours des dérivés de crédit ont atteint 24 trillions de dollars, ce qui représente 4% de l'ensemble des encours du marché des dérivés. Son essor est de plus en plus significatif suite aux exigences de la réglementation prudentielle et au besoin de se protéger efficacement contre le risque de contrepartie.

Ce sont des instruments dont le sous-jacent est le risque de crédit, et dont le but est de transférer tout ou seulement une partie de ce risque à une ou plusieurs contreparties sans avoir à échanger l'actif de base. Ils permettent une couverture efficace et un refinancement plus souple pour les institutions car ils couvrent un risque de crédit et réduisent le coût en capital réglementaire.

¹⁴ http://www.bis.org/publ/otc_hy1311.pdf

Parmi les dérivés de crédit, deux grandes familles sont à distinguer. D'une part les instruments sur nom unique qui ne portent que sur une seule entité et d'autre part les instruments de portefeuille multi-sous-jacents ;

- La première famille contient en particulier, tous les contrats qui permettent aux acheteurs de se prémunir contre un défaut de la part de l'entité (Credit Default Swap) ainsi que les dérivés sur différentiel de taux qui permettent de se couvrir contre les fluctuations des écarts de taux entre les obligations risquées et sans risque (Credit Spread Forward).
- Concernant les produits multi-sous-jacents, il y a des produits qui sont une extension des produits sur noms uniques (Basket Default Swap) et les produits plus complexes issus de la titrisation de portefeuilles de crédit (Collateralized Debt Obligation).

1. Crédit default swap

a) Définition :

Les Crédit Default Swap (CDS) sont des produits de base sur le marché des dérivés de crédit et ont révolutionné le commerce du risque de crédit. Depuis les années 2000, les CDS se sont répandus très rapidement pour des raisons de couverture et d'exigences réglementaires. Un CDS contient une seule contrepartie sous-jacente, il permet aux investisseurs du marché de gérer le risque de défaut du sous-jacent de façon dynamique.

Dans un contrat standard de CDS, l'acheteur se couvre contre un événement de crédit pour se couvrir contre la perte de la valeur nominale d'un actif. Un événement de crédit est un événement légalement défini qui inclut typiquement la *bankruptcy*, la *failure-to-pay* et le *restructuring*. Cette protection dure jusqu'à une certaine date de maturité indiquée.

L'acheteur de protection paie un montant fixe « s », appelé le *spread* du CDS, à des dates régulières et préfixées jusqu'à la date de l'événement de crédit, s'il a lieu avant la maturité. Dans le cas contraire, il va payer ce montant jusqu'à la maturité. La partie variable payée par le vendeur dépend de l'état de l'événement de crédit avant la maturité.

Si l'événement de crédit apparaît, le vendeur va rembourser à l'acheteur une proportion de son nominal (défini par le taux de recouvrement du sous-jacent R). Dans le cas contraire, il ne payera rien. Le taux de recouvrement est une quantité qui est très difficile à estimer car il n'apparaît qu'au moment de l'événement de crédit et seulement après de longues procédures légales, il peut donc varier largement d'une entité à une autre. Dans la valorisation standard, le taux de recouvrement R est d'environ 40%, cependant nous pourrions voir plus tard dans le mémoire que le taux de recouvrement peut largement varier d'une contrepartie à une autre.

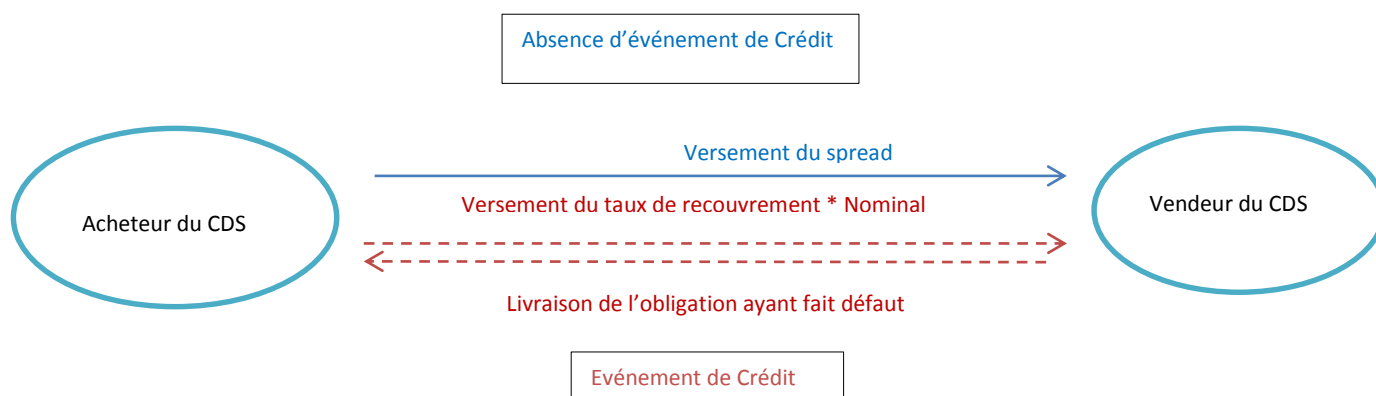


Figure 5 : diagramme de flux d'un CDS

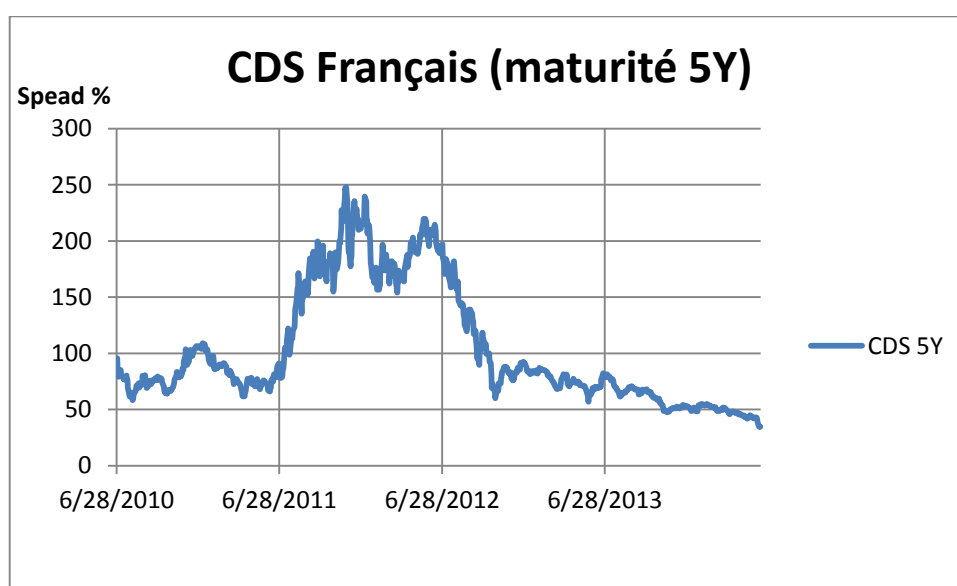


Figure 6 : Prix historique du CDS français de maturité 5 ans

b) Evaluation d'un CDS :

Nous présentons les formules permettant d'évaluer un CDS car c'est important pour la suite et particulièrement pour l'évaluation de la probabilité de défaut implicite aux marchés financiers. Cette probabilité de défaut est primordiale pour calculer la CVA car il entre dans sa formule.

- **Actualisation des flux**

Du point de vue de l'acheteur de protection, la valeur du CDS est égale à l'espérance sous la probabilité risque neutre Q , des paiements futurs actualisés au taux sans risque r , soit :

$$E_Q[(1 - R) * M * \exp(-\int_0^\tau r_s ds) 1_{\{\tau \leq T\}}] - E_Q[R * M * \sum_{i=1}^n \exp(-\int_0^{t_i} r_s ds) 1_{\{\tau > t_i\}}]$$

Où,

c est le taux du CDS,

n est le nombre de versement à effectuer par l'acheteur de protection,

t_i est la date de versement i .

Ainsi, l'évaluation d'un CDS est comparable à la somme d'options à barrière down-and-out sur la valeur des actifs de la firme. A la date 0, la valeur du CDS est égale à 0. Dès lors, le taux du CDS est défini par :

$$c = \frac{(1 - R) * E_Q \left[\exp\left(-\int_0^\tau r_s ds\right) 1_{\{\tau \leq T\}} \right]}{E_Q \left[R * \sum_{i=1}^n \exp\left(-\int_0^{t_i} r_s ds\right) 1_{\{\tau > t_i\}} \right]}$$

Où Q désigne une probabilité risque-neutre. Pour obtenir la valeur explicite de c , nous avons besoin d'un modèle pour le temps de défaut τ qui sera explicité dans la deuxième partie.

• Formulation générale

D'après Bielecki et Rutkowski (2002), un produit dérivé de crédit peut être représenté par un triplet (C, G, Z) , où C est une variable aléatoire qui représente le paiement à la maturité T s'il n'y a pas de défaut avant la maturité, G est un processus de variation finie, initialisé à 0 qui représente le paiement du coupon et Z signifie le paiement du recouvrement à la date de défaut τ si le défaut a lieu avant la maturité T . Un dérivé de crédit arrive à son terme après le défaut du sous-jacent, donc pour le problème de pricing, on s'intéresse à sa valeur à une date $t < \tau \wedge T$ qui est donnée par :

$$V_t = 1_{\{\tau > t\}} E_Q \left[CP(t, T) 1_{\{\tau > T\}} + \int_t^T 1_{\{\tau > u\}} P(t, u) dG_u + ZP(t, \tau) 1_{\{\tau \leq T\}} | G_t \right]$$

Où Q désigne une probabilité risque-neutre, $P(t, T) = \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right)$ correspond au facteur d'actualisation et la filtration G_t représente l'information globale du marché à la date t .

• Formulation mathématique

Nous avons vu précédemment quelques définitions et formulations pour les CDSs. Nous allons ici présenter une formulation des CDSs importante pour la suite du mémoire. L'ensemble des notations présentées seront reprises pour calculer la probabilité de défaut implicite des contreparties puis lorsqu'on présentera le « wrong-way risk » des CDSs dans la partie IV.

Considérons un CDS entre trois parties où une contrepartie « 0 » échange une protection avec un taux de paiement c aux maturités T_{a+1}, \dots, T_b à « 2 » ou bien jusqu'au défaut de la référence de crédit de « 1 » contre un paiement de protection unique, « Loss Given Default » (LGD) au temps de défaut $\tau = \tau_1$ avec $T_a < \tau < T_b$, « 2 » que payera « 0 » à « 2 » lors du défaut de « 1 ».

Le payoff actualisé d'un CDS du point de vue de l'acheteur de la protection est donné par :

$$\Pi(t) = 1_{T_a < \tau_1 < T_b} P(t, \tau_1) LGD - P(t, \tau_1) (\tau_1 - T_{\beta(\tau_1)-1}) c 1_{T_a < \tau_1 < T_b} - \sum_{i=a+1}^b P(t, T_i) (T_i - T_{i-1}) c 1_{\tau_1 \geq T_i}$$

Où $t \in [T_{\beta(t)-1}, T_{\beta(t)}]$ avec $\beta(t)$ la première date de paiement après t . Ainsi le prix du CDS sous la probabilité risque-neutre est donnée par :

$$CDS_{a,b}(0, c, R) = c \left[- \int_{T_a}^{T_b} P(0, t) (t - T_{\gamma(t)-1}) d\mathbb{Q}(\tau > t) + \sum_{i=a+1}^b \alpha_i P(0, T_i) \mathbb{Q}(\tau > T_i) + (1 - R) \int_{T_a}^{T_b} P(0, t) d\mathbb{Q}(\tau > t) \right]$$

Exemple : Evaluation d'un CDS sous le modèle standard de l'ISDA

- Les dates de maturité sont toujours le 20 des mois de mars – juin – septembre – décembre (Ainsi, un CDS d'un an acheté en février 2014 protégera l'acheteur jusqu'au 20 mars 2015).
- Les dates de paiement des coupons suivent le même principe que les maturités, elles sont simplement ajustées aux jours ouvrés (le 20 septembre 2014 est un samedi, par conséquent la date de paiement est le lundi 22 septembre 2014).
- Le paiement des coupons est aussi standardisé :
 - Chaque coupon est égale à $\frac{\text{Coupon annuel}}{360} *$
(le nombre de jours dans la période cumulée – Accrual period).
 - La période cumulée s'écoule de la dernière date de paiement du coupon jusqu'à la prochaine date de paiement du coupon moins un jour inclus, excepté pour la dernière période cumulée qui finit avec la maturité non-ajustée.

On considère l'achat d'un CDS d'un an pour un notionnel de 10 000 000 \$ à 100 bp (*Deal Spread*) tradé le 5 mars 2014 commençant le 6 mars 2014 ayant pour maturité le 20 mars 2015 avec un paiement trimestriel.

| Coupon | Période cumulée de départ | Période cumulée de fin | Nombre de jours | Paiement | Date de paiement |
|--------|---------------------------|------------------------|-----------------|-----------|------------------|
| 1 | 20/12/2013 | 19/03/2014 | 89 | 25 000 | 20/03/2014 |
| 2 | 20/03/2014 | 19/06/2014 | 91 | 25 555,56 | 20/06/2014 |
| 3 | 20/06/2014 | 21/09/2014 | 93 | 26 111,11 | 22/09/2014 |
| 4 | 22/09/2014 | 21/12/2014 | 90 | 25 277,78 | 22/12/2014 |
| 5 | 22/12/2014 | 20/03/2015 | 88 | 24 722,22 | 20/03/2015 |

Le taux de recouvrement correspond au montant recouvert lors d'un événement de crédit. Il se définit comme le pourcentage de dette qui sera remboursé lors du défaut. Il joue un rôle important dans l'estimation et le pricing du risque de crédit car il rentre dans l'estimation de la jambe de l'acheteur du CDS. Ainsi, nous étudierons plus précisément son rôle dans différents *pricings* en le faisant varier dans les prochaines parties. Ce qui permettra de confirmer son importance et le fait qu'il ne doit pas être négligé.

Les hypothèses de marché supposent un taux de recouvrement « corporate » à 25% et à 40% pour les états, utilisé dans la majorité des *pricings*. Alors qu'ils devraient être ajustés comme le prouve les données des tableaux ci-dessous, selon le type de dette et la catégorie.

| | Distressed Exchange Defaults | Bankruptcies & Payment Defaults |
|---------------------------------------|-------------------------------------|--|
| Dette garantie | 87,20% | 57,50% |
| Dette prioritaire non garantie | 62,20% | 40,70% |
| Dette subordonnée | 60,00% | 30,20% |

Figure 7: Moody's « Default and Recovery Rates of Corporate Bond Issuers », 2010

| Industries | taux de recouvrement |
|----------------------------|----------------------|
| Services publics | 70,50% |
| Chimique | 62,70% |
| Services | 46,20% |
| Grande distribution | 45,30% |
| Casino, hôtel | 40,20% |
| Transport et équipement | 38,40% |
| Communication | 37,10% |
| Institutions financières | 35,70% |
| Construction et immobilier | 35,30% |
| Textile | 31,70% |
| Imprimerie | 29,80% |

Figure 8: Segmentation des taux de recouvrement par industries¹⁵

¹⁵ <http://www.riskworx.com/resources/Recovery%20Rates.pdf>

2. Les Collateralised Debt Obligation

a) Définition :

Ils sont apparus à la fin des années 90 pour que les détenteurs de créances puissent transférer le risque de crédit. Ainsi, ils peuvent éviter un besoin en financement et limiter l'utilisation des fonds propres. Un CDO synthétique fait intervenir un arrangeur, qui achète une protection à l'émetteur, lui voulant céder le risque de crédit d'un portefeuille de référence tout en gardant la propriété et des investisseurs vendeurs de la protection. Il implique en principe la création d'un SPV.

Un SPV, ou Special Purpose Vehicle, trouve son équivalent en législation française dans le Fonds Commun de Créances. C'est une coquille vide permettant la gestion du produit structuré. Les SPVs sont largement utilisés par l'industrie financière pour les cat-bonds par exemple ou bien pour les variables annuités avec des SPVs bancaires aux bermudes.

Il y a plusieurs types de Collateralised Debt Obligations. Ils contiennent différentes classes d'actifs et ont des structures différentes aussi. Cependant ils gardent la même classification des risques comme définit ci-dessous :

| | |
|----------------------------|------------------|
| Index | [0-100%] |
| Super senior | [22-100%] |
| Junior super senior | [12-22%] |
| Senior mezzanine | [9-12%] |
| Mezzanine | [6-9%] |
| Junior mezzanine | [3-6%] |
| Equity | [0-3%] |

Les CDOs peuvent se diviser en deux catégories :

- *Synthetic CDOs (collateralised synthetic obligations-CSOs)*. Il s'agit de produits sur-mesure, très proches des CDS index.
- *Structured finance securities*. C'est une classe très large de produits titrisés couvrant les « cash CDOs », « *Collateralised Loan Obligations (CLOs)* », « *Mortgage-Backed Securities (MBSS)* » et les « *Asset Back Securities (ABS)* ».

b) Evaluation d'un CDO :

Nous allons présenter les bases du pricing des *synthetic CDOs*. Les pertes, $L(t)$, sur un portefeuille de crédit à l'instant t peuvent être caractérisées par :

$$L(t) = \sum_{i=1}^n N_i (1 - R_i) 1_{\{\tau_i \leq t\}}$$

Où N_i , R_i et τ_i sont respectivement le notionnel, le taux de recouvrement et le temps de défaut pour un nom i .

Une tranche du portefeuille de crédit est caractérisée par une perte dans la proportion $[A, B]$ telle que :

$$L(t) = \max[L(t) - A, 0] - \max[L(t) - B, 0]$$

Une tranche avec un montant notionnel $M = B - A$ peut s'écrire de la manière suivante (cf Gregory et Laurent-2003) :

$$V_{prime}^{CDO}(t, T) = E \left[\sum_{i=1}^m B(t, t_i) \Delta_{i-1, i} [M - L(t_{i-1}, A, B)]^+ X_{CDO} \right]$$

$$V_{protection(defaut)}^{CDO}(t, T) = E \left[\int_t^T B(t, u) dL(u, A, B) \right]$$

Nous retrouvons les termes définis dans le cadre de l'évaluation des CDS.

Deuxième partie

Evaluation du risque de crédit

I. Introduction

Les deux grandes familles de modèles pour le défaut d'une entreprise sont : les modèles structurels et les modèles à intensité.

Les modèles structurels permettent d'expliquer le défaut d'une entreprise à partir de variables économiques et de données propres à l'entreprise. Par exemple, le modèle de Black & Merton lie le défaut d'une entreprise à sa capacité à rembourser sa dette. Ces modèles sont aussi utilisés par des agences de rating (Standard & Poor's, Moody's et Fitch¹⁶). Elles fournissent régulièrement des notes sur la qualité de crédit de différentes entreprises, états ou entité publiques. La note d'une entité est établie en fonction de nombreux critères (son bilan, ses projets, son management, la valeur de son action, la note de l'état...).

Les modèles à intensité de défaut ou encore modèles à forme réduite cherchent à expliquer le défaut à partir d'un processus exogène appelé intensité de défaut. Ce processus décrit la probabilité instantanée d'une entreprise à faire faillite. Ainsi, l'utilisation des prix de produits dérivés sur le marché permet d'extraire la probabilité implicite sous l'environnement risque-neutre. Mais cette probabilité est influencée par les modèles structurels utilisés par les agences de rating car les marchés utilisent les informations (ratings) pour acheter et vendre des CDS. Par conséquent, les modèles à intensité donnent l'opinion du marché sur la probabilité de défaut, qui peut parfois être éloignée d'une explication économique (cf crise des subprimes).

II. Les modèles structurels

1. Le modèle de Merton

- Introduction

Merton (1974) utilise les équations du pricing d'option de Black & Scholes (1973) sur la valeur d'une entreprise pour modéliser le risque de crédit. Il fournit une relation entre la structure propre de l'entreprise et le risque de crédit. En effet, il adapta les hypothèses du modèle de Black & Scholes à la structure financière des entreprises. Ainsi, la valeur des actifs de l'entreprise suit une loi log-normale avec une volatilité constante. L'entreprise est constituée simplement d'actions et de dettes, ce qui est un peu réducteur mais c'est un modèle simpliste. Les actions ne reçoivent pas de dividendes. Et les dettes sont constituées d'obligations zéro-coupons de maturité T .

- Le modèle

Le modèle de Merton suppose que la valeur V_t d'une entreprise à l'instant t suit une martingale équivalente sous \mathbb{P} , probabilité historique, à la dynamique :

$$\frac{dV_t}{V_t} = rdt + \sigma dW_t$$

¹⁶ http://www.standardandpoors.com/en_EU/web/guest/home , <https://www.fitchratings.com/web/en/dynamic/fitch-home.jsp>, <https://www.moody.com/>

Ici, $r \geq 0$ représente le taux d'intérêt sans risque, $k \geq 0$ le taux de dépense de l'entreprise (salaires, amortissement...) et $\sigma \geq 0$ la volatilité de l'entreprise. On écrit alors la valeur de l'entreprise (V_t) comme la somme de son actif (S_t) et de son passif (D_t). On a donc

$$V_t = S_t + D_t$$

Si on se place sur un intervalle $[0, T]$, et on suppose que la dette a été contractée auprès d'une seule contrepartie, et que l'entreprise doit rembourser en T la somme $L > 0$ à sa contrepartie. Le modèle de Merton considère alors deux cas de figure au moment du remboursement :

- Soit $V_T \geq L$, alors l'entreprise rembourse sa dette.
- Soit $V_T < L$, alors l'entreprise ne rembourse pas sa dette et fait défaut.

L'instant de défaut s'écrit ainsi : $\tau = T1_{V_T < L} + \infty 1_{V_T \geq L}$

Nous remarquons donc la similarité avec le prix d'une option européenne dans le modèle d'évaluation de Black & Scholes. Ainsi, sous ce modèle la valeur de la dette à l'instant t s'écrit :

$$D_t = e^{-r(T-t)}[1 - \phi(d_1)] + V_t e^{-r(T-t)}\phi(d_2)$$

Avec,

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ln\left(L \frac{e^{-r(T-t)}}{V_t}\right) - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}, \quad d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ln\left(L \frac{e^{-r(T-t)}}{V_t}\right) + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T} \quad \text{et} \quad \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

On peut définir l'intensité de défaut λ_t telle que $\lambda_t = \frac{1}{T} \ln\left(\frac{L}{D_t}\right) - r > 0$, ainsi le remboursement vaut $D_t = L e^{-(r + \lambda_t)(T-t)}$

Un inconvénient de ce modèle est que le défaut d'une entreprise ne peut intervenir qu'à une seule date, connue à l'avance, ce qui n'est pas réaliste. Pour pallier ce problème, Black & Cox ont proposé de définir le défaut de l'entreprise par le premier temps de passage en dessous d'une barrière. Nous allons donc détailler ce modèle dans le paragraphe suivant.

2. Le modèle de Black & Cox

- Introduction

En 1976, Black et Cox améliorent le modèle de Merton. Comme vu à la fin de la section précédente, ils font l'hypothèse que le coût du financement et les taux d'intérêt entre $[0, T]$ peuvent rendre la société insolvable à tout instant. Black & Cox ont proposé de définir le défaut de l'entreprise par le premier temps de passage en dessous d'une barrière $H(t)$:

$$\tau = \inf \{t \in [0, T], V_t \leq H(t)\}$$

Ils proposent de prendre $H(T)=L$ et pour $t \in [0, T]$, $H(t) = L e^{-\gamma(T-t)}$ avec $\gamma > 0$.

- Le modèle

Nous généralisons le modèle de Merton. Premièrement, la société distribue des dividendes aux actionnaires et paye le principal à ses créanciers, donc nous changeons les équations des actifs et de la dette par :

$$dV_t = V_t(r - k)dt + V_t\sigma dW_t$$

$$\frac{E(dD_t)}{dt} = (r - c)D_t$$

Où V_t est la valeur de la société,
 r le taux sans risque,
 W_t un mouvement brownien,
 k le taux de dividendes ,
 c le taux d'intérêt de la dette.

Comme nous l'expliquions précédemment, les actionnaires peuvent demander la liquidation à tout instant contrairement au modèle de Merton. Ainsi, dans ce modèle la maturité n'est pas fixée mais il y a un temps d'arrêt τ défini tel que :

$$\tau = \inf\{t > 0, V(t) \leq D(t)\}$$

Le temps d'arrêt permet d'imaginer que c'est le moment où les actionnaires vont demander la liquidation de la société. Ce temps d'arrêt est difficile à imaginer car il y a des recours en justice dans la réalité et réduire la liquidation judiciaire à un instant précis est réducteur. C'est un processus dans le temps une liquidation.

Dans le modèle de Merton, on considère un call européen indexé sur V_t avec le strike D_T et la maturité T . Dans le modèle de Black & Cox, nous sommes en présence d'un call américain.

Pour établir la probabilité de défaut, nous assimilons la dette à un zéro-coupon, donc $c = 0$. Par conséquent, la dette est égale à $D_t = De^{-r(T-t)}$. On a la solution à la dynamique de l'actif qui est donnée par :

$$V_t = V_0 e^{\left(r - k - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}$$

La condition d'insolvabilité est :

$$\forall t \in [0, T], V_t = V_0 e^{\left(r - k - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t} \leq De^{-r(T-t)}$$

Donc
$$e^{\left(r - k - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t} \leq \frac{D}{V_0} e^{-r(T-t)}$$

Avec $X_t = \ln(e^{-\left(k + \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t})$

D'où
$$X_t = -\left(k + \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t$$

On pose
$$\mu = -\left(k + \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

Ainsi,
$$X_t = \mu t + \sigma W_t$$

Si $m_t = \inf\{X_s, s \leq t\}$ est le minimum entre $[0, t]$ de X_t ($X_0 = 0$) et $y = \ln\left(\frac{De^{-rT}}{V_0}\right)$ ($y < 0$)

On a donc $P(m_t \leq y) = P(\tau \leq t) = N\left(\frac{y - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) + e^{\frac{2\mu y}{\sigma^2}} N\left(\frac{y + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right)$

Où N est la distribution de la loi normale centrée réduite.

III. Les modèles à intensité de défaut

Les modèles à intensité défaut sont le premier cœur de mon mémoire, car ils sont indispensables pour évaluer la probabilité de défauts implicites aux marchés financiers

1. Cadre d'évaluation des modèles à intensité de défaut

On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ qui décrit les aléas observés sur le marché. Nous supposons que cet espace est muni d'une filtration $(F_t, t \geq 0)$ de \mathcal{E} qui contient schématiquement l'information de tous les actifs « sans risque de défaut ». En particulier, nous supposons que $B(t)$, la valeur à l'instant t d'une somme unité placée à l'instant 0 dans un placement sans risque, est adaptée à la filtration (F_t) . Le coefficient d'actualisation s'écrit, en utilisant les notations du préliminaire :

$$\forall t < T, P(t, T) = \frac{B(t)}{B(T)}$$

On considère un seul instant de défaut qui est supposé être une variable aléatoire positive \mathcal{E} -mesurable :

$$\tau : \Omega \rightarrow [0, +\infty].$$

On définit alors $(H_t, t \geq 0) = (\sigma(\{\tau \leq u\}, u \leq t), t \geq 0)$, qui est également la filtration engendrée par $(\min(\tau, t), t \geq 0)$. Puis enfin on définit la filtration $(G_t, t \geq 0)$ comme la filtration engendrée par $(F_t, t \geq 0)$ et $(H_t, t \geq 0)$: $G_t = F_t \vee H_t$. Nous supposons que la probabilité \mathbb{P} est une probabilité risque neutre. Cela signifie que le processus des prix actualisés à l'instant t de tout payoff qui s'écrit comme variable aléatoire G_T - mesurable est une G_t - martingale. Si on suppose la *Loss Given Default* (LGD) comme un pourcentage constant, on remarque que tous les produits sur un seul défaut rentrent dans ce cadre puisque le coefficient d'actualisation est mesurable par rapport à la filtration $(G_t, t \geq 0)$.

Le cadre étant défini, nous pouvons maintenant nous concentrer sur la probabilité de défaut et le processus de Cox.

2. Processus de Cox, probabilité de défaut et de survie

La littérature [1] décrit la modélisation du temps de défaut comme le temps du premier saut d'un processus de poisson. Le défaut n'est donc pas induit par les observations du marché et/ou par les fondamentaux, mais par un processus exogène qui est indépendant de toutes informations du marché. On peut expliquer l'introduction d'un processus exogène pour modéliser le défaut en argumentant que les taux d'intérêt, les taux de change, les swaps,... ne donnent pas d'informations complètes sur le processus de défaut et qu'il n'y a pas non plus de raison macroéconomique derrière un défaut.

Nous allons donc représenter dans un premier temps les processus de poisson pour expliquer ensuite le processus de Cox. Il nous servira plus particulièrement dans le modèle SSRD que nous développerons pour effectuer le pricing de CDS.

Définition : Processus de poisson

Un processus de poisson à intensité $\lambda > 0$ est un processus $N(t)$ prenant des valeurs entières et croissantes, dont la valeur initiale $N(0) = 0$, dont les accroissements sont indépendants, et tel que :

$$\mathbb{P}(N(t_2) - N(t_1) = n) = \frac{\lambda^n (t_2 - t_1)^n}{n!} \exp(-\lambda(t_2 - t_1)) \quad \text{pour } 0 \leq t_1 \leq t_2$$

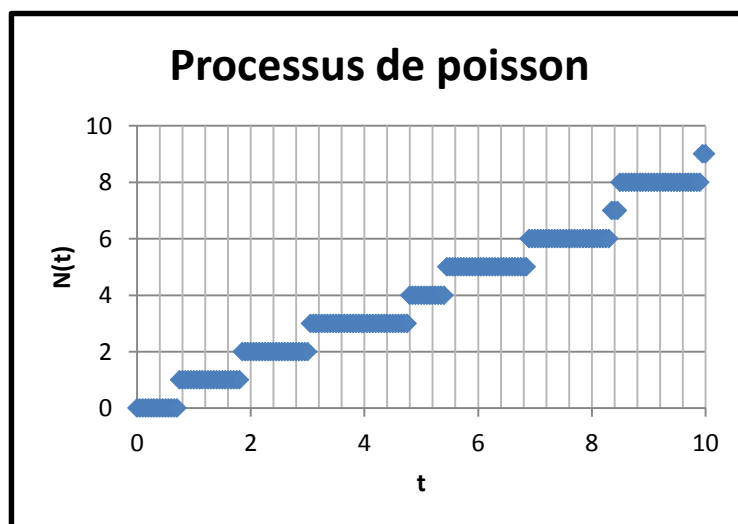
Ainsi, en choisissant $t_1 = t$ et $t_2 = t + \Delta t$ et en posant $\Delta N = N(t + \Delta t) - N(t)$ on écrit :

$$\mathbb{P}(\Delta N(t) = n) = \frac{(\lambda \Delta t)^n}{n!} \exp(-\lambda \Delta t)$$

En faisant tendre Δt vers 0, on obtient :

$$\mathbb{P}(dN(t) = 1) = \lambda dt$$

Cela signifie que dans un intervalle infinitésimal dt , le processus saute une fois avec une probabilité λ et zéro fois avec une probabilité $1 - \lambda$.



Le processus de Poisson standard que l'on vient de définir est assez restrictif du fait que son intensité λ est supposée constante. Le processus de Cox est lui, un modèle généralisé du processus de poisson, où l'intensité dépend du temps et est stochastique. Dès lors, dN est égal à 1 avec une

probabilité $\lambda(t)dt$ et à 0 avec une probabilité $1 - \lambda(t)dt$. De ce fait, $E(dN) = \lambda(t)dt$ et le processus $N(t) - \int_0^t \lambda(u)du$ est une martingale sous la filtration G_t . La dynamique de ce processus peut être écrite sous la probabilité risque-neutre ou historique mais le paramètre d'intensité $\lambda(t)$ diffère dans ces univers.

En particulier, nous noterons Λ_t la moyenne des $\lambda(u)$ sur $[0, t]$, i.e. $\Lambda_t = \frac{1}{t} \int_0^t \lambda(u)du$. Le défaut venant d'un Processus de Cox reste

$$\mathbb{Q}(\tau \in [t, t + dt] | \tau > t, G_t) = \lambda(t)dt$$

Cette formule démontre que nous pouvons définir un processus exogène dépendant du temps pour définir le défaut d'une société dans un cadre probabiliste.

3. Présentation de la calibration de CDS sous les modèles réduits et taux de hasard

Les modèles réduits sont les modèles couramment utilisés sur les marchés pour trouver les probabilités implicites de défauts. Ce sont des modèles avec une intensité de défaut qui dépend du temps. On suppose que les événements de crédit sont représentés comme des sauts sans que l'amplitude de ceux-ci ne soit spécifiée. La plupart du temps les probabilités implicites de défaut sont issues des CDS.

Les modèles réduits utilisent en général des processus de poisson dépendant du temps dont l'intensité est $\lambda(t)$ et la fonction du taux de hasard est $\Lambda_t = \frac{1}{t} \int_0^t \lambda(u)du$.

Nous utiliserons les hypothèses suivantes dans la calibration :

- L'intensité est déterministe et constante par morceaux : $\lambda(t) = \lambda_i, \forall t \in [T_{i-1}, T_i]$ avec T_i les différentes maturités des CDS ;
- $\Lambda_t = \int_0^t \lambda(u)du = \sum_{i=1}^{\beta(t)-1} (T_{i+1} - T_i) \lambda_i + (t - T_{\beta(t)-1}) \lambda_{\beta(t)}$ avec $\beta(t)$ l'indice de la première maturité après t ;
- Ainsi, $\Lambda_j = \int_0^{T_j} \lambda(u)du = \sum_{i=1}^j (T_i - T_{i-1}) \lambda_i$.

Nous sommes donc dans la capacité d'évaluer la jambe risquée du CDS.

$$\begin{aligned} L_{GD} E[P(0, \tau) 1_{T_a < \tau < T_b} | G_t] &= L_{GD} \int_0^\infty E[P(0, u) 1_{T_a < \tau < T_b}] \mathbb{Q}(\tau \in [u, u + du]) \\ &= L_{GD} \int_{T_a}^{T_b} E[P(0, u)] \mathbb{Q}(\tau \in [u, u + du]) \\ &= L_{GD} \int_{T_a}^{T_b} P(0, u) \lambda(u) \exp\left(-\int_0^u \lambda(s) ds\right) du \end{aligned}$$

$$= L_{GD} \sum_{i=a+1}^b \lambda_i \int_{T_{i-1}}^{T_i} \exp(-\Lambda_{i-1} - \lambda_i(u - T_{i-1})) P(0, u) du$$

Ainsi, il nous est possible d'écrire la formule du CDS sous les hypothèses décrites ci-dessus.

$$\begin{aligned} CDS_{a,b}(t, R, L_{GD}, \Lambda_t) &= R \sum_{i=a+1}^b \lambda_i \int_{T_{i-1}}^{T_i} \exp(-\Lambda_{i-1} - \lambda_i(u - T_{i-1})) P(0, u) (u - T_{i-1}) du \\ &+ R \sum_{i=a+1}^b P(0, T_i) (T_i - T_{i-1}) \exp(-\Lambda_{T_i}) \\ &- L_{GD} \sum_{i=a+1}^b \lambda_i \int_{T_{i-1}}^{T_i} \exp(-\Lambda_{i-1} - \lambda_i(u - T_{i-1})) P(0, u) du \end{aligned}$$

Nous utilisons donc une forme discrète du prix du CDS à l'instant $t = 0$ pour estimer l'intensité constante par morceaux.

$$\begin{aligned} CDS_{a,b}(0, R, L_{GD}, \Lambda_t) &= R \sum_{i=a+1}^b P(0, T_i) (T_i - T_{i-1}) \exp(-\Lambda_{T_i}) - L_{GD} \sum_{i=a+1}^b \lambda(T_i) P(0, T_i) \exp(-\Lambda_{i-1} - \lambda_i(T_i - T_{i-1})) (T_i - T_{i-1}) \\ &= R \sum_{i=a+1}^b P(0, T_i) (T_i - T_{i-1}) \exp(-\Lambda_{T_i}) - L_{GD} \sum_{i=a+1}^b \lambda(T_i) P(0, T_i) \exp(-\Lambda_{i-1}) (T_i - T_{i-1}) \end{aligned}$$

Lors de la calibration, on a $T_a = 0$ et nous avons les spreads R des CDS pour différentes maturités en utilisant des T_i trimestrielles nous sommes donc dans la capacité de résoudre les équations suivantes :

- $CDS_{0,1y}(0, R_{0,1y}^M, L_{GD}, \lambda_1 | \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4) = 0$;
- $CDS_{0,2y}(0, R_{0,2y}^M, L_{GD}, \lambda_1, \lambda_2 | \lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8) = 0$;
- ...

4. Analyse des résultats pour la France et l'Allemagne

Nous présentons des exemples numériques, basés sur les CDS de la France et de l'Allemagne, le **13 mars 2014 à 16:37:46**.

| France, taux de recouvrement de 40% | | | Allemagne, taux de recouvrement de 40% | |
|-------------------------------------|------------|---------|--|---------|
| | Maturité | Spread | Maturité | Spread |
| 6M | 20/09/2014 | 0,0777% | 20/09/2014 | 0,0297% |
| 1Y | 20/03/2015 | 0,0778% | 20/03/2015 | 0,0298% |
| 2Y | 20/03/2016 | 0,1640% | 20/03/2016 | 0,0690% |
| 3Y | 20/03/2017 | 0,2599% | 20/03/2017 | 0,1155% |
| 4Y | 20/03/2018 | 0,3740% | 20/03/2018 | 0,1729% |
| 5Y | 20/03/2019 | 0,5083% | 20/03/2019 | 0,2433% |
| 7Y | 20/03/2021 | 0,7444% | 20/03/2021 | 0,3684% |
| 10Y | 20/03/2024 | 0,9534% | 20/03/2024 | 0,5023% |

Figure 1: Date de maturité et cotations des CDS

Suite à la calibration, nous obtenons les résultats suivants :

| France | | | Allemagne | |
|--------|-----------|-----------------------|-----------|-----------------------|
| | Intensité | Probabilité de survie | Intensité | Probabilité de survie |
| 6M | 0,130% | 99,935% | 0,0495% | 99,975% |
| 1Y | 0,130% | 99,871% | 0,0497% | 99,950% |
| 2Y | 0,273% | 99,598% | 0,1150% | 99,836% |
| 3Y | 0,433% | 99,167% | 0,1925% | 99,644% |
| 4Y | 0,623% | 98,551% | 0,2882% | 99,357% |
| 5Y | 0,847% | 97,720% | 0,4055% | 98,955% |
| 7Y | 1,241% | 95,325% | 0,6140% | 97,747% |
| 10Y | 1,589% | 90,887% | 0,8372% | 95,323% |

Figure 2: Calibration avec une intensité constante par morceaux au 13 mars 2014

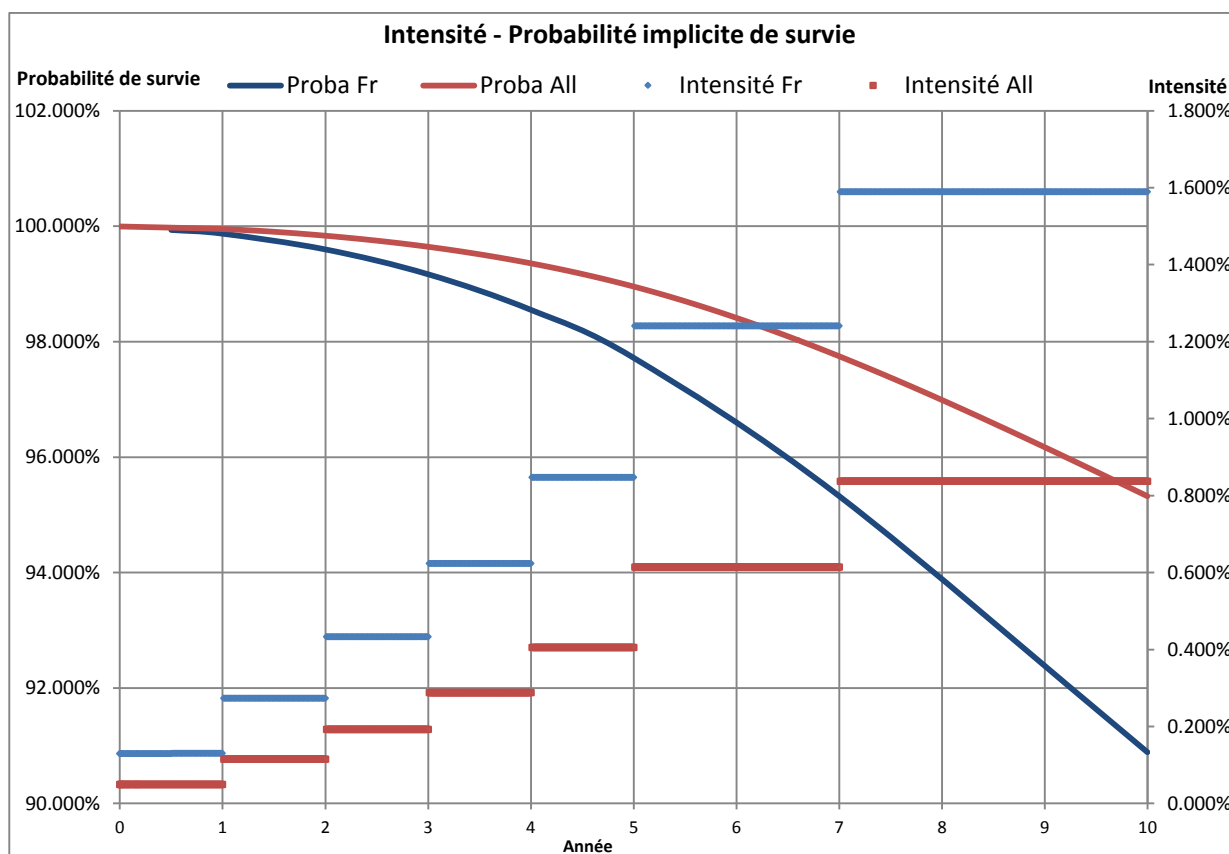


Figure 3: Probabilité de survie et intensité pour la France et l'Allemagne au 13 mars 2014

- **Analyse**

Dans les deux calibrations d'intensité, nous remarquons dans le cas de la France ou de l'Allemagne que l'intensité est croissante au cours du temps. Le marché perçoit le fait que c'est moins risqué durant le premier intervalle que pour les suivants. Par conséquent, l'idée du marché n'est pas de dire que si l'Allemagne ou la France survit maintenant alors elles ont plus de chances

de perdurer mais de faire comprendre que le temps joue contre ces deux grandes puissances. Il apparaît qu'il est moins risqué d'investir dans des obligations de ces Etats à moyen terme qu'à long terme.

Il est intéressant de comparer la croissance des intensités entre l'Allemagne et la France, intuitivement on remarque sur le graphique que l'intensité de la France croît largement plus vite que l'intensité de l'Allemagne. Dans le tableau ci-dessous, nous explicitons le facteur de croissance de l'intensité.

| | Croissance de l'intensité | | | | | | |
|------------------|---------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| | 6M-1Y | 1Y-2Y | 2Y-3Y | 3Y-4Y | 4Y-5Y | 5Y-7Y | 7Y-10Y |
| France | 0.0000% | 0.1430% | 0.1600% | 0.1900% | 0.2240% | 0.1970% | 0.1160% |
| Allemagne | 0.0004% | 0.0653% | 0.0775% | 0.0957% | 0.1173% | 0.1043% | 0.0744% |

Figure 4: Etude de la croissance de l'intensité des deux pays

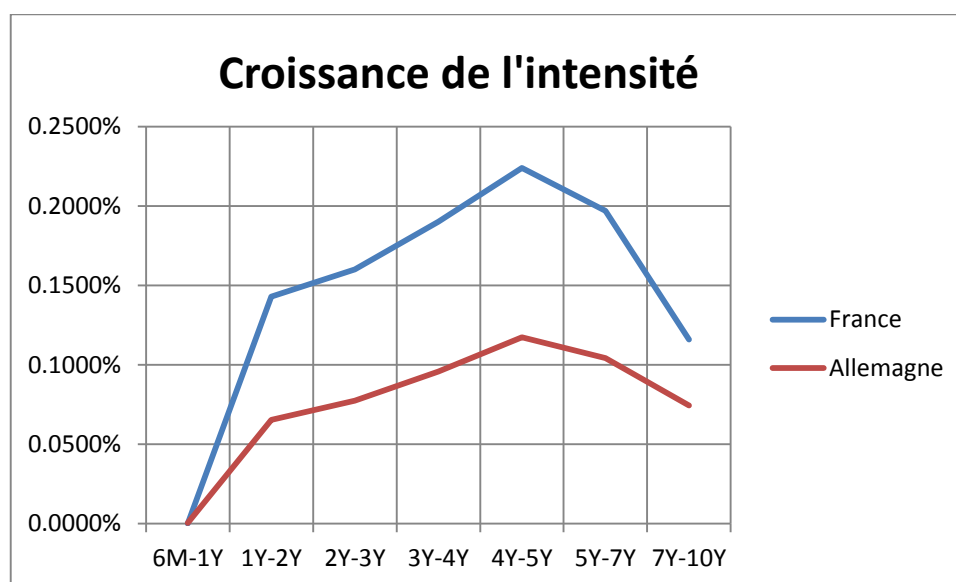


Figure 5: Graphique de la croissance de l'intensité des deux pays

Finalement, on se rend compte dans la figure 5 que la croissance de l'intensité est en moyenne deux fois plus importante pour la France que pour l'Allemagne. Dans le paragraphe précédent, j'expliquais que le temps joue contre ses deux puissances mais il faut alors noter que le temps a une influence deux fois plus importante pour la France que pour l'Allemagne. Ces propos sont réellement intéressants car ils représentent l'avis du marché sur ses deux puissances, cet avis reflète celui des opérateurs et non l'avis économique. Je pense qu'il serait intéressant de comparer ses résultats avec ceux d'économistes et de stratégestes. Ceci n'a pas pu être effectué dans le cadre de ce mémoire car ce n'était pas l'objectif même si ces discussions ont été au cœur des problématiques avec mon équipe à la Caisse des Dépôts. Il y a une grande disparité entre l'avis du marché et la réalité, de nombreux exemples existent sur les marchés et peuvent créer des arbitrages statistiques.

De même, nous soulignons le fait que l'intensité de l'Allemagne est toujours inférieure à celle de la France. Ainsi, le marché perçoit un risque de défaut beaucoup plus important pour la France

que pour l'Allemagne. Ceci s'explique concrètement par des indicateurs macroéconomiques meilleurs en Allemagne qu'en France.

Brigo et Mercurio [1] soulignent le point suivant :

- Lorsqu'on calibre un modèle d'intensité sur des CDS d'une entreprise ayant un risque important de défaut, nous pouvons trouver occasionnellement des intensités négatives. C'est donc un signal fort que la situation de l'entreprise ou de l'Etat est en péril. Brigo et Mercurio présentent cette situation pour Parmalat mais l'exemple des CDSs grecs pendant la crise des dettes souveraines pourrait aussi être mis en avant.

5. Présentation de résultats pour des « corporate »

Précédemment, nous avons mis en application le calcul de la probabilité de survie pour la France et l'Allemagne. Dans ce paragraphe, nous allons étendre les calculs à des entreprises de différents secteurs. Les CDS sont calculés sur le marché avec un taux de recouvrement de 40%, par souci d'homogénéité, nous prendrons cette donnée pour trouver l'intensité et ensuite les probabilités de survie. Même si nous devons être conscients que ce taux de recouvrement standard n'est pas réellement valide en cas de défaut¹⁷.

Dans un premier temps, on s'intéressera à deux sociétés bancaires qui sont BNP Paribas pour la France et Deutsche Bank pour l'Allemagne. Puis, nous étudierons deux sociétés de réassurances qui sont Scor pour la France et Munich Re pour l'Allemagne.

- Sociétés bancaires

L'actualité autour de la solvabilité des établissements bancaires est toujours très forte au sein de la presse internationale. Il est donc intéressant de connaître ce que les marchés financiers « price » en tant que probabilité de survie et d'intensité.

La calibration a été effectuée le 18 juin 2014.

| BNP Paribas | | | Deutsche Bank | |
|-------------|-----------|-----------------------|---------------|-----------------------|
| | Intensité | Probabilité de survie | Intensité | Probabilité de survie |
| 6M | 0,1833% | 99,908% | 0,13833% | 99,931% |
| 1Y | 0,2747% | 99,771% | 0,21900% | 99,821% |
| 2Y | 0,4505% | 99,323% | 0,43917% | 99,384% |
| 3Y | 0,6412% | 98,688% | 0,65600% | 98,734% |
| 4Y | 0,8213% | 97,881% | 0,84683% | 97,902% |
| 5Y | 1,0007% | 96,906% | 1,03383% | 96,895% |
| 7Y | 1,3382% | 94,347% | 1,35267% | 94,309% |
| 10Y | 1,5455% | 90,073% | 1,59083% | 89,913% |

Figure 6: Calibration avec une intensité constante par morceaux au 18 juin 2014

¹⁷ Voir Partie 2 II,1.c)

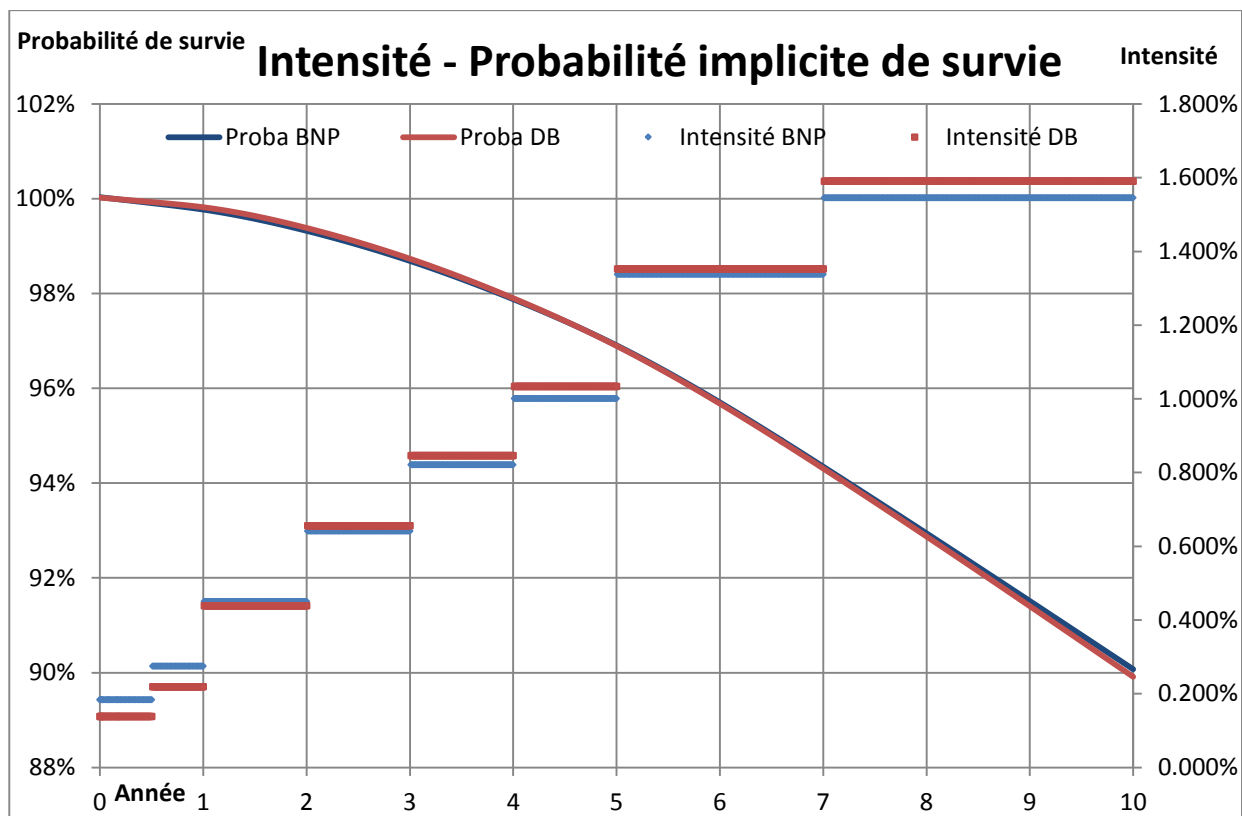


Figure 7: Probabilité de survie et intensité pour BNP Paribas et Deutsche Bank au 18 Juin 2014

Nous remarquons dans la figure 7 que contrairement à la France et à l'Allemagne, la probabilité de survie est très proche entre BNP Paribas et Deutsche Bank. Il n'y a donc pas d'effet dû à l'emplacement dans le pays, on peut supposer que le marché intègre l'internationalité des deux banques et donc de leurs activités. La probabilité de défaut à 10 ans est proche de 10% avec un écart minime entre les deux banques alors qu'il y a 5% d'écart à 10 ans entre l'Allemagne et la France.

Précédemment, pour la France et l'Allemagne nous nous sommes intéressés à la croissance de l'intensité. Graphiquement, on ne remarque pas une disparité entre les deux sociétés bancaires sur la croissance de leurs intensités respectives. Cependant, lorsqu'on regarde de plus près les chiffres du tableau ci-dessous, on souligne quelques faits intéressants.

| | Croissance de l'intensité | | | | | | |
|----------------------|---------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| | 6M-1Y | 1Y-2Y | 2Y-3Y | 3Y-4Y | 4Y-5Y | 5Y-7Y | 7Y-10Y |
| BNP Paribas | 0.1828% | 0.1758% | 0.1907% | 0.1801% | 0.1794% | 0.1688% | 0.0691% |
| Deutsche Bank | 0.1613% | 0.2202% | 0.2168% | 0.1908% | 0.1870% | 0.1594% | 0.0794% |

Figure 8: Etude de la croissance de l'intensité des deux sociétés

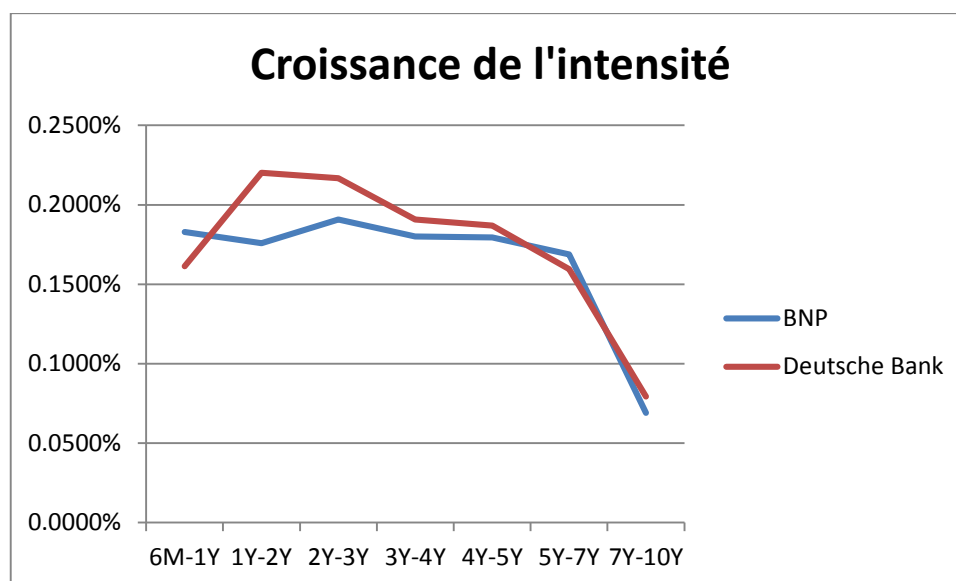


Figure 9: Graphique de la croissance de l'intensité des deux sociétés

Sur ce graphique 9, nous remarquons une décroissance de l'intensité. Concrètement, le temps joue en défaveur de ces sociétés vis-à-vis de leur crédit. Ainsi, plus on avance dans les années moins les marchés vont « pricer » un effet négatif du temps en terme de croissance.

- Sociétés de réassurance

On peut faire un parallèle à l'analyse sur les sociétés bancaires, la réglementation européenne impose de nombreuses normes pour protéger la solvabilité des sociétés d'assurance et de réassurance.

Les résultats ci-dessous ont été effectués le 19 juin 2014.

| SCOR | | | Munich Re | |
|------|-----------|-----------------------|-----------|-----------------------|
| | Intensité | Probabilité de survie | Intensité | Probabilité de survie |
| 6M | 0,1383% | 99,931% | 0,1387% | 99,931% |
| 1Y | 0,1750% | 99,843% | 0,1795% | 99,841% |
| 2Y | 0,3812% | 99,464% | 0,3055% | 99,536% |
| 3Y | 0,6082% | 98,861% | 0,4078% | 99,131% |
| 4Y | 0,8343% | 98,039% | 0,5352% | 98,602% |
| 5Y | 1,0595% | 97,006% | 0,6700% | 97,944% |
| 7Y | 1,3535% | 94,415% | 0,9493% | 96,102% |
| 10Y | 1,5512% | 90,122% | 1,2130% | 92,667% |

Figure 10: Calibration avec une intensité constante par morceaux au 19 juin 2014

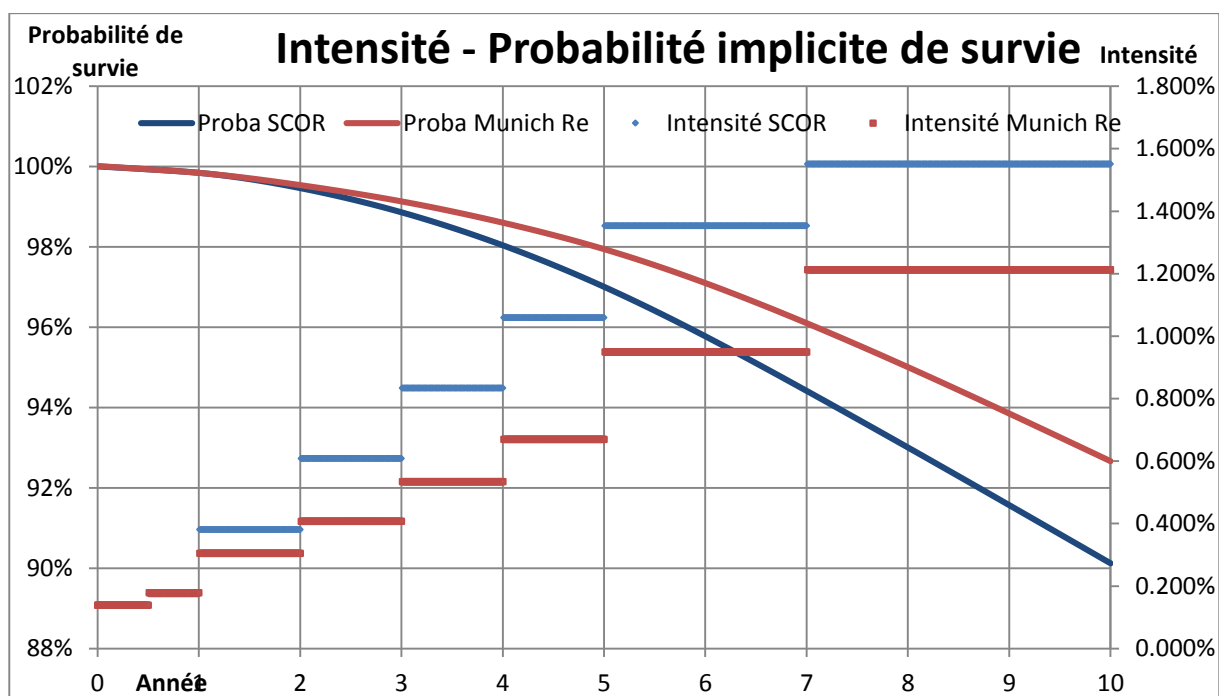


Figure 11: Probabilité de survie et intensité pour SCOR et Munich Re au 18 Juin 2014

Contrairement aux sociétés bancaires, nous remarquons un écart important entre les deux sociétés françaises et allemandes. Le marché considère que la probabilité de défaut à 10 ans de Scor est 2,6% plus importante que celle de Munich Re. Cependant, la probabilité de défaut à 10 ans entre les deux pays est de plus de 5%, on peut expliquer la réduction entre les pays et les sociétés dans l'internationalité de Munich Re et Scor.

Nous allons nous intéresser à la croissance de l'intensité et voir si nous remarquons des caractéristiques intéressantes. Dans un premier temps, on peut largement conclure que la croissance de l'intensité de Scor est plus importante que celle de Munich Re en nous intéressant au graphique ci-dessus. Cependant, nous allons essayer de le quantifier par le tableau et le graphique ci-dessous.

| | Croissance de l'intensité | | | | | | |
|------------------|---------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| | 6M-1Y | 1Y-2Y | 2Y-3Y | 3Y-4Y | 4Y-5Y | 5Y-7Y | 7Y-10Y |
| Scor | 0.0734% | 0.2062% | 0.2270% | 0.2261% | 0.2252% | 0.1470% | 0.0659% |
| Munich Re | 0.0816% | 0.1260% | 0.1023% | 0.1274% | 0.1348% | 0.1397% | 0.0879% |

Figure 12: Etude de la croissance de l'intensité des deux sociétés

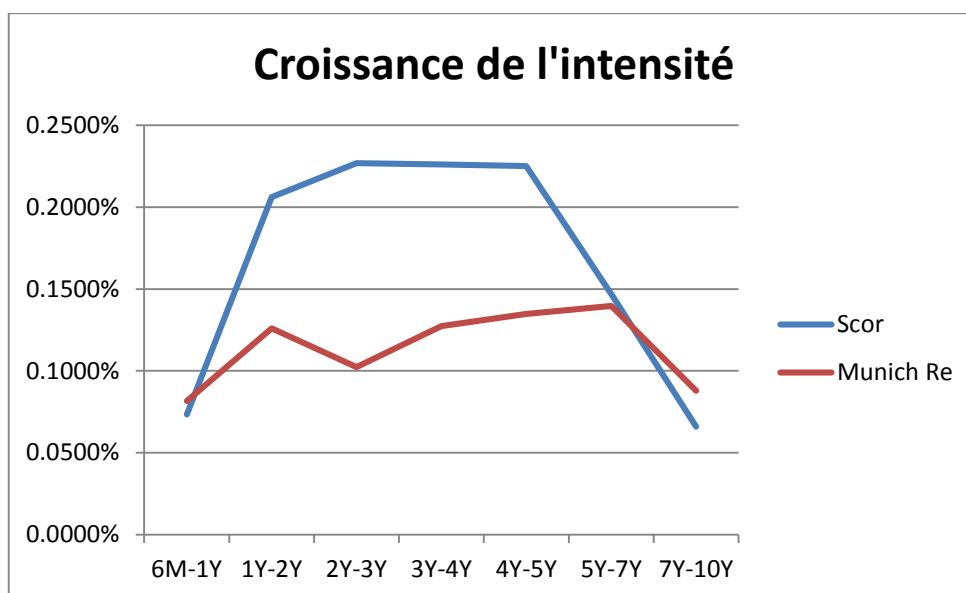


Figure 13: Graphique de la croissance de l'intensité des deux sociétés

La différence de croissance entre les deux est choquante, il y a une accélération de l'intensité entre la première année et la cinquième année pour Scor alors que Munich Re a une croissance de l'intensité qu'on qualifiera de stable. Ainsi, le marché considère que les années prochaines sont plus risquées en termes de crédit pour Scor comparé à Munich Re et que ça ne s'améliore pas avec le temps. L'étude de la croissance de l'intensité, nous amène au cœur de la problématique du marché et permet de mettre en évidence des caractéristiques étonnantes sur la notion temporelle dans le défaut.

Ces analyses sont quantitatives, une analyse plus qualitative sur les fondamentaux économiques nous apporterait des informations primordiales pour bien comprendre le contexte de *pricing* des marchés et pour se forger une opinion de crédit sur ses sociétés.

IV. Le modèle SSRD

1. Présentation du cadre théorique

Dans ce modèle [1], on considère une intensité et un taux d'intérêt stochastiques. Nous utiliserons les mêmes notations que le modèle précédent avec une intensité constante par morceaux. Le temps de défaut est modélisé par un processus de Cox avec une intensité λ . Nous devons décrire dans un premier temps le modèle du taux court et dans un deuxième temps la dynamique de l'intensité.

- **La dynamique du modèle de taux court**

Ce modèle est une extension du modèle de Cox-Ingersoll-Ross (1985), noté CIR++. Il a la caractéristique d'être relié à la structure par terme des obligations par un paramètre φ . Dans ce modèle, le processus x_t^α est défini comme un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, où le paramètre est $\alpha = (k, \theta, \sigma)$.

La dynamique du taux court est défini par :

$$\begin{cases} dx_t^\alpha = k(\theta - x_t^\alpha)dt + \sigma\sqrt{x_t^\alpha}dW_t \\ x(0) = x_0 \\ r(t) = x(t) + \varphi(t) \end{cases}$$

Où x_0, k, θ et σ sont des constantes positives telles que $2k\theta > \sigma^2$, ceci assure que le processus x_t^α reste positif. Nous considérons que le processus est entièrement calibré à la structure par terme des zéro-coupons. Nous avons donc $\varphi(t) = \varphi^{CIR}(t; \alpha)$ où

$$\varphi^{CIR}(t; \alpha) = f^M(0, t) - f^{CIR}(0, t)$$

$$\text{Avec } f^{CIR}(0, t) = \frac{2k\theta(e^{th}-1)}{2h+(k+h)(e^{th}-1)} + x_0 \frac{4h^2 e^{th}}{(2h+(k+h)(e^{th}-1))^2} \text{ où } h = \sqrt{k^2 + 2\sigma^2}$$

De plus, le prix des zéro-coupons à l'instant t d'une maturité T est

$$P(t, T) = \frac{P^M(0, T)A(0, t) \exp(-B(0, t)x_0)}{P^M(0, T)A(0, T) \exp(-B(0, T)x_0)} P^{CIR}(t, T, r_t - \varphi^{CIR}(t; \alpha))$$

Où $P^{CIR}(t, T, r_t - \varphi^{CIR}(t; \alpha)) = E(\exp(-\int_t^T x_t^\alpha(u)du)|G_t) = A(t, T)\exp(-B(t, T)x_t)$ qui est le prix d'une obligation zéro-coupon dans le cas d'un processus CIR.

Avec

$$A(t, T) = \left[\frac{2h \exp\left\{\frac{(k+h)(T-t)}{2}\right\}}{2h+(k+h)(\exp\{(T-t)h\}-1)} \right]^{\frac{2k\theta}{\sigma^2}} \quad \text{et} \quad B(t, T) = \frac{2(\exp\left\{\frac{h(T-t)}{2}\right\}-1)}{2h+(k+h)(\exp\{(T-t)h\}-1)}$$

Le taux spot à l'instant t pour une maturité T est donnée par :

$$R(t, T) = \frac{\ln \frac{P^M(0, t)A(0, T) \exp\{-B(0, T)x_0\}}{A(t, T)P^M(0, T)A(0, t) \exp\{-B(0, t)x_0\}} - B(t, T)\varphi^{CIR}(t; \alpha) - B(t, T)r(t)}{T - t}$$

- **La dynamique du modèle de l'intensité**

Brigo et Alphonsi (2003) adoptent une approche similaire pour le modèle de l'intensité que celui utilisé pour le taux court.

La dynamique de l'intensité est donc donnée par :

$$\begin{cases} \lambda_t = y_t^\beta + \psi(t), & t \geq 0 \\ dy_t^\beta = k(\mu - y_t^\beta)dt + v\sqrt{y_t^\beta}dZ_t \\ \beta = (k, \mu, v, y_0^\beta) \end{cases}$$

Où Z est un processus G_t - brownien. Les quantités suivantes sont utilisées dans les développements prochains :

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda_s ds, \quad Y^\beta(t) = \int_0^t y_s^\beta ds,$$

$$\Psi(t, \beta) = \int_0^t \psi(s, \beta) ds.$$

De plus, il est nécessaire de souligner l'interaction entre le processus du taux court et celui de l'intensité par une corrélation ρ entre les deux processus brownien tel que :

$$dW_t dZ_t = \rho dt.$$

2. Prix de quelques produits vanilles dans le cadre du modèle SSRD

L'objectif de cette partie est d'introduire les formules analytiques des produits que nous utiliserons à la phase de calibration de notre modèle, à savoir les prix des caps. Nous procédons comme pour Brigo et Mercurio [1]. Nous commencerons donc par l'étude des prix des options sur les obligations ZC. A partir de ces prix, nous calculerons les prix de produits complexes dont les flux sont répliquables à partir d'options sur des obligations ZC.

- **Expression des prix des options sur ZC :**

Le prix d'un *call* à la date t , de maturité T , sur une obligation zéro-coupon de maturité S , est donné par :

$$ZBC(t, T, S, N, K) = E^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^S r(s)} (P(T, S) - K)^+ | \mathcal{F}_t \right]$$

Afin de pouvoir donner une formule explicite, nous devons changer de mesure de probabilité. En effet, $P(T, S)$ est aléatoire et est corrélé à la structure des taux sans risques. On se retrouve alors avec l'espérance d'un produit qu'on ne peut pas calculer séparément.

Nous cherchons à sortir le coefficient d'actualisation. Une fois sorti, celui-ci devra être calculable immédiatement et ne devra pas dépendre des taux futurs. Les coefficients d'actualisation les plus naturels sont calculés à partir des taux zéro-coupons.

En effectuant un changement de numéraire sous la mesure dite « T -forward » nous obtenons après quelques manipulations (cf [1]), que le prix d'un call à la date t , de maturité T , sur une obligation de maturité S , est égal à :

$$\begin{aligned} \mathbf{ZBC}(t, T, \tau, K) &= P(t, \tau) \chi^2 \left(2r[\rho + \psi + B(T, \tau)]; \frac{4k\theta}{\sigma^2}, \frac{2\rho^2[r(t) - \varphi^{CIR}(t; \alpha)] \exp\{h(T - t)\}}{\rho + \psi + B(T, \tau)} \right) \\ &\quad - KP(t, T) \chi^2 \left(2r[\rho + \psi]; \frac{4k\theta}{\sigma^2}, \frac{2\rho^2[r(t) - \varphi^{CIR}(t; \alpha)] \exp\{h(T - t)\}}{\rho + \psi} \right) \\ \text{avec} \quad r &= \frac{1}{B(T, \tau)} \left[\ln \frac{A(T, \tau)}{K} - \ln \frac{P^M(0, T)A(0, \tau) \exp\{-B(0, \tau)x_0\}}{P^M(0, \tau)A(0, T) \exp\{-B(0, T)x_0\}} \right] \end{aligned}$$

Le prix d'un put européen est obtenu par la parité call-put suivante :

$$\mathbf{ZBP}(t, T, \tau, K) = \mathbf{ZBC}(t, T, \tau, K) - P(t, \tau) + KP(t, T)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{ZBP}(t, T, \tau, K) &= P(t, \tau) \chi^2 \left(2r[\rho + \psi + B(T, \tau)]; \frac{4k\theta}{\sigma^2}, \frac{2\rho^2[r(t) - \varphi^{CIR}(t; \alpha)] \exp\{h(T - t)\}}{\rho + \psi + B(T, \tau)} \right) \\ &\quad - KP(t, T) \chi^2 \left(2r[\rho + \psi]; \frac{4k\theta}{\sigma^2}, \frac{2\rho^2[r(t) - \varphi^{CIR}(t; \alpha)] \exp\{h(T - t)\}}{\rho + \psi} \right) - P(t, \tau) \\ &\quad + KP(t, T) \end{aligned}$$

- **Expression des prix des caps :**

A partir de ces formules, il est possible de « pricer » des « caps » et des « floors » qui sont vus comme des portefeuilles d'options sur zéro-coupons. On pose $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ les dates de paiements et $T = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ le temps entre les dates de paiements et l'instant t . Nous obtenons donc la formule du cap suivante pour un modèle CIR++ :

$$\text{Cap}(t, T, N, X) = N \sum_{i=1}^n (1 + X(d_i - d_{i-1})) \mathbf{ZBP}(t, t_{i-1}, t_i, K)$$

3. Procédure de calibrage du modèle SSRD sous la probabilité risque-neutre

Le calibrage consiste à déterminer les paramètres de notre modèle. Cet exercice n'est pas évident car nous n'observons pas directement le taux court sur le marché, ni l'intensité, puisqu'on modélise sous la probabilité risque-neutre. Dans le cas du modèle SSRD, on calibre dans un premier temps le modèle du taux court à partir du prix des caps puis dans un deuxième temps le modèle d'intensité à partir des CDS. Le modèle SSRD est caractérisé par les termes $(\alpha, \varphi, \beta, \psi, \rho)$. Comme nous l'avons explicité, φ est choisi pour répliquer les prix des zéros-coupons sans risque de défaut avec α calibré sur les caps comme expliqués ci-dessous. Les données des caps sont automatiquement téléchargées en temps réel à partir de Reuters sur une feuille excel, de même pour les CDS. À partir de ce moment, on va importer les données excel des caps et des CDS dans R grâce à un fichier « txt ». Puis, nous allons faire tourner nos algorithmes de calibrations.

Cette calibration reste valide même lors d'une intensité corrélée au taux court car les caps ne dépendent pas des paramètres (β, ψ, ρ) . La calibration s'effectuera indépendamment pour le taux court et pour l'intensité, ce qui n'a aucune influence due à la formule de pricing des caps.

- **Le modèle du taux court**

L'estimation des paramètres repose sur la comparaison des prix de marché d'un ensemble d'instruments financiers et de leur valeur estimée par le modèle à l'aide d'une formule correspondante.

Le calibrage repose sur une optimisation du ratio coût de calcul / gain de précision des paramètres. Ce ratio s'optimise selon les données choisies pour la calibration, la fonction à minimiser et les algorithmes d'optimisation à utiliser.

- **Mise en place du calibrage**

Afin de déterminer les paramètres de notre modèle de taux court, nous cherchons à minimiser une fonction qui nous permet de mesurer l'erreur entre les valeurs du marché et les prix calculés. D'après le livre de Brigo et Mercurio, nous pouvons soit utiliser des swaptions ou des caps. Le calibrage sera effectué sur les caps.

Comme expliqué précédemment, nous allons minimiser l'erreur quadratique qui est notre fonction objective entre les prix théoriques des caps du modèle et les prix du marché suivant la formule :

$$f(k, \theta, \sigma) = \sum_{i=1}^n \left[(cap^{marché}(t) - cap^{CIR++}(t, k, \theta, \sigma)) \right]^2$$

Au vu du nombre de paramètres nous allons utiliser une stratégie d'optimisation en deux étapes :

- La méthode du recuit simulé sur les caps At-The-Money (ATM).
- La méthode du recuit simulé sur l'ensemble des caps.

Ainsi notre ratio coût de calcul / gain de précision des paramètres est largement amélioré. Nous trouvons des paramètres initiaux à partir de la première étape et nous les améliorons grâce à la deuxième étape.

| Paramètre | valeur |
|-----------|------------|
| k | 0.08745606 |
| θ | 0.02975514 |
| σ | 0.09677120 |

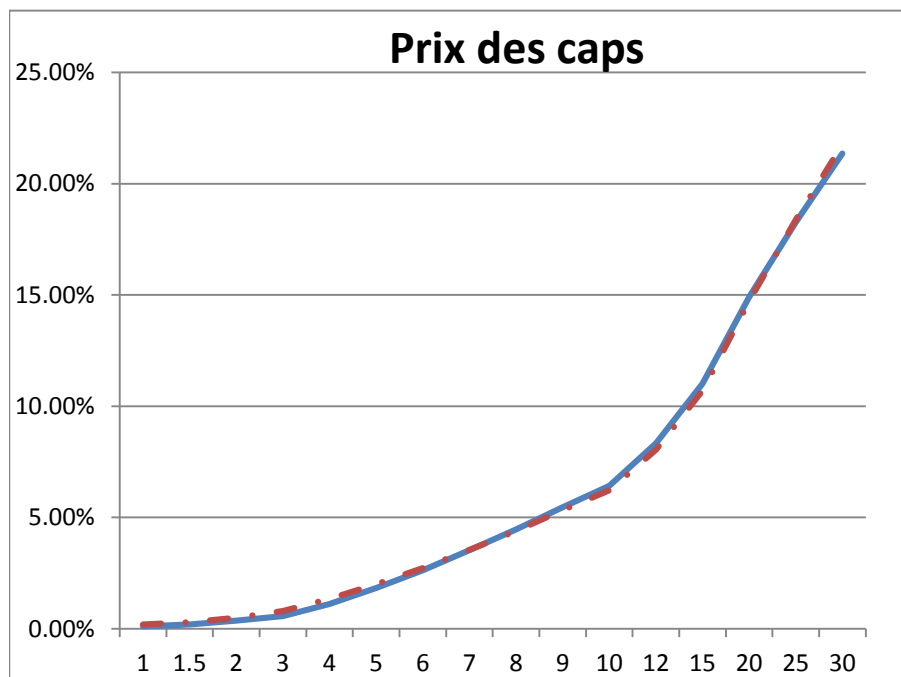


Figure : Prix des caps pour les différents Tenors en bleu ceux du marché et en rouge ceux du modèle CIR++.

Nous remarquons donc que les deux courbes sont très similaires, par conséquent nous supposons que le modèle est bien calibré sur les caps de marché car nous retrouvons presque les mêmes prix à partir du modèle de CIR++. Il faut à présent vérifier la martingalité.

- **Le modèle de l'intensité**

La définition de l'intensité λ comme définie précédemment, nous permet de considérer sous la probabilité risque neutre :

$$E(1_{\tau > t}) = E[E(1_{\tau > t} | \mathcal{F}_t)] = E[E(1_{\Lambda(\tau) > \Lambda(t)} | \mathcal{F}_t)] = E(e^{-\Lambda(t)}) = E(e^{-\int_0^t \lambda(u) du})$$

Où $\Lambda(\tau)$ suit une loi exponentielle d'un paramètre. Dans le modèle de Brigo et Mercurio, le modèle de l'intensité est un CIR++ comme pour le taux court, ce qui permet d'utiliser les formules du pricing des zéro-coupons.

En particulier, nous pouvons exprimer l'expression des CDS à travers la fonction de hasard implicite Γ^{mkt} comme nous l'avons effectué dans la section 3.c. On a donc :

$$\mathbb{Q}(\tau > t)_{model} = E(e^{-\Lambda(t)}) = e^{-\Gamma^{mkt}(t)} = \mathbb{Q}(\tau > t)_{market}$$

Par hypothèses, on a

$$e^{-\Gamma^{mkt}(t)} = E(e^{-Y_t^\beta + \Psi(t)})$$

Par conséquent,

$$\Psi(t) = \Gamma^{mkt}(t) + \ln \left(E(e^{-Y_t^\beta + \Psi(t)}) \right) = \Gamma^{mkt}(t) + \ln(P^{CIR}(0, t, y_0, \beta))$$

Où, nous choisissons les paramètres β pour avoir une fonction ψ positive. Ainsi, si on calibre ψ à partir de la dernière formule alors le modèle est calibré sur la fonction de hasard implicite $\Gamma^{mkt}(t)$, donc sur les CDS.

Lors de la calibration, nous supposons que les mouvements browniens des paramètres β et α sont indépendants, donc $\rho = 0$. En effet, calibrer la fonction de hasard implicite pour modéliser les probabilités de survie est équivalent à directement calibrer le modèle (r, λ) en plaçant les CDS à la valeur zéro en spread de marché comme nous l'avons effectué précédemment dans la calibration en supposant l'intensité constante par morceaux.

Ainsi, lorsque les mouvements browniens sont indépendants le prix des CDS sous l'intensité stochastique sont les mêmes que ceux avec une intensité déterministe (calculée dans le paragraphe précédent). Par conséquent, quand $\rho = 0$ le prix des CDS ne dépend donc pas de la dynamique de (r, λ) et en particulier ne dépend pas de $k, \theta, \sigma, \kappa, v, \mu$. L'ensemble de ces affirmations peut être complété à la lecture de [15].

Cependant, si $\rho \neq 0$ le prix des CDS devient dépendant des différentes dynamiques et les deux procédures ne sont plus équivalentes

- Mise en place du calibrage

Nous allons essayer de calibrer sur les CDS français en supposant que $\rho = 0$, en utilisant la procédure de calibration précédente. Nous utilisons la méthode du recuit simulé pour annuler le prix des CDS au spread du marché.

Je n'ai pas abouti à des valeurs convaincantes à cause de problèmes de convergences qui n'ont pas réussi à être résolu dans le temps imparti à cette modélisation.

4. Euler et Milstein : solutions pour simuler (λ, r)

Le modèle SSRD permet d'utiliser, comme vu précédemment, la densité d'une chi-square pour trouver le prix de produits. Cependant, lorsque $\rho \neq 0$ nous sommes dans l'obligation d'utiliser des méthodes numériques pour obtenir la distribution de r et de λ dans le but d'évaluer des payoffs. On utilise donc une discrétisation comme précisé ci-dessous :

- Le schéma d'Euler

Nous posons la discrétisation du temps tel que $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = T$. Nous utilisons la décomposition de Cholesky pour écrire $Z_t = \rho W_t + \sqrt{1 - \rho^2} W'_t$ où W_t est un mouvement brownien indépendant d'un autre mouvement brownien W'_t .

On peut donc discrétiser de la manière suivante :

$$\begin{aligned} x_{t_{i+1}}^\alpha &= x_{t_i}^\alpha + k(\theta - x_{t_i}^\alpha)(t_{i+1} - t_i) + \sigma \sqrt{x_{t_i}^\alpha} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \\ y_{t_{i+1}}^\beta &= y_{t_i}^\beta + k(\theta - y_{t_i}^\beta)(t_{i+1} - t_i) + \sigma \sqrt{y_{t_i}^\beta} (Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i}) \end{aligned}$$

- Le schéma de Milstein

On peut donc discrétiser de la manière suivante :

$$\begin{aligned} x_{t_{i+1}}^\alpha &= x_{t_i}^\alpha + k(\theta - x_{t_i}^\alpha)(t_{i+1} - t_i) + \sigma \sqrt{x_{t_i}^\alpha} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + \frac{1}{4} \sigma^2 [(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 - (t_{i+1} - t_i)] \\ y_{t_{i+1}}^\beta &= y_{t_i}^\beta + k(\theta - y_{t_i}^\beta)(t_{i+1} - t_i) + \sigma \sqrt{y_{t_i}^\beta} (Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i}) + \frac{1}{4} \sigma^2 [(Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i})^2 - (t_{i+1} - t_i)] \end{aligned}$$

Cependant pour le modèle SSRD, [15] ont développé des schémas de discrétisation plus précis que le lecteur pourra trouver dans [15] ou [1] si il souhaite de plus amples informations.

Troisième partie

Evaluation de la Credit Valuation Adjustment

I. Modélisation de la Credit Valuation Adjustment(CVA)

1. Introduction (Unilateral CVA)

On note T la maturité du payoff que nous souhaitons évaluer et τ le moment où la contrepartie fait défaut.

Si $\tau > T$, alors il n'y a pas de défaut de contrepartie durant la vie du produit et la contrepartie n'a pas de soucis à payer ses investisseurs. Dans le cas contraire, c'est-à-dire $\tau < T$, la contrepartie ne pourra pas remplir ses obligations envers ses créanciers. Pour comprendre les parties suivantes, je vous invite à lire l'annexe 2 où nous redéfinissons la Valeur Actuelle Nette (VAN), qui est donnée par :

$$VAN = \sum_{p=0}^N \frac{CF_{flux\ de\ tresorerie}}{(1+t)^p} - I + VR$$

$CF_{flux\ de\ tresorerie}$ sont les flux entrant de trésorerie

t le taux d'actualisation

p l'année de l'annuité

N le nombre total d'annuités

I le capital investi

VR la valeur résiduelle

A τ , donc à l'instant de défaut la valeur actuelle nette¹⁸ (VAN) du payoff résiduel jusqu'à la maturité est donnée par :

- Lorsque la VAN est négative (respectivement positive) pour l'investisseur (pour la contrepartie), la VAN est complètement payée (reçue) par l'investisseur (la contrepartie) lui-même (elle-même).
- Si la VAN est positive (négative) pour l'investisseur (la contrepartie), seulement une fraction du recouvrement R_{ec} de la VAN change.

Exemple :

Si la VAN est égale à -4000 € pour l'investisseur et que la contrepartie fait effectivement défaut. Alors la contrepartie a une dette de ce montant envers la contrepartie. Au contraire, si elle avait été positive alors, l'investisseur aurait obtenu seulement une partie de la VAN.

¹⁸ Voir annexe 2

Dans cette section, toutes les espérances E_t sont prises sous la mesure \mathbb{Q} et la filtration G_t . On note donc $\Pi^D(t)$ le payoff d'un produit ayant un risque de défaut à l'instant t et $Cashflow(u,s)$ les flux reçus du produit entre le temps u et le temps s .

Ainsi, nous avons :

$$VAN(\tau) = E_t[Cashflow(\tau, T)]$$

et

$$\Pi^D(t) = 1_{\{\tau > T\}}Cashflow(t, T) + 1_{\{\tau \leq T\}}[Cashflow(t, \tau) + P(t, \tau)(R_{ec}(VAN(\tau))^+ - (-VAN(\tau))^+)]$$

L'espérance de cette expression est le prix général du payoff sous le risque de contrepartie. En effet, s'il n'y a pas de défaut cette expression se réduit à l'évaluation d'un payoff sans risque de contrepartie (le premier terme) ; dans le cas d'un défaut, les paiements dus avant le défaut sont reçus (le premier terme dans la deuxième partie de la formule). La VAN est positive seulement s'il y a un recouvrement, sinon la VAN est négative car les flux restants ont été entièrement payés. Si on note $\Pi(t)$ le payoff équivalent d'un produit sans risque de défaut. Nous pouvons déduire la proposition suivante donnée dans [1] :

Proposition :

A l'instant t , avec $\{\tau > t\}$, le prix du payoff sous le risque de contrepartie est donné tel que :

$$E_t[\Pi^D(t)] = E_t[\Pi(t)] - L_{GD}E_t[1_{\{\tau \leq T\}}P(t, \tau)(VAN(\tau))^+]$$

Où $L_{GD} = 1 - R_{ec}$ est la perte suite au défaut avec un taux de recouvrement R_{ec} déterministe. La valeur d'un produit avec un risque de défaut est la somme des valeurs du produit sans risque de défaut moins une partie correspondant à un call sur la VAP résiduel avec un strike nul donnant une contribution seulement dans les scénarios où $\tau \leq T$. Le risque de défaut ainsi ajouté est une option sur le payoff initial.

A partir de cette proposition, nous observons qu'un produit avec un risque de contrepartie a une valeur inférieure à un produit avec une probabilité de défaut nul.

La Credit Valuation Adjustment (CVA) est la différence entre la valeur de ce produit avec un risque de contrepartie et la valeur de ce produit sans risque de contrepartie.

D'où, avec les notations précédentes,

$$CVA_{unilatéral} = L_{GD}E_t[1_{\{\tau \leq T\}}P(t, \tau)(VAN(\tau))^+]$$

Il faut donc réévaluer en permanence la CVA car le risque de défaut peut changer à tout instant et provoquer des pertes sur la CVA. Il faut pouvoir suivre son exposition sur les différents produits en montant et en probabilité de défaut.

Les notions d'expositions introduites durant la première partie de ce mémoire, nous permettent de discrétiser la formule de la $CVA_{unilatéral}$ et de l'écrire en fonction de l'Expected Exposure, ce qui simplifiera les calculs. Nous avons donc, d'après [13] :

$$CVA_{unilatéral} = L_{GD} E_t [1_{\{\tau \leq T\}} P(t, \tau) (VAN(\tau))^+] = (1 - R) \sum_{j=1}^m P(t, T_j) EE(T_j) PD_{T_{j-1}, T_j}$$

Où,

R est le taux de recouvrement pour la transaction considérée et $EE(T_j)$ l'Expected Exposure à l'instant T_j et PD_{T_{j-1}, T_j} est la probabilité de défaut de la contrepartie entre T_{j-1} et T_j .

Exemple :

| Agence Française (AA) | | | OAT | | Bund | |
|-----------------------|-----------|------------|-----------|------------|-----------|------------|
| | Par yield | Zero yield | Par yield | Zero yield | Par yield | Zero yield |
| 1Y | 0,2730% | 0,2730% | 0,0940% | 0,0940% | 0,0550% | 0,0550% |
| 2Y | 0,2700% | 0,2700% | 0,1340% | 0,1340% | 0,0600% | 0,0600% |
| 3Y | 0,3760% | 0,3760% | 0,2350% | 0,2350% | 0,1240% | 0,1240% |
| 4Y | 0,5700% | 0,5720% | 0,3990% | 0,4000% | 0,2530% | 0,2540% |
| 5Y | 0,8070% | 0,8130% | 0,6110% | 0,6150% | 0,4280% | 0,4300% |
| 6Y | 1,0500% | 1,0640% | 0,8520% | 0,8620% | 0,6270% | 0,6330% |
| 7Y | 1,2830% | 1,3070% | 1,1020% | 1,1220% | 0,8360% | 0,8490% |
| 8Y | 1,5030% | 1,5390% | 1,3470% | 1,3810% | 1,0440% | 1,0650% |
| 9Y | 1,7050% | 1,7570% | 1,5750% | 1,6260% | 1,2410% | 1,2740% |
| 10Y | 1,8840% | 1,9530% | 1,7780% | 1,8480% | 1,4220% | 1,4700% |
| 12Y | 2,1650% | 2,2670% | 2,1030% | 2,2130% | 1,7330% | 1,8120% |
| 15Y | 2,4660% | 2,6140% | 2,4130% | 2,5690% | 2,0620% | 2,1870% |
| 20Y | 2,7930% | 3,0110% | 2,6590% | 2,8520% | 2,3090% | 2,4670% |
| 30Y | 3,1080% | 3,4200% | 2,8450% | 3,0600% | 2,3300% | 2,4380% |

Figure 1 : Tableau donnant les taux des obligations zéro-coupons pour différentes maturité le 10 juin 2014 à 17 :26

On cherche donc la CVA sur une obligation zéro-coupon d'une agence française et de l'OAT de maturité 15 ans dont la base de calcul est 30/360. Pour le prix « sans risque », nous considérerons que les taux allemands sont les taux sans risques. Nous prendrons un taux de recouvrement à $R = 40\%$ et supposerons que la probabilité de défaut est constante sur les 15 ans avec une intensité de 2% pour la France et 3% pour les agences d'états.

$$CVA_{ZC\ 15Y} = (1 - R) * \exp\left(\int_0^{15} -\lambda(t)dt\right) E_0[P(0,15)(VAN(15))^+]$$

$$(VAN(15))^+ = 1 \text{ car c'est un zéro-coupon avec un flux à maturité}$$

$$CVA_{agence\ française} = (1 - 0.4) * \exp\left(\int_0^{15} -0.02dt\right) E_0[\exp(-0.020620 * 15) * 1] = 0.3262$$

$$CVA_{OAT} = (1 - 0.4) * \exp\left(\int_0^{15} -0.03dt\right) E_0[\exp(-0.020620 * 15) * 1] = 0.280796$$

Nous remarquons donc que la CVA d'une agence française est plus importante que la CVA de l'état français, ce qui est dû à une probabilité de défaut plus importante pour l'agence française. Pour trouver les probabilités de défaut, il faut se référer à la partie précédente sur le risque de crédit.

2. Le risque de contrepartie bilatéral (*Bilateral CVA*)

Dans l'introduction, nous avons présenté le risque de contrepartie pour l'investisseur (Unilateral CVA). Cependant, l'investisseur présente lui aussi un risque de défaut car il peut faire défaut avant sa contrepartie.

Par ailleurs, l'investisseur peut considérer également qu'il fait un gain suite à un abaissement de son crédit. Il faut donc prendre en compte ce risque dans l'évaluation d'un payoff. Nous avons vu que la CVA est la valeur positive qu'il faut retrancher au prix d'une opération pour prendre en compte le risque de défaut de sa contrepartie avant la maturité de l'opération. Nous allons expliciter le payoff pour la prise en compte d'un risque de contrepartie bilatéral. Par conséquent, nous détaillerons la prise en compte de la CVA des deux parties dans le payoff. Nous nous inspirerons des définitions émises par Brigo et Mercurio [15].

Nous nous plaçons dans le cas d'une transaction OTC avec deux contreparties ; « A » sera l'investisseur et « B » sera la contrepartie. La date de défaut pour chaque partie est τ_A et τ_B . Nous définissons T la maturité du contrat et donc le temps d'arrêt $\tau = \min(\tau_A, \tau_B)$ du contrat, ainsi si $\tau > T$ alors il n'y a pas de défaut qui apparaît pour l'investisseur ou bien la contrepartie durant la durée de vie du contrat. Cependant, si $\tau < T$ alors l'investisseur, la contrepartie ou les deux font défaut avant la maturité du contrat. Alors à l'instant τ , la valeur actuelle nette (VAN) du payoff résiduel est calculée.

Si $\tau = \tau_B$ et $VAN < 0$ (respectivement $VAN > 0$) pour l'investisseur (respectivement pour la contrepartie), le montant est complètement perdu (respectivement reçu) par l'investisseur (respectivement la contrepartie). Si la $VAN > 0$ (respectivement $VAN < 0$) pour l'investisseur (respectivement la contrepartie), seulement le taux de recouvrement $R_{ec(B)}$ de la VAN est reçu (payé) par l'investisseur (par la contrepartie).

Si $\tau = \tau_A$ et $VAN > 0$ (respectivement $VAN < 0$) pour l'investisseur (respectivement pour la contrepartie), le montant est complètement perdu (respectivement reçu) par l'investisseur (respectivement la contrepartie). Si la $VAN < 0$ (respectivement $VAN > 0$) pour l'investisseur (respectivement la contrepartie), seulement le taux de recouvrement $R_{ec(A)}$ de la VAN est reçu (payé) par l'investisseur (par la contrepartie).

Nous discuterons à partir de cette partie des payoffs du point de vue de l'investisseur, la convention utilisée sera donc la lettre « A » pour l'investisseur et « B » pour la contrepartie. Nous définissons $\Pi(t)$ les flux du produit sans défaut entre $[t, T]$. De plus, la valeur actuelle résiduelle au défaut est notée $VAN(\tau_i) = E_t[\Pi(\tau_i, T)]$, $i = A, B$. Nous notons $P(t, T)$ le prix du zéro-coupon avec un risque de défaut ayant une maturité T à l'instant t . De même que précédemment, on suppose que $\Pi(t)$ est le payoff équivalent à $\Pi^D(t)$ d'un produit sans risque de défaut.

Ainsi, le payoff sous un risque de contrepartie bilatéral est donné par :

$$\begin{aligned}\Pi^D(t, T) &= 1_{\{T \leq \min(\tau_A, \tau_B)\}} \Pi(t) \\ &+ 1_{\{\tau_A \leq \min(\tau_B, T)\}} \left[\Pi(t, \tau_B) + P(t, \tau_B) \left(R_{ec(B)}(VAN(\tau_B))^+ - (-VAN(\tau_B))^+ \right) \right] \\ &+ 1_{\{\tau_B \leq \min(\tau_A, T)\}} \left[\Pi(t, \tau_A) + P(t, \tau_A) \left((VAN(\tau_A))^+ - R_{ec(A)}(-VAN(\tau_A))^+ \right) \right]\end{aligned}$$

Proposition :

A l'instant t , avec $\{\tau > t\}$, le prix du payoff sous le risque de contrepartie bilatéral est donnée tel que :

$$\begin{aligned}E_t[\Pi^D(t)] &= E_t[\Pi(t)] - L_{GD(B)} E_t \left[1_{\{\tau_B \leq \min(\tau_A, T)\}} P(t, \tau_A) \left(R_{ec(A)}(-VAN(\tau_A))^+ \right) \right] \\ &+ L_{GD(A)} E_t \left[1_{\{\tau_A \leq \min(\tau_B, T)\}} P(t, \tau_B) \left(R_{ec(B)}(VAN(\tau_B))^+ \right) \right]\end{aligned}$$

Où $L_{GD(i)} = 1 - R_{ec(i)}$ est la perte suite au défaut avec un taux de recouvrement $R_{ec(i)}$ déterministe. La valeur d'un produit avec un risque de défaut est la somme des valeurs du produit sans risque de défaut moins une partie correspondant à un call sur la VAN résiduel avec un strike nul donnant une contribution seulement dans les scénarii où $\tau \leq T$. Le risque de défaut ainsi ajouté est une option sur le payoff initial.

L'ajustement s'appelle « Bilateral Valuation Adjustment(BVA)» et correspond à la valeur de CVA du point de vue de l'investisseur.

$$\begin{aligned}BVA &= L_{GD(A)} E_t \left[1_{\{\tau_A \leq \min(\tau_B, T)\}} P(t, \tau_B) \left(R_{ec(B)}(VAN(\tau_B))^+ \right) \right] \\ &- L_{GD(B)} E_t \left[1_{\{\tau_B \leq \min(\tau_A, T)\}} P(t, \tau_A) \left(R_{ec(A)}(-VAN(\tau_A))^+ \right) \right]\end{aligned}$$

De même, que précédemment nous pouvons relier la Bilateral Valuation Adjustment à l'Expected Exposure et à la Negative Expected Exposure que nous avons défini dans la première partie de ce mémoire, comme le précise Gregory dans [13].

Ainsi,

$$BVA = (1 - R_A) \sum_{j=1}^m P(t, T_j) EE(T_j) (1 - PD^B_{T_{j-1}, T_j}) PD^A_{T_{j-1}, T_j} \\ - (1 - R_B) \sum_{j=1}^m P(t, T_j) NEE(T_j) (1 - PD^A_{T_{j-1}, T_j}) PD^B_{T_{j-1}, T_j}$$

Où R est le taux de recouvrement,

$EE(T_j)$ est l'Expected Exposure à l'instant T_j ,

$NEE(T_j)$ est la Negative Expected Exposure à l'instant T_j ,

$PD^A_{T_{j-1}, T_j}$ (respectivement $PD^B_{T_{j-1}, T_j}$) la probabilité de défaut de la contrepartie A (respectivement de la contrepartie B).

La BVA peut être positive ou bien négative selon que le risque de défaut de la contrepartie est plus ou moins important par rapport à l'investisseur. Il y a bien-sûr une forte dépendance entre la volatilité et la corrélation des temps de défaut. Le risque de contrepartie bilatéral (BVA) possède un avantage d'être symétrique en comparaison à la CVA normale, c'est-à-dire que $BVA(\text{contrepartie}) = -BVA(\text{investisseur})$. Cependant, si une des contreparties est considérée comme une contrepartie sans risque de défaut alors nous nous retrouvons dans le cas d'un risque de contrepartie unilatéral (unilateral CVA). La BVA possède l'avantage de pouvoir changer de signe selon la qualité de crédit des noms. Contrairement à une CVA avec une contrepartie qui sera obligatoirement toujours positive. Par conséquent, les ressources en capitaux à mobiliser peuvent être inférieures dans le cas d'une prise en compte d'un risque de contrepartie bilatéral (BVA).

Pour comprendre cette problématique, nous pouvons reporter un passage du résultat du groupe BNP Paribas du 2 mai 2013¹⁹ : « Dans une conjoncture européenne peu porteuse, le produit net bancaire du groupe s'établit à 10 055 millions d'euros, en hausse de 1,7% par rapport au trimestre 2012. BNP inclus dans ce trimestre un impact positif de deux éléments exceptionnels pour un total net de 149 millions d'euros : la réévaluation de dette propre pour -215 millions d'euros, et l'introduction de la « Debit Valuation Adjustment » (DVA), en application de la nouvelle norme IFRS 13, pour +364 millions d'euros ». Où la DVA « Debit Valuation Adjustment » représente le risque de contrepartie unilatéral (CVA unilateral) propre à l'entité. Aujourd'hui, les établissements financiers mettent en avant la FVA « Funding Valuation Adjustment » qui correspond à la DVA. Ceci met en

¹⁹<http://media-cms.bnpparibas.com/file/56/3/1t13-cp.29563.pdf>

avant l'importance de l'évaluation de la BVA car elle impacte de manière non-négligeable le résultat net d'un groupe en application des normes IFRS 13.

Il est donc important pour les banques d'évaluer précisément le risque de contrepartie bilatéral. Ainsi, au commencement d'une opération, la BVA est calculée et chargée au client. Cependant au cours de la vie de l'opération la qualité du crédit des deux émetteurs évolue et par conséquent la CVA/DVA également. Si la qualité du crédit de « A » décline alors sa CVA enregistre un gain et celle de « B » enregistre une perte. En effet, si l'opération était réévaluée après cette dégradation de crédit ; la contrepartie « A » rentrerait dans un contrat peu onéreux et « B » dans un contrat trop onéreux. D'où le fait que « A » a un gain positif *Mark-to-Market* (valeur de marché).

La BVA pose des soucis dans la théorie de pricing sous la probabilité risque-neutre (la BVA peut-être négative [3]). L'estimation de la BVA implique que la contrepartie « A » doit acheter des CDS sur elle-même pour *hedger* sa CVA. Bien que ce ne soit pas directement possible pour une contrepartie de vendre sa propre dette, pour des raisons morales où même par crédibilité pour pouvoir emprunter sur les marchés. Cependant, il est possible de se couvrir avec des CDS sur des entreprises fortement corrélées en termes de qualité de crédit. Par exemple une banque peut se couvrir avec des CDS sur un panier de plusieurs banques.

Synthèse de la gestion de la CVA :

La CVA représente l'estimation du risque de crédit aux expositions de contrepartie dans les instruments de dérivés.

Elle se calcule quotidiennement en tenant compte de l'activité des marchés et des contreparties, tels que des changements dans la notation des entreprises, les prix de marché, les accords de compensation et le collatéral. La CVA inclut également des ajustements liés au risque de crédit spécifique non reflété dans les spreads de crédit. Ainsi, une société cherchant à se protéger contre la défaillance de certains actifs contracte des CDS auprès de la contrepartie en question. Cependant, la valeur de ces CDS dépend quotidiennement par exemple de la qualité de crédit de cette même contrepartie. Ainsi, la contrepartie a pu avoir un impact négatif sur sa CVA, ce qui vient diminuer le montant de la protection.

Exemple :

Les formules ci-dessus sont générales, nous allons essayer de donner un exemple concret des problématiques liées à la CVA en utilisant un modèle simple. Nous reprendrons les notations précédentes et les contreparties « A » et « B ». De plus, nous assumons que les probabilités de défaut sont définies comme précédemment :

$$\mathbb{Q}(\tau_B > t) = \exp(-(\lambda_B - \lambda)t)$$

$$\mathbb{Q}(\tau_A > t) = \exp(-(\lambda_A - \lambda)t)$$

$$\mathbb{Q}(\tau > t) = \exp(-\lambda t)$$

Où λ_A , λ_B et λ peuvent être déterministes comme nous l'avons développé dans le premier modèle dans la partie risque de crédit ou bien stochastique comme dans le modèle SSRD de Brigo et Mercurio. La probabilité de défaut jointe peut être calculée à partir du prix de CDO sur une tranche Senior d'un indice de crédit. Nous appliquons donc les techniques développées dans la partie risque de crédit pour calibrer le taux de hasard et l'intensité. Ainsi, nous obtenons les probabilités de défaut sur différentes périodes.

Nous supposons que les temps de défaut et la valeur du portefeuille de crédit sont indépendants. Cette hypothèse est plausible dans le cas où il n'y a pas de « *wrong-way risk* »²⁰ (qui existe dans les Credit Default Swaps et dans d'autres cas). Gregory [3] décrit l'approche suivante sous la condition d'indépendance :

$$\begin{aligned} BVA = & \mathbb{Q}(\tau_B \leq T, \tau_B < \tau_B \wedge \tau) E^Q [L_{GD(B)} VAN(\tau_B)^+] \\ & - \mathbb{Q}(\tau_A \leq T, \tau_A < \tau_A \wedge \tau) E^Q [L_{GD(A)} VAN(\tau_A)^+] \\ & + \mathbb{Q}(\tau \leq T, \tau < \tau_A \wedge \tau_B) E^Q [VAN(\tau) - R_{ec(B)} VAN(\tau_B)^+ - R_{ec(A)} VAN(\tau_A)^-] \end{aligned}$$

Nous allons donc discrétiser puis calculer la BVA en utilisant les méthodes proposées par Pykhtin et Zhu(2006), inspirées de Lomibao et Zhu (2005). Ceci, nous permettra de simuler l'équation ci-dessus. De plus, ceci permettra de mieux comprendre les équations développées par Gregory [13].

Soit $[t_0 = t, t_1, \dots, t_{m-1}, t_m = T]$,

$$\begin{aligned} BVA \approx & \sum_{i=1}^m \mathbb{Q}(\tau_B \in [t_{i-1}, t_i], \tau_B > t_i, \tau_A > t_i) E^Q [L_{GD(B)} V(\tau_B, T)^+] \\ & - \sum_{i=1}^m \mathbb{Q}(\tau_A \in [t_{i-1}, t_i], \tau_B > t_i, \tau_A > t_i) E^Q [L_{GD(A)} V(\tau_A, T)^+] \\ & + \sum_{i=1}^m \mathbb{Q}(\tau \in [t_{i-1}, t_i], \tau_B > t_i, \tau_A > t_i) E^Q [V(\tau, T) - R_{ec(B)} V(\tau_B, T)^+ - R_{ec(A)} V(\tau_A, T)^-] \end{aligned}$$

Nous supposons que la contrepartie « A » et « B » ont des probabilités de défaut corrélé selon une copule gaussienne²¹, de paramètre ρ . A partir de ces hypothèses les probabilités ci-dessus peuvent être calculées de la manière suivante :

²⁰ « *wrong-way risk* » : une corrélation défavorable entre les facteurs de risque et la solvabilité de la contrepartie

²¹ Voir en annexe

$$\begin{aligned}
& \mathbb{Q}(\tau_B \in [t_{i-1}, t_i], \tau_B > t_i, \tau_A > t_i) \\
&= \mathbb{Q}(\tau_B > t_{i-1}, \tau > t_i, \tau_A > t_i) - \mathbb{Q}(\tau_B > t_i, \tau > t_i, \tau_A > t_i) \\
&\approx [\phi_{2d}(\phi^{-1}(\mathbb{Q}(\tau_B > t_{i-1})), \phi^{-1}(\mathbb{Q}(\tau_A > t_i)); \rho) - \phi_{2d}(\phi^{-1}(\mathbb{Q}(\tau_B > t_i)), \phi^{-1}(\mathbb{Q}(\tau_A > t_i)); \rho)] \mathbb{Q}(\tau_B > t_i)
\end{aligned}$$

Où $\phi(\cdot)$ et $\phi_{2d}(\cdot)$ représente respectivement la fonction de répartition d'une loi normale univariée et bivariée.

Nous utiliserons une représentation simple comme suggérée par Lomibao et Zhu [4] de $V(s, t)$ telle que :

$$V(s, t) = \mu(s - t) + \sigma\sqrt{s - t}Z$$

avec Z une loi normale centrée réduite,

μ le rendement,

σ la volatilité.

Les hypothèses précédentes permettent de calculer l'espérance qui nous intéresse de manière simple.

$$E \left[V(s, t)^+ \right] = \mu s \Phi \left(\frac{+\mu s}{\sigma} \right) + \sigma \varphi \left(\frac{+\mu s}{\sigma} \right)$$

Où ϕ la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite,

φ est la distribution d'une loi normale centrée réduite.

Ces constituants sont connus comme l'Expected Positive Exposure (EPE) et l'Expected Negative Exposure (ENE). Pour l'exemple, nous prendrons les données arbitraires suivantes

- 1 : $\mu = -1.2\%$, $\sigma = 7\%$, $\lambda_B = 2.2\%$, $\lambda_A = 4.2\%$.
- 2 : $\mu = +1.2\%$, $\sigma = 7\%$, $\lambda_B = 4.2\%$, $\lambda_A = 2.2\%$.

Nous allons considérer les trois mesures de CVA. Nous supposons qu'il n'y a pas de corrélation ni de probabilité de défaut jointe :

$$\rho = \lambda = 0.$$

| | cas 1 | cas 2 |
|-----------------------|------------|------------|
| CVA unilatéral | 0,05987834 | 1,32620771 |
| Bilateral | -0,0548882 | 0,61570584 |

Figure 2 : Tableau donnant les valeurs de CVA bilatéral et unilatéral pour le cas 1 et le cas 2 avec les formules précédentes d'évaluation.

Le cas numéro 1 représente une situation où la CVA bilatérale est négative, qui est due à une probabilité de défaut de la contrepartie « A » plus importante. Ainsi, il y a une forte probabilité qu'elle doive de l'argent sur le contrat (exposition négative due à $\mu = -1.2\%$). Le cas 2 est l'opposé avec une CVA bilatérale positive. Nous avons donc mis en évidence le caractère de changement de signe de la CVA selon la probabilité de défaut.

3. Evaluation de la CVA de produits nettés ou collatéralisés

Nous avons vu précédemment dans la première partie que la majorité des dérivés ont des clauses particulières permettant de réduire le risque de contrepartie. Cependant, ces clauses complexifient particulièrement l'évaluation de la CVA.

a) Formule du CVA avec un collatéral

On considère l'influence du collatéral sur la formule standard d'évaluation de la CVA. L'impact s'effectue seulement sur l'Expected Exposure. Par exemple, nous avons pu voir précédemment que les accords de netting changent l'exposition à une contrepartie. Ainsi, la formule de la CVA avec un collatéral reste la même, cependant il faut évaluer l'exposition selon les accords entre les deux contreparties.

L'impact d'un collatéral peut réduire la CVA par 5 dans le meilleur des cas et d'environ de moitié dans la majorité des cas quand il y a un montant minimum de transfert et un seuil. Ces deux clauses ont pour effet d'augmenter la CVA par rapport à un collatéral simple avec juste une fréquence de paiement.

| Clauses du collatéral | CVA |
|---|------------------|
| Marge ajustée hebdomadaire | 51 000€ |
| + Montant de transfert minimum de 500 000€ | 69 000€ |
| + Seuil de 1 000 000€ | 157 000€ |
| Pas de collatéral | 279 000 € |

Figure 3 : Comparatif de la CVA pour un portefeuille de Swap au sein de la CDC avec différentes clauses de collatéral avec une contrepartie.

b) Formule du CVA avec un accord de netting

Pour considérer l'impact du netting et le changement de CVA d'un portefeuille, nous regardons l'ajout d'un trade au portefeuille. Nous reprendrons les notations de Gregory [13] pour exprimer la CVA du portefeuille.

Nous prenons un ensemble de trades nettés avec une contrepartie et nous ajoutons un nouveau trade i . Le risque de contrepartie ne change pas à l'instant initial d'après la définition des accords de netting. Ainsi,

$$V(\text{portefeuille} + i) = V(\text{portefeuille})$$

D'où

$$V(\text{portefeuille} + i) - CVA(\text{portefeuille} + i) = V(\text{portefeuille}) - CVA(\text{portefeuille})$$

Où $V(\text{portefeuille})$ est la valeur sans risque de défaut du portefeuille avec la contrepartie et $V(\text{portefeuille} + i)$ la valeur sans risque de défaut du portefeuille avec le nouveau deal. Comme la valeur sans risque de défaut est linéaire, nous avons :

$$V(i) = CVA(\text{portefeuille} + i) - CVA(\text{portefeuille}) = \Delta CVA$$

Ainsi, la valeur sans risque de défaut doit compenser le changement en CVA ajouté par le risque de contrepartie du deal. Le changement en CVA devrait impacter le P&L de l'opération.

Pour *pricer* une nouvelle opération en considérant l'impact du *netting*, on doit donc calculer le changement en CVA. Comme dans le cas du collatéral, cela dépend seulement de l'EE, ce qui nous donne :

$$\Delta CVA = (1 - R) \sum_{i=1}^m P(0, t_i) \Delta EE(t_i) PD_{t_{j-1}, t_j}$$

Où ΔEE représente le changement à chaque point de l'Expected Exposure à cause du nouveau deal.

Les calculs de CVA sous les accords de netting font appel à des simulations de MonteCarlo pour l'ensemble des expositions et pour trouver le delta d'Expected Exposure.

Nous avons présenté les propriétés des accords de netting, ce qui nous permet maintenant de comprendre que la CVA en présence de netting sera inférieure à la CVA sans ces accords car l'exposition diminue. Par exemple, une institution avec un portefeuille d'opérations sous un accord de netting pourra largement offrir des meilleures conditions pour une nouvelle opération à la même contrepartie.

II. Swap et Swaption

1. Swap

Un swap de taux d'intérêt est un contrat d'échange entre deux parties. Le principe du contrat est que chaque contrepartie s'engage à verser ou percevoir des taux d'intérêt de manière périodique, les versements sont effectués sous forme de coupons dont le montant est calculé à partir d'un montant appelé notionnel fixé tout au long de la vie du contrat. L'échéancier du contrat ainsi que les flux sont fixés lors de la conclusion du contrat. Il faut noter aussi que les échéanciers des deux jambes peuvent être différents.

L'origine des swaps découle des prêts parallèles : un montage financier qui apparaît en 1970 entre des sociétés anglaises et américaines dans le but de contourner les limitations liées au contrôle du change pour le financement de leurs filiales à l'étranger.

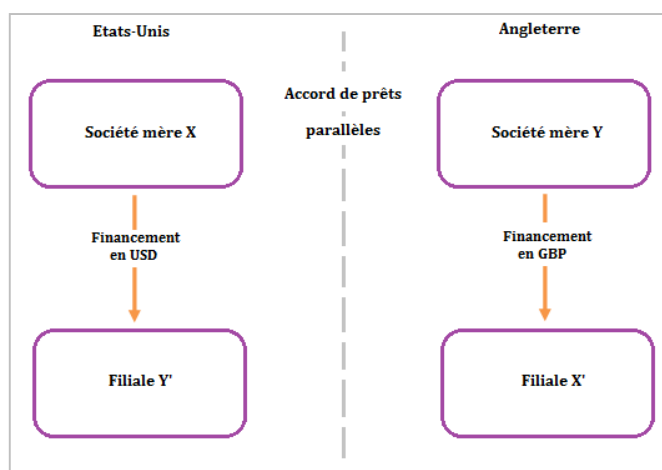


Figure 1: Exemple d'accord de prêts parallèles

Aujourd'hui, le marché de swap est très sophistiqué et les avantages de cette structure ont entraîné le développement de plusieurs types de swaps : premièrement les swaps de devises, puis les swaps de taux et les basis swaps et enfin les swaps d'indice et de matières premières.

À partir de l'année 1981, ce marché a connu un véritable engouement et accroissement de la demande. Plusieurs causes sont à l'origine de ce développement. Parmi elles on peut citer :

- Un environnement international caractérisé par une internationalisation des marchés, un développement des marchés obligataires et une nécessité d'une gestion du risque de taux et de change.
- La simplicité et la liquidité de tels produits.

Ces facteurs réunis expliquent la progression hors du commun de l'encours du swap.

Les swaps de devises ont été les premières opérations de ce type à apparaître, évolution directe des prêts parallèles. Puis, le marché a connu un développement colossal des swaps de taux qui répondaient à un besoin domestique de plus en plus croissant en matière de « *risk management* » et de couvertures d'opérations obligataires.

Le swap de taux a de nombreuses utilisations pour les acteurs du marché financier, il peut servir par exemple à répliquer un emprunt fixe. C'est-à-dire qu'il permet à des sociétés qui ont un accès difficile²² au marché du taux fixe de se financer au taux fixe en contractant ce type de swap.

Définition :

On appelle contrat de swap standard ou « plain vanilla » un contrat dans lequel les parties s'échangent un taux fixe contre un taux Euribor.

L'échéancier de cette opération est construit à partir des données suivantes :

- La durée totale du swap.
- La convention pour les jours fériés.
- Les périodes d'intérêt de chacune des deux jambes.

La première étape consiste à déterminer la date de fin théorique du swap ainsi que la date de fin théorique des coupons. Une fois que ces dates théoriques sont déterminées, elles seront décalées pour tenir compte des jours fériés. Le schéma ci-dessous illustre un swap standard.

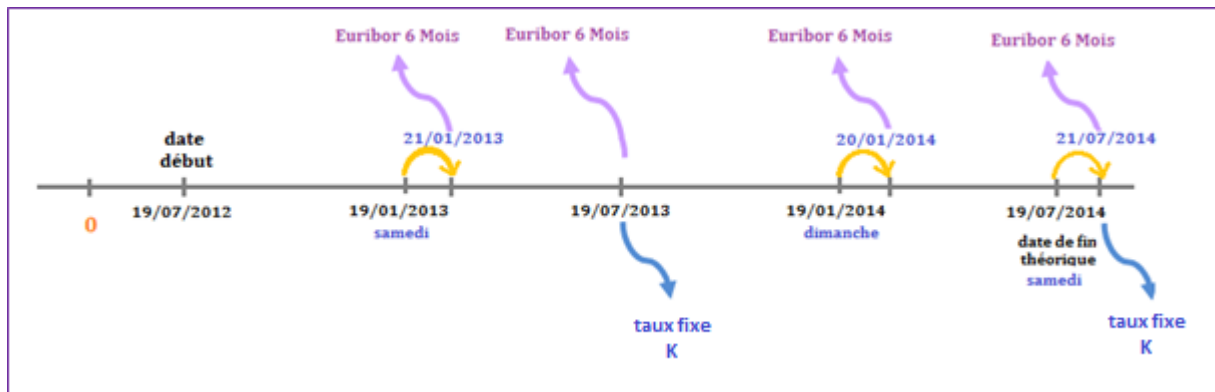


Figure 3: Exemple d'échéancier d'un swap standard de maturité 2 ans

Le pricing d'un swap standard consiste à :

- Déterminer une courbe des taux zéro-coupon pour l'actualisation.
- Calculer, pour chaque jambe du swap à **Pricer**, la somme des valeurs actuelles de l'ensemble des flux futurs.
- Ecrire qu'en l'absence d'opportunité d'arbitrage, les deux jambes du swap ont des valeurs actuelles égales.
- Et enfin, en déduire le taux fixe du swap à **Pricer**.

²² Ceci peut être dû à leur faible surface financière ou à un mauvais *rating*.

Supposons que nous souhaitons évaluer à la date d'aujourd'hui t la valeur d'un swap de maturité $T_q - T_p$. Pour cela nous considérons un swap qui commence à la date T_p et qui prend échéance à la date T_q .

Pour cela nous allons commencer par l'évaluation de chacune des deux jambes du swap.

Selon l'échéancier $\{T_p, T_{p+1}, \dots, T_q\}$ les flux sont les suivants :

- Le receveur du swap verse un taux fixe $K\delta_i$ en T_{i+1} pour $i \in \{p, \dots, q-1\}$
- Quant à lui, le payeur du swap verse en T_{i+1} le taux Euribor : en $F(T_i, T_i, T_{i+1})\delta_i$

La jambe payeuse du swap est équivalente sur la période $[T_i, T_{i+1}]$ à acheter $P(t, T_i)$ et vendre $P(t, T_{i+1})$, arrivé en T_i on place l'argent que l'on vient de recevoir au taux $F(T_i, T_i, T_{i+1})$ sur cette période, arrivé à l'échéance on reçoit $F(T_i, T_i, T_{i+1})\delta_i$ que l'on utilise pour payer le swap et 1€ que l'on utilise pour rembourser la vente de $P(t, T_{i+1})$. Cette stratégie nous permet de déterminer la valeur de la jambe payeuse :

$$V_{swap}^{Payeuse}(t) = \sum_{i=p}^{q-1} [P(t, T_i) - P(t, T_{i+1})]$$

La valeur de la jambe receveuse est égale à :

$$V_{swap}^{Receveuse}(t) = \sum_{i=p}^{q-1} K\delta_i P(t, T_{i+1}) = K \cdot A_{p,q}(t)$$

$$\text{Où } A_{p,q}(t) = \sum_{i=p}^{q-1} \delta_i P(t, T_{i+1}), \text{ appelé niveau du swap}$$

L'absence d'opportunité d'arbitrage nous permet de conclure que la valeur du taux swap K qui rend équitable le contrat est donnée par la formule suivante :

$$S_{p,q}(t) := \frac{P(t, T_p) - P(t, T_q)}{A_{p,q}(t)}$$

2. Swaption

Sur le marché, il y a une deuxième classe d'actifs dérivés sur les taux d'intérêt : les options sur les swaps, appelées swaptions. Il y a deux types de swaptions : payeur et receveur.

Une option européenne sur un swap payeur donne le droit (et non l'obligation) d'entrer dans un swap payeur à une maturité donnée. Usuellement la maturité de l'option correspond avec une date de fixing du taux flottant du swap sous-jacent. Le tenor de la swaption correspond au delta de temps des fixings du taux flottant à la maturité du swap sous-jacent. Parfois, l'ensemble des dates pour les fixings du taux flottant et les paiements du taux fixe, est appelé la structure des tenors.

Nous pouvons écrire le payoff d'une swaption payeur en considérant la valeur du sous-jacent payeur du swap à la première date de fixing du taux flottant, qui est aussi la maturité de la swaption, avec un strike K .

$$N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(T_\alpha, T_i) \tau_i (F(T_\alpha, T_{i-1}, T_i) - K)$$

L'option sera exercée seulement si la valeur est positive à la maturité. Nous obtenons le payoff de la swaption à la maturité T_α tel que :

$$ND(t, T_\alpha) \left(\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(T_\alpha, T_i) \tau_i (F(T_\alpha, T_{i-1}, T_i) - K) \right)^+$$

Les pratiques de marché pour évaluer les swaptions est d'utiliser la formule de Black. Ainsi, pour une swaption payeur à l'instant zéro on a :

$$\mathbf{PS}^{Black}(0, N, K, \sigma_{\alpha, \beta}) = NBl(K, S_{\alpha, \beta}(0), \sigma_{\alpha, \beta} \sqrt{T_\alpha}, 1) \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} (T_{i+1} - T_i) P(0, T_i)$$

Avec,

$$Bl(K, F, v, w) = Fw\phi(wd_1(K, F, v)) - Kw\phi(wd_2(K, F, v))$$

$$d_1(K, F, v) = \frac{\ln\left(\frac{F}{K}\right) + \frac{v^2}{2}}{v}$$

$$d_2(K, F, v) = \frac{\ln\left(\frac{F}{K}\right) - \frac{v^2}{2}}{v}$$

Où $\sigma_{\alpha, \beta}$ est la volatilité sur le marché et ϕ la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite.

Une formule similaire est utilisée par la swaption receveuse, qui donne le droit de payer le taux flottant à la maturité.

$$\mathbf{RS}^{Black}(0, N, K, \sigma_{\alpha, \beta}) = NBl(K, S_{\alpha, \beta}(0), \sigma_{\alpha, \beta} \sqrt{T_\alpha} - 1) \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} (T_{i+1} - T_i) P(0, T_i)$$

Un exemple de la volatilité des swaption At-The-Market(ATM).

| Swap Tenor 03/07/2014 à 16:51 | | | | | | | | | | | | | | |
|-------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Expiry | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
| 0,08 | 84,20% | 48,10% | 47,90% | 49,50% | 45,20% | 39,50% | 35,40% | 32,30% | 30,50% | 29,20% | 22,10% | 20,10% | 19,40% | 19,20% |
| 0,17 | 77,50% | 47,90% | 48,10% | 49,60% | 45,90% | 41,00% | 36,30% | 32,90% | 30,70% | 29,40% | 22,30% | 20,30% | 19,50% | 19,30% |
| 0,25 | 87,70% | 49,30% | 51,40% | 50,20% | 46,60% | 41,10% | 36,90% | 33,90% | 31,90% | 30,30% | 23,40% | 21,00% | 20,30% | 20,10% |
| 0,5 | 86,60% | 49,40% | 50,50% | 49,00% | 46,30% | 40,90% | 36,70% | 34,00% | 31,90% | 30,30% | 23,40% | 20,90% | 20,30% | 20,20% |
| 0,75 | 81,80% | 50,20% | 51,30% | 49,40% | 47,00% | 41,60% | 37,50% | 34,40% | 32,20% | 30,70% | 24,00% | 21,80% | 21,00% | 20,70% |
| 1 | 84,40% | 52,90% | 53,30% | 51,30% | 48,00% | 42,00% | 37,90% | 35,00% | 32,80% | 31,00% | 24,50% | 22,30% | 21,70% | 21,40% |
| 2 | 80,50% | 59,50% | 54,00% | 48,00% | 43,90% | 39,30% | 36,00% | 33,60% | 31,90% | 30,50% | 25,40% | 23,80% | 23,20% | 23,00% |
| 3 | 72,10% | 54,60% | 47,70% | 42,70% | 39,40% | 36,10% | 33,60% | 31,80% | 30,30% | 29,20% | 25,20% | 24,00% | 23,50% | 23,30% |
| 4 | 56,00% | 45,00% | 40,30% | 37,00% | 34,90% | 32,80% | 31,30% | 30,00% | 29,00% | 28,00% | 24,90% | 23,90% | 23,50% | 23,40% |
| 5 | 44,30% | 37,50% | 34,70% | 32,80% | 31,50% | 30,20% | 29,10% | 28,30% | 27,60% | 27,00% | 24,60% | 23,80% | 23,50% | 23,20% |
| 6 | 36,90% | 32,30% | 30,50% | 29,50% | 28,70% | 27,80% | 27,10% | 26,60% | 26,20% | 25,80% | 23,80% | 23,10% | 22,60% | 22,30% |
| 7 | 32,30% | 29,10% | 28,20% | 27,40% | 26,80% | 26,20% | 25,80% | 25,40% | 25,10% | 24,80% | 23,20% | 22,50% | 22,10% | 21,60% |
| 8 | 29,10% | 27,00% | 26,30% | 25,90% | 25,50% | 25,00% | 24,80% | 24,50% | 24,30% | 24,20% | 22,70% | 22,10% | 21,60% | 21,00% |
| 9 | 27,20% | 25,60% | 25,10% | 24,90% | 24,70% | 24,40% | 24,20% | 24,00% | 23,90% | 23,80% | 22,40% | 21,70% | 21,20% | 20,60% |
| 10 | 25,90% | 24,70% | 24,40% | 24,30% | 24,20% | 24,00% | 23,80% | 23,70% | 23,70% | 23,60% | 22,10% | 21,30% | 20,70% | 20,00% |
| 15 | 23,20% | 23,00% | 23,10% | 23,30% | 23,50% | 23,40% | 23,30% | 23,20% | 23,20% | 23,00% | 21,20% | 19,80% | 18,80% | 18,10% |
| 20 | 23,40% | 23,20% | 23,30% | 23,50% | 23,80% | 23,70% | 23,60% | 23,40% | 23,20% | 22,80% | 20,40% | 18,20% | 17,40% | 16,60% |
| 25 | 23,30% | 23,10% | 23,40% | 23,60% | 23,70% | 23,30% | 23,00% | 22,60% | 22,20% | 21,80% | 19,00% | 17,10% | 16,30% | 15,40% |
| 30 | 22,80% | 22,00% | 22,00% | 21,90% | 21,80% | 21,40% | 21,00% | 20,70% | 20,40% | 20,00% | 17,60% | 16,00% | 15,10% | 14,10% |

Figure 4 : Volatilité des swaptions au 3 juillet 2014 sous le modèle ICAP.

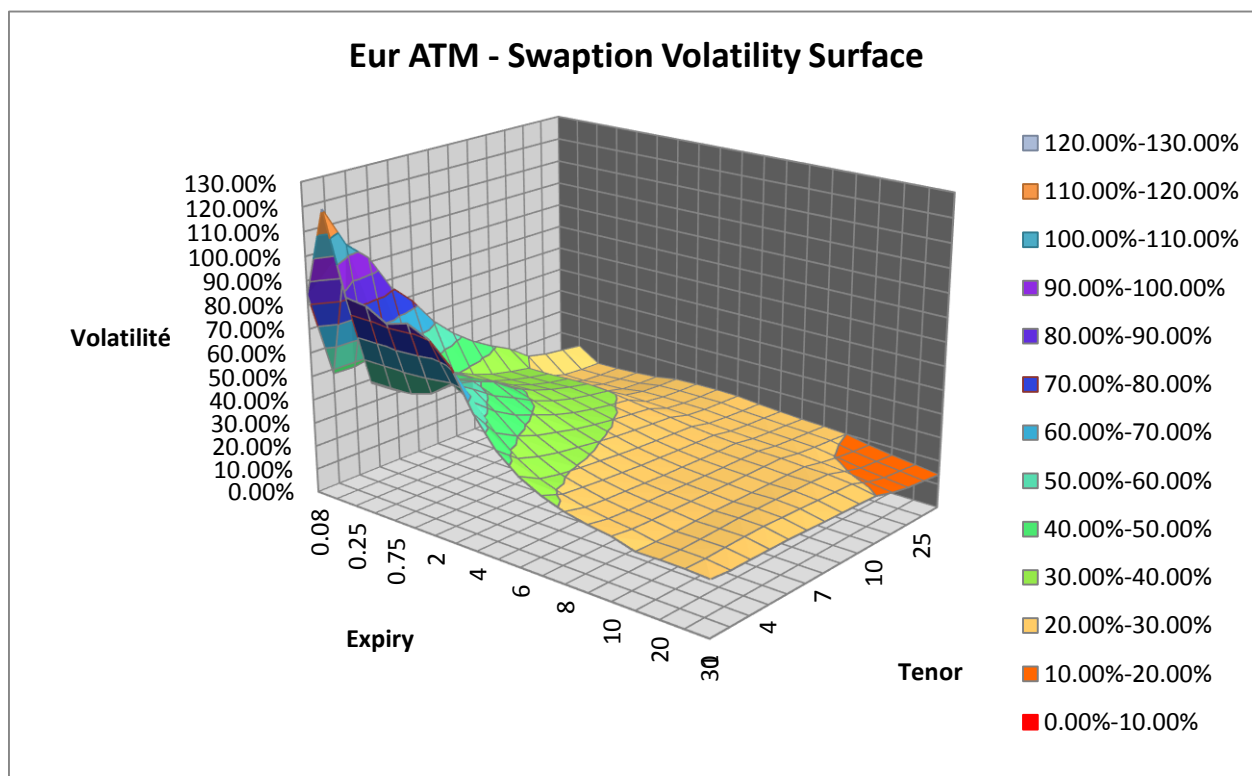


Figure 5 : Volatilité des swaptions au 3 juillet 2014 sous le modèle ICAP.

3. CVA/DVA pour les swaps sur taux d'intérêt

Le calcul de la CVA pour des swaps demande plus de finesse. La différence fondamentale entre le calcul de la CVA pour les swaps et pour les obligations se trouve dans le fait qu'un swap peut-être actif ou passif. Une fois que les probabilités de défaut sont connues et que le taux de recouvrement est défini, nous sommes en mesure de calculer les ajustements de crédit pour un produit. Nous nous intéressons ici aux ajustements sur les swaps. Nous avons défini la Credit Valuation Adjustment comme :

$$CVA_{unilatéral} = L_{GD} E_t [1_{\{\tau \leq T\}} D(t, \tau) (VAN(\tau))^+]$$

Pour calculer la CVA d'un swap, nous avons deux possibilités :

- Une approche à partir d'une formule fermée grâce aux swaptions.
- Une approche par simulation de Monte Carlo

a) L'approche par une formule fermée

Le calcul de la CVA pour des swaps lorsque nous ignorons le « wrong-way risk »²³ peut être approximé comme une somme de swaptions ajustés aux probabilités de survie, comme le précise [12]. La formule présentée par Sorensen & Bollier est de la forme :

$$CVA \approx (1 - R) \sum_{i=0}^{n-1} (S(T_i - t) - S(T_{i+1} - t)) V(t, T_{i+1}, T)$$

Où R est le taux de recouvrement du swap,

n est le nombre de paiement du swap,

$S(T_i - t)$ sont les probabilités de survie dans l'environnement risque-neutre,

$V(t, T_{i+1}, T)$ est le prix de la swaption avec une expiration T_{i+1} sur l'option et une maturité sur le swap T.

Nous allons considérer un swap vanille entre la France et la Deutsche Bank, qui n'est pas collatéralisé. Le notionnel est de 10 000 000 €, le Tenor est de 10 ans. La date de *trade* sera considérée comme le 18 juin 2014, avec une date de maturité le 18 juillet 2024. La France est en mesure d'émettre ce jour à Euribor6M+20bp, ce qui donne un taux fixe de swap de 1,6142%.

²³ « wrong-way risk » une corrélation défavorable entre les facteurs de risque et la solvabilité de la contrepartie

Evaluation du risque de contrepartie – Crédit Valuation Adjustment

A partir de la formule de Black, nous sommes en mesure d'évaluer le swaption de maturité 1 an comme expliqué dans la partie précédente. L'évaluation à partir des CDS de la Deutsche Bank nous permet de présenter les probabilités de défaut suivantes :

| | 6M | 1Y | 2Y | 3Y | 4Y | 5Y | 7Y | 10Y |
|-----------------------|------|------|------|----|------|------|-------|-------|
| Probabilité de Défaut | 0,25 | 0,54 | 1,55 | 3 | 4,82 | 7,02 | 12,07 | 15,66 |

Tableau 1 : Probabilités de défaut au 18 juin 2014 de la Deutsche Bank

| Dates | Jambe fixe | | | Jambe variable | | | Net Cash Flows probable |
|------------|---------------|--------|-----------------|---------------------|--------------|-----------------|-------------------------|
| | Cash Flows | Taux | Amortissement | Cash Flows probable | Taux forward | Amortissement | |
| 18-déc-15 | 0,00 € | 0,000% | - € | 26 230,00 € | 0,516% | - € | 26 230,00 € |
| 18-juin-15 | -161 418,34 € | 1,614% | - € | 24 177,23 € | 0,478% | - € | 137 241,11 € |
| 18-déc-15 | 0,00 € | 0,000% | - € | 24 384,71 € | 0,480% | - € | 24 384,71 € |
| 20-juin-16 | -162 315,11 € | 1,614% | - € | 27 525,49 € | 0,536% | - € | 134 789,62 € |
| 19-déc-16 | 0,00 € | 0,000% | - € | 33 387,68 € | 0,660% | - € | 33 387,68 € |
| 19-juin-17 | -160 969,95 € | 1,614% | - € | 37 434,99 € | 0,741% | - € | 123 534,96 € |
| 18-déc-17 | 0,00 € | 0,000% | - € | 46 075,64 € | 0,911% | - € | 46 075,64 € |
| 18-juin-18 | -160 969,95 € | 1,614% | - € | 54 432,28 € | 1,077% | - € | 106 537,67 € |
| 18-déc-18 | 0,00 € | 0,000% | - € | 65 049,86 € | 1,280% | - € | 65 049,86 € |
| 18-juin-19 | -161 418,34 € | 1,614% | - € | 74 566,97 € | 1,475% | - € | 86 851,37 € |
| 18-déc-19 | 0,00 € | 0,000% | - € | 85 037,78 € | 1,673% | - € | 85 037,78 € |
| 18-juin-20 | -161 418,34 € | 1,614% | - € | 94 873,66 € | 1,866% | - € | 66 544,68 € |
| 18-déc-20 | 0,00 € | 0,000% | - € | 105 857,08 € | 2,082% | - € | 105 857,08 € |
| 18-juin-21 | -161 418,34 € | 1,614% | - € | 114 702,60 € | 2,269% | - € | 46 715,74 € |
| 20-déc-21 | 0,00 € | 0,000% | - € | 124 121,45 € | 2,415% | - € | 124 121,45 € |
| 20-juin-22 | -162 315,11 € | 1,614% | - € | 129 223,34 € | 2,556% | - € | 33 091,76 € |
| 19-déc-22 | 0,00 € | 0,000% | - € | 135 039,87 € | 2,671% | - € | 135 039,87 € |
| 19-juin-23 | -160 969,95 € | 1,614% | - € | 140 244,32 € | 2,774% | - € | 20 725,63 € |
| 18-déc-23 | 0,00 € | 0,000% | - € | 143 611,55 € | 2,841% | - € | 143 611,55 € |
| 18-juin-24 | -160 969,95 € | 1,614% | 10 000 000,00 € | 147 796,96 € | 2,908% | 10 000 000,00 € | 13 173,00 € |

Tableau 2 : Flux financiers probables du Swap pour les deux contreparties.

Nous avons considéré que la probabilité de défaut de la France est de 0,35 à un an, cette hypothèse vient de la probabilité de défaut implicite des CDS que nous trouvons sur le marché.

La Credit Valuation Adjustment sur la contrepartie de la Deutsche Bank au 18 juin 2014.

| Start Date | Probabilité de défaut | Swaptions | Volatilité | Strike | CVA |
|------------|-----------------------|--------------|------------|--------|----------|
| 18-juin-15 | 0,22 | 255 802,45 € | 34,71% | 1,6142 | 37220,06 |

Tableau 3 : CVA pour le swap précédent.

La Debit Valuation Adjustment sur la contrepartie de la France au 18 juin 2014.

| Start Date | Probabilité de défaut | Swaptions | Volatilité | Strike | DVA |
|------------|-----------------------|--------------|------------|--------|----------|
| 18-juin-15 | 0,35 | 132 672,59 € | 34,71% | 1,6142 | 10373,07 |

Tableau 4 : DVA pour le swap précédent.

Ainsi, pour un swap nous pouvons considérer les résultats suivants :

| | CVA | DVA | Bilateral |
|----------------------------|---------------|-------------|---------------|
| Credit Adjustment: | 37 213,13 € | 10 373,07 € | 26 840,06 € |
| Global VAN | 15 096,16 € | 15 096,16 € | 15 096,16 € |
| Credit-Adjusted VAN | - 22 116,96 € | 25 469,23 € | - 11 743,89 € |
| CVA/Notionnel (bp) | 37,21 | 10,37 | 26,82 |

Tableau 5 : Récapitulatif du risque de contrepartie pour le swap précédent.

b) L'approche par une formule semi-analytique

Les banques utilisent en pratique les simulations de Monte Carlo pour obtenir la distribution des expositions à une contrepartie. A partir de ces simulations, les banques sont en mesure de calculer la CVA pour une contrepartie.

La CVA unilatérale peut s'écrire de différentes manières. Nous souhaitons faire apparaître l'*Expected Exposure (EE)* dans le calcul de la CVA pour pouvoir simuler des conditions de marchés et donc approcher le calcul de la CVA grâce à des simulations de Monte Carlo.

La CVA unilatérale en fonction de l'EE est obtenue à partir de la formule générale telle que

$$CVA = (1 - R) * \int_0^T dP(t) * E[D(t) * E(t) | \tau = t]$$

Où, $E[D(t)E(t) | \tau = t]$ est l'*Expected Exposure (EE)* actualisée sous la probabilité risque-neutre à l'instant t, conditionnellement à un défaut à l'instant t.

Ainsi,

$$CVA = (1 - R) * \sum_{j=1}^m B(t_j) EE(t_j) PD_j$$

La DVA unilatérale est donnée en fonction de la NEE par :

$$DVA = (1 - R) * \sum_{j=1}^m B(t_j) NEE(t_j) PD_j$$

$NEE(t_j)$ est la Negative Expected Exposure pour les dates futures.

Ainsi, l'approche par simulation revient à simuler un nombre important de Market-to-Future pour le swap puis à les agréger. [4] explique les différentes manières de simuler les « *Potential Future Exposure (PFE)* », qui est un percentile (typiquement 95% ou 99 %) de la distribution des expositions à n'importe quelle date future. Ainsi, ils développent les principes inhérents à Bâle II et aux modèles internes dans les mesures d'« *Expected Exposure (EE)* » et d'« *Expected Positive Exposure (EPE)* » requis dans les calculs de capital réglementaire.

Nous nous placerons sous les hypothèses de l'annexe 4 (Evaluation de l'exposition sous l'hypothèse de distribution normale), ainsi l'EE est donnée par :

$$EE(t) = \mu(T - t)\sqrt{t}\phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) + \sigma(T - t)\sqrt{t}\varphi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)$$

Où ϕ est la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite et φ est la distribution d'une loi normale centrée réduite.

Nous devons donc caractériser l'espérance et la volatilité du modèle pour un swap de taux. L'espérance sera le Mark-to-Market du swap et la volatilité sera celle de la swaption correspondante.

Prenons donc l'exemple précédent pour illustrer les propos ci-dessus. Dans un premier temps, nous allons calculer l'Expected Exposure pour le Swap 10Y entre la Deutsche Bank et la France, à partir de la formule précédente :

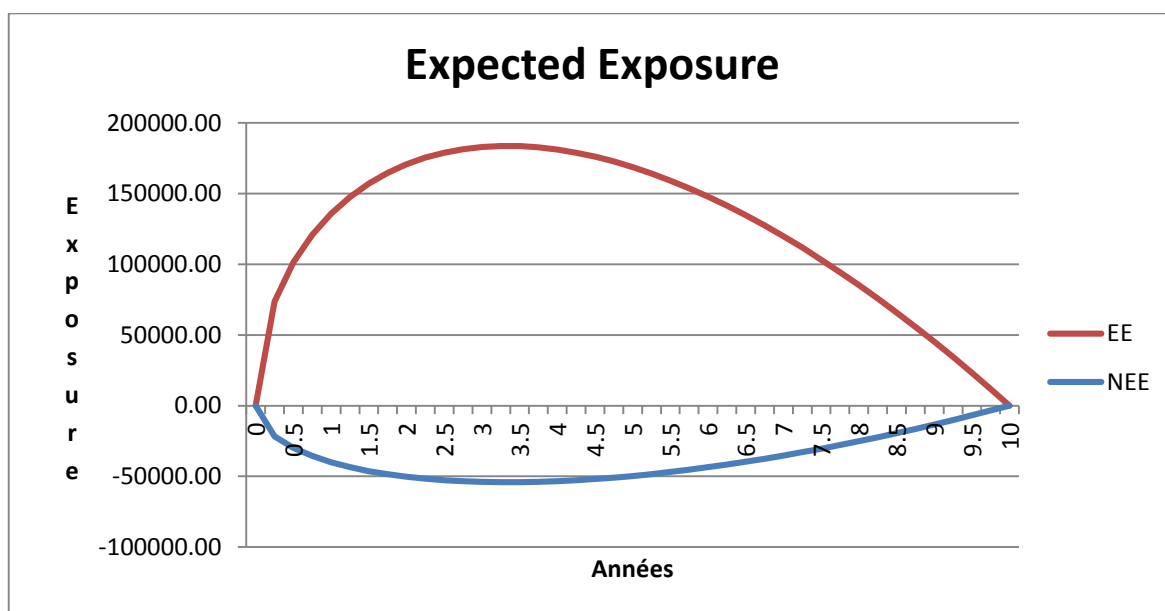


Figure 6 : Expected Exposure pour le swap précédent.

| CVA Swap Deutsche Bank 10Y | | | | | |
|----------------------------|-----------|-----|-----------------|-----------------------|-----------|
| Temps | EE | LGD | Discount Factor | Probabilité de Défaut | CVA |
| 0 | 0,00 | 60% | 1 | 0 | 0,00 |
| 0,25 | 73593,78 | 60% | 0,999289503 | 0,25% | 11031,22 |
| 0,5 | 101408,67 | 60% | 0,998481654 | 0,25% | 15188,20 |
| 0,75 | 120931,34 | 60% | 0,997796681 | 0,25% | 18099,73 |
| 1 | 135865,44 | 60% | 0,997037397 | 0,54% | 43889,99 |
| 1,25 | 147682,67 | 60% | 0,996407718 | 0,54% | 47677,30 |
| 1,5 | 157156,03 | 60% | 0,995511603 | 0,54% | 50690,01 |
| 1,75 | 164755,33 | 60% | 0,994622759 | 0,54% | 53093,68 |
| 2 | 170793,55 | 60% | 0,993707879 | 1,55% | 157838,58 |
| 2,25 | 175492,86 | 60% | 0,992642698 | 1,55% | 162007,59 |
| 2,5 | 179018,44 | 60% | 0,991424481 | 1,55% | 165059,43 |

| | | | | | |
|------|-----------|-----|-------------|--------|-----------|
| 2,75 | 181497,58 | 60% | 0,990048101 | 1,55% | 167112,94 |
| 3 | 183031,21 | 60% | 0,988519411 | 3,0% | 325673,83 |
| 3,25 | 183701,18 | 60% | 0,986837148 | 3,0% | 326309,67 |
| 3,5 | 183575,14 | 60% | 0,984986838 | 3,0% | 325474,37 |
| 3,75 | 182709,93 | 60% | 0,982953219 | 3,0% | 323271,56 |
| 4 | 181153,92 | 60% | 0,980724201 | 4,8% | 513798,60 |
| 4,25 | 178948,80 | 60% | 0,978287925 | 4,8% | 506283,51 |
| 4,5 | 176130,85 | 60% | 0,975615232 | 4,8% | 496949,54 |
| 4,75 | 172731,92 | 60% | 0,972742867 | 4,8% | 485924,66 |
| 5 | 168780,20 | 60% | 0,969664639 | 7% | 689336,73 |
| 5,25 | 164300,83 | 60% | 0,966328926 | 7% | 668733,52 |
| 5,5 | 159316,35 | 60% | 0,962766373 | 7% | 646055,20 |
| 5,75 | 153847,11 | 60% | 0,958993003 | 7% | 621431,33 |
| 6 | 147911,56 | 60% | 0,955022862 | 7% | 594982,56 |
| 6,25 | 141526,50 | 60% | 0,950831181 | 7% | 566799,61 |
| 6,5 | 134707,33 | 60% | 0,946439245 | 7% | 536997,56 |
| 6,75 | 127468,17 | 60% | 0,941922763 | 7% | 505714,48 |
| 7 | 119822,06 | 60% | 0,937203348 | 12,07% | 813259,45 |
| 7,25 | 111781,05 | 60% | 0,932307111 | 12,07% | 754719,73 |
| 7,5 | 103356,34 | 60% | 0,927200915 | 12,07% | 694016,03 |
| 7,75 | 94558,34 | 60% | 0,922148044 | 12,07% | 631479,17 |
| 8 | 85396,78 | 60% | 0,916889789 | 12,07% | 567044,49 |
| 8,25 | 75880,73 | 60% | 0,909863862 | 12,07% | 499995,91 |
| 8,5 | 66018,74 | 60% | 0,903167726 | 12,07% | 431811,44 |
| 8,75 | 55818,80 | 60% | 0,899016764 | 12,07% | 363418,34 |
| 9 | 45288,48 | 60% | 0,894885054 | 12,07% | 293503,66 |
| 9,25 | 34434,88 | 60% | 0,888029344 | 12,07% | 221454,47 |
| 9,5 | 23264,75 | 60% | 0,880762297 | 12,07% | 148393,72 |
| 9,75 | 11784,44 | 60% | 0,875872471 | 12,07% | 74749,48 |
| 10 | 0,00 | 60% | 0,872048707 | 15,66% | 0,00 |

Tableau 6 : Résultats de la CVA pour le swap précédent.

| DVA Swap Deutsche Bank 10Y | | | | | |
|----------------------------|-----------|-----|-----------------|-----------------------|-----------|
| Temps | NEE | LGD | Discount Factor | Probabilité de Défaut | DVA |
| 0 | 0,00 | 60% | 1 | 0 | 0,00 |
| 0,25 | -21679,73 | 60% | 0,999286754 | 0,35% | -4549,50 |
| 0,5 | -29873,31 | 60% | 0,998481654 | 0,35% | -6263,87 |
| 0,75 | -35624,20 | 60% | 0,997818383 | 0,35% | -7464,76 |
| 1 | -40023,40 | 60% | 0,997057338 | 0,40% | -9577,35 |
| 1,25 | -43504,46 | 60% | 0,996445084 | 0,40% | -10403,95 |
| 1,5 | -46295,06 | 60% | 0,995541469 | 0,40% | -11061,28 |
| 1,75 | -48533,61 | 60% | 0,994627981 | 0,40% | -11585,49 |
| 2 | -50312,31 | 60% | 0,993688005 | 0,59% | -17698,14 |
| 2,25 | -51696,59 | 60% | 0,992613664 | 0,59% | -18165,42 |
| 2,5 | -52735,12 | 60% | 0,991399696 | 0,59% | -18507,68 |
| 2,75 | -53465,40 | 60% | 0,990034488 | 0,59% | -18738,14 |
| 3 | -53917,15 | 60% | 0,988519411 | 1,26% | -40293,40 |

Evaluation du risque de contrepartie – Crédit Valuation Adjustment

| | | | | | |
|------|-----------|-----|-------------|--------|------------|
| 3,25 | -54114,49 | 60% | 0,98684677 | 1,26% | -40372,45 |
| 3,5 | -54077,34 | 60% | 0,985000628 | 1,26% | -40269,26 |
| 3,75 | -53822,45 | 60% | 0,982967963 | 1,26% | -39996,74 |
| 4 | -53364,07 | 60% | 0,980724201 | 2,3% | -72222,89 |
| 4,25 | -52714,47 | 60% | 0,978262979 | 2,3% | -71164,69 |
| 4,5 | -51884,35 | 60% | 0,97556255 | 2,3% | -69850,67 |
| 4,75 | -50883,09 | 60% | 0,972659701 | 2,3% | -68298,86 |
| 5 | -49718,99 | 60% | 0,969567678 | 3,59% | -103835,56 |
| 5,25 | -48399,45 | 60% | 0,966227466 | 3,59% | -100731,55 |
| 5,5 | -46931,12 | 60% | 0,962681653 | 3,59% | -97317,14 |
| 5,75 | -45320,00 | 60% | 0,958921321 | 3,59% | -93609,20 |
| 6 | -43571,51 | 60% | 0,954965562 | 3,59% | -89626,41 |
| 6,25 | -41690,60 | 60% | 0,950777698 | 3,59% | -85381,32 |
| 6,5 | -39681,82 | 60% | 0,946383879 | 3,59% | -80891,82 |
| 6,75 | -37549,32 | 60% | 0,941859186 | 3,59% | -76178,72 |
| 7 | -35296,93 | 60% | 0,937137746 | 7,11% | -141111,13 |
| 7,25 | -32928,23 | 60% | 0,932232763 | 7,11% | -130952,44 |
| 7,5 | -30446,49 | 60% | 0,927131378 | 7,11% | -120420,21 |
| 7,75 | -27854,79 | 60% | 0,92207658 | 7,11% | -109569,02 |
| 8 | -25156,00 | 60% | 0,916816441 | 7,11% | -98388,60 |
| 8,25 | -22352,78 | 60% | 0,909789017 | 7,11% | -86754,71 |
| 8,5 | -19447,65 | 60% | 0,90309096 | 7,11% | -74923,75 |
| 8,75 | -16442,98 | 60% | 0,898937921 | 7,11% | -63056,67 |
| 9 | -13340,98 | 60% | 0,894804518 | 7,11% | -50925,66 |
| 9,25 | -10143,75 | 60% | 0,88794773 | 7,11% | -38424,37 |
| 9,5 | -6853,27 | 60% | 0,880678628 | 7,11% | -25747,58 |
| 9,75 | -3471,43 | 60% | 0,875784025 | 7,11% | -12969,60 |
| 10 | 0,00 | 60% | 0,871952787 | 12,53% | 0,00 |

Tableau 7 : Résultats de la DVA pour le swap précédent.

| | CVA | DVA | Bilateral |
|----------------------------|---------------|-------------|---------------|
| Credit Adjustment: | 43 891,35 € | 9 577,45 € | 34 313,90 € |
| Global VAN | 15 096,16 € | 15 096,16 € | 15 096,16 € |
| Credit-Adjusted VAN | - 28 795,19 € | 24 673,61 € | - 19 217,74 € |
| CVA/Notionnel (bp) | 43,89 | 9,57 | 34,31 |

Tableau 8 : Récapitulatif pour le swap précédent.

Nous remarquons une majoration de la CVA et une minoration de la DVA à partir de cette méthode de calcul par rapport à la méthode précédente. L'hypothèse de normalisation de l'exposition est sûrement un peu trop large pour avoir des calculs précis mais ceci permet d'avoir une idée générale de la Credit Valuation Adjustment pour un trader qui a besoin de rajouter son risque de contrepartie à une opération.

III. Credit Valuation Adjustment sous Wrong-way Risk.

Le « *wrong-way risk* » comme nous l'expliquions dans la première partie de ce mémoire indique une dépendance défavorable entre l'exposition et la qualité du risque de contrepartie. Dans cette partie, nous introduirons le « *wrong-way risk* », cependant nous avons peu d'informations pour faire une application pratique. Nous invitons le lecteur à lire Brigo et Mercurio [1] et Gregory [13].

1. Introduction

La qualité de crédit de la contrepartie est évaluée à partir de sa probabilité de défaut, cependant cette qualité peut être dépendante des conditions de marchés et alors un *wrong-way risk* apparaît. Nous avons exprimé précédemment la formule de la Credit Valuation Adjustment permettant l'évaluation du risque de contrepartie qui est l'exposition multipliée par la probabilité de défaut et le « Loss Given Default ».

Dans les paragraphes précédents, nous avons pu mettre en évidence cette équation car on supposait l'indépendance sous la probabilité risque-neutre. Cette hypothèse devient fausse lorsqu'on suppose une dépendance entre la qualité de crédit et l'exposition. Il est difficile d'identifier cette dépendance et de la quantifier, il demande une bonne connaissance de ses contreparties pour pouvoir identifier des liens entre la qualité de crédit et l'exposition.

Exemple :

- Une institution fait un cross-currency swap entre l'euro et le yen avec une contrepartie. L'institution identifie un lien important entre la qualité de crédit de la contrepartie et le yen (par exemple, elle est très exposée avec des dettes en yen). Ceci crée un risque car si le yen s'affaiblit alors l'exposition de la contrepartie augmente, entraînant une augmentation de la CVA. Il y a donc bien un *wrong-way risk* au sein de ce cross-currency swap.
- Quand une contrepartie achète une protection sur un contrat CDS, l'exposition représente le spread de crédit de l'entreprise sous-jacente. Un *wrong-way risk* apparaît lorsqu'il existe une forte dépendance entre la contrepartie et l'entreprise sous-jacente au CDS.

Ainsi, la présence d'un *wrong-way risk* augmente la CVA. Cependant, cette augmentation est difficile à quantifier comme nous l'avons vu précédemment. De plus, si on intègre une dépendance entre les paramètres, la formule présentée au début de cette partie n'est plus valable, il va falloir évaluer l'exposition sous l'hypothèse que la qualité du crédit est influencée par des facteurs exogènes. Il y a donc deux moyens présentés par [13] pour évaluer la CVA en présence de *wrong-way risk* :

- Considérer l'exposition et le défaut de la contrepartie ensemble et quantifier leur dépendance économique. Cette méthode possède comme inconvénient d'avoir un biais important sur la quantification de la dépendance économique.
- Incorporer une marge de chargement pour le « *wrong-way risk* » dans le calcul de l'exposition.

Il est intéressant d'observer le « *wrong-way risk* » lorsqu'on étudie l'impact de celui-ci sur la CVA bilatérale. Elle est composée de deux composants comme nous l'expliquions au début de cette partie. L'influence du « *wrong-way risk* » augmente une des parties et diminue la deuxième. Nous avons mis en évidence que la BVA est donnée par :

$$BVA = L_{GD(A)} E_t \left[1_{\{\tau_A \leq \min(\tau_B, T)\}} P(t, \tau_B) \left(R_{ec(B)} (VAN(\tau_B))^+ \right) \right] \\ - L_{GD(B)} E_t \left[1_{\{\tau_B \leq \min(\tau_A, T)\}} P(t, \tau_A) \left(R_{ec(A)} (-VAN(\tau_A))^+ \right) \right]$$

Ainsi la CVA bilatérale augmentera pour la contrepartie sujette au *wrong-way risk* et diminuera pour l'autre gardant la BVA égale.

Nous allons discuter du « *wrong-way risk* » autour de l'évaluation du risque de contrepartie sur les CDSs avec l'insertion d'une copule dans l'évaluation de la probabilité de défaut. Cette copule permet l'insertion d'informations exogènes à la qualité du crédit.

2. Credit Valuation Adjustment des CDSs

Nous avons décrit les différentes caractéristiques du CDS précédemment, nous reprendrons les différentes notations explicitées. Nous rappelons que le prix du CDS sous la probabilité risque-neutre \mathbb{Q} est donné par :

$$CDS_{a,b}(0, c, R) = c \left[- \int_{T_a}^{T_b} P(0, t) (t - T_{\gamma(t)-1}) d\mathbb{Q}(\tau > t) \right. \\ \left. + \sum_{i=a+1}^b \alpha_i P(0, T_i) \mathbb{Q}(\tau > T_i) + (1 - R) \int_{T_a}^{T_b} P(0, t) d\mathbb{Q}(\tau > t) \right]$$

De plus, dans le premier paragraphe de cette partie nous avons mis en évidence que la CVA unilatéral était donnée par :

$$E_t[\Pi^D(t)] = E_t[\Pi(t)] - L_{GD} E_t \left[1_{\{\tau \leq T\}} P(t, \tau) (VAN(\tau))^+ \right]$$

D'après les approximations effectuées pour simplifier les calculs par Brigo et Mercurio [1], on a :

$$E_t[\Pi^D(t)] = E_t[\Pi(t)] - L_{GD} \sum_{i=1}^b E_t \left[1_{\{T_{j-1} \leq \tau \leq T_j\}} P(t, \tau) E_\tau[\Pi(\tau)]^+ \right] \\ \approx E_t[\Pi(t)] - L_{GD} \sum_{i=1}^b E_t \left[1_{\{T_{j-1} \leq \tau \leq T_j\}} P(t, T_j) E_\tau[\Pi(T_j)]^+ \right]$$

Ainsi,

$$E_t[CDS^D(t)] = E_t[CDS(t)] - LGD \sum_{j=1}^b E_t \left[1_{\{T_{j-1} \leq \tau \leq T_j\}} P(t, T) [CDS(T_j)]^+ \right]$$

Ce qui revient aux mêmes principes que les calculs de CVA sur les swaps en décomposant le swap avec des swaptions. On peut considérer la CVA comme une option sur CDS, cependant ce marché n'est pas liquide.

$$\text{Où, } CDS(T_j) \approx 1_{\tau_1 > T_j} CDS_{a,b}(T_j, c, R)$$

$$\begin{aligned} &= 1_{\tau_1 > T_j} \left\{ c \left[- \int_{\max\{T_a, T_j\}}^{T_b} P(0, t) (t - T_{\gamma(t)-1}) d\mathbb{Q}(\tau > t) \right] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=\max(a,j)+1}^b \alpha_i P(0, T_i) \mathbb{Q}(\tau > T_i) + (1 - R) \int_{\max\{T_a, T_j\}}^{T_b} P(0, t) d\mathbb{Q}(\tau > t) \right\} \end{aligned}$$

On définit donc le prix du CDS T_j avec risque de défaut tel que :

$$CDS^{\text{risque de défaut}}(T_j) \approx CDS_{a,b}(T_j, c, R)$$

$$\begin{aligned} &= c \left[- \int_{\max\{T_a, T_j\}}^{T_b} P(0, t) (t - T_{\gamma(t)-1}) d\mathbb{Q}(\tau > t) \right] \\ &\quad + \sum_{i=\max(a,j)+1}^b \alpha_i P(0, T_i) \mathbb{Q}(\tau > T_i) + (1 - R) \int_{\max\{T_a, T_j\}}^{T_b} P(0, t) d\mathbb{Q}(\tau > t) \end{aligned}$$

Nous avons vu précédemment que la CVA en T_j pour un CDS est donnée par :

$$\begin{aligned} CVA(T_j) &= LGD * E_t \left[1_{\{T_{j-1} \leq \tau \leq T_j\}} P(0, T_j) E_{\tau_1} [\Pi(T_j)]^+ \right] \\ &= E_t \left[1_{\{T_{j-1} \leq \tau \leq T_j\}} 1_{\tau_1 > T_j} P(0, T_j) \left[CDS^{\text{risque de défaut}}(T_j) \right]^+ \right] \\ &= E_t \left[E_t \left[1_{\{T_{j-1} \leq \tau \leq T_j\}} 1_{\tau_1 > T_j} P(0, T_j) \left[CDS^{\text{risque de défaut}}(T_j) \right]^+ \middle| \mathcal{F}_{T_j} \right] \right] \\ &= E_t \left[P(0, T_j) E_t \left[1_{\{T_{j-1} \leq \tau \leq T_j\}} 1_{\tau_1 > T_j} \middle| \mathcal{F}_{T_j} \right] E_t \left[\left[CDS^{\text{risque de défaut}}(T_j) \right]^+ \middle| \mathcal{F}_{T_j} \right] \right] \end{aligned}$$

Nous étudierons dans un premier temps le premier élément de la CVA et voir comment nous pouvons le calculer.

$$\begin{aligned} E_t \left[1_{\{T_{j-1} \leq \tau \leq T_j\}} 1_{\tau_1 > T_j} \middle| \mathcal{F}_{T_j} \right] &= \mathbb{Q}(T_{j-1} \leq \tau \leq T_j \cap \tau_1 > T_j \middle| \mathcal{F}_{T_j}) \\ &\quad + \mathbb{Q}(T_{j-1} \leq \tau \leq T_j \middle| \mathcal{F}_{T_j}) - \mathbb{Q}(T_{j-1} \leq \tau \leq T_j \cap \tau_1 < T_j \middle| \mathcal{F}_{T_j}) \end{aligned}$$

Nous introduisons une copule pour calculer la formule précédente, le lecteur trouvera plus d'informations en annexe. L'introduction d'une copule permet une évaluation de paramètres exogènes dans la qualité du crédit.

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} E_t \left[1_{\{T_{j-1} \leq \tau \leq T_j\}} 1_{\tau_1 > T_j} | \mathcal{F}_{T_j} \right] &= e^{-\Lambda_2(T_{j-1})} - e^{-\Lambda(T_j)} \\ &\quad + C(1 - e^{-\Lambda_1(T_j)}, 1 - e^{-\Lambda_2(T_{j-1})}) - C(1 - e^{-\Lambda_1(T_j)}, 1 - e^{-\Lambda_2(T_j)}) \end{aligned}$$

Où C est une copule gaussienne.

Lorsqu'on concatène les résultats précédemment, nous trouvons

$$\begin{aligned} CVA(T_j) &= E_t \left[\left[CDS^{risque\ de\ défaut}(T_j) \right]^+ | \mathcal{F}_{T_j} \right] \\ &\quad * \left[e^{-\Lambda_2(T_{j-1})} - e^{-\Lambda(T_j)} + C(1 - e^{-\Lambda_1(T_j)}, 1 - e^{-\Lambda_2(T_{j-1})}) - C(1 - e^{-\Lambda_1(T_j)}, 1 - e^{-\Lambda_2(T_j)}) \right] \end{aligned}$$

La grande difficulté qui se pose dans l'évaluation du CDS est d'évaluer la probabilité de survie de la contrepartie 1 en intégrant la probabilité de survie de la contrepartie 2 sous la filtration \mathcal{F}_{T_j} .

Brigo et Mercurio [1] propose donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(\tau_1 \geq t | \mathcal{F}_{T_j}) &= E \left[1_{\{T_{j-1} \leq \tau_2 \leq T_j\}} 1_{\tau_1 > t} | \mathcal{F}_{T_j} \right] = E \left[1_{\{T_{j-1} \leq \tau_2 \leq T_j\}} 1_{\tau_1 > t} 1_{\tau_1 > T_j} | \mathcal{F}_{T_j} \right] \\ &= E \left[1_{\tau_1 > t} | \mathcal{F}_{T_j}, \{T_{j-1} \leq \tau_2 \leq T_j\}, \tau_1 > T_j \right] \\ &= \frac{\mathbb{Q}(\tau_1 > t, T_{j-1} \leq \tau_2 \leq T_j | \mathcal{F}_{T_j})}{\mathbb{Q}(\tau_1 > T_j, T_{j-1} \leq \tau_2 \leq T_j | \mathcal{F}_{T_j})} \\ &= \frac{\mathbb{Q}(U_1 > 1 - e^{-\Lambda_1(t)}, 1 - e^{-\Lambda_2(T_{j-1})} \leq U_2 \leq 1 - e^{-\Lambda_2(T_j)} | \mathcal{F}_{T_j})}{\mathbb{Q}(U_1 > 1 - e^{-\Lambda_1(T_j)}, 1 - e^{-\Lambda_2(T_{j-1})} \leq U_2 \leq 1 - e^{-\Lambda_2(T_j)} | \mathcal{F}_{T_j})} \\ &= \frac{e^{-\Lambda_2(T_{j-1})} - e^{-\Lambda_2(T_j)} + E[C(1 - e^{-\Lambda_1(t)}, e^{-\Lambda_2(T_{j-1})}) - C(1 - e^{-\Lambda_1(t)}, e^{-\Lambda_2(T_{j-1})})]}{e^{-\Lambda_2(T_{j-1})} - e^{-\Lambda_2(T_j)} + E[C(1 - e^{-\Lambda_1(T_j)}, e^{-\Lambda_2(T_{j-1})}) - C(1 - e^{-\Lambda_1(T_j)}, e^{-\Lambda_2(T_{j-1})})]} \end{aligned}$$

IV. Hedging de la Credit Valuation Adjustment

1. Introduction

Nous avons pu montrer dans la première partie l'impact de la CVA sur les résultats causés par la réglementation IFRS 13 et par l'obligation d'inscrire la CVA/DVA sur les comptes. Les banques se sont alors munies de « *desk* » spécialisés dans l'évaluation de la CVA/DVA et de son *hedging*. Le sujet du *hedging* de la CVA est un sujet très large car il y a de nombreux paramètres liés entre eux et c'est difficile d'*hedger* correctement.

Supposons que la CVA du swap précédent qui est de 44 bp pour la contrepartie avec Deutsche Bank. De plus, la maturité du swap est d'environ 9,2 ans, ainsi une CVA de 4% est provisionnée pour absorber les futures pertes sur le swap. En réalité, si la contrepartie ne fait pas défaut alors la perte sera nulle cependant si elle fait défaut alors le montant est certainement supérieure à 4%. Par conséquent, les provisions doivent être soit plus importantes soit plus faibles.

Il y a deux solutions aux problèmes ci-dessus :

- Les provisions de 4% sont statiques et donc ne représentent pas exactement les pertes possibles sur ce deal. Cependant, dans un contexte de portefeuille avec un book de nombreuses lignes on a une mutualisation.
- Les provisions de 4% représentent le coût du *hedging* et seront utilisées pour *hedger* les risques de contrepartie si la contrepartie effectue un défaut ou non.

Les obligations peuvent être *hedgées* en utilisant des CDS. Ainsi, si un gérant a une position de 100M€, il peut *hedger* le risque de crédit en achetant pour la même quantité de protection sur un CDS de la référence de l'émetteur. Un potentiel défaut de l'émetteur sera compensé par le *payoff* du CDS pour la valeur faciale de l'obligation moins le taux de recouvrement s'il y a un événement de crédit.

| | En cas de défaut | Sans défaut |
|------------|---------------------|-------------|
| Obligation | Recouvrement | Pair |
| CDS | Pair - Recouvrement | - |
| Total | Pair | Pair |

Tableau 1 : *Hedging* statique d'une obligation

Dans la réalité, il est très difficile d'avoir un *hedge* aussi parfait car différents paramètres rentrent en compte comme le recouvrement qui peut être différent entre celui de l'obligation et du

CDS. De plus, on peut faire un deal au-dessus ou en-dessous du pair, alors que le CDS sera fixé sur la valeur fixe du nominal. Ainsi, si le *hedge* du CDS est égal au pair de l'obligation et que l'obligation se traite au-dessus du pair alors le *hedge* réalise une perte. Nous comprenons donc qu'il est impossible d'avoir un *hedge* statique parfait.

Maintenant, on peut supposer que le risque de crédit est *hedgé* de façon dynamique. Cependant, la duration de l'obligation et du CDS n'est pas la même à cause de la différence dans le spread de crédit. Ainsi, si l'émetteur fait défaut avant que le *hedge* soit ajusté, il apparaît une perte car le nominal de la protection sera trop petit pour *hedger* le risque de défaut. Aujourd'hui, les dates de paiements des CDSs sont égales ce qui permet de faciliter le *hedge*.

De plus, il faut prendre en compte dans certains cas le « *wrong-way risk* » au sein des CDSs, on souligne donc la difficulté d'*hedger* le risque de contrepartie d'une simple obligation. Le *hedging* devient encore plus compliqué pour les produits dérivés ayant une exposition volatile.

2. Le *hedging* de la CVA en pratique

Il est primordial pour bien *hedger* le risque de contrepartie de comprendre les composants internes à la CVA et aux deals. Nous avons pu les voir dans les parties précédentes mais nous allons les rappeler rapidement :

- La probabilité de défaut, elle peut être *hedger* à partir des CDSs.
- Le taux de recouvrement.
- L'exposition (toutes les variables qui ont un impact sur l'exposition doivent être *hedgées*). Si une institution financière devait *hedger* ses swaps, il y aurait le risque de taux d'intérêt et la volatilité du taux d'intérêt à *hedger*.
- Dépendance, « *wrong-way risk* ». L'ensemble des liens au sein des produits doivent être *hedgés*. Il faut réussir à les isoler et à les comprendre pour réussir un *hedge* efficace d'une transaction.
- La structure de la transaction doit être connue pour pouvoir *hedger* au mieux la CVA.

Par conséquent, toute transaction OTC comme un *cross-currency swap* aura de nombreux termes de CVA à *hedger*. Par conséquent, un portefeuille de positions aura un nombre important de termes à *hedger*. Il est donc important de comprendre les termes ayant un impact significatif sur les variations de la CVA pour réussir à avoir un *hedging* efficace.

De même qu'un *hedging* d'une option européenne sur action, nous devons développer des outils simples pour calculer les grecques. Les grecques²⁴ en finance sont la pierre angulaire de tout *hedging*, nous allons ici présenter un calcul des grecques pour la CVA de produits dérivés comme les *swaps*. Premièrement, nous allons lier la CVA aux CDSs pour avoir une équation simple permettant de calculer les grecques et de nous donner un indicateur.

Rappelons les différentes équations précédentes, nous avons donc :

²⁴ Voir annexe

$$\begin{aligned}
CVA &= (1 - R) * \int_0^T dP(t) * E[D(t) * E(t)|\tau = t] \\
&= (1 - R)E \left[\int_0^T P(0, u) EE(u, T) dS(t, u) \right] \\
&= (1 - R)E \left[\int_0^T P(0, u) dS(t, u) \right] EPE
\end{aligned}$$

Or,

$$CDS_{default} = (1 - R) E \left[\int_0^T P(0, u) dS(t, u) \right]$$

Par conséquent, on a :

$$CVA = CDS_{default} * EPE$$

Pour avoir quelque chose de plus maniable et de plus pratique à hedger on exprime la CVA en proportion de la première jambe du CDS en divisant par le montant de cette jambe.

$$\frac{CVA}{CDS_{prime}} = X^{CDS} * EPE$$

Ce résultat nous donne la CVA comme un spread par année en fonction de la prime du CDS et de l'EPE (*Expected Positive Exposure*).

Nous allons donc maintenant calculer les grecques de la CVA. On peut écrire le changement en valeur de la CVA de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\Delta CVA &= EPE \left[\frac{\partial X^{CDS} * CDS_{prime}}{\partial h} \Delta h + \frac{\partial X^{CDS} * CDS_{prime}}{\partial R} \Delta R + \frac{\partial X^{CDS} * CDS_{prime}}{\partial r} \Delta r \right] \\
&+ X^{CDS} * CDS_{prime} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial EPE}{\partial x_i} \Delta x_i \right] + \dots
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial X^{CDS} * CDS_{prime}}{\partial h} \text{ est la sensibilité au taux de hasard.}$$

$$\frac{\partial X^{CDS} * CDS_{prime}}{\partial R} \text{ est la sensibilité au taux de recouvrement.}$$

$$\frac{\partial X^{CDS} * CDS_{prime}}{\partial r} \text{ est la sensibilité au taux d'intérêt.}$$

$\frac{\partial EPE}{\partial x_i}$ est la sensibilité de l'EPE à l'ième facteur de risque.

Les deux premiers termes peuvent être *hedgé* grâce à un CDS. La sensibilité au taux d'intérêt est faible et peut-être combiné avec un *hedge* de l'EPE. Finalement, tous les facteurs de risque de l'EPE doivent être *hedger*.

V. Credit Valuation Adjustment – Sensibilité sous Bâle III

1. Introduction

Depuis les années 2007-2009, le risque de contrepartie est devenu un enjeu et un challenge pour les institutions financières. La crise a prouvé des erreurs dans la gestion du risque de contrepartie. Ainsi, le régulateur a souhaité capturer ce risque et sa volatilité en construisant un réseau de mesure. La gestion de ce risque passe par des marges de capital et de solvabilité. Ces marges devraient alors être capable d'absorber un choc et des pertes en cas de défaut d'une contrepartie ou de plusieurs d'entre elles.

Bâle III propose deux méthodes d'évaluation de la CVA comme nous l'avons précisé précédemment : l'approche standard et l'approche par modèle interne.

Dans cette partie, nous discuterons de l'approche standard car nous avons pu discuter de l'approche par un modèle interne précédemment. Je tiens à préciser une nouvelle fois que le risque de contrepartie diffère du risque de crédit. Le risque de crédit concerne les instruments classiques alors que le risque de contrepartie touche les dérivés OTC où le calcul de l'exposition est difficile à calculer. De plus, ce risque est bilatéral comme nous avons pu le définir précédemment par la DVA.

Lors d'une crise, nous avons des périodes d'extrêmes volatilités. Comme les dérivés OTC sont évalués en *fair value*. La volatilité des marchés influence la valeur des dérivés où une variation importante peut-être observée (Les CDS grecques durant la crise souveraine en Europe). En effet, comme les spreads de crédit augmentent drastiquement et que la liquidité diminue alors les banques doivent faire face à des pertes significatives sur leurs dérivés OTC. De plus, ces pertes ont un potentiel risque d'être systémique ce qui a alarmé le régulateur.

Ainsi, nous nous efforcerons dans cette partie d'évaluer la sensibilité de la CVA par la formule standard, pour les différents paramètres. Cette analyse nous permettra de mieux appréhender le risque de contrepartie et d'avoir une vue plus précise des différentes interactions. Cette analyse sera effectuée avec la formule standard.

2. La sensibilité de la CVA sous Bâle III

Nous avons défini la formule standard sous Bâle III dans la première partie, nous la rappelons rapidement ici pour faciliter la lecture.

$$K_{CVA} = 2.33\sqrt{h} \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n 0.5w_i(M_i EAD_i^{total} - M_i^{hedge} B_i) - \sum_{ind} w_{ind} M_{ind} B_{ind} \right)^2 + \sum_{i=1}^n 0.75w_i^2 (M_i EAD_i^{total} - M_i^{hedge} B_i)^2}$$

où

- h est l'horizon de risque (en années), $h=1$.
- w_i est le poids applicable à la contrepartie « i ». La contrepartie « i » doit être évalué sur son rating externe (si disponible).
- M_i est la maturité restante des transactions avec la contrepartie « i ».
- EAD_i^{total} est l'exposition au défaut de la contrepartie « i », incluant les effets de collatéral.
- M_i^{hedge} est la maturité restante du *hedging* d'un nominal B_i .
- B_i est le notionnel d'un *single name CDS*.
- w_{ind} est le poids applicable à l'*index hedges*.
- M_{ind} est la maturité restante de l'*index hedges*.
- B_{ind} est le notionnel total de l'ensemble des *index CDS* achetés pour *hedger* la position.

Nous allons donc rappeler la CVA pour un *swap* vanille avec la formule standard. Nous supposons que la valeur de marché (MV) est nulle (hypothèses habituelles dans la création d'un nouveau contrat de Swap) et que le notionnel s'élève à 1 million. Dans ce scénario, la valeur de marché est l'évaluation du *swap* vanille sans le risque de contrepartie. Nous supposons une maturité d'un an sur le swap.

L'exposition de la banque est supérieure à zéro, alors nous sommes en mesure d'appliquer l'approche CEM (*Current Exposure Method*, introduit dans la première partie) en retenant un add-on de 0,5% du notionnel. Puis, nous supposons que la qualité du crédit de notre contrepartie est BB, ce qui nous amène à avoir un coefficient de crédit à 0.02 dans les tables de Bâle III. Ainsi, nous pouvons calculer la CVA du Swap vanille par la formule standard.

$$Exposure\ at\ Default\ (EAD) = MV + add-on = 0 + 1\ 000\ 000 * 0,5\% = 5\ 000\ €$$

$$CVA = 2.33 * w * EAD = 2.33 * 0.02 * 5\ 000 = 233\ €$$

Par conséquent, en appliquant la méthode standard à Bâle III pour ce Swap vanille avec les paramètres supposés au-dessus, la CVA est égale à 233 € représentant le coût en capital réglementaire pour ce risque spécifique.

| | Add-on pour le CEM / type de produits | | |
|-------------------|---------------------------------------|----------|---------|
| Maturité restante | Taux d'intérêt | FX et Or | Actions |
| < 1 an | 0,00% | 1,00% | 6,00% |
| 1-5 ans | 0,50% | 5,00% | 8,00% |
| > 5 ans | 1,50% | 7,50% | 10,00% |

Tableau 1 : Add-on pour la méthode CEM selon les produits

Les études de sensibilités suivantes s'inspirent de Fares et Genest (2013) [37].

a) La sensibilité de la CVA aux ratings des contreparties

La CVA est fortement corrélée à la probabilité de défaut. Sous Bâle III, on accorde une probabilité de défaut selon le rating de la contrepartie. Il est donc intéressant d'analyser la corrélation de la CVA sous la formule standard avec des ratings différents. On appliquera donc la formule standard aux différents cas suivants.

| | Sensibilité de la CVA aux ratings | | | |
|-------------------------|-----------------------------------|----------|----------|------------|
| | Cas 1 | Cas 2 | Cas 3 | Cas 4 |
| Nombre de contreparties | 2 | 2 | 2 | 2 |
| Maturité (années) | 5 | 5 | 5 | 5 |
| Rating contrepartie 1 | 10% (CCC) | 2% (BB) | 0,8% (A) | 0,8% (A) |
| Rating contrepartie 2 | 1% (BBB) | 1% (BBB) | 1% (BBB) | 0,7% (AAA) |
| EAD par contrepartie | 50 | 50 | 50 | 50 |
| EAD portefeuille | 100 | 100 | 100 | 100 |
| CVA portefeuille | 59,97 | 14,27 | 8,32 | 6,92 |

Tableau 2 : Illustration de la sensibilité de la CVA aux ratings, paramètres de calcul

Ainsi, lorsque les ratings se dégradent le risque de contrepartie augmente. Nous allons l'illustrer à partir du graphique ci-dessous.

Cette hypothèse vient du fait que lorsque les contreparties ont une dégradation de leur rating, le marché considère une augmentation de leur probabilité de défaut. La qualité du rating se justifie par le travail des agences de notations sur l'ensemble des analyses fondamentales et des recherches qu'ils essaient d'agréger pour donner une note à un pays ou à une entreprise. Ce travail de notations est difficile et même si les agences de notations s'améliorent avec l'expérience, il reste une marge d'erreur.

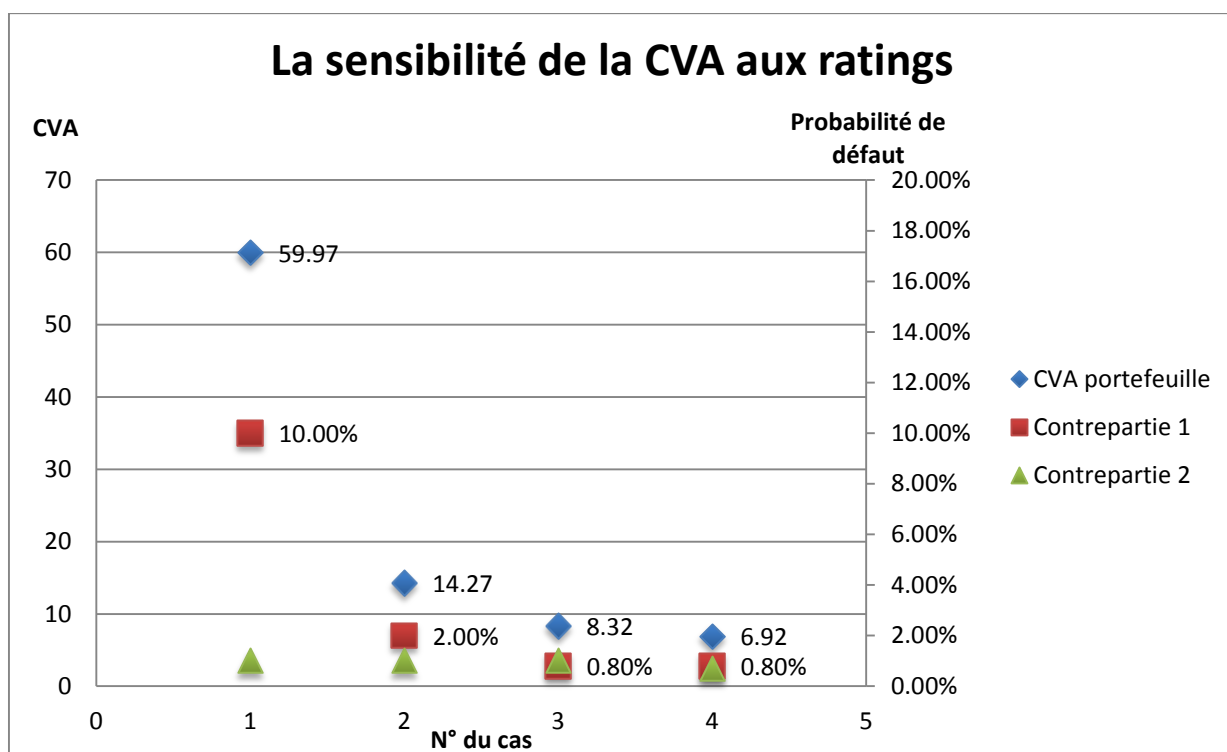


Figure 1 : Illustration de la sensibilité de la CVA par rapport à la probabilité de défaut des contreparties

b) La sensibilité de la CVA à la maturité

La CVA est fortement corrélée à la maturité des produits sous-jacents. Il est intéressant d'analyser la corrélation entre la CVA sous la formule standard et différentes maturités. Ainsi, on souligne comment une institution peut réduire sa CVA en traitant des dérivées de maturité plus faible. On applique la formule standard aux différents cas comme précédemment.

| | Sensibilité de la CVA à la maturité | | | |
|----------------------------------|-------------------------------------|----------|----------|----------|
| | Cas 1 | Cas 2 | Cas 3 | Cas 4 |
| Nombre de contreparties | 2 | 2 | 2 | 2 |
| Maturité (années) contrepartie 1 | 5 | 3 | 1 | 1 |
| Maturité (années) contrepartie 2 | 5 | 5 | 5 | 3 |
| Ratings | 1% (BBB) | 1% (BBB) | 1% (BBB) | 1% (BBB) |
| EAD par contrepartie | 50 | 50 | 50 | 50 |
| EAD portefeuille | 100 | 100 | 100 | 100 |
| CVA portefeuille | 9,21 | 7,5 | 6,22 | 3,95 |

Tableau 3 : Illustration de la sensibilité de la CVA à la maturité, paramètres de calcul

Par conséquent, lorsque la maturité augmente le risque de contrepartie augmente. On éclaire cette hypothèse en faisant un parallèle avec l'exposition. Lorsque la maturité d'un dérivé est plus importante, l'exposition augmente proportionnellement car l'acheteur de la position tient un risque plus longtemps. Nous allons l'illustrer à partir du graphique ci-dessous.

Cette hypothèse vient du fait que lorsque les transactions ont des maturités plus importantes, le marché considère une probabilité de défaut plus importante car l'exposition augmente.

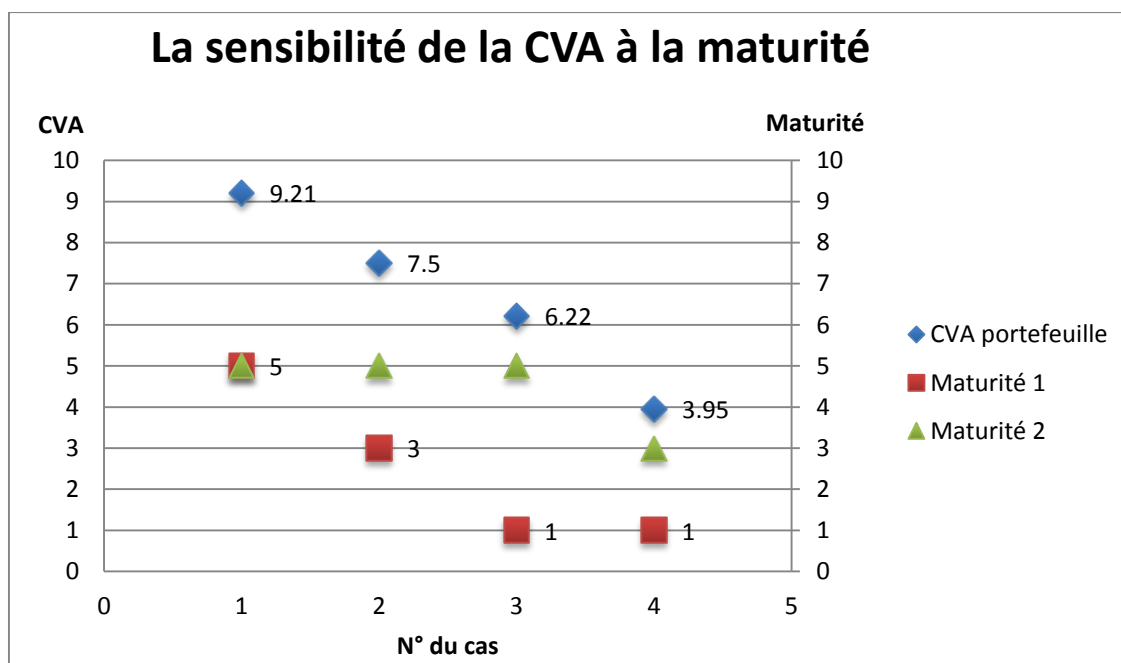


Figure 2 : Illustration de la sensibilité de la CVA par rapport aux maturités (Maturité 1 < Maturité 2)

c) La sensibilité de la CVA à la diversification de l'exposition

La CVA est dépendante de la diversification des contreparties et des expositions. Il est intéressant d'analyser l'interaction de la CVA à la diversification sous la formule standard sans influencer le rating des contreparties et la maturité. On appliquera donc la formule standard aux différents cas comme précédemment.

| | Sensibilité de la CVA à la diversification | | | |
|-------------------------|--|----------|----------|----------|
| | Cas 1 | Cas 2 | Cas 3 | Cas 4 |
| Nombre de contreparties | 5 | 5 | 5 | 5 |
| Maturité (années) | 5 | 5 | 5 | 5 |
| Ratings | 1% (BBB) | 1% (BBB) | 1% (BBB) | 1% (BBB) |
| EAD par contrepartie 1 | 90 | 75 | 60 | 20 |
| EAD par contrepartie 2 | 2,5 | 10 | 10 | 20 |
| EAD par contrepartie 3 | 2,5 | 5 | 10 | 20 |
| EAD par contrepartie 4 | 2,5 | 5 | 10 | 20 |
| EAD par contrepartie 5 | 2,5 | 5 | 10 | 20 |
| EAD portefeuille | 100 | 100 | 100 | 100 |
| CVA portefeuille | 10,80 | 9,64 | 8,64 | 7,37 |

Tableau 4 : Illustration de la sensibilité de la CVA à la diversification, paramètres de calcul

Lorsque la diversification des expositions augmente le risque de contrepartie diminue. On éclaire cette hypothèse en parlant de la concentration d'exposition à une contrepartie, lorsque nous multiplions les contreparties avec des poids d'expositions égaux nous comprenons que la probabilité de défaut sur la transaction diminue. Ainsi, le lecteur peut développer ce point en imaginant une probabilité de défaut uniforme d'une transaction liée aux contreparties. Nous allons l'illustrer à partir du graphique ci-dessous.

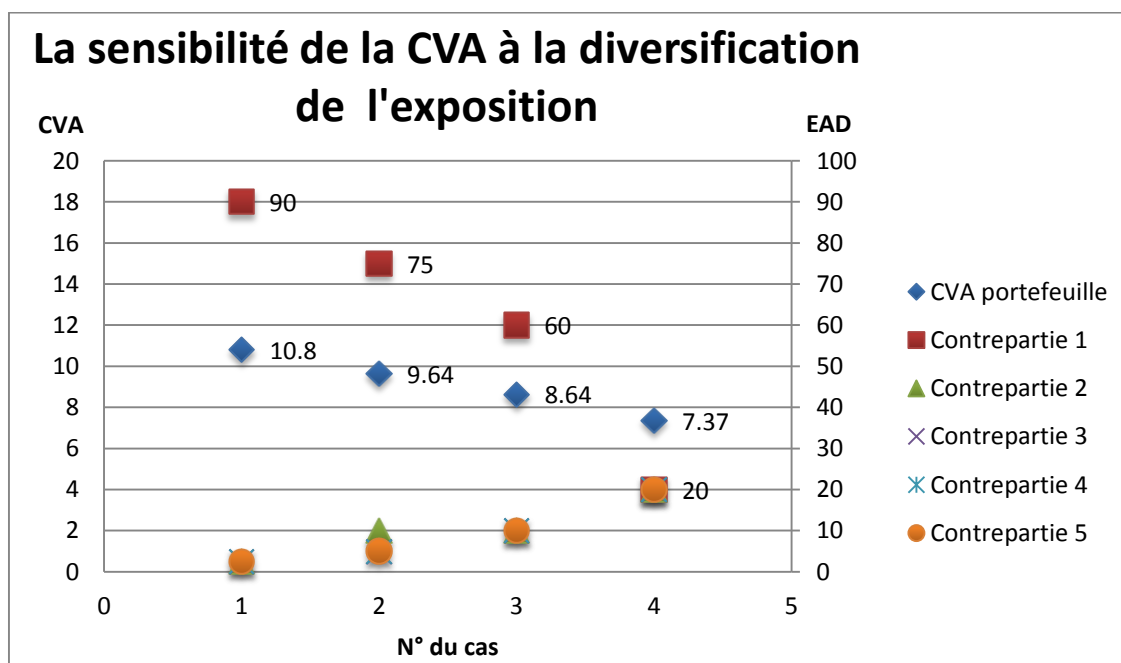


Figure 3 : Illustration de la sensibilité de la CVA par rapport à la diversification des expositions

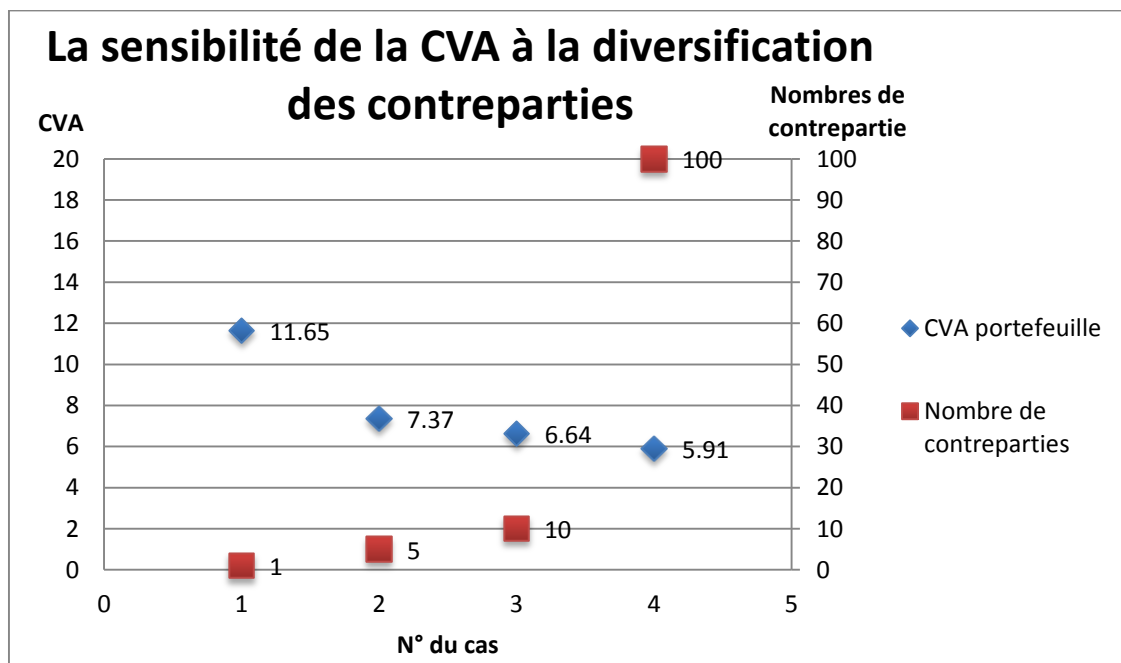
d) La sensibilité de la CVA à la diversification des contreparties

Nous allons mettre en relief la sensibilité de la CVA à la diversification des contreparties en uniformisant la valeur des expositions. Il est intéressant d'analyser l'interaction de la CVA à la diversification des contreparties sous la formule standard sans influencer le rating des contreparties et la maturité. On appliquera donc la formule standard aux différents cas comme précédemment.

| | Sensibilité de la CVA à la diversification des contreparties | | | |
|-------------------------|--|----------|----------|----------|
| | Cas 1 | Cas 2 | Cas 3 | Cas 4 |
| Nombre de contreparties | 1 | 5 | 10 | 100 |
| Maturité (années) | 5 | 5 | 5 | 5 |
| Ratings | 1% (BBB) | 1% (BBB) | 1% (BBB) | 1% (BBB) |
| EAD par contrepartie | 100 | 20 | 10 | 1 |
| EAD portefeuille | 100 | 100 | 100 | 100 |
| CVA portefeuille | 11,65 | 7,37 | 6,64 | 5,91 |

Tableau 5 : Illustration de la sensibilité de la CVA à la diversification des contreparties, paramètres de calcul

Lorsque la diversification des contreparties augmente le risque de contrepartie donc la CVA diminue. Nous allons l'illustrer à partir du graphique ci-dessous pour rendre l'hypothèse plus claire pour le lecteur.



Conclusion

Au cours de ce mémoire, nous avons été amenés dans un premier temps à définir le cadre réglementaire de notre étude. Ce préliminaire est obligatoire pour se placer dans le contexte des banques et de la Caisse des Dépôts à mesurer le risque de contrepartie et plus précisément la Credit Valuation Adjustment (CVA). Nous retenons de cette partie, l'évolution d'une réglementation fortement corrélée aux crises de crédit. De ce fait, Bâle III a introduit un système de capital réglementaire sur le risque de contrepartie pour les transactions OTC. Puis, l'entrée en vigueur de la norme IFRS 13 a amené mon équipe EMTN à se poser des questions sur la CVA d'où mon travail d'alternance et les enjeux de ce mémoire.

Ensuite, nous avons approfondi les notions sur les marchés de crédit et de taux. Dans cette partie, deux axes importants ont été discutés ; la calibration d'un modèle de taux à partir des caps à l'aide d'une méthode d'optimisation, le recuit simulé, et le calcul de la probabilité de défaut implicite accompagné d'une étude sur différentes institutions et pays. La mise en place de cet outil sur le calcul des probabilités de défaut permet d'appréhender précisément les problématiques du risque de contrepartie. Que pensent les marchés financiers du défaut de la France dans 10 ans ? Et de l'Allemagne ? À la fin de cette partie, nous serons en mesure d'évaluer des swaps et des swaptions à partir de notre modèle de taux et de calculer la CVA grâce à leur évaluation et à la probabilité de défaut.

La troisième partie est l'aboutissement de l'étude, nous avons précédemment mis en place tous les éléments permettant de calculer la CVA. Nous définirons et calculerons la Credit valuation adjustment pour les swaps à partir de notre outil d'évaluation développé pour mon équipe. Finalement, nous étudierons des sensibilités de la CVA dans le cadre de Bâle III donnant des pistes aux institutions financières pour réduire leur besoin en capital réglementaire sans couvrir directement la CVA avec des produits structurés.

Mon mémoire s'est efforcé de présenter puis d'appliquer des modèles financiers utilisés en finance. Ces modèles sont pour la plupart issus d'un objectif de contrôle des paramètres financiers mais à aucun moment nous ne remettons en cause les méthodes financières appliquées. Les institutions financières montent des équipes de traders depuis la crise de 2007-2008 pour gérer la CVA car l'influence sur leur bilan est significative. Cependant, pouvons-nous être sûrs que le risque disparaît ? La diversification est-elle suffisante entre les acteurs du marché ?

Les travaux effectués durant cette année au sein de la Caisse des Dépôts m'ont amené à écrire ce mémoire. Je suis très heureux du travail accompli avec mes collaborateurs au sein de l'équipe des financements moyens et longs termes. Je pars avec beaucoup de nostalgie et remercie encore l'ensemble des collaborateurs de la direction financière pour leur accueil.

Quatrième partie

Annexes

Annexe 1 : Les fondamentaux de pricing sur le marché obligataire (Caps et Floors)

Dans un marché théorique obligataire, il y a une liquidité absolue sur les zéro-coupons pour toutes les maturités permettant de former un marché complet. Dans un cadre de non-arbitrage, il existe une probabilité risque-neutre \mathbb{Q} sous laquelle le prix à l'instant t d'un *payoff* H_T à la maturité $T > t$ sous une filtration \mathcal{F}_t est donné par :

$$\Pi_t = E \left(e^{-\int_t^T r_s ds} H_T \middle| \mathcal{F}_t \right)$$

Comme nous sommes dans un marché complet, nous supposons l'existence d'un nombre fini de produits permettant de répliquer le produit *pricé*.

Par conséquent, le prix d'une option européenne avec une maturité T , un strike X de sous-jacent un zéro-coupon de maturité $S > T$ est donné par :

$$\mathbf{ZBC}(t, T, S, X) = E(e^{-\int_t^T r_s ds} (P(T, S) - X)^+ | \mathcal{F}_t)$$

La parité *call-put* de sous-jacent un zéro-coupon est donnée par :

$$\mathbf{ZBC}(t, T, S, X) + KP(t, T) = \mathbf{ZBP}(t, T, S, X) + P(t, S)$$

Un *cap* (respectivement un *floor*) est répliqué par un portefeuille d'options européennes de vente (*put*) ayant pour sous-jacent les zéro-coupons (respectivement par un portefeuille d'options européennes d'achat (*call*) ayant pour sous-jacent les zéro-coupons). Nous notons donc $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ la partition des dates de paiement pour les *caps/floors* et $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ la partition des temps correspondant à la différence en années entre la date de paiement d_i et la date d'accord de la transaction. De plus, on note τ_i la fraction d'année de d_{i-1} à d_i pour $i = 1 \dots n$ et N la valeur du nominal.

Le prix pour le i -ème *caplet* dans les conditions de non-arbitrage est donné par

$$\mathbf{Cpl}(t, t_{i-1}, t_i, \tau_i, N, X) = NE(e^{-\int_t^{t_{i-1}} r_s ds} (1 - (1 + X\tau_i)P(t_{i-1}, t_i))^+ | \mathcal{F}_t)$$

Ainsi,

$$\mathbf{Cpl}(t, t_{i-1}, t_i, \tau_i, N, X) = N(1 + X\tau_i)\mathbf{ZBP}(t, t_{i-1}, t_i, \frac{1}{(1 + X\tau_i)})$$

Finalement, les *caps* et les *floors* sont obtenus en sommant l'ensemble des *caplets* et des *floorlets*. Ainsi, nous obtenons :

$$\mathbf{Cap}(t, T, \tau, N, X) = \sum_{i=1}^n N(1 + X\tau_i)\mathbf{ZBP}(t, t_{i-1}, t_i, \frac{1}{(1 + X\tau_i)})$$

Pour évaluer un *cap*, une pratique de marché est d'utiliser la formule de Black. Nous observons sur les marchés une volatilité $\sigma_{\alpha, \beta}$. Le prix d'un *cap* est la somme des formules de Black, nous obtenons donc

$$\mathbf{Cap}^{\text{Black}}(0, T, \tau, N, K, \sigma_{\alpha, \beta}) = N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(0, T_i) \tau_i \text{Bl}(K, F(0, T_{i-1}, T_i), v_i, 1)$$

Avec,

$$Bl(K, F, v, w) = Fw\phi(wd_1(K, F, v)) - Kw\phi(wd_2(K, F, v))$$

$$d_1(K, F, v) = \frac{\ln\left(\frac{F}{K}\right) + \frac{v^2}{2}}{v}$$

$$d_2(K, F, v) = \frac{\ln\left(\frac{F}{K}\right) - \frac{v^2}{2}}{v}$$

$$v_i = \sigma_{\alpha, \beta} \sqrt{T_{i-1}}$$

Et ϕ la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite.

Annexe 2 : La valeur actuelle nette (VAN)

La valeur actuelle nette, ou VAN, d'un titre financier est la différence entre la valeur actuelle de ce titre et sa valeur de marché. Elle varie en sens inverse du taux d'actualisation.

La valeur actuelle nette peut également être définie pour un investissement. Elle représente alors la valeur des flux de trésorerie liés à l'investissement, actualisé au taux de rentabilité exigé par le marché compte tenu du risque de cet investissement. Elle représente donc le montant de la création de valeur anticipé sur l'investissement. D'un point de vue purement financier, un investissement peut être entrepris dès lors que sa VAN est positive, puisqu'il créera normalement de la valeur.

$$VAN = \sum_{p=0}^N \frac{CF_{flux\ de\ trésorerie}}{(1+t)^p} - I + VR$$

$CF_{flux\ de\ trésorerie}$ est les flux entrant de trésorerie

t le taux d'actualisation

p le numéro de l'annuité

N le nombre total d'annuités

I le capital investi

VR la valeur résiduelle

Exemple :

Un investissement à un prix de 50 000 € et une valeur résiduelle nulle (VR), le taux d'actualisation est de 3% et les flux de trésorerie sont positifs de 10000€. L'investissement devient intéressant à la période 5 quand la VAN devient positive.

| année | Flux de trésorerie | VAN |
|-------|--------------------|-------------|
| 0 | -50000 | -50000 |
| 1 | 9708,737864 | -40291,2621 |
| 2 | 9425,959091 | -30865,303 |
| 3 | 9151,416594 | -21713,8865 |
| 4 | 8884,870479 | -12829,016 |
| 5 | 8626,087844 | -4202,92813 |
| 6 | 8374,842567 | 4171,91444 |
| 7 | 8130,915113 | 12302,8296 |
| 8 | 7894,092343 | 20196,9219 |
| 9 | 7664,167323 | 27861,0892 |

Tableau 1 : Illustration de l'exemple

Annexe 3 : Recuit Simulé :

Cet algorithme est une méthode de recherche aléatoire des extrema globaux d'une fonction numérique bornée U définie sur un ensemble E . L'exploration aléatoire de l'espace d'état E est définie en termes de transition de probabilités Q sur E , réversible par rapport à une mesure sur E . L'algorithme de recuit simulé est un algorithme markovien non homogène. Il se présente sous la forme d'une chaîne de Markov dont le noyau de transition à chaque étape $n > 1$ dépend d'un paramètre de température $T(n)$. Au cours du temps, on fera décroître convenablement la température de sorte que l'algorithme de recherche se « gèle » sur l'un des extrema globaux de la fonction U . Par conséquent, le réglage de la décroissance de $T(n)$, lorsque n tend vers l'infini, sera inversement lié à la possibilité de déplacement de U . Ainsi, plus la température est faible, moins on peut se déplacer. Nous comprenons donc l'importance de trouver une bonne loi de décroissance pour la température permettant de ne pas rester dans un minimum local.

L'algorithme décrit ci-dessous a été celui utilisé lors de notre calibration :

- Choisir un point initial pour a et pour σ , qui a été initialement choisi suite au test.
- Evaluer la fonction objective pour les deux paramètres.
- Pour un palier de température, simuler un nombre de trajectoires fixées (1000 dans autre cas) pour a et σ à partir d'une loi normale de rendement a et σ optimaux qui sont dans la première simulation les paramètres initiaux et une déviation « $stdv$ » (égale à 0.01).
- Pour chaque trajectoire, on teste si les nouveaux paramètres sont plus optimaux dans la minimisation de la fonction objective. Si c'est vrai, on garde ces nouveaux paramètres. Si c'est faux, on garde l'ancienne solution.
- Puis on change de palier de température à partir d'une fonction (multiplication par 0.99 dans notre cas). Puis on vérifie que la température est toujours supérieure au critère d'arrêt (dans notre cas une température de 0.01 en partant d'une température de 10000)
- De plus, on modifie la déviation de la loi $stdv$ telle que $stdv = stdv * 0.99$
- Alors on recommence le nombre de simulation de trajectoire et on réévalue jusqu'à tomber sur le critère d'arrêt.

Annexe 4 : Evaluation de l'exposition sous l'hypothèse de distribution normale

On considère une distribution normale μ (espérance du sous-jacent *Market-to-Market*) et d'une variance σ (du sous-jacent *Mark-to-Market*). Sous l'hypothèse de distribution normale, la valeur *Mark-to-Market* du portefeuille en question est donnée par :

$$V = \mu + \sigma X$$

Avec X suit une loi normale centrée réduite.

- **Potential future exposure (PFE)**

Cette mesure est exactement la même que ce qui est utilisé pour les calculs de VAR. Le PFE au niveau α , exprime l'exposition sur le sous-jacent qui dépasse avec une probabilité $1-\alpha$. Pour une distribution normale, on définit le PFE :

$$PFE_{\alpha} = \mu + \sigma \phi^{-1}(\alpha)$$

Avec ϕ^{-1} la fonction de répartition inverse d'une loi normale centrée réduite.

- **Expected Exposure (EE)**

L'exposition est donné par :

$$E = \max(V, 0) = \max(\mu + \sigma X, 0)$$

L'EE définit l'espérance de l'exposition. Ainsi, nous avons :

$$EE = \int_{-\frac{\mu}{\sigma}}^{\infty} (\mu + \sigma x) \varphi(x) dx = \mu \phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) + \sigma \varphi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)$$

Où ϕ la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite et φ est la distribution d'une loi normale centrée réduite.

Annexe 5 : Introduction à la théorie des copules - copule gaussienne

Le concept de copule a été introduit par Abe Sklar en 1959, comme solution d'un problème de probabilité. Ils ont été délaissés pendant longtemps, aujourd'hui les copules sont devenues un outil de base dans la modélisation des distributions multi variées en finance.

Théorème de Sklar :

Si F est une distribution de dimension n dont les lois marginales F_1, \dots, F_n sont continues, alors il existe une copule unique telle que :

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$$

L'étude de problématique multi variée revient donc à identifier les distributions marginales, puis à analyser la structure de dépendance des marginales.

La copule gaussienne a la particularité de ne pas présenter de dépendance de queue et n'est donc pas adaptée à des valeurs extrêmes comme la plupart des copules. Cette copule est largement utilisée en Finance comme nous l'avons montré dans l'évaluation de la Credit Valuation Adjustment au sein des CDSs car elle est sous-jacente à la distribution normale multi-variée. En effet, l'utilisation d'une copule gaussienne sur un échantillon pour modéliser la dépendance est cohérente avec la mesure de cette dépendance par le coefficient de corrélation linéaire. La fonction de distribution de la copule gaussienne n -dimensionnelle, s'écrit pour tout $(u_1, \dots, u_n) \in [0,1]^n$:

$$C(u_1, \dots, u_n) = \Phi_{\Sigma}(\phi^{-1}(u_1), \dots, \phi^{-1}(u_n))$$

La fonction ϕ^{-1} est l'inverse de la distribution normale centrée réduite univariée. La fonction $\phi_{\Sigma}(x) = \frac{\exp(-\frac{1}{2}x\Sigma^{-1}x')}{(2\pi)^{n/2}\det(\Sigma)^{1/2}}$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et Σ sa matrice de variance covariance. En dérivant la formule de la copule gaussienne, on a la densité de la copule gaussienne n -variée suivante :

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{\det(\Sigma)^{1/2}} \exp(-\frac{1}{2}\beta(\Sigma^{-1} - I_n)\beta')$$

Où I_n est la matrice unité et $\beta = (\phi^{-1}(u_1), \dots, \phi^{-1}(u_n))$

Les copules fournissent un cadre d'analyse adapté à la simulation de distributions conjointes possédant une structure de dépendance donnée.

Bibliographie

- [1] BRIGO D., MERCURIO F. (2006). *Interest Rate Models –Theory and Practise*. Springer Finance.
- [2] CHERUBINI U. (2005). *Counterparty Risk in Derivatives and Collateral Policies: The Replicating Portfolio Approach*.
- [3] GREGORY J. (2009). *Being Two-Faced Over Counterparty Credit Risk?* Risk magazine.
- [4] LOMIBAO D., ZHU S. (2005) *A Conditional Valuation Approach fo Path-Dependent Instruments*. Capital Markets Risk Management Bank of America.
- [5] PYKHTIN M., ZHU S. (2006) *Measuring Counterparty Credit Risk for Trading Products under Basel II*. Risk Architecture.
- [6] FLAVELL R. (2010) *Swaps and Other Derivatives*. 2nd edition, John Wiley & Sons.
- [7] ACCENTURE (2013) *Counterparty Credit Risk and Basel III*.
- [8] PYKHTIN M., ROSEN D. (2010) *Pricing Counterparty at the Trade Level and CVA Allocations*.
- [9] CESARI G. (2010) *Modelling Counterparty Exposure and CVA, An integrated Approach*. Swissquote Conference.
- [10] CERNY J., WITZANY J. (2014) *Interest Rate Swap Credit Valuation Adjustment*. IES Working Paper.
- [11] NAUTA B.-J. (2011) *Credit Valuation Adjustment, A credit or market risk?* Vrije Universiteit Amsterdam.
- [12] SORENSEN E.H., BOLLIER T.F. (1994) *Pricing swap default risk*, *Financial Analysts Journal*, 50(3), 23-33
- [13] GREGORY J. (2010) *Counterparty Credit Risk: The new challenge for Global Financial Markets*, John Wiley & Sonos Ltd., Chichester, United Kingdom.
- [14] STEIN H.J., LEE K.P (2011) *Counterparty Valuation Adjustments in Credit Risk Frontiers : Subprime crisis, pricing and hedging, CVA, MBS, ratings and liquidity* Bloomberg.
- [15] BRIGO D., ALFONSI A. (2004) *Credit Default Swaps Calibration and Option Pricing with the SSRD Stochastic Intensity and Interest-Rate Model*, Banca IMI.
- [16] HULL J. (2009) *Options, Futures and Other Derivatives*. Pearson.
- [17] PYKHTIN M., ROSEN D. (2010) *Pricing Counterparty Risk at the Trade Level and CVA Allocations*.
- [18] CANABARRO E., DUFFIE D. (2003) *Measuring and marking counterparty risk*. Asset/Liability Management of Financial Institutions, Euromoney books.
-

- [19] BAKSHI G., MADAN D., ZHANG F. (2006) *Understanding the Role of Recovery in Default Risk Models: Empirical Comparisons and Implied Recovery Rates*.
- [20] BRIGO D., MASETTI M. (2005) *Risk Neutral Pricing of Counterparty Risk, Chapter 10. Counterparty Credit Risk Modelling: Risk Management, Pricing and Regulation*. Risk Books, Londres.
- [21] ALAVIAN S., DING J., LAUDICINA L. (2010) *Credit Valuation Adjustment*.
- [22] NAUTA B-J (2012) *The Funding Value Adjustment, Real or imaginary?* Double effect.
- [23] LU D., JUAN F. *Credit Value Adjustment and Funding Value Adjustment All together*.
- [24] BURGARD C., KJAER M. (2013) *Generalised CVA with funding and collateral via semi-replication*.
- [25] PALLAVICINI A., PERINI D., BRIGO D. (2011) *Funding Valuation Adjustment: a consistent framework including CVA,DVA, collateral, netting rules and re-hypothecation*.
- [26] LUBOCHINSKY C. (2011) *Quel credit accorder aux spreads de credit?*
- [27] GREGORY J. (2011) *Counterparty risk in credit derivative contracts*. CVA consulting 2011.
- [28] YASHKIR Y., YASHKIR O. (2013) *Credit Value Adjustment (Payoff-at-Maturity contracts, Equity Swaps, and Interest Rate Swaps)*.
- [29] WU L. (2013) *CVA and FVA to Derivatives Trades Collateralized by Cash*.
- [30] SAVICKAS V. (2011) *Fast Greeks: Case of Credit Valuation Adjustments*. Department of Mathematics Utrecht University.
- [31] GREGORY J., I. GERMAN I. (2012) *Closing out the DVA debate*.
- [32] DUFFIE D., SCHRODER M., SKIADAS C. (1996) *Recursive valuation of defaultable securities and the timing of resolution of uncertainty*.
- [32] DUFFIE D. (2004) *Credit Risk Modeling with Affine Processes*. Stanford University and Scuola Normale Superiore, Pisa.
- [33] JIWOOK J. *Credit derivatives pricing using the Cox process with shot noise intensity*.
- [34] PLANCHET F. (2010) *Dépendance stochastique Introduction à la théorie des copules*. Modèles financiers et analyses de risque dynamiques en assurance.
- [35] LIU Bo. (2013) *CVA, FVA and Counterparty Credit Risk*. Model Governance Group, J. P. Morgan Chase & Co.
- [36] PYKHTIN M., ZHU S. (2007) *A guide to modelling counterparty credit risk*. GARP Risk Review, July/August, pages 16-22.
- [37] FARES Z., GENEST B. (2013) *CVA capital charge under Basel III standardized approach An explanation document*. Global Research & Analytics dpt. Of Chappuis Hadler & Cie.
- [38] MAZARS (2013) *CVA-DVA Tour d'horiwon des methodologies de calcul*.

