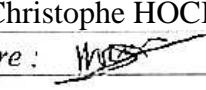
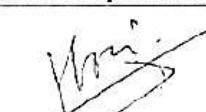
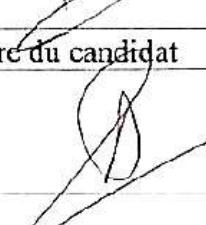


Mémoire présenté le :

**pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA
et l'admission à l'Institut des Actuaires**

Par :	Aymeric Veyron		
Titre	Éléments d'implémentation d'un modèle de CVA : Étude du modèle de taux		
Confidentialité :	<input type="checkbox"/> NON <input checked="" type="checkbox"/> OUI (Durée : <input type="checkbox"/> 1 an <input checked="" type="checkbox"/> 2 ans)		

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

<i>Membre présents du jury de l'Institut des Actuaires</i>	<i>Signature</i>	<i>Entreprise :</i>
		Nom : Murex
		<i>Signature :</i>
<i>Membres présents du jury de l'ISFA</i>		<i>Directeur de mémoire en entreprise :</i>
		Nom : Christophe HOCINE
		<i>Signature :</i> 
		<i>Invité :</i>
		Nom :
		<i>Signature :</i>
		<i>Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels (après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)</i>
		<i>Signature du responsable entreprise</i>
		
<i>Secrétariat</i>		<i>Signature du candidat</i>
		
<i>Bibliothèque</i>		

INSTITUT DES SCIENCES FINANCIÈRES ET
D'ASSURANCES

MÉMOIRE PRÉSENTÉ POUR LE TITRE D'ACTUAIRE

**Éléments d'implémentation d'un modèle de CVA:
Étude du modèle de taux**

Tuteur académique :
Areski Cousin

Auteur :
Aymeric Veyron

Tuteurs professionnels :
Christophe Hocine

10 mars 2015

Mot-clés : CVA, PFE, risque de crédit, risque de contrepartie, risque de défaut, modèle de taux, CIR, Vasicek, Hull White, Bâle, défaut, crise, taux court, Lehman Brothers

Keywords : CVA , PFE , credit risk, counterparty risk, default risk, interest rate model , CIR, Vasicek , Hull White , Basel, default crisis, short rate , Lehman Brothers

Abstract

In this dissertation, we will aim at studying the key point in the cost of risk calculation which is the interest rate model. Thanks to its quantiles at 99,5%, we can estimate the lost given default of a counterparty. Then, by taking into account a default model, we would be able to price the cost of the counterparty risk.

The calculus of the credit value adjustment, which is the technical term for the cost of the counterparty risk, leads to the estimation of the regulatory capital requirement to cover it. One will understand that the minimum amount banks have to tie up for the risk, the maximum they will be able to invest. Nevertheless, we have to emphasise the CVA calculation is a huge one. By aggregating those two aspects, the problematics becomes :

Given a default model, which interest rate model enable both the minimization of the cost of the counterparty risk and the calculation time needed ?

Some usual default models will be introduced to improve the general understanding but will not be studied. In order to address this lack of a study and avoid a downgrading of the analysis quality, the results of this dissertation will not be in credit value adjustment terms but rather as quantiles of basic financial instruments' projected prices. This will directly lead us to the expected exposure and make a credible analysis basis. The reader will then be free to integrate those results to his own credit value adjustment calculation by using the default model that appears to him the best fitting his portfolio.

Starting with the detailed presentation of the technical tools used in the discussion, we will introduce the default risk, its most frequent approach and the credit value adjustment. Based on the formula analysis, we will then benchmark part of the most frequent interest rate models. In a later part, the lead candidates will be compared on an empirical and computational basis. Finally, we will present an alternative method for the CVA calculation which eludes the main drawback of the usual method by keeping the correlation between the default and the exposure.

Résumé

L'objet de ce mémoire est l'étude du point essentiel, dans le calcul du coût du risque de contrepartie, qu'est le modèle de taux. Par les quantiles à 99,5% qu'il renvoie, il permet d'estimer la perte en cas de défaut d'une contrepartie. En croisant ces résultats avec un modèle de défaut, nous obtenons alors le coût du risque de contrepartie.

Le calcul de la *credit value adjustment*, c'est à dire du prix de marché de ce risque, permet d'obtenir le montant de capital réglementaire nécessaire à sa couverture. Il est donc dans l'intérêt des institutions de minimiser ce coût afin de disposer de plus de capital disponible. Le calcul de la CVA nécessite cependant d'importants calculs. La problématique de ce mémoire peut donc se résumer comme suit :

À modèle de défaut donné, quel modèle de taux permet de minimiser le coût du risque de crédit et le temps de calcul nécessaire à son estimation ?

Les modèles de défaut usuels seront brièvement présentés pour la compréhension générale mais ne seront pas étudiés. Afin de ne pas détériorer la qualité de notre analyse par l'absence d'étude des modèles de défaut, nous ne présenterons pas dans ce mémoire de résultats en termes de *credit value adjustment* mais en termes de quantiles des prix projetés de produits élémentaires. Ceux-ci permettent l'obtention de l'exposition attendue et constituent donc une base réaliste d'analyse. Le lecteur pourra par la suite utiliser ces résultats et exploiter le modèle de défaut, qui lui paraît le plus judicieux pour son profil de risque, afin d'obtenir des résultats en termes de CVA pour son portefeuille.

Après avoir détaillé les divers outils techniques exploités dans le corps du mémoire, nous présenterons le risque de crédit, son approche la plus répandue et la *credit value adjustment*. Par la suite, nous étudierons la compatibilité entre plusieurs modèles fréquemment utilisés et notre objectif. Dans une première partie, cette étude se centrera sur la recherche de formules fermées. Dans une seconde, nous comparerons de manière empirique et calculatoire considérés comme de bons candidats à l'issue de la première partie. Pour finir, nous présenterons une récente méthode alternative de calcul de CVA qui permet une prise en compte global du risque en conservant la corrélation entre le défaut et l'exposition.

Remerciements

Ce mémoire s'inscrit dans la continuité de mon alternance de troisième année. Celle-ci a été rendu possible grâce aux efforts et à la compréhension de Nicolas Ramain, Adrien Tay-Pamart et Bernadette Kiely que je remercie ainsi que l'entreprise Murex.

Je souhaite aussi remercier Christophe Hocine qui m'a encadré au jour le jour et permis de mieux comprendre et appréhender les enjeux des divers développement. Je le remercie aussi pour sa compréhension et son implication quant à la validation de ce mémoire.

Je suis également reconnaissant envers Mathieu, Irina et Clément qui en qualité d'équipier m'ont apporté une aide précieuse.

Il en est de même pour l'intégralité des membres des diverses équipes qui ont répondu à mes questions et m'ont aidé à m'intégrer. Je pense notamment à Jonathan, Ludovic, Sammy, Guillaume, Anne, Antoine, Alejandro, Alexis, Jeremy et Georgiana.

Par ailleurs, je souhaite remercier Areski Cousin qui m'a permis de cadrer mon sujet de stage de manière plus précise.

Je souhaite aussi remercier Fabien Chaillot, Yanri Supardi et Ginette Agopomé qui ont accepté de relire ce mémoire et m'ont apporté de précieux conseils de forme et de fond. Mes plus profonds remerciements vont à mes parents qui ont toujours su me soutenir, m'encourager et m'aider.

Finalement, j'exprime ma profonde gratitude à l'égard de Suzanne pour son attention et sa compréhension.

Table des matières

Introduction	4
0 Introduction des outils techniques	6
0.1 Les différents taux	6
0.1.1 Le taux zéro coupon -ou taux spot-	6
0.1.2 Le taux forward -ou taux forward zéro coupon-	6
0.1.3 Les LIBORs	7
0.2 L'absence d'opportunité d'arbitrage -AOA-	8
0.3 Les différentes mesures	9
0.3.1 Définition d'une mesure	9
0.3.2 La mesure risque-neutre	9
0.3.3 La mesure T-forward	9
0.3.4 La mesure Libor-spot	9
0.4 Les divers produits	10
0.4.1 Les bons à coupons	10
0.4.2 Accord à taux futur -ou <i>Forward Rate Agreement (FRA)</i> -	10
0.4.3 Contrat d'échange de taux d'intérêt -ou <i>swap de taux</i>	12
0.4.4 Les options sur swap -ou swaptions-	12
0.4.5 <i>Cap et Floor</i>	12
0.4.6 Les couvertures de défaillance - <i>credit default swaps (CDS)</i> -	13
1 Présentation du risque de crédit	14
1.1 Définition de l'exposition ou <i>exposure</i>	14
1.1.1 Vis-à-vis d'un contrat	14
1.1.2 Vis-à-vis d'une contrepartie	16
1.2 Modélisation de l'exposition au risque de contrepartie	16
1.2.1 Génération de scénarios	17
1.2.2 Évaluation des produits	20
1.2.3 Appels de marge sur portefeuille	21
1.2.4 Agrégation des contrats	25
1.2.5 Outils de visualisation de l'exposition au cours du temps	26
1.3 Présentation de la credit value adjustment	27
1.3.1 Présentation mathématique de la CVA	28
1.3.2 Problèmes soulevés par la CVA bilatérale	29
1.3.3 Indépendance entre l'exposition et la qualité de la contrepartie	30

Mémoire présenté pour le titre d'actuaire: Éléments d'implémentation d'un modèle de CVA: Étude du modèle de taux

2 Introduction des modèles	34
2.1 Les modèles de défaut	34
2.1.1 Le modèle de Merton	34
2.1.2 Le modèle de premier passage avec barrière aléatoire	35
2.1.3 Le modèle de Cox	36
2.2 Les modèles de taux	37
2.2.1 Les modèles de taux court à un facteur	37
2.2.1.1 Le modèle de Vasicek	38
2.2.1.2 Le modèle de Dothan	39
2.2.1.3 Le modèle de Cox, Ingersoll et Ross (CIR)	40
2.2.1.4 Le modèle de Vasicek exponentiel	42
2.2.1.5 Le modèle de Hull&White	42
2.2.1.6 Le modèle de Black et Karasinski	44
2.2.1.7 Le modèle CIR++	45
2.2.2.2 Autres modèles de taux	45
2.2.2.1 Le modèle de Hull & White à deux facteurs (2006)	46
2.2.2.2 Le modèle de Brace, Gatarek et Musiela (BGM) ou <i>LIBOR market model</i>	46
2.3 Analyse comparative des modèles	48
2.3.1 Recherche de formules fermées	49
2.3.1.1 Dans le modèle de Dothan	49
2.3.1.2 Dans le modèle de Vasicek	49
2.3.1.3 Dans le modèle de Hull and White	50
2.3.1.4 Dans le modèle de CIR	50
2.3.1.5 De l'évaluation des swaptions	51
2.3.2 Calibration des modèles	51
2.3.2.1 Calibration du modèle de Vasicek	52
2.3.2.2 Calibration du modèle CIR	53
2.3.2.3 Calibration du modèle de Hull & White à un facteur	55
2.3.2.3.1 Méthode combinatoire	55
2.3.2.3.2 Méthode non combinatoire	56
2.3.2.3.3 Méthode utilisée dans le cadre de ce mémoire	56
2.3.2.4 Calibration du modèle CIR++	57
2.3.2.5 Calibration du modèle BGM	57

3 Adaptation et comparaison empirique des modèles	60
3.1 Adaptation du modèle BGM	60
3.1.1 Réduction du nombre de Libor nécessaire dans le modèle BGM	60
3.1.2 Pricing de swaptions sous le modèle BGM	61
3.1.3 Calibration du BGM sur les swaptions et les caplets	65
3.2 Comparaison de la stabilité et de la rapidité des modèles	66
3.2.1 Taux négatif de Hull&White	66
3.2.2 Comparaison des vitesses de calculs	68
3.3 Comparaison quantitative des résultats	71
3.3.1 Analyse du taux court	71
3.3.2 Analyse des bons zéro-coupon	72
3.3.3 Analyse des calls	76
3.3.4 Analyse des puts	79
4 Une autre approche de la modélisation du risque de contrepartie	82
4.1 Caractéristiques de l'approche	83
4.2 Calcul de la CVA unilatérale	85
Conclusion	89
A Démonstration des prix zéro-coupon du modèle de Dothan	91
B Fonction de Bessel modifiée d'ordre n de seconde espèce	93
C Méthode d'optimisation de Nelder-Mead	94

Introduction

Les transactions financières sont couvertes par différents cadres légaux qui dépendent du lieu de la transaction et du type de marché. On oppose usuellement le marché gré à gré et le marché régulé. Un exemple de marché régulé est la sphère correspondant au terme "bourse" ; il regroupe entre autres le marché des contrats à terme par exemple ou celui des actions dites cotées. Toutes les transactions qui en sont issues utilisent une chambre de compensation ou *clearing house* en anglais. La fonction de cette chambre est de scinder la relation acheteur-vendeur, elle joue le rôle d'interface. L'intérêt de cette situation est que l'acheteur ne fait pas face au vendeur mais à la chambre qui lui vend le contrat qu'elle a acheté au vendeur. Le défaut d'une des deux contreparties n'aura donc aucune conséquence sur la survivante ; ce sera la chambre de compensation qui sera la seule à les subir. Ce processus permet de décorrélérer au maximum les probabilités de défaut des différents acteurs du marché, ceux-ci ne sont en effet plus liés entre eux. En revanche, ils sont tous plus ou moins liés à une chambre de compensation. Il semble donc évident qu'un défaut de cette dernière serait catastrophique. Ces dernières imposent donc des règles strictes, s'assurent de la solidité des clients et sont rémunérées pour leurs services.

En parallèle des marchés régulés, les marchés de gré à gré se sont développés. Plus précisément, ils en constituent l'antichambre. C'est sur ces marchés que les produits récemment développés sont lancés, si le besoin de régulation apparaît suite à leur essor, ils passent alors dans les marchés régulés. Il n'est pas choquant de constater que le volume des opérations de gré à gré devance fortement celui des opérations régulées. En effet, ce marché ne possède pas de règle établie et des produits ad hoc peuvent être obtenus. De plus, l'absence de chambre de régulation permet aux acteurs de prendre plus de risque. En outre, son absence fait reposer l'intégralité du risque de contrepartie sur les acteurs. Les corrélations entre les probabilités de défaut sont donc maximales. Cet effet pervers a bien été perçu par le législateur. Les accords de Bâle successifs ont imposé des mesures de sécurité de plus en plus importantes. Ces mesures consistent à intégrer dans le capital réglementaire le coût du risque de contrepartie, c'est à dire l'ajustement de valeur de crédit -*credit value adjustment (CVA)*- . Comme dans chaque calcul de capital réglementaire, le choix est laissé entre la méthode standard et la méthode du modèle interne. La méthode a été calibrée sur un panel représentatif de compagnies européennes et sur des profils de risques variés. Elle est imposée aux banques qui ne possèdent pas de modèle interne validé par les autorités. Comme pour toute formule dite standard, des biais importants peuvent apparaître pour des profils de risque qui divergent du profil de

risque moyen. Il est donc dans l'intérêt d'institutions ayant un tel profil de posséder un modèle de calcul de CVA efficace. Ce mémoire, centré sur le choix du modèle de taux pour l'implémentation d'un modèle de CVA, a pour but de guider le lecteur dans sa démarche. Pour cela, les modèles les plus fréquemment utilisés seront comparés et analysés selon des objectifs de précision et de simplicité des prix des instruments financiers.

0 Introduction des outils techniques

Nous allons, dans cette première section, présenter les divers termes techniques utilisés.

0.1 Les différents taux

0.1.1 Le taux zéro coupon -ou taux spot-

Une obligation zéro-coupon -ou bon zéro coupon- de maturité T est un produit qui livre 1 à la date T. Pour $t \in [0, T]$, son prix est noté $P(t, T)$. Ce bon est une brique élémentaire des produits financiers, il permet de définir le taux spot :

$$r(t, T) = -\frac{\ln(P(t, T))}{T - t} \quad (1)$$

De plus, ce taux définit un des éléments essentiels pour la modélisation des marchés à savoir, le taux court : $r(t) = \lim_{T \rightarrow t} r(t, T) = -\frac{\partial \ln(P(t, T))}{\partial t}$. La dynamique de ce taux court qui est souvent donnée par équation différentielle stochastique ; le taux court est la solution de cette équation différentielle.

0.1.2 Le taux forward -ou taux forward zéro coupon-

Le taux forward correspond au taux utilisé pour la conclusion d'un contrat en t pour l'achat d'une obligation zéro-coupon en S livrant 1 en T. L'illustration ci-dessous permet d'identifier clairement les événements :

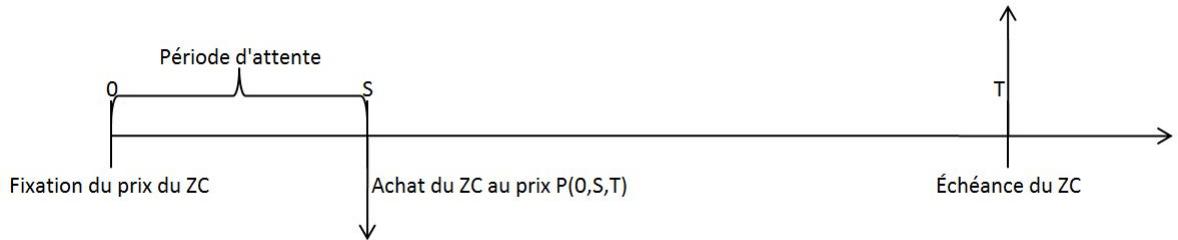


FIGURE 1 – Chronologie d'un contrat forward

Le prix de ce contrat est donné par :

$$P(t, S, T) = \frac{P(t, T)}{P(t, S)}$$

$$P(t, S, T) = \frac{\exp(-r(t, T)(T - t))}{\exp(-r(t, S)(S - t))}$$

Mémoire présenté pour le titre d'actuaire: Éléments d'implémentation d'un modèle de CVA: Étude du modèle de taux

On en déduit l'expression du taux :

$$f(t, s, T-t) = \frac{r(t, T)(T-t) - r(t, S)(S-t)}{T-S} \quad (2)$$

Ceci nous permet de définir le taux forward instantané : $f(t, T) = \lim_{T \rightarrow S} f(t, S, T) = -\frac{\partial \ln(P(t, T))}{\partial T}$. On obtient alors les relations suivantes :

$$P(t, T) = \exp\left(-\int_t^S f(t, s) ds\right) \quad (3)$$

$$P(t, T, S) = \exp\left(-\int_T^S f(t, s) ds\right) \quad (4)$$

0.1.3 Les LIBORs

Le LIBOR -ou London interbank offered rate, soit taux interbancaire de Londres- est un ensemble de taux concernant plusieurs devises et plusieurs maturités. Pour une dite devise et une dite maturité, le taux LIBOR correspond au taux moyen pratiqué entre les grandes banques londoniennes lors de prêts non gagés -aussi appelés prêts en blanc, ils ne requièrent pas que la contrepartie emprunteuse remette des titres pour garantir sa solvabilité aux yeux de la prêteuse.

Pour garantir la stabilité de l'indice, le panel de banque est fixé- il est relativement constant dans le temps-. De plus, les valeurs extrêmes ne sont pas prises en compte, seuls les taux les plus proches de la moyenne sont retenus. Ceci permet de capturer la réalité du marché sans que des valeurs aberrantes et influentes ne viennent perturber la valeur. On appelle date de réactualisation du Libor -ou reset- la date qui correspond à l'échéance de la maturité choisie. Ainsi, pour un prêt d'un an au 01/01/2013 basé sur le Libor 3 mois, les dates de réactualisations seront les 01/03/2013, 01/06/2013 et 01/09/2013. Le taux en vigueur précédemment est changé pour la valeur du Libor 3 mois du jour. La chronologie des événements liés à ce type de contrat est illustré ci dessous : L'illustration ci-dessous permet d'identifier clairement les événements :

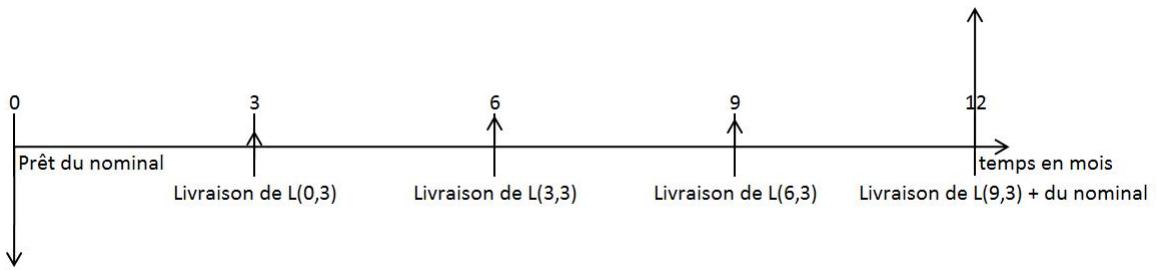


FIGURE 2 – Chronologie des événements pour un prêt d'un an indexé sur le libor 3 mois

0.2 L'absence d'opportunité d'arbitrage -AOA-

L'utilisation de l'absence d'opportunité d'arbitrage est courante en finance pour l'évaluation de prix ou de la concordance de modèle avec le marché. Elle consiste en un raisonnement par l'absurde. Le principe est de montrer qu'il existe une stratégie auto financée -ou arbitrage- dans le modèle malgré l'hypothèse d'absence de possibilité. Une stratégie autofinancée correspond à la réalisation d'un gain sans prise de risque associée. Compte tenu d'une richesse nulle en 0, le portefeuille à une valeur toujours positive en $t > 0$. On peut la caractériser mathématiquement par :

$$V_t^0 \geq 0, \text{ et } \mathbb{P}(V_t^0 < 0) > 0 \quad (5)$$

Un exemple simple est la preuve de l'unicité des prix. Soit deux zéro coupons livrant 1 en T de paramètres totalement identiques. Considérons que deux de ces bons -A et B- sont disponibles à des prix différents $P_A < P_B$. Considérons la stratégie consistant à l'achat en $t=0$ de A et la vente de B. Alors, on peut résumer les mouvements d'argent dans le tableau suivant :

	$t = 0$	$t = T$
Vente de B	P_B	-1
Achat de A	$-P_A$	1
Total	$P_B - P_A > 0$	0

Cette stratégie crée de la richesse immédiate sans capital initial et sans risque, c'est une stratégie autofinancée. Nous avons fait l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage, cette stratégie ne peut donc pas créer de richesse. Nous avons donc $P_A = P_B$. Le prix des zéro-coupons sur le marché est donc unique.

0.3 Les différentes mesures

0.3.1 Définition d'une mesure

Soit A un ensemble, \mathcal{F} une partie de $\mathcal{P}(A)$. Une mesure de probabilité \mathbb{P} est une application définie sur \mathcal{F} . Elle est du type $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ et possède le caractéristiques suivantes :

- $\mathbb{P}(A) = 1$
- Si (X_1, \dots, X_n) sont des parties de A disjointes deux à deux alors $\mathbb{P}(U_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i)$

Le triplet $(\mathbb{P}, A, \mathcal{F})$ défini alors un espace probabilisé.

Nous utiliserons trois mesures principales, la mesure risque-neutre, la mesure T-forward et la mesure LIBOR-spot.

0.3.2 La mesure risque-neutre

La mesure risque-neutre correspond à un changement de mesure de probabilité par rapport au mode réel -ou *real world*. Sous cette mesure, un taux de rendement moyen sera associé à chaque actif. Ce taux sera le taux sans risque. Sous cette mesure la tarification d'une majorité d'actifs est possible. Plus intuitivement, on peut considérer que les actifs ne sont plus exprimés dans le numéraire initial mais en unités de titres sans risque. Le prix actualisé des actifs dans ce monde est alors une martingale.

Cette mesure est utilisée lorsque l'on cherche à couvrir un risque non mutualisable, un risque mutualisable sera, quand à lui, analysé sous la probabilité historique.

0.3.3 La mesure T-forward

La mesure T-forward est la mesure dont le numéraire est $P(t, T)$, l'unité de mesure n'est plus une unité monétaire mais une obligation zéro-coupon d'échéance T . Son prix $P(t, T)$ est donc un martingale sous cette mesure ; il en va de même pour les prix forward de tous les instruments financiers.

0.3.4 La mesure Libor-spot

La mesure LIBOR-spot est la mesure dans laquelle le modèle BGM -modèle de Brace Gatarek et Musiela qui sera détaillé plus tard- est souvent exprimé. Pour introduire le numéraire il nous faut introduire : T_i une date de réactualisation du LIBOR, $\delta_i =$

$T_{i+1} - T_i, L_i(t)$ le libor sur $[T_i, T_{i+1}]$, $m(t)=i$ si $t \in [T_{i-1}, T_i]$.

Dans la mesure spot-LIBOR, le numéraire correspond à l'investissement de l'intégralité du capital dans un libor à chacune des dates de réactualisation. Il s'exprime comme suit :

$$B_t = P(t, m(t)) \prod_{i=0}^{m(t)-1} (1 + \delta_i L_i(t)) \quad (6)$$

0.4 Les divers produits

Nous allons présenter ici les différents produits qui seront évoqués dans ce mémoire.

0.4.1 Les bons à coupons

À l'inverse des bons zéro-coupons, ce produit livre des montants réguliers à son porteur. Considérons, par exemple, un bon dont les coupons sont détachés tout les 3 mois et d'échéance T et de taux d'intérêt nominal i et de nominal N. Le porteur du bon recevra tout les 3 mois en échange d'un coupon le montant $Ni\frac{3}{12}$. À la date d'échéance, le porteur récupérera le nominal N en plus du montant associé au coupon. Ci-dessous, les flux induit par l'achat d'un tel produit sont représentés :

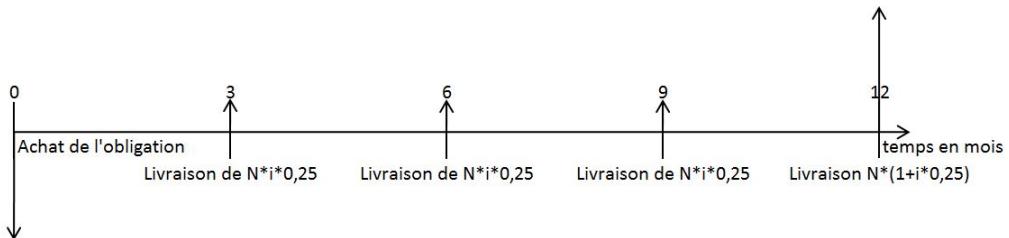


FIGURE 3 – Cash flow d'une obligation à coupons trimestriels de maturité 1 an de taux d'intérêt i de nominal N

Historiquement, les coupons étaient physiques ; ils étaient détachés du bon à la manière de timbres.

0.4.2 Accord à taux futur -ou **Forward Rate Agreement (FRA)**-

Un accord à taux futur (FRA) en t_n de nominal N de date de valeur t_v et de date d'échéance t_e engage dès la date t l'acheteur à verser en t_v pour la durée $[t_v, t_e]$ un taux K fixé en t au vendeur. Il engage aussi le vendeur à verser pour la même durée un taux variable L fixé en t_v . Il permet à l'acheteur de se couvrir contre les risques de hausse des

Mémoire présenté pour le titre d'actuaire: Éléments d'implémentation d'un modèle de CVA: Étude du modèle de taux



FIGURE 4 – Obligation à coupons émise par la compagnie du Canal de Panama

taux. Prenons l'exemple suivant avec $N=100$, K le libor Franc suisse 3 mois en t_n , L le libor Franc suisse 3 mois en t_v , $t_n = 0$, $t_v = 1 \text{ mois}$, $t_e = 4 \text{ mois}$

En $t=0$, le libor 3 mois vaut 0.012% ¹ et il y a conclusion de l'accord avec $K=0.012\%$. En $t=1$, le libor vaut 0.024% ².

L'acheteur du contrat va donc verser : $NK(t_e - t_v) = 100 \times 0.012\% \times 3/12 = 0.003$.

Le vendeur du contrat va lui verser : $NL(t_e - t_v) = 100 \times 0.024\% \times 3/12 = 0.006$.

En les deux flux, il n'y aura qu'un versement de 0.003 en faveur de l'acheteur. La chronologie des événements est illustrée ci-dessous :

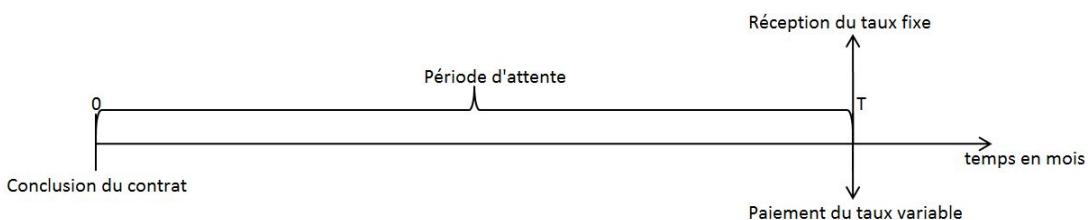


FIGURE 5 – Chronologie des événements pour le vendeur d'un FRA avec $t_n = 0$ et $t_v = T$

1. taux du Libor Franc Suisse 3 mois au 02/01/2013
2. taux du Libor Franc Suisse 3 mois au 01/02/2013

Mémoire présenté pour le titre d'actuaire: Éléments d'implémentation d'un modèle de CVA: Étude du modèle de taux

0.4.3 Contrat d'échange de taux d'intérêt -ou swap de taux

Les swaps de taux Libor constituent un des plus gros marché d'opérations sur taux. L'intérêt de ce produit est de se couvrir contre une fluctuation des taux. Ce produit est constitué par un portefeuille de FRA successifs. Par exemple, un swap de 1 an de fréquence semi-annuelle sur un LIBOR 6 mois sera constitué d'un premier FRA avec $t_n = 0$, $t_v = 6$, $t_e = 12$ et d'un second avec $t_n = 0$, $t_v = 12$, $t_e = 18$. Acheter de ce swap reviendra à acheter les deux FRA. Comme pour le FRA, un nominal est défini; il ne sert qu'à calculer le montant des versements et n'est jamais échangé. Les flux pour le vendeur sont illustrés ci-dessous :

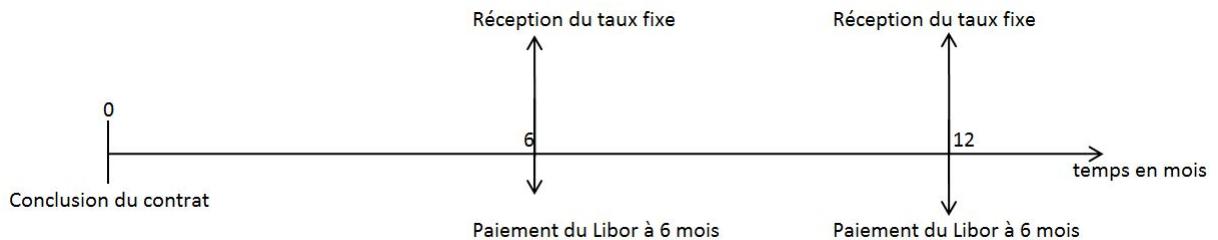


FIGURE 6 – Chronologie des évènements pour le vendeur d'un swap sur Libor 6 mois

0.4.4 Les options sur swap -ou swaptions-

Les options sur swap -ou swaptions- sont divisées en deux catégories : les options d'achat de swap et les options de vente de swap. Ces contrats permettent d'entrer ou non à la date future T dans un swap dont les modalités ont été définies lors de la conclusion du contrat.

0.4.5 Cap et Floor

Un cap correspond à un call sur un taux ; c'est une option d'achat qui permet à l'acheteur de se faire livrer le taux de marché en vigueur contre un taux fixe K déterminé à l'avance et ceux, uniquement si il le désire. Il se couvre ainsi contre une hausse car celui-ci n'est en rien engagé.

Un floor correspond pour sa part à un put sur taux ; cette option de vente engage le vendeur à livrer le taux fixe K déterminé à l'avance et à recevoir le taux variable en

vigueur. L'acheteur en revanche n'est pas engagé. La chronologie des événements pour ces deux produits est illustrée ci-dessous :

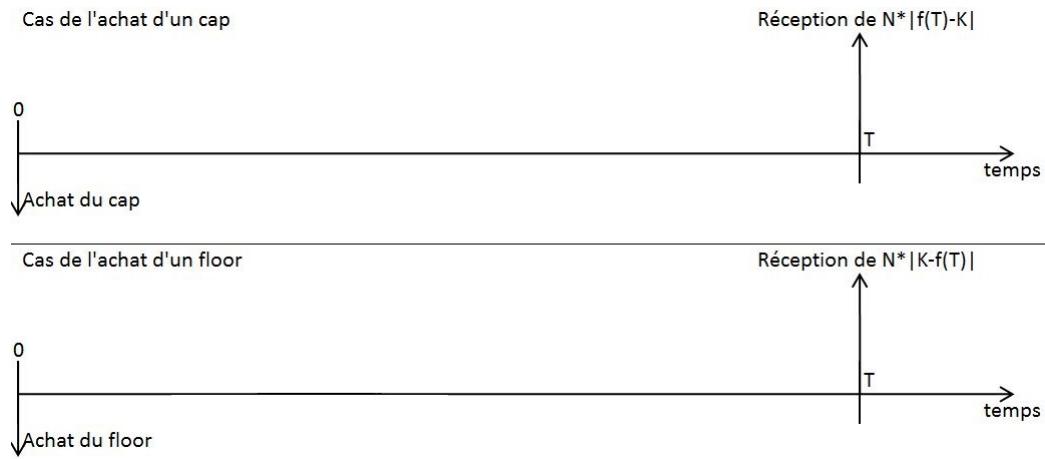


FIGURE 7 – Chronologie des événements pour l'acheteur d'un Cap ou d'un Floor de taux d'exercice K, de maturité T et de nominal N sur le taux variable $f(t)$

0.4.6 Les couvertures de défaillance -*credit default swaps (CDS)*-

Une couverture de défaillance est un produit qui permet à l'acheteur de se couvrir, moyennant une prime annuelle dépendant du montant garanti N, contre le défaut d'une contrepartie à hauteur N. Ce produit est proche de l'assurance emprunteur pour les particuliers. Ce type de contrat fait partie des produits responsables de la crise de 2007 car détournés de leurs usages premiers. N'étant pas pré-financés, les vendeurs pouvaient encaisser les primes sans amputer leurs engagements prudentiels. De plus, ces produits servent à quantifier le risque de défaut de la contrepartie associée. Si le cours d'un CDS flambe, la contrepartie aura du mal à se financer. Ce phénomène est entre autres responsable de la crise de l'euro de 2011.

1 Présentation du risque de crédit

Le risque de crédit se définit comme le risque pour une entité qu'une des contreparties avec qui elle a conclu une opération de gré à gré -ou *over the counter-* fasse défaut. Ce risque peut être rapproché du risque de défaut défini pour le calcul du SCR sous Solvabilité 2. Sa prise en compte est cependant plus poussée que celle proposée par la formule standard. En effet, ce risque étant bien plus important pour les institutions financières que pour les organismes d'assurance, son étude doit nécessairement être bien plus fine.

1.1 Définition de l'exposition ou exposure

Afin de pouvoir calculer le capital réglementaire pour couvrir le risque de crédit, il est essentiel de déterminer le capital réellement exposé à ce risque. Il s'agit de l'exposition. Cette exposition peut être définie à deux niveaux essentiellement, au niveau du contrat ou bien au niveau d'une contrepartie.

1.1.1 Vis-à-vis d'un contrat

Lorsque qu'une institution achète un zéro-coupon auprès d'une contrepartie, elle s'expose au risque de ne pas se faire livrer le nominal à l'échéance. Dans le cas d'un swap de taux, la valeur du contrat peut fluctuer et exposer successivement l'une et l'autre partie à ce risque dit de défaut.

Lorsqu'un contrat est conclu entre deux contreparties, elles s'exposent donc réciproquement au risque de défaut. Si une de ces deux contreparties n'est pas en mesure d'honorer ses engagements -en cas de faillite notamment-, le montant alors perdu par la contrepartie survivante est appelée exposition. Il s'agit de la fraction du montant qui est risquée. Cette valeur dépend uniquement de la valeur du contrat.

Elle est évaluée par la méthode dite de replacement du contrat. Cette méthode consiste à considérer que lors du défaut de la contrepartie, la banque conclut avec une autre contrepartie un contrat identique au contrat résiduel et qu'elle solde dans la mesure du possible sa position avec la contrepartie défaillante. Cette méthode n'est cependant valable que dans le cas d'un marché liquide pour le produit en question.

Selon que la valeur du contrat à l'instant du défaut est positive ou négative du point de vue de la banque, on distingue deux situations :

- Si la valeur du contrat $V(t)$ est positive - la contrepartie défaillante D doit de l'argent à la banque A- alors :

- A clot sa position avec D mais ne reçoit rien du fait du défaut.
- A entre dans un contrat identique au contrat résiduel avec une autre contrepartie et paie $V(t)$.

L'opération a coûté à A $V(t)$, le prix de marché du contrat correspond donc à l'exposition.

- Si la valeur du contrat $V(t)$ est négative - A doit de l'argent à D- alors :

 - A clot sa position avec D et paie $V(t)$.
 - A entre dans un contrat identique au contrat résiduel avec une autre contrepartie et reçoit $V(t)$.

L'opération n'a coûté rien à A, l'exposition est donc nulle.

L'exposition vis-à-vis d'un contrat est donc :

$$E(t) = \max(V(t), 0) \quad (7)$$

De par la nature imprévisible des marchés et des évènements, cette donnée n'est connue avec certitude qu'aux instants t et postérieurs à t . L'exposition future est inconnue, elle est estimée par une génération de scénarios.

Le graphique ci-après permet d'illustrer de manière visuelle la formule précédente de l'exposition

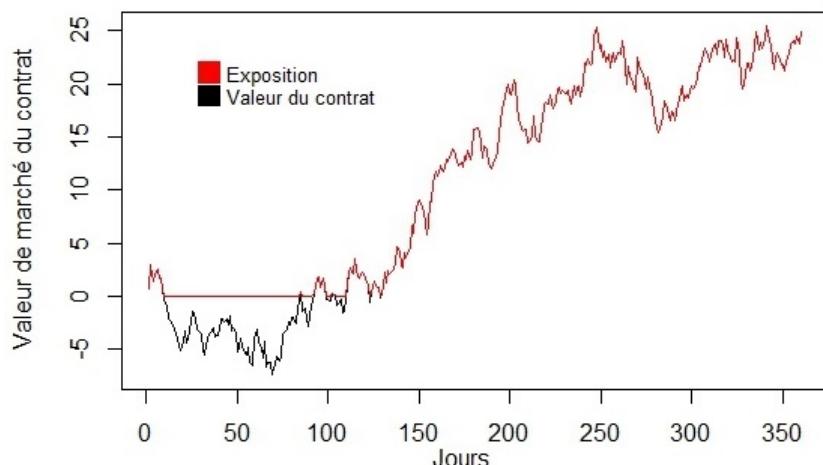


FIGURE 8 – Illustration de l'exposition générée par un contrat en fonction de sa valeur de marché

1.1.2 Vis-à-vis d'une contrepartie

Sur le marché actuel, les banques ne se contentent pas d'un unique contrat par contrepartie. En général, plusieurs dizaines voire centaines de contrats lient deux entités -par exemple, la Lehman Brothers avait environ 190 contrats pour chacune de ses contreparties au moment de son défaut-. Une première idée pour calculer l'exposition serait de simplement sommer les expositions de chaque contrat. En effet, lors d'un défaut, chaque contrat est soldé individuellement. L'exposition sera alors donnée par : $E(t) = \sum_i E_i(t) = \sum_i \max(V_i(t), 0)$ où $E_i(t)$ est l'exposition du i-ème contrat et $V_i(t)$ sa valeur.

Afin de réduire cette exposition de manière drastique, des accords dits de compensation -ou netting agreements- ont été introduits dans la législation dans les années 1980 - 1990 dans un premier temps - Bâle II y consacre plusieurs paragraphes-. Ces accords permettent de créer un solde global pour tous les contrats qu'ils concernent. L'exposition est alors calculée à partir de ce solde alors que sans ces contrats, le liquidateur récupère dans un premier temps tout les avoirs de la défaillante avant d'éventuellement payer ses dettes, les expositions sont sommées.

Plusieurs accords de compensation peuvent être en vigueur entre deux contreparties, alors que certains contrats peuvent ne pas être couverts. En notant AC_i le i-ème accord de compensation et AC l'ensemble des accords, on aura :

$$E(t) = \sum_k \max\left(\sum_{i \in AC_k} V_i(t), 0\right) + \sum_{i \notin AC} \max(V_i(t), 0) \quad (8)$$

Nous illustrons ci-dessous l'impact d'un accord de compensation entre deux contrats. L'exposition avec accord -en orange- est systématiquement inférieur à celle sans accord -en rouge-. L'entreprise est donc mieux protégée contre le risque de contrepartie.

1.2 Modélisation de l'exposition au risque de contrepartie

Nous allons désormais nous intéresser au calcul de l'exposition future possible -ou *potential future exposure* (PFE)-. Cette valeur permet aux banques de surveiller l'exposition prise par leurs traders et de la comparer aux limites qu'elles ont mises en place. Un dépassement d'une de ces limites alerte l'utilisateur voire ses supérieurs. Ce procédé est essentiel pour les marchés des dérivés où de forts effets de levier peuvent apparaître. Le graphique ci-dessous illustre la perte infinie que peut susciter la vente d'une option de vente -ou call-.

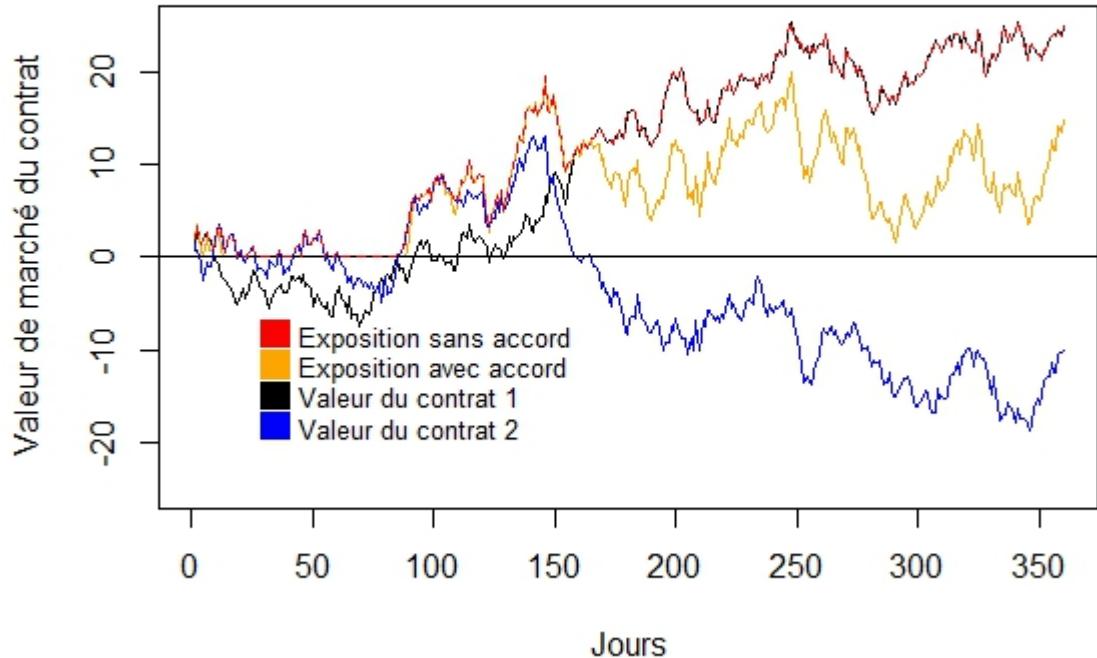


FIGURE 9 – Illustration de l'impact d'un accord de compensation couvrant deux contrats

On constate que bien que le call ait été vendu à un prix réel, les engagements sont fonction de l'évolution du sous-jacent ; plus son cours augmente, plus la perte est forte.

Nous allons ici présenter la technique de modélisation développée par Zhu et Pykhtin[15]. Dans notre cas, ce calcul de PFE est essentiel, il nous permet d'obtenir l'exposition prévue -ou *expected exposure* (EE)- qui est un des paramètres de la CVA. Pour ce faire, nous allons procéder en trois étapes : la *génération de scénarios*, l'*évaluation des produits* et l'*agrégation du portefeuille*.

1.2.1 Génération de scénarios

Le marché considéré est projeté à différentes dates selon un modèle d'évolution sélectionné. Sur un marché de taux d'intérêts, le choix entre les différents modèles de taux est à la discréction de l'utilisateur. Nous comparerons par la suite les différents modèles de

Mémoire présenté pour le titre d'actuaire: Éléments d'implémentation d'un modèle de CVA: Étude du modèle de taux

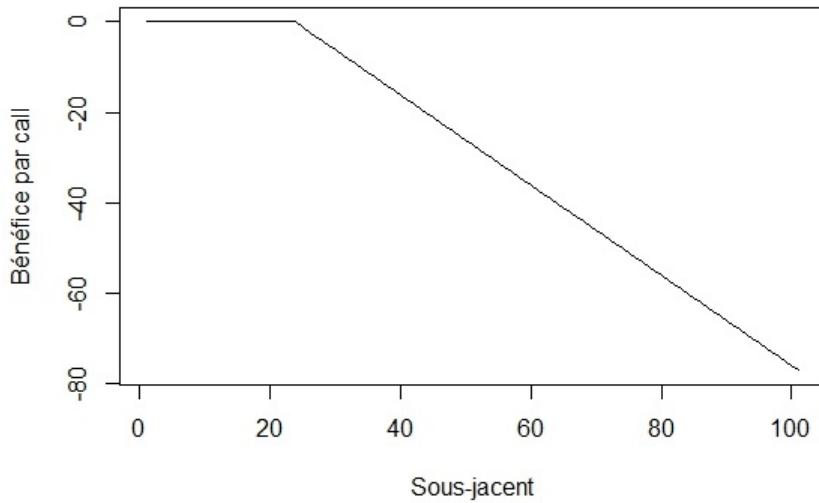


FIGURE 10 – Profil de gain d'une vente d'option d'achat de prix d'exercice 25

taux afin de choisir le plus efficace compte tenu des restrictions imposées pour le calcul de CVA.

Pour simuler ces scénarios, deux techniques sont envisageables :

- L'utilisateur peut choisir la simulation d'une trajectoire -ou *Path-Dependent Simulation* (PDS)-. La valeur $X(t_i)$ du facteur à la date t_i sera calculée en fonction de $X(t_{i-1})$. L'ensemble des valeurs représentera une trajectoire possible du dit facteur.
- L'utilisateur peut préférer une simulation directe -ou *Direct Jump to Simulation date* (DJS)-. La valeur $X(t_i)$ en (t_i) est directement simulée à partir de la valeur $X(t_0)$ en t_0 . La cohérence entre les valeurs dans un même scénario est alors perdu, il n'y a pas de trajectoire.

Considérons un modèle de Hull & White à un facteur gouverné par l'équation différentielle stochastique suivante : $dr = (\theta(t) - ar)dt + \sigma dw$.

L'approche PDS utilisera l'équation :

$$r(t_{i+1}) = r(t_i)e^{-a(t_{i+1}-t_i)} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta(s)e^{-a(t_{i+1}-s)}ds + \sigma \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-a(t_{i+1}-s)}dw(s)$$

L'approche DJS utilisera l'équation :

$$r(t_{i+1}) = r(0)e^{-at_{i+1}} + \int_0^{t_{i+1}} \theta(s)e^{-a(t_{i+1}-s)}ds + \sigma \int_0^{t_{i+1}} e^{-a(t_{i+1}-s)}dw(s)$$

En projetant nos taux selon ce principe, on obtient les deux graphiques ci-dessous. On note que les diffusions sont sensiblement les mêmes. Elles ne peuvent bien entendu pas

être strictement égales compte tenu qu'il s'agit de diffusion stochastique. Les couleurs permettent d'illustrer la différence entre les deux méthodes. Des chemins sont visibles sur la diffusion PDS - la simulation par trajectoire- alors que sur la diffusion DJS, aucun chemin n'est visible. Les différents points du graphique sont indépendants les uns des autres. L'utilisation de celle-ci pour l'évaluation Monte-Carlo d'instrument dépendant de la trajectoire n'est donc pas utilisable. En effet, si l'on prend l'exemple d'une option américaine, il sera impossible de savoir si le sous-jacent a dépassé le strike précédemment. Il en va de même pour les options à barrières -où le franchissement d'un seuil influe sur la validité du produit- et les options asiatiques -où le sous-jacent est la moyenne arithmétique du cours entre la date d'émission et celle de maturité-.

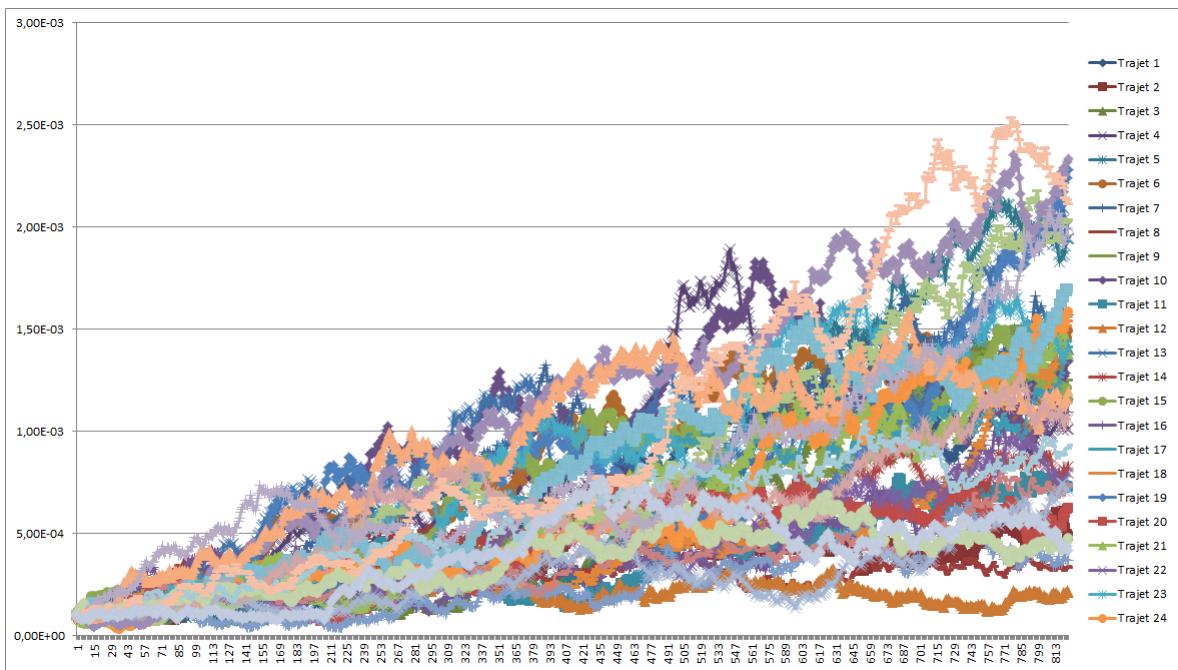


FIGURE 11 – Illustration d'une diffusion PDS

Pour ce qui est de la probabilité sous laquelle ces scénarios doivent être générés, les auteurs laissent le choix entre la probabilité risque-neutre et la probabilité historique -*real world*-. Les données historiques permettront de calibrer le terme de dérive (*drift*) et la volatilité dans le monde réel ; sous la probabilité risque-neutre, le drift sera calibré de telle sorte qu'il n'y ait pas d'opportunité d'arbitrage, la volatilité sera choisie pour que les prix des options correspondent aux prix du marché.

Mémoire présenté pour le titre d'actuaire: Éléments d'implémentation d'un modèle de CVA: Étude du modèle de taux

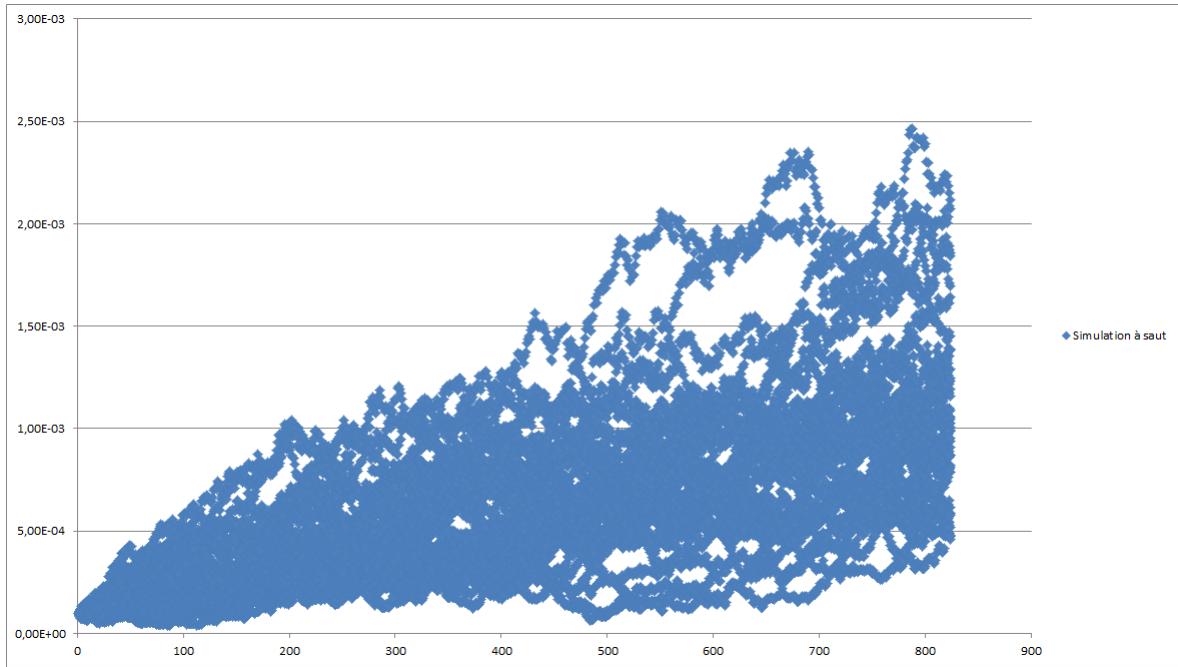


FIGURE 12 – Illustration d'une diffusion DJS

Bien que nous soyons dans une optique de gestion de risque lié aux événements futurs, nous n'adopterons pas la probabilité historique. Il s'agit en effet de chercher à couvrir un risque non mutualisable, domaine de la probabilité risque-neutre.

1.2.2 Évaluation des produits

Le calcul de l'exposition s'inscrit dans un cadre très spécifique. Il ne s'agit pas d'évaluer un unique produit de manière la plus juste possible à une date t dans un contexte d'achat ou de vente. Il s'agit d'évaluer à plusieurs dates une large gamme de produits dans un contexte de surveillance. Cette opération est donc vouée à être relancée relativement fréquemment.

Dès lors, la notion de rapidité d'exécution fait surface. Reprenons les ordres de grandeurs de la Lehmann Brothers lors de sa faillite : 8000 contreparties, 200 contrats par contrepartie. Le calcul de l'exposition vis-à-vis d'une contrepartie aurait nécessité l'agrégation de 200 expositions de contrats dont les pricings auraient été faits avec 40 000 chemins de Monte Carlo pour 8000 scénario à 200 dates différentes. En utilisant les techniques de salle de marché -et du front office en général-. Il aurait donc fallu stocker

Mémoire présenté pour le titre d'actuaire: Éléments d'implémentation d'un modèle de CVA: Étude du modèle de taux

$40000 * 8000 * 200 * 200 = 1,3 \times 10^{13}$ valeurs au minimum. En considérant que chaque valeur est codée en double donc sur 8 octets, on obtient une taille en mémoire de l'ordre de 1.0×10^{14} octets soit 100 To.

À titre de comparaison, seulement 25 To de fichiers de logs sont générés chaque jour par les connexions au site *Facebook*, le télescope *Hubble* n'a collecté que 45 To de données en 20 ans d'observation. Cette quantité de données est donc bien trop grande pour pouvoir l'utiliser.

Au niveau du temps de pricing, en considérant qu'un contrat s'évalue en 0.01 seconde, on obtient un temps de calcul de $0.1 * 8000 * 200 * 200 = 3200000sec \approx 37jrs$ hors agrégation : une durée bien trop longue pour un suivi régulier des risques.

Toute la problématique de la PFE se retrouve en un point : **comment évaluer de façon suffisamment rapide et précise un si grand nombre de contrats ?** Par une série d'approximations et de formules fermées, nous cherchons à éliminer les Monte Carlo secondaires -très consommateurs en temps-, puis par l'utilisation de nouvelles technologies, notamment le calcul sur carte graphiques, les opérations sont parallélisées au maximum. Étant donné que les techniques de calcul sur carte graphique ne sont pas en lien direct avec l'actuariat, nous ne développerons pas ce sujet ; en revanche, les approximations et formules fermées seront développées dans une des sections suivantes.

1.2.3 Appels de marge sur portefeuille

On dit d'un portefeuille qu'il est un portefeuille avec appel de marge -*marginated portfolio*- lorsqu'un accord d'appel de marge -*margin agreement*- stipule qu'un versement doit être effectué si l'exposition dépasse un seuil. Toute clause d'appel de marge définit trois durées :

- La durée d'appel -*call period*- qui donne la fréquence de calcul de l'exposition du contrat -en général un jour-.
- La durée de remède -*cure period*- qui le délai laissé à la contrepartie pour payer sa dette.
- La durée d'appel de marge du risque -*margin period of risk*- qui est la durée nécessaire à un appel de marge complet ; il s'agit fréquemment de la somme des deux périodes précédentes.

Considérons un call de prix $P(t)$ et de caractéristiques suivantes : Strike : $K = 1000$, date d'émission : $t = 1$, date de maturité : $T = 31$, Sous-jacent : volatilité : $\sigma = 0.20$, taux sans risque $r = 0.05$, cours du jour d'émission : $S(t = 1) = 1000$. Son prix est $P(t = 0) = 20.83$ selon le modèle de Black & Scholes.

Considérons, de plus, un accord d'appel de marge sur ce put de paramètre suivants : durée d'appel : $A = 1$, durée de remède $R = 2$, seuil : $M = 500$ et de montant de transfert minimal $F = 10$. La contrepartie X décide de vendre ce put à la contrepartie Y.

Soit la date 9, supposons que le seuil M n'a jamais été dépassé précédemment.

Suite à un choc boursier, le cours du sous-jacent tombe à $S(t = 9) = 490$. Le prix du put est alors $P(t = 9) = 507$. L'exposition de Y est alors $M + F > 507 > M$, bien que l'exposition soit supérieur au seuil, le transfert est inférieur au transfert minimal F, **aucun versement n'a lieu**.

Le lendemain, le cours du sous-jacent tombe à $S(t = 10) = 250$. Le prix du put est de $P(t = 10) = 747.12$. L'exposition de Y vaut $547 > M+F$, **X doit verser $547 - 500 = 47$ à Y avant $t = 10 + R = 12$**

Une illustration graphique de l'impact des appels de marge sur l'exposition est donnée ci-dessous. On peut remarquer trois phénomènes. Le premier se situe autour de la date 200. L'exposition est inférieur au seuil d'appel, il n'y a donc pas eu de versement et l'exposition est égale à la valeur du contrat. Le deuxième est observable autour de la date 320. Avant cette date, un versement de collatéral a eu lieu et l'exposition est donc égale à la valeur du contrat oté du montant de versement. Le prix du contrat continuant à augmenter, un deuxième appel est effectué. Le troisième prend place entre les dates 10 et 50, un versement de collatéral a été effectué ; la baisse du prix du contrat entraîne à une valeur inférieure au seuil entraîne une exposition nulle sans que le prix soit négatif. LE collatéral n'est rendu que lorsque le seuil est atteint à la baisse, c'est à dire lorsque le prix devient négatif.

En général, il est d'usage d'introduire un second seuil nommé seuil effectif $H^{(e)} = H + F$ si $H > 0$, $H^{(e)} = H - F$ si $H < 0$, ce seuil est alors considéré en lieu et place de H. L'intérêt de cette opération est de conserver la caractéristique principale du montant de transfert minimal -ou minimal transfert amount (MTA)- tout en négligeant les effets secondaires liés à des versements supplémentaires de collatéral. En effet, ces versements sont moins fréquents et surtout viennent en addition du premier, l'influence du MTA est donc moins importante dans ces cas d'où la négligence. Cette procédure permet d'alléger

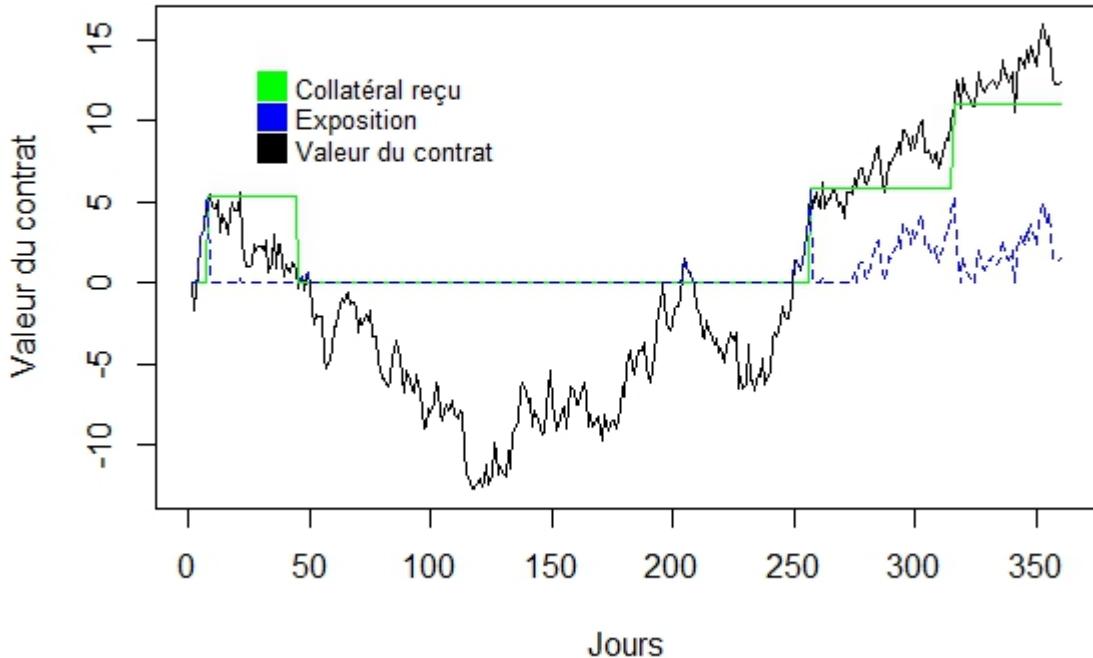


FIGURE 13 – Impact de l'appel de marge sur l'exposition générée par un contrat

les notations et peut être aisément réintroduite lors de l'étape d'implémentation.

L'exposition est recalculée après chaque versement ; elle est alors définie comme l'exposition collatéralisée -le versement de l'appel de marge s'appelle un versement collatéral-. Pour résumer :

- Le collatéral est définie par : $C(t) = \max(V(t-s) - H^{(e)}, 0)$
- Un versement algébrique de collatéral par : $\delta C(t) = \max(V(t-s) - C(t-s) - H^{(e)}, -C(t-s))$ Si ce montant est négatif, il ne s'agit pas d'un versement mais d'un rendu de collateral par la banque à la contrepartie.
- L'exposition collatéralisée est donnée par : $E_C(t) = \max(V(t) - C(t), 0)$

Avec H le seuil, s la durée de l'appel de marge, et $\delta C(t)$ rendu nul si sa valeur absolue est inférieure au montant de transfert minimal.

Ce type d'accord peut être unilatéral -une seule des contreparties peut verser un collatéral- ou bilatéral-les deux contreparties peuvent-. L'accord unilatéral nous a permis d'introduire le concept, détaillons désormais l'accord bilatéral.

Dans le cadre bilatéral, les deux contreparties peuvent verser du collatéral. Nous allons donc définir deux seuils : $H_{cpt} > 0$, la contrepartie verse du collatéral quand la banque est trop exposée ; $H_{bnk} < 0$, la banque verse du collatéral si c'est la contrepartie qui est trop exposée. Nous allons directement considérer les seuils effectifs $H_{bnk}^{(e)} = H_{bnk} - MTA$, $H_{cpt}^{(e)} = H_{cpt} + MTA$ au lieu des seuils initiaux ; le montant minimal de transfert sera considéré comme nul pour les versements secondaires. On a alors :

- Le collatéral est défini par : $C(t) = \max(V(t-s) - H_{cpt}^{(e)}, 0) + \min(V(t-s) - H_{bnk}^{(e)}, 0)$
si il est positif, il est en faveur de la banque, si il est négatif alors il est en faveur de la contrepartie.
- L'exposition collatéralisée de la banque est donnée par : $E_C(t) = \max(V(t) - C(t), 0)$

L'accord bilatéral semble être sans incidence pour la banque par rapport à l'unilatéral. Cependant, dans certains cas, la banque essuie plus de perte si le défaut de la contrepartie survient. En effet, on a :

$$\begin{aligned} E_{C^{bi}}(t) &= \max(V(t) - C(t), 0) \\ &= \max(V(t) - \max(V(t-s) - H_{cpt}^{(e)}, 0) - \min(V(t-s) - H_{bnk}^{(e)}, 0), 0) \end{aligned}$$

que l'on compare avec le cas unilatéral : $E_{C^{uni}}(t) = \max(V(t) - \max(V(t-s) - H_{cpt}^{(e)}, 0), 0)$

$$\begin{aligned} E_{C^{bi}}(t) &> E_{C^{uni}}(t) \\ \iff V(t) - \max(V(t-s) - H_{cpt}^{(e)}, 0) &- \min(V(t-s) - H_{bnk}^{(e)}, 0) > V(t) - \max(V(t-s) - H_{cpt}^{(e)}, 0) \quad (> 0) \\ \iff -\min(V(t-s) - H_{bnk}^{(e)}, 0) &> 0 \\ \iff V(t-s) - H_{bnk}^{(e)} &< 0 \\ \iff H_{bnk}^{(e)} &> V(t-s) \end{aligned}$$

La banque est donc plus exposée lorsque la valeur du contrat est sous son seuil de transfert. Concrètement, si la contrepartie fait défaut en t où $0 > V(t) > C(t)$, la banque subira une perte de $C(t)$.

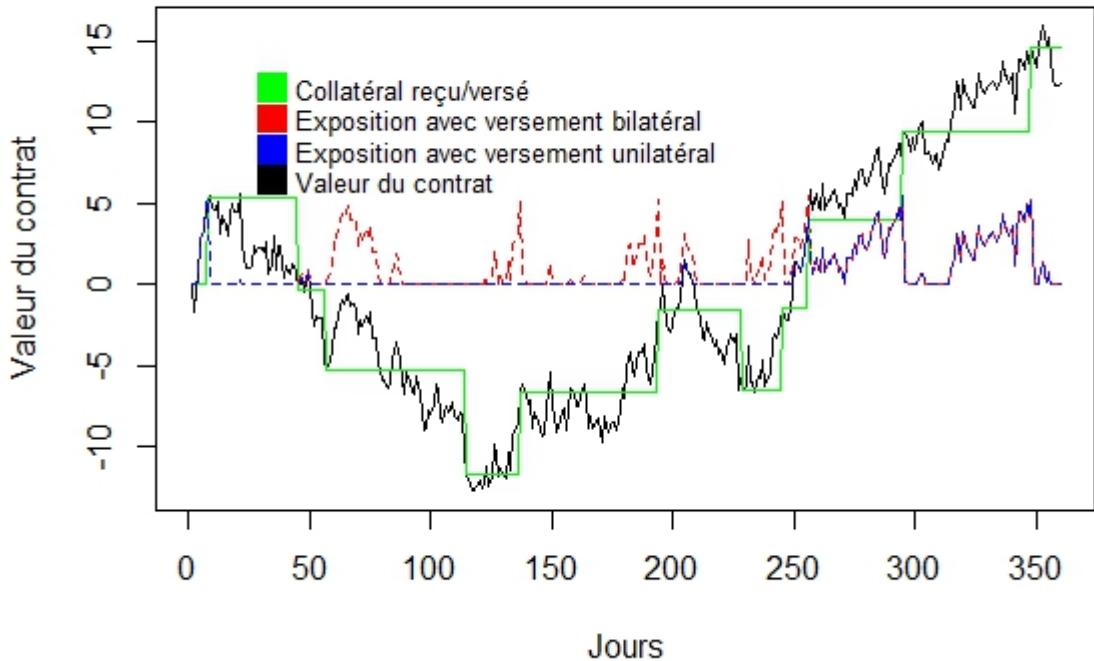


FIGURE 14 – Impact de l'appel de marge bilatéral sur l'exposition générée par un contrat

Une illustration graphique de l'impact des appels de marge bilatéraux par rapport aux unilatéraux sur l'exposition est donnée ci-dessus. On note que l'exposition générée par les appels bilatéraux est en plusieurs points supérieures à celle générée par les unilatéraux. Ces points correspondent aux dates où la valeur du contrat est sous le seuil de transfert. Nous avons l'illustration direct du point démontré précédemment.

1.2.4 Agrégation des contrats

Lors de l'agrégation, la formule donnée par l'équation (8) est appliquée. Ceci est fait via des arbres d'aggrégation. Comme illustré ci-dessous, une exposition est calculée

Mémoire présenté pour le titre d'actuaire: Éléments d'implémentation d'un modèle de CVA: Étude du modèle de taux

pour chaque accord de compensation. Cette exposition est ensuite sommée pour obtenir une exposition globale par contrepartie. Au final, l'exposition générale est calculée. Il s'agit d'une somme de l'exposition globale de chaque contrepartie. L'arbre classique d'aggrégation des contrats est représenté ci-dessous :

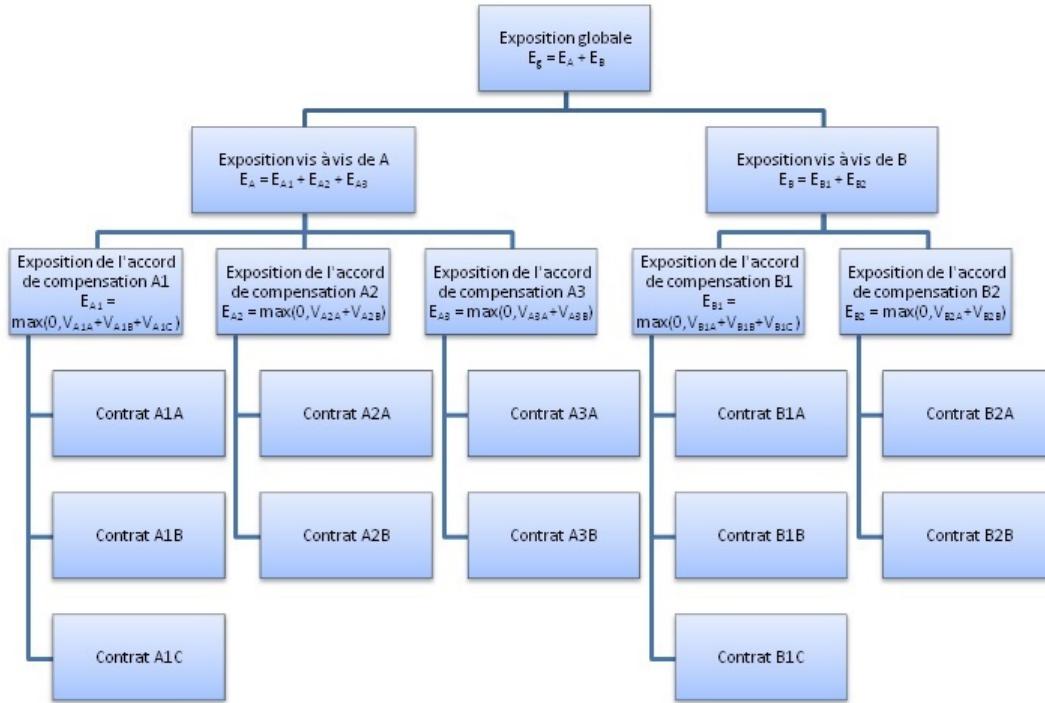


FIGURE 15 – Arbre d'aggrégation des contrats pour le calcul de l'exposition globale

De par la définition de l'exposition, celle-ci sont toujours positive. Il en résulte que l'exposition globale d'une entité est toujours positive - le cas de nullité est en effet presque sûrement nul.

1.2.5 Outils de visualisation de l'exposition au cours du temps

Selon ce que l'on cherche à visualiser, plusieurs graphes peuvent être tracés. Ces graphiques permettent de visualiser l'impact du facteur temps sur la valeur souhaitée, on les appelle profils. Ils sont obtenus par le calcul de statistiques -moyenne, quantiles...- sur l'exposition aux différentes dates. Le tracé de l'exposition prévue est donné par l'exposition moyenne à chaque date ; la PFE -exposition future possible- concerne quand à elle le quantile à 95%.

Ces courbes peuvent prendre plusieurs formes selon le type de produit contenu dans le portefeuille. Pour un swap *Fx forward* de maturité T, l'exposition sera croissante jusqu'à la maturité. Ceci est dû à l'effet dit de *diffusion* : plus la date simulée est loin, plus le taux Fx considéré peut s'envoler. Pour un swap, un pic d'exposition est présent. L'effet d'amortissement lié à la diminution du nombre de dates d'échange contrecarre l'effet de diffusion. Ce pic est généralement durant la première moitié de la vie du produit. On note bien sur ce graphique que pour les dates inférieures à 11, l'exposition augmente puis qu'elle diminue pour tendre vers 0 avec l'extinction des flux futurs.

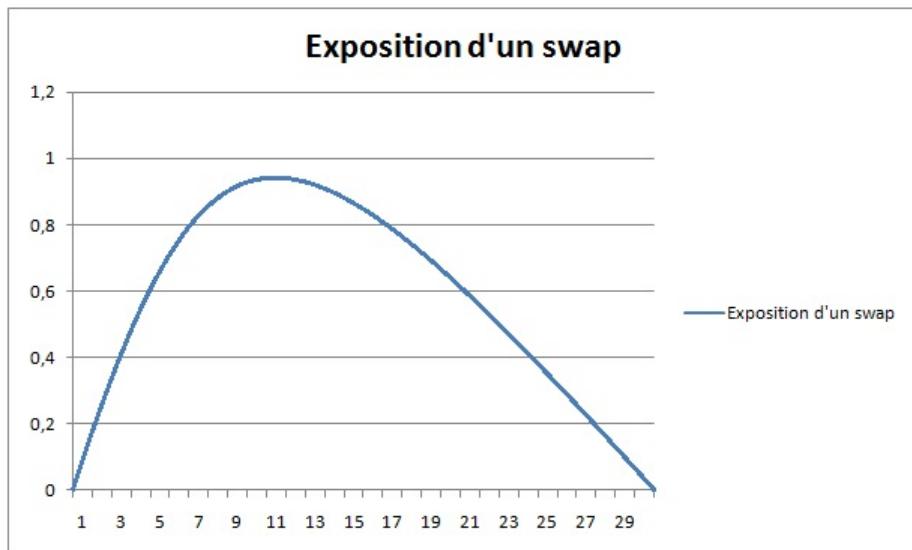


FIGURE 16 – Profil d'exposition à 95% d'un swap

1.3 Présentation de la credit value adjustment

La *credit value adjustment* ou CVA est définie comme le prix de marché du risque de contrepartie. C'est la différence entre le prix d'un portefeuille sujet au risque de défaut d'une ou plusieurs contreparties et ce même portefeuille non sujet à ce risque.

Cette notion a été introduite en 2000 dans la norme IFRS (International Financial Reporting Standards³). Elle est définie comme une mesure comptable devant être recalculée tous les 3 mois. Dans un premier temps, compte tenu de la faible volatilité des spreads de crédit, les profits et les pertes liées à des changements de la valeur de la CVA resteront minimes et le risque de contrepartie, pour sa part, peu pris en compte par les banques.

3. <http://www.ifrs.org>

La crise des subprimes et plus spécifiquement le défaut de *Lehman Brothers* en 2008 révéla l'importance de la prise en compte de ces deux notions. En effet, la Lehman Brothers était engagée dans un grand nombre d'opérations financières plus de 1.5 millions de contrats sur les dérivés avec plus de 8000 contreparties différentes. Ses contrats non couverts par un *netting agreement* causèrent plusieurs milliards de pertes aux contreparties impliquées- il en est de même pour les contrats couverts par un netting agreement mais dans de moindres proportions - ce qui déstabilisa un peu plus le secteur et accentua la crise.

1.3.1 Présentation mathématique de la CVA

Considérons deux entités, A et B , liées par au moins un contrat. Nous allons ici présenter mathématiquement la CVA classique, c'est-à-dire la CVA du point de vue de A où seule la contrepartie B peut faire défaut. Commençons tout d'abord par introduire le taux de recouvrement R qui correspond à la proportion de l'exposition que A pourra récupérer suite au défaut de B . Nous considérerons ce taux constant pour le moment -cette hypothèse pourra être relâchée sous certaines conditions-. La fonction de perte actualisée suite au défaut de B en τ est donnée par :

$$L^* = 1_{\tau \leq T} (1 - R) \frac{B_0}{B_\tau} E(\tau) \quad (9)$$

avec T la maturité maximale du portefeuille soumis au risque et B_t la valeur en t d'une unité monétaire investie aujourd'hui au taux d'intérêt en vigueur pour la maturité t .

La CVA correspond à l'espérance sous la mesure risque-neutre de la fonction de perte actualisée. On déduit donc de l'expression précédente :

$$CVA = \mathbb{E}^Q[L^*] = \int_0^T (1 - R) \mathbb{E}^Q \left[\frac{B_0}{B_\tau} E(\tau) | \tau = t \right] dP_D(0, t) \quad (10)$$

Avec $P_D(u, v)$ la probabilité de défaut de la contrepartie entre u et v dans l'univers risque neutre. Cette probabilité de défaut est obtenue grâce aux prix de marché des CDS -couverture de défaillance- de la contrepartie en fonction de la maturité voulue. On dit que cette probabilité est basée sur la structure par terme des CDS.

On remarque que nous avons une espérance conditionnelle au défaut en t dans notre formule. Cette conditionnalité permet de prendre en compte les cas où il y a corrélation entre la qualité de la contrepartie et la valeur de l'exposition. Cette corrélation est nommée le Wrong/Right Way Risk selon le sens de la corrélation. Le lecteur pourra se référer au rapport *étude du Wrong Way Risk au sein de la CVA* de Clément Schaller qui détaille la prise en compte du Wrong Way Risk en terme d'implémentation[13]. Il est d'usage

de considérer un simple espérance plutôt que l'espérance conditionnelle. Le modèle est ensuite corrigé par une modélisation annexe du Wrong/Right Way Risk.

Notre formule devient alors :

$$CVA = \mathbb{E}^Q[L^*] = \int_0^T (1 - R) \mathbb{E}^Q[\frac{B_0}{B_\tau} E(\tau)] dP_D(0, t) \quad (11)$$

$$= \mathbb{E}^Q[L^*] = \int_0^T (1 - R) EE(t) dP_D(0, t) \quad (12)$$

$EE(t)$ est l'exposition prévue actualisée sous la probabilité risque-neutre. Nous avons vu précédemment comment modéliser cette exposition. Nous avons aussi vu qu'il n'était pas envisageable d'obtenir une exposition continue. Nous utiliserons donc la forme discrétisée de l'équation précédente :

$$CVA = \mathbb{E}^Q[L^*] = \sum_{i=1}^N (1 - R) EE(t_k) P_D(t_{k-1}, t_k) \quad (13)$$

Avec $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_N = T$ une subdivision de pas constant.

1.3.2 Problèmes soulevées par la CVA bilatérale

Lors du calcul de la CVA bilatérale, le risque de défaut des deux contreparties est pris en compte. Prendre en compte le défaut de la banque permet de diminuer la CVA, la banque ne pourra en effet pas payer ses créateurs. De plus, si elle fait défaut avant la contrepartie, alors elle ne subira aucune perte pour le contrat qui les lie.

Dans cette optique, la banque a donc tout intérêt à vendre des produits contre son propre risque de défaut. En effet, elle ne pourrait en aucun cas payer les montants dûs et ne subirait donc aucune exposition sur ces contrats. Ce procédé est à proprement parler inenvisageable, vendre des CDS contre son propre défaut n'est pas possible. Pour pallier à ce problème, *Merril Lynch* décida de vendre des CDS contre le défaut d'une entreprise comparable. Cette entreprise fut la *Lehman Brother*. Les CDS des deux entreprises étant de caractéristiques proches, en matière de risque pris et de numéraire, vendre des CDS *Lehman* ou *Merril* revenait, bon an mal an, au même. Ces deux banques avaient une probabilité très faible de défaut, les risques encourus par une telle vente ont donc été négligés.

On peut déjà entrevoir l'aspect pervers de la bilatéralité de la CVA. Elle encourage indirectement le risque de contrepartie en biaisant la garantie des CDS. Le second effet est l'accentuation de la corrélation des défauts. En effet, pour avoir vendu à outrance des CDS de *Lehman*, *Merril Lynch* s'est trouvé en très grande difficulté lors du défaut de la

Lehman. Le risque de contrepartie et le risque d'exercice des CDS se sont en effet cumulés lors du défaut de la Lehman Brothers et infligèrent de lourdes pertes à la banque. Merrill Lynch évita la faillite grâce à son absorption par Bank of America.

1.3.3 Indépendance entre l'exposition et la qualité de la contrepartie

Afin de pouvoir calculer l'espérance conditionnelle dans la formule de la CVA vue précédemment $CVA = \int_0^T (1 - R) \mathbb{E}^\mathbb{Q} [\frac{B_0}{B_\tau} E(\tau) | \tau = t] dP_D(0, t)$, nous avons fait l'hypothèse que la qualité de la contrepartie, c'est-à-dire sa propension à faire défaut, n'est pas liée à l'exposition. Négliger cette corrélation est de faible impact pour des marchés de change ou de taux d'intérêt. Pour le marché des commodities -sucre, pétrole, or entre autres-, des dérivés d'actions ou encore des crédits, l'impact peut être beaucoup plus fort.

Un exemple classique est l'achat auprès d'une compagnie aérienne d'un call sur le kérosène. Si les prix augmentent et dépassent le prix d'exercice, non seulement la compagnie aérienne devra supporter le surcoût d'exploitation mais en plus elle devra livrer le kérosène en dessous du marché. Ce call risque d'accentuer la mauvaise santé de la compagnie, il y a une corrélation positive entre le risque de défaillance et l'exposition, c'est le Wrong Way Risk. A l'inverse, l'achat d'un put caractérise le Right Way Risk, plus les prix baissent meilleurs est la santé de la compagnie et plus elle sera apte à livrer le kérosène.

Pour illustrer ce propos, considérons que la probabilité de défaut instantanée de la compagnie aérienne est définie par $P_D = \frac{1}{B_{max}-x}$ ⁸ où x est le prix du baril de kérosène et B_{max} le prix qui ferait faire faillite à la compagnie de manière certaine.

Soit $C = [x - B_{call}]_+$ le payoff du call de date d'exercice T=260 jours acheté auprès de cette compagnie. Pour $x_0 = 100$, $B_{max} = 140$ et $B_{call} = 120$ et sous l'hypothèse grossière d'une évolution du cours $x_{n+1} = x_n * \mathcal{LN}(\frac{0.25}{260}, \frac{0.25*5}{260})$, une simulation de Monte-Carlo sur 10000 scénarios donne les deux graphiques suivant :

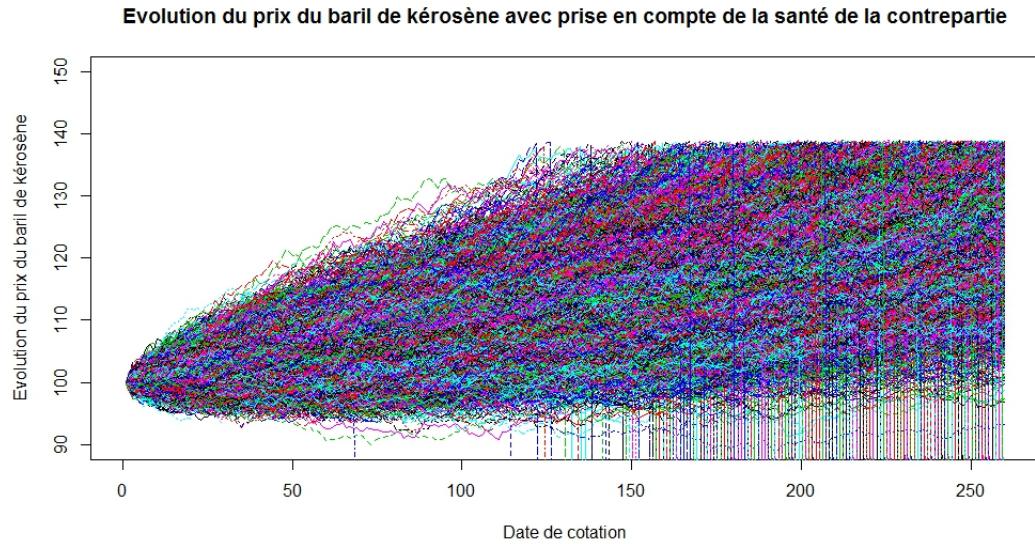


FIGURE 17 – Evolution du prix de marché du baril de kérosène

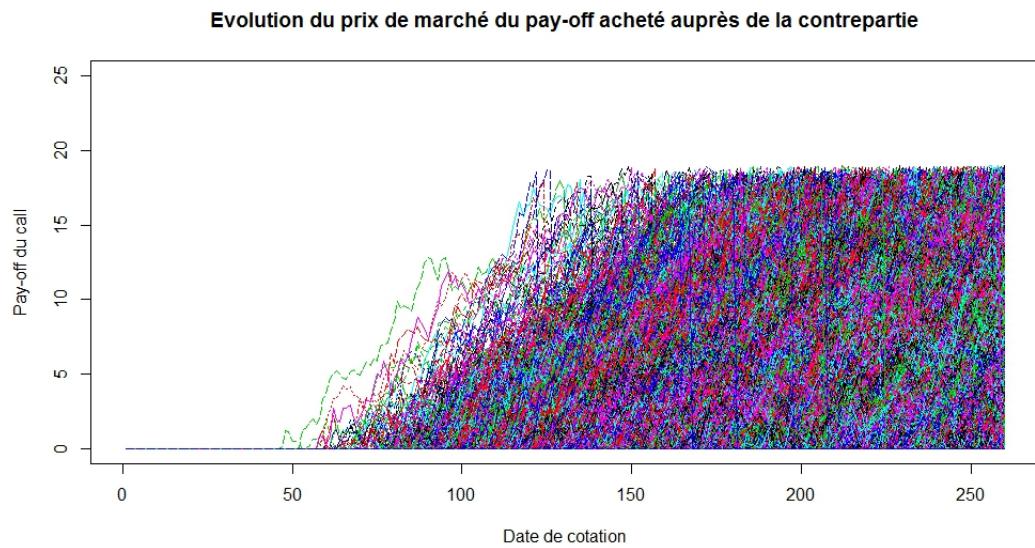


FIGURE 18 – Evolution du pay-off du call sur le kérosène acheté auprès de la compagnie aérienne

On note que les chemins sont tronqués lorsqu'ils dépassent le prix de faillite ; une fois

Mémoire présenté pour le titre d'actuaire: Éléments d'implémentation d'un modèle de CVA: Étude du modèle de taux

cette barrière passée, la contrepartie ne peut plus remplir ses engagements. Le graphique des pay-offs se retrouve quant à lui écrêté à partir de 20 ; hors actualisation, le prix du call passe de 9.40 à 5.26 avec la prise en compte de la probabilité de défaut de la contrepartie. Ici, le Wrong Way Risk donne lieu à diminution de 44% du prix de l'instrument. Bien que les hypothèses aient été exagérées pour l'exemple, nous illustrons l'importance de la modélisation de cette corrélation pour le marché des commodités. Le comité de Bâle[4] privilégie la multiplication de l'exposition par un facteur $\alpha = 1,4$ quelque soit la contrepartie. Ce facteur peut être ajusté en fonction du type de l'institution, sa valeur minimale non écrite étant de 1,2. Cet α peut être majoré en cas d'une faible diversification des contreparties, d'un portefeuille restreint ; les caractéristiques propres à l'institution concernée influent elles aussi sur ce paramètre.

Devant le caractère trop grossier de la modélisation précédente et dans une stratégie d'optimisation, les banques se sont tournées vers des modèles plus complexes. Le plus privilégié de ces modèles est actuellement celui de Hull&White.

Il consiste à introduire une fonction de hasard -et donc une fonction de survie- pour les contreparties et à les corrélérer avec les portefeuilles de contrats qui associés. La fonction de hasard proposée par Hull&White est :

$$h(t) = \exp(a(t) + b\omega_t) \quad (14)$$

Avec ω_t la valeur du portefeuille à l'instant t , a, b des paramètres à estimer. La probabilité de défaut de la contrepartie devient alors

$$P_D : (u, v) \mapsto \int_u^v \exp(a(t) + b\omega_t) dt \quad (15)$$

ou en discrétilisant :

$$P_D : (u, v) \mapsto \exp(a(v) + b\omega_v)(v - u) \quad (16)$$

d'où l'expression corrigée de la CVA :

$$CVA = \sum_{i=1}^N (1 - R) EE(t_k) \exp(a(t_k) + b\omega_{t_k})(t_{k-1} - t_k) \quad (17)$$

Pour la CVA, la valeur du portefeuille est un des paramètres indirects du calcul. ω est donc directement obtenu et ne nécessite pas de calcul supplémentaire. Ce paramètre peut néanmoins être remplacé par un autre indice répliquant les variations de sa valeur. Le paramètre b met en lumière les effets endogènes aux portefeuilles et à la relation entre

les deux contreparties ; le paramètre a quant à lui est plutôt lié au reste du monde et est donc plus exogène.

Dans leur article[6], Hull et White affirment que le paramètre b est un indicateur de la sensibilité de $h(t)$ aux variations de ω_t ; le paramètre a est lui calibré pour que la probabilité de défaut soit en accord avec la structure par terme des spreads de crédit associés à la contrepartie. Il faut cependant noter que le modèle proposé ne précise pas de méthode de calibration. Le fait que le facteur b ne soit pas normalisé induit une grande latitude dans son usage et font de sa calibration un exercice approximatif proche de l'arbitraire

2 Introduction des modèles

La méthode que nous exploitons est celle de Zhu et Pykhtin[15]. Comme évoqué précédemment, celle-ci dissocie la simulation de défaut de la simulation d'évolution. Bien que le choix du modèle de défaut reste déterminant, son impact sur le temps de calcul est bien moins important que celui du modèle de taux. Nous évoquerons donc de manière sommaire différents modèles de défauts avant de nous concentrer sur l'étude approfondie des modèles de taux.

2.1 Les modèles de défaut

Il est essentiel pour le calcul de CVA de choisir un modèle de défaut. C'est ce modèle qui nous permet de simuler les défauts des contreparties et donc d'obtenir la valeur de la CVA. Il est de plus possible dans certains cas d'inclure des dépendances entre les faillites des contreparties. Ceci est bien utile quand il s'agit de modéliser un portefeuille contenant un grand nombre de contreparties issues du même secteur.

2.1.1 Le modèle de Merton

Merton visualise une entreprise comme un ensemble constitué d'un actif de valeur de marché $A(t)$ et d'un passif de valeur marché $L(t)$. Ce passif est-lui même composé de fonds propres valant $E(t)$ et d'une obligation $M(t)$ de nominal B et d'échéance T . Cette obligation peut être considérée comme un zéro coupon par exemple.

La valeur des actifs est modélisée par une dynamique suivant l'équation de Black&Scholes :

$$dA(t) = A(t)r dt + \sigma A(t)dW(t) \quad (18)$$

Merton considère qu'il ne peut y avoir défaut qu'en T ; ce défaut sera effectif si $L(T) > A(T)$, c'est-à-dire si les actifs ne suffisent pas à solder le passif. En T , les obligataires recevront donc $\min(A(T), B)$ et les actionnaires $\max(A(T) - B, 0)$. Ces deux montants peuvent être réécrits comme suit :

$$\begin{aligned} \min(A(T), B) &= B - (B - A(T))^+ = ZC(T, B, T) - Put(T, A, B, T) \\ \max(A(T) - B, 0) &= (A(T) - B)^+ = Call(T, A(T), B, T) \end{aligned}$$

Nous avons exprimé la possession d'une dette risquée comme la combinaison d'un zéro-coupon -dette non-risquée- et d'une vente d'une option de vente qui correspond au droit attribué à la firme de faire défaut. Nous pouvons donner un prix à cette dette à tout

moment. On a :

$$ZC(t, B, T) = Be^{-r(T-t)} \quad Put(t, A, B, T) = -A(t)\Psi(-d_1) + Be^{-r(T-t)}\Psi(-d_2)$$

Donc $M(A, t) = A(t)\Psi(-d_1) + Be^{-r(T-t)}(1 - \Psi(-d_2)) = A(t)(1 - \Psi(d_1)) + Be^{-r(T-t)}\Psi(d_2)$

(19)

Ψ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\Psi(0, 1)$, $d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} [\ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T]$, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$

Bien que ce modèle nous permette de modéliser le défaut et de donner un prix au zéro-coupon risqué, ce modèle est bien trop rigide. En effet, il ne nous permet pas de prendre en compte ni les défauts avant l'échéance, ni les structurations des dettes. D'autres défauts de ce modèle sont la difficulté d'observer le processus des actifs A et le déclenchement conditionnel du défaut via une barrière de franchissement. Par ailleurs, considérer comme déterministe le taux sans risque est une hypothèse discutable sur les échéances moyennes et longues.

2.1.2 Le modèle de premier passage avec barrière aléatoire

Ce modèle est une amélioration du modèle initial de Merton. Au lieu de considérer l'état de la contrepartie uniquement à la date T, son état est surveillé en tout $t < T$. On introduit pour cela un indicateur de qualité de crédit de la contrepartie, disons V. L'évolution de cet indicateur est régit par l'EDS suivante :

$$dV(t) = V(t)\sigma dW(t)$$

σ est la volatilité de l'indicateur et W un mouvement brownien.

Nous allons introduire une barrière B qui correspond à la qualité minimale évitant le défaut. Dès que cette barrière est atteinte, le processus est arrêté et il y a défaut de la contrepartie. Pan[11] suggère d'établir cette barrière telle que $B = LD$, où D est le rapport $\frac{\text{dette}}{\text{action}}$ et L une variable aléatoire lognormale de paramètre μ, v^2 qui représente le taux de recouvrement. Soit Y une variable aléatoire de loi normale centrée réduite, l'expression de la barrière est :

$$B = De^{\mu+vY} = De^{\mu+\frac{v^2}{2}} e^{vY-\frac{v^2}{2}} = D\ell e^{vY-\frac{v^2}{2}}$$

(20)

ℓ est la moyenne de L, elle peut être estimée en fonction des données historiques des agences de notations ; il en va de même pour v qui est lié à la variance de L par $v^2 = \ln(\frac{\text{Var}(L)}{\mathbb{E}(L)^2} + 1)$. L'auteur nous spécifie que la variance des taux de recouvrement est

très grande. Ceci se comprend aisément.

Il dépend du secteur de la contrepartie ainsi que de l'environnement économique. Une explosion de bulle est plus enclin à donner des faibles taux de recouvrement qu'une période plus stable. De plus, ce taux dépend beaucoup des raisons du défaut -soit financières, soit opérationnelles- et de la manière dont la faillite est gérée -soit elle est restructurée, soit elle est liquidée-.

La condition de défaut en $t > 0$ devient donc :

$$V(0) \exp(\sigma W(t) - \frac{\sigma^2}{2}t) < \ell D \exp(vY - \frac{v^2}{2}) \quad (21)$$

En définissant le processus $X(t) = \sigma W(t) - vY - \frac{\sigma^2}{2}t - \frac{v^2}{2}$, la condition devient :

$$X(t) < \ln\left(\frac{\ell D}{V(0)}\right) - v^2 \quad (22)$$

Avec $X(t)$ suivant une loi $\mathcal{N}(-\frac{v^2+\sigma^2 t}{2}, v^2 + \sigma^2 t)$ notée $\mathcal{N}(\mu t, \theta^2 t)$. En posant $d = \ln(\ell \frac{D}{V(0)}) - v^2$, la probabilité que la contrepartie n'ait pas fait défaut en t est donné par :

$$P(\tau > t) = \Psi\left(\frac{\mu t - d}{\theta \sqrt{t}}\right) - \exp\left(\frac{2\mu d}{\theta^2}\right) \Psi\left(\frac{\mu + d}{\theta \sqrt{t}}\right) \quad (23)$$

Les modèles précédents sont des modèles structurels. Le défaut est prévisible, et il n'est pas possible d'inclure des informations exogènes. Nous allons dans la suite présenter des modèles dits à intensité. Ces modèles auront de plus l'avantage d'être plus proche des chiffres du marché, notamment pour les spreads courts.

2.1.3 Le modèle de Cox

Ce modèle est dit à intensité. Ceci signifie que le défaut est modélisé par un processus de poisson dont l'instant du premier saut correspond à la date de défaut et la hauteur de ce saut correspondra à l'importance du défaut. Le paramètre d'intensité -noté en général λ - est le coefficient de proportionnalité entre la probabilité de défaut et la durée de l'intervalle, il s'agit donc de la probabilité instantanée de défaut de la contrepartie. Il est stochastique.

Dans le modèle de Cox, l'intensité est à la fois stochastique et dépendante du temps. Elle est, de plus, considérée comme continue à droite et \mathcal{F}_t -adaptée- avec \mathcal{F}_t les informations disponibles sur le marché sans risque en t . Elle est notée λ_t et est strictement

positive. On peut définir la fonction de hasard comme suit : $\Lambda_T = \int_0^T \lambda_t dt$. Étant donné que l'intensité est \mathcal{F}_t -adaptée, on peut considérer que les valeurs prises par λ_t découlent de l'état du marché sans risque.

Dans ce cas, avec N le processus du modèle, la date du défaut τ est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N(t) = 1 | \mathcal{F}_t) &= \Lambda_t e^{-\lambda_t} \\ \Lambda_\tau &= \mathcal{E} \quad \mathcal{E} \text{ une variable aléatoire de loi exponentielle} \\ \tau &= \Lambda^{-1}(\mathcal{E})\end{aligned}$$

Nous pouvons donc directement simuler l'instant de défaut avec ce modèle. Nous avons pour cela deux sources de stochasticité, la variable aléatoire exponentielle et la variable λ .

2.2 Les modèles de taux

Nous avons vu que l'élément important dans la CVA est, outre la précision du résultat, la rapidité du calcul ainsi que la facilité de l'implémentation. Nous allons dans cette section présenter différents modèles de taux candidats, et évoquerons leurs avantages ainsi que leurs défauts.

2.2.1 Les modèles de taux court à un facteur

Cette catégorie renferme tous les modèles qui considèrent la modélisation du processus du taux spot r grâce à un unique facteur. Ceci signifie que toutes les maturités seront modélisées selon les mêmes paramètres. À l'inverse, les modèles multi-factoriels permettent d'obtenir des comportements différents selon les diverses maturités. L'intérêt des monofactoriels est qu'ils fournissent directement les briques élémentaires des marchés de taux - à savoir les taux, les bons... - grâce à la méthode d'absence d'opportunité d'arbitrage. Dans ces modèles, le prix $A(t)$ en t d'un produit livrant $A(T)$ en T sera donné par :

$$A(t) = \mathbb{E}^t(D(t, T)A(T)) = \mathbb{E}^t \left(\exp \left(- \int_t^T r(s) ds A(T) \right) \right) \quad (24)$$

Avec E_t l'espérance sous la mesure risque neutre sachant \mathcal{F}_t . Les modèles les plus utilisés sont regroupés dans le tableau ci-dessous[2] :

Nom	Dynamique du taux court
Vasicek	$dr_t = k[\theta - r_t]dt + \sigma dW_t$
Dothan	$dr_t = ar_t dt + \sigma r_t dW_t$
Cox, Ingersoll et Ross	$dr_t = k[\theta - r_t]dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t$
Vasicek exponentiel	$dr_t = r_t[\eta - aln(r_t)]dt + \sigma r_t dW_t$
Hull et White	$dr_t = k[\theta_t - r_t]dt + \sigma dW_t$
Black et Karasinski	$dr_t = r_t[\eta_t - aln(r_t)]dt + \sigma r_t dW_t$
CIR++	$dr_t = x_t + \phi_t, dx_t = k[\theta - x_t]dt + \sigma \sqrt{x_t} dW_t$
Hull et White à deux facteurs	$dl(t) = \alpha_l(\mu(t) - l(t))dt + \sigma_l dW_l(t)$ $dr(t) = \alpha_r(l(t) - r(t))dt + \sigma_r dW_r(t)$
BGM	Sans Objet

2.2.1.1 Le modèle de Vasicek

Ce modèle considère que le taux court évolue autour d'une moyenne long terme. Un terme de retour k permet de spécifier la force de rappel vers le taux long θ . Sous la mesure risque neutre et pour r_0, k, θ, σ constants et positifs, W un mouvement brownien, la dynamique s'écrit :

$$dr_t = k[\theta - r_t]dt + \sigma dW_t \quad (25)$$

La valeur du taux court en t sachant \mathcal{F}_s est donnée par :

$$r(t) = r(s)e^{-k(t-s)} + \theta(1 - e^{-k(t-s)}) + \sigma \int_s^t e^{-k(t-u)} dW(u) \quad (26)$$

Le processus suit donc une loi normale dont l'espérance et la variance sont données par :

$$\mathbb{E}[r(t)|\mathcal{F}_s] = r(s)e^{-k(t-s)} + \theta(1 - \exp(-k(t-s))) \quad (27)$$

$$Var(r(t)|\mathcal{F}_s) = \frac{\sigma^2}{2k}[1 - e^{-2k(t-s)}] \quad (28)$$

On peut voir ici un défaut de ce modèle, suivre une loi normale peut donner des taux négatifs, chose que l'on cherche en général à éviter. Il faut cependant relativiser ce point. Longtemps cantonnés au marché japonais, les taux négatifs sont aujourd'hui rencontrés sur les marchés de taux européens. Il conviendra au lecteur/l'utilisateur de considérer ou non cette caractéristique comme un défaut.

Cherchons désormais à établir le prix d'un zéro-coupon dans ce modèle.

$$\begin{aligned}
P(t, T) &= \mathbb{E}(\exp(-\int_t^T r(s)ds) | \mathcal{F}_t) \\
&= \mathbb{E}(\exp(-\int_t^T r(t)e^{-k(s-t)}ds - \int_t^T \theta(1 - e^{-k(s-t)})ds - \int_t^T \sigma \int_t^s e^{-k(s-u)}dW(u)ds) | \mathcal{F}_t) \\
&= \mathbb{E}(\exp(r(t) \frac{e^{-k(T-t)} - 1}{k})) \\
&\quad \times \exp(\theta(T-t + \frac{1}{k}(e^{-k(T-t)} - 1))) \times \exp(-\int_t^T \sigma \int_t^s e^{-k(s-u)}dW(u)ds) | \mathcal{F}_t)
\end{aligned}$$

en utilisant Fubini stochastique

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}(\exp(r(t) \frac{e^{-k(T-t)} - 1}{k})) \\
&\quad \times \exp(\theta(T-t + \frac{1}{k}(e^{-k(T-t)} - 1))) \times \exp(-\int_t^T \sigma \frac{1 - e^{-k(T-u)}}{k}dW(u)) | \mathcal{F}_t)
\end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Feynman-Kac pour l'intégration stochastique, on obtient le prix du zéro-coupon suivant :

$$P(t, T) = A(t, T)\exp(-B(t, T)r(t)) \quad (29)$$

avec $A(t, T) = \exp\left[(\theta - \frac{\sigma^2}{2k^2})(B(t, T) - T + t) - \frac{\sigma^2}{4k}B(t, T)^2\right]$ et $B(t, T) = \frac{1 - \exp(-k(T-t))}{k}$. Cette forme pour le zéro-coupon est caractéristique des modèles de taux affines.

2.2.1.2 Le modèle de Dothan

Initialement introduit sous la probabilité historique comme un mouvement brownien géométrique, Dothan modifia son modèle en incorporant un coût du risque. Sous la probabilité risque-neutre, la dynamique du taux court s'exprime comme suit :

$$dr(t) = ar(t)dt + \sigma r(t)dW(t), \quad a \text{ un réel}$$

Cette dynamique du type Black&Scholes donne l'expression suivante pour le taux court :

$$r(t) = r(s)\exp\left[\left(a - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t-s) + \sigma(W(t) - W(s))\right]$$

On reconnaît ici l'expression d'un processus suivant une loi log-normale lorsque \mathcal{F}_s est connu. Ce modèle propose donc des taux exclusivement positifs à l'inverse de Vasicek. Sa variance et sa moyenne sont données par :

$$\mathbb{E}(r(t)|\mathcal{F}_s) = r(s)\exp(a(t-s))$$

$$Var(r(t)|\mathcal{F}_s) = r^2(s)e^{2a(t-s)}(e^{\sigma^2(t-s)} - 1)$$

Le calcul de l'espérance quand t tend vers l'infini donne :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(r(t)|\mathcal{F}_s) = \lim_{t \rightarrow \infty} r(s)e^{a(t-s)} = \begin{cases} \infty & \text{si } a > 0 \\ 0 & \text{si } a \leq 0 \end{cases} \quad (30)$$

L'espérance diverge donc lorsque $a > 0$, il n'y a de retour à la moyenne que lorsque $a < 0$.

En annexe A, nous chercherons présenter l'obtention du prix d'un zéro coupon via la méthode proposée par Dothan[5] Nous trouverons que le prix du zéro coupon dans ce modèle est donné par :

$$P(t, T) = \frac{\bar{r}^p}{\Pi} \int_0^\infty \sin(2\sqrt{\bar{r}} \sinh(y)) \int_0^\infty f(z) \sin(yz) dz dy + \frac{2}{\gamma(2p)} \bar{r}^p K_{2p}(2\sqrt{\bar{r}}) \quad (31)$$

avec

$$f(z) = \exp\left[\frac{-\sigma^2(4p^2 + z^2)(T-t)}{8}\right] z |\Gamma(-p + i\frac{z}{2})|^2 \cosh(z\frac{\Pi}{2})$$

$$\bar{r} = 2\frac{r(t)}{\sigma^2}, \quad p = \frac{1}{2} - a$$

avec K_n , la fonction de Bessel modifiée d'ordre n de seconde espèce définie en annexe B. Ce modèle n'est pas affine. De plus, la complexité du prix du zéro coupon semble bien plus grande que dans le modèle de Vasicek. En effet, la formule n'apparaît pas comme fermée. Elle nécessite le calcul de deux intégrales ainsi que l'utilisation de fonctions complexes. Ce modèle ne semble donc pas adapté au calcul de la CVA. Nous jugerons de ce point plus précisément par la suite lors de la comparaison des modèles

2.2.1.3 Le modèle de Cox, Ingersoll et Ross (CIR)

Dans ce modèle, plutôt que d'introduire une dépendance linéaire au taux court dans la volatilité, c'est sa racine carrée qui est préférée. La dynamique du taux court s'écrit comme suit :

$$dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sigma \sqrt{r(t)}dW(t), \quad r(0) = r_0 \quad (32)$$

où r_0, θ, σ, k sont des constantes positives. Pour que le taux soit toujours positif -afin que la racine carrée soit définie-, nous devons rajouter la condition $2k\theta > \sigma^2$

Le taux court r est distribué selon une loi du χ^2 décentrée d'expression suivant :

$$p_{r(t)}(x) = p_{\frac{\chi^2(v, \lambda_t)}{c_t}}(x) = c_t p_{\chi^2(v, \lambda_t)}(c_t x) \quad (33)$$

avec $c_t = \frac{4k}{\sigma^2(1 - \exp(-kt))}$, $v = \frac{4k\theta}{\sigma^2}$, $\lambda_t = c_t r_0 \exp(-kt)$
et $\chi^2(v, \lambda_t)$ la loi du χ^2 à v degrés de liberté et de paramètre de décentrage λ .

L'espérance de cette loi est $v + \lambda$. La variance et l'espérance du taux court sont données par :

$$\mathbb{E}[r(t)|\mathcal{F}_f] = \frac{\lambda + v}{c_t} = r(s)e^{-k(t-s)} + \theta(1 - e^{-k(t-s)}), \quad (34)$$

$$Var[r(t)|\mathcal{F}_f] = 2\left(\frac{v}{c_t^2} + 2\frac{\lambda_t}{c_t}\right) = r(s)\frac{\sigma^2}{k}(e^{-k(t-s)} - e^{-2k(t-s)}) + \theta\frac{\sigma^2}{2k}(1 - e^{-k(t-s)})^2. \quad (35)$$

De cette expression du taux court, on peut obtenir le prix analytique du zéro-coupon. Pour cela, supposons que notre modèle est un modèle affine. L'expression du zéro-coupon est alors de la forme :

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)} \quad (36)$$

en appliquant le lemme d'Îto, on obtient :

$$\begin{aligned} dP(t, T) &= r(t)P(t, T)dt - \sigma\sqrt{r(t)}B(t, T)P(t, T)dW(t) \\ dP(t, T) &= \frac{1}{B(t, T)}\ln\left[\frac{A(t, T)}{P(t, T)}\right]P(t, T)dt - \sigma\sqrt{\frac{1}{B(t, T)}\ln\left[\frac{A(t, T)}{P(t, T)}\right]}B(t, T)P(t, T)dW(t) \\ dP(t, T) &= \frac{1}{B(t, T)}\ln\left[\frac{A(t, T)}{P(t, T)}\right]P(t, T)dt - \sigma\sqrt{B(t, T)\ln\left[\frac{A(t, T)}{P(t, T)}\right]}P(t, T)dW(t) \end{aligned}$$

en passant au logarithme, on obtient

$$d\ln(P(t, T)) = \left(\frac{1}{B(t, T)}\frac{1}{2}\sigma^2B(t, T)\right)\ln\left[\frac{A(t, T)}{P(t, T)}\right]dt - \sigma\sqrt{B(t, T)\ln\left[\frac{A(t, T)}{P(t, T)}\right]}dW(t)$$

on reconnaît alors la forme de l'expression de la dynamique du taux court avec :

$$\begin{aligned} A(t, T) &= \left(\frac{2he^{\frac{(k+h)(T-t)}{2}}}{2h + (k+h)(e^{(T-t)h} - 1)}\right)^{\frac{2k\theta}{\sigma^2}} \\ B(t, T) &= \frac{2e^{h(T-t)} - 1}{2h + (k+h)(e^{(T-t)h} - 1)} \\ h &= \sqrt{k^2 + 2\sigma^2} \end{aligned} \quad (37)$$

Ce modèle est un modèle affine. La formule fermée semble relativement simple à implémenter, reste que le type de diffusion du taux est un peu exotique.

2.2.1.4 Le modèle de Vasicek exponentiel

Ce modèle repose sur le principe de celui proposé par Dothan dans la mesure où il nous permet d'obtenir une distribution log-normale du taux court. Ce n'est pas le taux court qui suit la dynamique de type Vasicek mais son logarithme. Pour θ, σ, a des constantes positives réelles, la dynamique du taux court s'écrit donc :

$$dr(t) = r(t)[\theta + \frac{\sigma^2}{2} - aln(r(t))]dt + \sigma r(t)dW(t) \quad (38)$$

En posant $y(t) = ln(r(t))$ et y_0 un réel, on obtient bien la dynamique de Vasicek :

$$dy(t) = [\sigma - ay(t)]dt + \sigma dW(t), \quad y(0) = y_0 \quad (39)$$

Nous pouvons utiliser directement la résolution de cette dernière équation pour obtenir l'expression du taux court. On a : $y(t) = y(s)e^{-a(t-s)} + \theta(1 - e^{-a(t-s)}) + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)}dW(u)$ d'où le résultat :

$$r(t) = exp \left(ln(r(s))e^{-a(t-s)} + \frac{\theta}{a}(1 - e^{-a(t-s)}) + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)}dW(u) \right) \quad (40)$$

La distribution est clairement log-normale. Son espérance et sa variance sont données par :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[r(t)|\mathcal{F}_s] &= e^{u+\frac{\sigma_N^2}{2}} \\ &= exp(ln(r(s))e^{-a(t-s)} + \frac{\theta}{a}(1 - exp(-a(t-s))) + \frac{\sigma^2}{4a}[1 - e^{-2a(t-s)}]) \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} Var(r(t)|\mathcal{F}_s) &= e^{2\mu+\sigma_N^2}(e^{\sigma_N^2} - 1) \\ &= exp \left(2(ln(r(s))e^{-a(t-s)} + \frac{\theta}{a}(1 - exp(-a(t-s)))) + \frac{\sigma^2}{2a}[1 - e^{-2a(t-s)}] \right) \\ &\quad \times (exp(\frac{\sigma^2}{2a}[1 - e^{-2a(t-s)}]) - 1) \end{aligned} \quad (42)$$

Dans ce modèle, il n'existe pas de formule fermée pour l'évaluation d'un zéro coupon, ni pour les options sur zéro-coupon. Ceci est un problème pour l'utilisation du modèle en CVA, nous verrons plus tard si il peut néanmoins être retenu.

2.2.1.5 Le modèle de Hull&White

Hull et White ont étendu en 1990 le modèle de Vasicek en transformant les constantes en fonctions déterministes du temps : $\theta(t), \alpha(t)$ et $\sigma(t)$. Le paramètre $\theta(t)$ est calibré pour que

Mémoire présenté pour le titre d'actuaire: Éléments d'implémentation d'un modèle de CVA: Étude du modèle de taux

la structure des taux soit au plus proche de celle du marché considéré. D'où l'expression :

$$dr = (\theta(t) - \alpha r(t))dt + \sigma(t)dW(t) \quad (43)$$

Ce modèle donne des résultats qui reproduisent exactement la courbe des taux zéro-coupon du marché si tant est que l'on connaisse le taux forward instantané du marché $(f)^M(0, T) = -\frac{\partial \ln P^M(0, T)}{\partial T}$ avec $P^M(0, T)$ le prix de marché d'un zéro-coupon de maturité T . Dans ce cas, le terme $\theta(t)$ est donné par :

$$\theta(t) = \frac{\partial f^M(0, t)}{\partial T} + \alpha f^M(0, t) + \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t})$$

avec $\frac{\partial f^M(\cdot, \cdot)}{\partial T}$ la dérivé de f^M par rapport à la maturité. Si l'on applique le théorème d'Ito au processus $r(t)e^{\alpha t}$, on montre que :

$$r(t) = r(s)e^{-\alpha(t-s)} + \int_s^t \theta(u)e^{-\alpha(t-u)}du + \sigma \int_s^t e^{-\alpha(t-u)}dw(u) \quad (44)$$

En remplaçant θ par sa valeur et en posant $a(t) = (f)^M(0, t) + \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}(1 - e^{-at})^2$:

$$r(t) = r(s)e^{-\alpha(t-s)} + a(t) - a(s)e^{-\alpha(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-\alpha(t-u)}dw(u) \quad (45)$$

Le processus suit donc un processus gaussien. Comme W est un processus de Wiener. Nous avons donc les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[r(t)|\mathcal{F}_s] &= r(s)e^{-\alpha(t-s)} + a(t) - a(s)e^{-\alpha(t-s)} + \overbrace{\mathbb{E}[\sigma \int_s^t e^{-\alpha(t-u)}dw(u)|\mathcal{F}_s]}^{=0} \\ &= r(s)e^{-\alpha(t-s)} + a(t) - a(s)e^{-\alpha(t-s)} \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} Var[r(t)|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[r(t)^2] - E[r(t)]^2 \\ &= \mathbb{E}[E[r(t)]^2] + 2\mathbb{E}[\mathbb{E}[\sigma \int_s^t e^{-\alpha(t-u)}dw(u)|\mathcal{F}_s](r(s)e^{-\alpha(t-s)} + a(t) - a(s)e^{-\alpha(t-s)})] \\ &\quad + \mathbb{E}[(\sigma \int_s^t e^{-\alpha(t-u)}dw(u))^2|\mathcal{F}_s] - \mathbb{E}[E[r(t)]^2] \\ &= \mathbb{E}[(\sigma \int_s^t e^{-\alpha(t-u)}dw(u))^2|\mathcal{F}_s] \\ &= \frac{\sigma^2}{2\alpha}[1 - e^{-2\alpha(t-s)}] \end{aligned} \quad (47)$$

Nous allons désormais chercher une formule fermée pour le prix d'un zéro-coupon. Le taux court $r(t)$ étant gaussien -conditionnellement à \mathcal{F}_{t-} , son intégrale l'est aussi.

$\pi(t, T) = \int_t^T r(u)du$ est suit donc une loi normale dont l'espérance et la variance sont données par le théorème de Feynman-Kac et valent :

$$Var[\pi(t, T)|\mathcal{F}_t] = \left(\frac{\sigma}{\alpha}\right)^2 \left(T - t + \frac{2e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha} \frac{e^{-\alpha(T-t)}}{2\alpha} - \frac{3}{2\alpha} \right) = V(t, T) \quad (48)$$

$$\mathbb{E}[\pi(t, T)|\mathcal{F}_t] = \frac{1}{\alpha} \left[1 - e^{-\alpha(T-t)} \right] [r(t) - a(t)] + \ln \frac{P^M(0, t)}{P^M(0, T)} + \frac{1}{2}(V(0, T) - V(0, t)) \quad (49)$$

On en tire directement le prix du zéro-coupon :

$$P(t, T) = A(t, T) \exp(-B(t, T)r(t)) \quad (50)$$

avec

$$A(t, T) = \frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t)} \exp \left(B(t, T)(f)^M(0, t) - \frac{\sigma^2}{4\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}) B(t, T)^2 \right), \quad B(t, T) = \frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{k}$$

Cette formule fermée ne semble pas poser de problème particulier d'implémentation hormis le fait qu'elle nécessite des données de marché -les prix des zéro coupon-.

2.2.1.6 Le modèle de Black et Karasinski

Ce modèle correspond à un modèle de Hull&White pour le logarithme du taux court. Sa dynamique est la suivante :

$$d\ln(r(t)) = [\eta_t - a_t \ln(r(t))]dt + \sigma_t r(t)dW_t, r(0) = r_0 \quad (51)$$

$$\text{ou bien, } dr(t) = r(t)[\eta_t - a_t \ln(r(t))]dt + \sigma_t r(t)dW_t, r(0) = r_0$$

avec η_t, a_t, σ_t des fonctions déterministes du temps et r_0 une constante positive.

Étant donné que le logarithme du taux est considéré, le taux court sera forcément positif. Ce modèle permet en outre de reproduire -via la calibration des fonctions déterministes η_t, a_t, σ_t - la structure par terme des taux ainsi que les courbes de volatilité dans certains cas. Grâce aux résultats du modèle de Hull & White, nous obtenons directement l'expression du taux court :

$$r(t) = \exp \left(\ln(r(s))e^{-a(t-s)} + \int_s^T \eta(s)e^{-a(t-s)}ds + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)}dw(u) \right) \quad (52)$$

La distribution log-normale de ce taux est facilement identifiable. Son espérance et sa

variance sont données par :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[r(t)|\mathcal{F}_s] &= e^{\mu + \frac{\sigma_N^2}{2}} \\ \mathbb{E}[r(t)|\mathcal{F}_s] &= (e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu + \sigma_N^2} \\ \text{avec : } \mu &= r(s)e^{-a(t-s)} + \int_s^T \eta(s)e^{-a(t-s)}ds, \quad \sigma_N^2 = \frac{\sigma^2}{2a}[1 - e^{-2a(t-s)}]\end{aligned}$$

2.2.1.7 Le modèle CIR++

Ce modèle est une extension du modèle CIR initial. Cette extension permet de répliquer parfaitement la structure par terme des taux sans pour autant modifier le modèle initial. On dit que le modèle est *shifté*, c'est-à-dire décalé. Cependant, pour conserver un taux positif, il nous faudra introduire des restrictions sur les différents paramètres. Ceci peut être au détriment de la qualité de la calibration. La dynamique du taux court est donnée par :

$$r(t) = x(t) + \phi(t), \quad dx(t) = k[\theta - x(t)]dt + \sigma\sqrt{x(t)}dW_t, \quad x(0) = x_0 \quad (53)$$

Comme dans le modèle initiale de CIR, pour assurer que le taux soit positif, il faut que $2k\theta > \sigma^2$ et que x_0, k, θ, σ soient des constantes positives. Pour que les taux du marché soit répliqués, nous allons introduire le taux forward instantané du marché $f^M(0; t)$ et le taux forward instantané du modèle CIR $f^{CIR}(0; t)$. Nous allons donc pouvoir écrire : $f^M(0; t) = f^{CIR}(0; t) + \phi(t)$. On peut aussi spécifier les paramètres du modèle CIR considéré ; on note α le vecteur des paramètres et $f^M(0; t, \alpha)$ le taux forward instantané du marché . Le taux court correspond alors exactement à la courbe de discount donnée en entrée. Le prix du zéro-coupon peut aussi être obtenu de manière explicite. Il s'agit d'une simple recalibration par rapport au modèle CIR initial. Son expression est donnée par :

$$P(t, T) = C(t, T)A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)}, \quad \text{avec } A(\cdot, \cdot), B(\cdot, \cdot) \text{ identiques au cas CIR} \quad (54)$$

$C(t, T)$ permet d'ajuster la valeur pour obtenir les prix observés sur le marché et vaut :

$$C(t, T) = \frac{P^M(0, T)A(0, t)e^{-B(0, t)x_0}}{P^M(0, t)A(0, T)e^{-B(0, T)x_0}}e^{B(t, T)\phi^{CIR}(t, \alpha)}$$

2.2.2 Autres modèles de taux

Outre les modèles à un facteurs, nous allons voir deux autres modèles, celui de Hull & White à deux facteurs ainsi que le modèle BGM. L'un comme l'autre étant souvent utilisés par les modèles de Front Office, il est important de voir s'ils ont leur place dans notre étude.

Mémoire présenté pour le titre d'actuaire: Éléments d'implémentation d'un modèle de CVA: Étude du modèle de taux

2.2.2.1 Le modèle de Hull & White à deux facteurs (2006)

Le modèle de Hull&White à deux facteurs est défini par le système d'équations différentielles stochastiques suivant :

$$\begin{cases} dl(t) = \alpha_l(\mu(t) - l(t))dt + \sigma_l dW_l(t) \\ dr(t) = \alpha_r(l(t) - r(t))dt + \sigma_r dW_r(t) \end{cases} \quad (55)$$

Avec $r(t)$ le taux court, $l(t)$ le taux long, μ le taux long moyen, α_l, α_r les vitesses de retour à la moyennes des taux, σ_l, σ_r les volatilités des taux, $W_l(t), W_r(t)$ des mouvements browniens.

Ce modèle est la généralisation du modèle à 1 facteur. Il permet d'expliquer pour deux maturités, deux comportements différents et permet qui plus est une plus grande liberté dans les choix des structures de volatilité. Une généralisation à N facteurs est envisageable, ceci permettra d'expliquer plusieurs comportements en des maturités différentes.

La résolution de ce système s'opère en deux temps. Premièrement, la résolution de l'équation du taux court qui s'avère être un modèle de Hull&White à 1 facteur. Secondelement, la résolution de l'équation du taux long. Grâce à la section précédente, on obtient directement l'expression suivante :

$$l(t) = l(s)e^{-\alpha_l(t-s)} + \int_s^t \frac{\mu(u)}{\alpha_l} e^{-\alpha_l(t-u)} du + \sigma \int_s^t e^{-\alpha_l(t-u)} dW(u) \quad (56)$$

puis le taux court

$$r(t) = r(s)e^{-\alpha_r(t-s)} + \int_s^t \frac{l(u)}{\alpha_r} e^{-\alpha_r(t-u)} du + \sigma \int_s^t e^{-\alpha_r(t-u)} dW(u) \quad (57)$$

2.2.2.2 Le modèle de Brace, Gatarek et Musiela (BGM) ou *LIBOR market model*

À la différence des modèles précédents, le modèle BGM ne modélise pas le taux court mais des *LIBOR* (London inter-banking overnight rate). Ces taux sont observables directement sur le marché à l'inverse des taux courts et leur volatilité est celle du marché. Une présentation plus exhaustive et poussée de ce modèle est présentée le livre *Modelling, pricing, and hedging counterparty credit exposure : A technical guide*[3]. Pour introduire ce modèle, il est nécessaire de le remettre dans son contexte.

Soit la subdivision régulière du temps $T_0 = 0 < T_1 < \dots < T_N$; chaque point de la subdivisions est appellé *TENORS*. Un taux LIBOR forward classique noté L_j correspond

Mémoire présenté pour le titre d'actuaire: Éléments d'implémentation d'un modèle de CVA: Étude du modèle de taux

au taux employée dans un FRA(Forward Rate Agreement : de date de début T_j et de maturité T_{j+1} où $j \in [[0, N - 1]]$). Nous allons considérer ici que les différentes dates T_i sont égales aux dates de réactualisation du LIBOR.

Chacun des taux LIBOR $L_j(t)$ est modélisé par un processus stochastique continu. Ce processus devient nul à la date T_j , en effet, ce taux n'a plus lieu d'être car les FRA ne sont plus basé sur lui. Pour clarifier les notations, nous allons définir la fonction suivante :

$$m(t) = j, \text{ pour } t \in [T_{j-1}, T_j]$$

Introduisons de plus un mouvement brownien de dimension N : $W = [W_1, \dots, W_N]'$ tel que $\rho(W_j, W_k) = \rho_{jk}$. Les libors sont modélisés par l'expression suivante :

$$dL_j(t) = L(t)\mu_j(t)dt + L(t)\sigma_j(t)dW_j(t) \text{ avec } \mu(\cdot) \text{ le drift et } \sigma_j(\cdot) \text{ la volatilité instantanée} \quad (58)$$

Étant donné que nous sommes face à un taux forward maturant en T_k , sous la mesure $T_k - \text{forward } P^k$, L_k est une martingale, on obtient alors :

$$dL_j(t) = \begin{cases} \sigma_k(t)L(t)dW_k(t) & \text{si } j = k \\ \mu_j(t)L(t)dt + \sigma_j(t)L(t)dW_j(t) & \text{si } j \neq k \end{cases} \quad (59)$$

Nous allons désormais chercher à évaluer le terme de drift μ , pour cela nous procéderons par absence d'opportunité d'arbitrage et changement de numéraire. Nous allons pour cela considérer le i-ème Libor, ainsi que $k > i$. De plus, rappelons que les numéraires naturels des mesures P^i - T_i -forward- et P^k - T_k -forward- sont les prix des zéro coupons $P(t, T_i), P(t, T_k)$ de maturité respectives T_i et T_k . Ces prix peuvent se réécrire sous leur mesures respectives comme suit :

$$P(t, T_h) = \prod_{m(t) \leq l \leq h} \frac{1}{1 + \delta_l L^l(t)} \quad h \in \{i, k\} \quad (60)$$

Nous allons utiliser la formule de changement de numéraire $\mathcal{N}(t)$ vers $\mathcal{M}(t)$ suivante : $\mu^Q(t) = \mu^P(t) + dX(t)d\left(\log \frac{\mathcal{M}(t)}{\mathcal{N}(t)}\right)$ d'où :

$$\begin{aligned} \mu_i(t)L(t) &= 0 - \frac{d}{dt} \langle L_i(t), \log \left(\frac{P(t, T_i)}{P(t, T_k)} \right) \rangle(t) \\ &= -\frac{d}{dt} \langle L_i(t), \log \left(\sum_{i+1 \leq l \leq k} (1 + \delta_l L_l)) \right) \rangle(t) \\ &= -\langle \sigma_i(t)L_i(t), \sum_{i+1 \leq l \leq k} \frac{\delta_l \sigma_l(t)L_l(t)}{1 + \delta_l L_l} \rangle \\ &= -\sigma_i(t)L_i(t) \times \sum_{i+1 \leq l \leq k} \frac{\rho_{il}\delta_l\sigma_l(t)L_l(t)}{1 + \delta_l L_l} \end{aligned} \quad (61)$$

Si $k < i$:

$$\mu_i(t)L(t) = \sigma_i(t)L_i(t) \times \sum_{k+1 \leq l \leq i} \frac{\rho_{il}\delta_l\sigma_l(t)L_l(t)}{1 + \delta_l L_l} \quad (62)$$

Il est souvent plus pratique de résumer et exprimer les équations ci-dessus dans la mesure spot. La dynamique de ce modèle est alors :

$$dL_i(t) = \sigma_i(t)L_i(t) \left(\sum_{m(t) \leq l \leq i} \frac{\rho_{il}\delta_l\sigma_l(t)L_l(t)}{1 + \delta_l L_l} dt + dW_i(t) \right) \quad (63)$$

2.3 Analyse comparative des modèles

Maintenant que les modèles et leurs différentes caractéristiques ont été présentés, nous allons les comparer afin de choisir le plus adapté pour la CVA. Pour mémoire, nous cherchons un modèle offrant un maximum de formules fermées pour les produits financiers ; ces formules doivent en outre être le plus simple possible -informatiquement parlant- pour minimiser le temps de calcul. Le tableau ci-dessous récapitule les caractéristiques des modèles présentés dans les paragraphes précédents :

Nom	Positivité	Loi suivie	Prix analytique pour un ZC
Vasicek	Non	Normale	Oui
Dothan	Oui	Log-normale	Oui
CIR	Oui	χ^2 décentré	Oui
Vasicek étendu	Oui	Log-normale	Non
Hull & White	Non	Normale	Oui
Black et Karasinski	Oui	Log-normale	Non
MM	Oui	Log-normale	Non
CIR++	Oui	χ^2 décentré	Oui
Vasicek exponentiel étendu	Oui	Log-normale	Non
Hull & White multifacteur	Non	Normale	Oui
BGM (Libor Market Model)	Oui		Non

Nous pouvons éliminer, dans un premier temps, les modèles ne permettant pas d'obtenir de forme analytique pour le prix d'un zéro-coupon. En effet, si le prix du plus simple des produits nécessite une simulation, alors on peut penser que l'intégralité des autres produits en auront besoin. Or, nous avons vu -lors de la présentation de la CVA- qu'un modèle adapté au calcul de CVA sera un modèle qui offre des formules fermées pour un

Mémoire présenté pour le titre d'actuaire: Éléments d'implémentation d'un modèle de CVA: Étude du modèle de taux

maximum de produits. Nous allons donc comparer uniquement les modèles suivants : Vasicek, Dothan, CIR, Hull&White, CIR++. Une première étape sera de chercher des formules fermées ou quasi-fermées pour divers produits. Une seconde étape sera de comparer les complexités des formules via une évaluation de portefeuille fictif. La dernière étape consistera à évaluer l'adéquation entre les formules et l'attente des gestionnaires.

2.3.1 Recherche de formules fermées

Nous allons désormais établir pour chaque modèle encore en liste, les produits pour lesquels il existe une formule fermée. Cette étape est déterminante, c'est la dernière avant la comparaison par simulation des concurrents.

2.3.1.1 Dans le modèle de Dothan

Le modèle proposé par Dothan ne permet pas d'obtenir de formules fermées pour les options européennes sur zéro-coupons. De plus, ce modèle donne lieu à un problème d'explosion du compte bancaire :

$$\mathbb{E}_s(B(t)) = \mathbb{E}_s(\exp(\int_s^t r(u)du)) \approx \mathbb{E}_s(\exp((t-s)\frac{r(t)+r(s)}{2}))$$

or, $r(t)$ est de distribution log-normale donc :

$$\mathbb{E}_s(B(t)) \propto \mathbb{E}_s(\exp(\exp(Y)))$$

avec Y la loi normale associée à $r(t)$. Cette espérance est infinie. Il est donc possible d'obtenir un montant infini à partir de 1. Ceci risque de poser problème par la suite, une solution est cependant possible. Exposée par Sandmann et Sondermann[8], elle consiste en l'utilisation d'un arbre. Le nombre fini d'états renverra donc une espérance finie.

Compte tenu du manque de formules fermées pour ce modèle et du problème d'explosion du compte bancaire, ce modèle sera évincé.

2.3.1.2 Dans le modèle de Vasicek

Pour le modèle de Vasicek, il est possible d'obtenir des formules fermées pour les options sur zéro-coupons. Considérons $H_T = [P(T, S) - K]^+$ le gain d'une option d'achat d'échéance T sur un zéro-coupon d'échéance S et de prix d'exercice X. Sous la mesure T-forward, son prix est donné par

$$Call_{ZC}(t, T, S, X) = P(t, S)\Psi(h) - XP(t, T)\Psi(h - \sigma_p) \quad (64)$$

avec $\sigma_p = \sigma\sqrt{\frac{1-e^{-2k(T-t)}}{2k}}B(T, S)$, $h = \frac{1}{\sigma_p}\ln(\frac{P(t, S)}{P(t, T)X}) + \frac{\sigma_p}{2}$, $B(t, T) = \frac{1-e^{k(T-t)}}{k}$ et $\Psi(.)$ la fonction de répartition de la loi normale.

Ce modèle nous permet aussi d'avoir des formules fermées pour les caps et les floors. Soit N le nominal, K le taux fixe et $\tau := t_0 < \dots < t_N$ la subdivision de pas constant δ , alors le prix d'un cap et d'un floor est donné par :

$$Cap(t, \tau, N, K) = N \sum_{i=1}^N [P(t, t_{i-1})\Psi(-h_i + \sigma_{p,i}) - (1 + \delta K)P(t, t_i)\Psi(-h_i)] \quad (65)$$

$$Floor(t, \tau, N, K) = N \sum_{i=1}^N [(1 + \delta K)P(t, t_i)\Psi(h_i) - P(t, t_{i-1})\Psi(h_i - \sigma_{p,i})] \quad (66)$$

où $\sigma_{p,i} = \sigma \sqrt{\frac{1-e^{-2k(t_{i-1}-t_i)}}{2k}} B(t_{i-1}, t_i)$, $h_i = \frac{1}{\sigma_{p,i}} \ln(\frac{P(t,t_i)(1+\delta K)}{P(t,t_{i-1})}) + \frac{\sigma_{p,i}}{2}$. Ces deux expressions sont simplement la somme des puts/calls qui les composent.

2.3.1.3 Dans le modèle de Hull and White

Nous avons vu que ce modèle est proche de celui de Vasicek mais qu'il permet de retrouver la courbe des taux. Nous pouvons dans ce modèle aussi obtenir un prix analytique pour les options et les caps/floors. Les formules sont très proches du cas précédent. On obtient ainsi :

$$Call_{ZC}(t, T, S, X) = P(t, S)\Psi(h) - X P(t, T)\Psi(h - \sigma_p) \quad (67)$$

$$Put_{ZC}(t, T, S, X) = X P(t, T)\Psi(-h + \sigma_p) - P(t, S)\Psi(-h) \quad (68)$$

avec $\sigma_p = \sigma \sqrt{\frac{1-e^{-2\alpha(T-t)}}{2\alpha}} B(T, S)$, $h = \frac{1}{\sigma_p} \ln(\frac{P(t,S)}{P(t,T)X}) + \frac{\sigma_p}{2}$, $B(t, T) = \frac{1-e^{\alpha(T-t)}}{\alpha}$ et $\Psi(\cdot)$ la fonction de répartition de la loi normale. Pour un cap/floor, le prix est donné par :

$$Cap(t, \tau, N, K) = N \sum_{i=1}^N (1 + K\delta) Put_{ZC}(t, t_{i-1}, t_i, \frac{1}{1+K\delta}) \quad (69)$$

$$Floor(t, \tau, N, K) = N \sum_{i=1}^N (1 + K\delta) Call_{ZC}(t, t_{i-1}, t_i, \frac{1}{1+K\delta}) \quad (70)$$

2.3.1.4 Dans le modèle de CIR

Dans ce modèle aussi, les options européennes peuvent être évaluées par formule fermée. Une option d'achat de maturité T de strike K sur un zéro-coupon de maturité S($>T$) aura pour prix en t($<T$) :

$$\begin{aligned} Call_{ZC}(t, T, S, K) &= P(t, S)\chi^2 \left(2\bar{r}(\rho + \psi + B(T, S)); \frac{4k\theta}{\sigma^2}, \frac{2\rho^2 r(t)e^{h(T-t)}}{\rho + \psi + B(T, S)} \right) \quad (71) \\ &\quad - KP(t, T)\chi^2 \left(2\bar{r}(\rho + \psi); \frac{4k\theta}{\sigma^2}, \frac{2\rho^2 r(t)e^{h(T-t)}}{\rho + \psi} \right) \end{aligned}$$

Avec $\rho = \rho(T-t) = \frac{2h}{\sigma^2(e^{h(T-t)}-1)}$, $\psi = \frac{k+h}{\sigma^2}$, $\bar{r} = \bar{r}(S-T) = \frac{\ln(A(T,S))-\ln(K)}{B(T,S)}$

Mémoire présenté pour le titre d'actuaire: Éléments d'implémentation d'un modèle de CVA: Étude du modèle de taux

2.3.1.5 De l'évaluation des swaptions

Nous allons ici introduire une technique d'évaluations des options sur obligations à coupons. Ceci n'est pas forcément le produit le plus intéressant, cependant, par son intermédiaire, nous allons pourvoir évaluer de manière fermée les swaptions, un produit bien plus répandu. Considérons dans un premier temps l'obligation à coupons livrant $\Gamma = \{c_1, \dots, c_n\}$ aux dates $\Theta = \{T_1, \dots, T_n\}$. Son prix est donné par : $Oblig(t, \theta, \Gamma) = \sum_i c_i P(t, T_i) = \sum_i c_i \Pi(t, T_i, r(T))$.

Une option de vente de strike K et de maturité T sur ce produit livrera :

$$[K - Oblig(t, \theta, \Gamma)]^+$$

. Nous allons introduire r_k caractérisé par $\sum_i c_i \Pi(t, T_i, r_k) = K$. Son existence et son unicité sont conditionnées à la monotonie de la fonction $\sum_i c_i \Pi(t, T_i, r_k)$, ou plus directement à la condition $\frac{\partial \Pi(t, s, r)}{\partial r} < 0$, $t \in]0, s[$.

On peut alors écrire :

$$[K - Oblig(t, \theta, \Gamma)]^+ = \sum_i c_i [\Pi(t, T_i, r_k) - \Pi(t, T_i, r(T))]^+$$

Il s'agit alors simplement d'un portefeuille d'options sur zéro-coupons. D'où les formules fermées :

$$Put_C(t, T, \Theta, \Gamma, K) = \sum_i c_i Put_{ZC}(t, T, T_i, \Pi(t, T_i, r_k)) \quad (72)$$

$$Call_C(t, T, \Theta, \Gamma, K) = \sum_i c_i Call_{ZC}(t, T, T_i, \Pi(t, T_i, r_k)) \quad (73)$$

Une swaption étant le droit d'entrer dans un swap à une date donnée, ceci correspond exactement au produit détaillé précédemment. Le swap payeur correspond au put et le swap receveur correspond au call. La condition $\frac{\partial \Pi(t, s, r)}{\partial r} < 0$ est donc essentielle pour obtenir une formule fermée pour ce produit. Les modèles de Vasicek, Hull&White et CIR sont des modèles affines et remplissent donc cette expression. Le modèle CIR++ de par l'expression du bon zéro coupon correspond aussi à cette expression.

2.3.2 Calibration des modèles

Afin de pouvoir comparer de manière la plus juste les modèles, il nous faut, dans un premier temps, les calibrer. En effet, cette étape est un élément clé du processus dévaluation. Il doit être à la fois rapide et précis. Comme il n'existe pas de méthode absolue de calibration, nous allons ici présenter la méthode des moindres carrés ordinaires sur les prix zéro-coupons obtenu grâce à la courbe des taux fournie par l'Institut des Actuaires.

Des méthodes plus efficaces existent sur le marché mais nous n'utiliserons cependant pas ces techniques. En effet, ceci pourrait engendrer un biais dans notre analyse. L'utilisation d'un meilleur calibration sur l'un des modèles pourrait en effet déséquilibrer notre analyse. De plus, ces méthodes requièrent bien souvent des prix de marchés d'instruments financiers autres que le zéro-coupon, choses que nous ne possédons pas. Pour ce qui est du modèle BGM, sa calibration n'étant pas possible sans l'utilisation d'instruments complexes, nous ne calibrerons pas ce modèle. Nous nous contenterons seulement de présenter une des méthodes pouvant être utilisée.

2.3.2.1 Calibration du modèle de Vasicek

Nous avons vu que le prix du zéro-coupon dans ce modèle s'exprime comme :

$$P(t, T) = A(t, T) \exp(-B(t, T)r(t))$$

avec $A(t, T) = \exp\left[(\theta - \frac{\sigma^2}{2k^2})(B(t, T) - T + t) - \frac{\sigma^2}{4k}B(t, T)^2\right]$ et $B(t, T) = \frac{1 - \exp(-k(T-t))}{k}$.

Ce prix s'exprimant en fonction des θ , σ et k , nous allons pouvoir les calibrer via la méthode des moindres carrés ordinaires. Ayant plusieurs paramètres à optimiser, développer une itération d'optimisation sur ces trois paramètres sous Addactis Modelin® risquerait de nous faire tomber sur des minima locaux. De même, la fonction n'étant pas monotone, l'utilisation d'une dichotomie sur ces paramètres n'est pas non plus envisageable. Nous allons donc utiliser pour cette partie le logiciel R et notamment la fonction optim() qui exploite la méthode de Nelder et Mead détaillée dans l'annexe C. Elle possède l'avantage d'être très robuste et de fonctionner de manière correcte avec les fonctions non différentiables.

Comme nous n'inclurons pas dans notre comparaison de vitesse de calcul des modèles le temps de calibration, le fait que cette méthode soit plutôt lente ne sera problématique. En revanche, la robustesse est primordiale, une calibration sur les zéro-coupon est en effet très sensible aux paramètres initiaux.

Nous ne calibrerons pas nos paramètre grâce à l'intégralité de la courbe car nous risquerions de capter des effets long-termes ne nous concernant pas dans le cadre de notre étude. Nous nous contenterons des 30 premiers points de la courbe, c'est à dire des maturités inférieure à 3.5 ans. Nous pourrons ainsi diffuser des taux inférieurs à une telle maturité de manière cohérente, ainsi, notre date limite, afférente aux produits qui seront utilisé dans la partie de comparaison des modèles, sera inférieur à $3.5 * 260 = 910$ jours.

Une première tentative de calibration nous fourni des ordres de grandeurs étonnantes. k et θ se retrouvent de l'ordre de 10^{-11} alors que sigma explose au-delà de 10^5 . Ceci

met en exergue la sensibilité de cette calibration au valeurs initiales des paramètres. En renseignant des valeurs initiales vraisemblables à savoir : $\theta_0 = 0.003$, $k_0 = 0.0001$ et $\sigma_0 = 0.0001$, nous obtenons des valeurs dont la véracité semble bien plus plausible : $\theta = 0.004253354$, $k = 0.000103200$ et $\sigma = 0.000607013$

Sur le graphique ci-dessous, nous observons que nous sommes proche de la courbe des zéro-coupon pour les 30 premières dates puis, nous nous éloignons progressivement de cette courbe. Ceci est attendu compte tenu que la calibration ait été effectuée sur les 30 premiers points de la courbe.

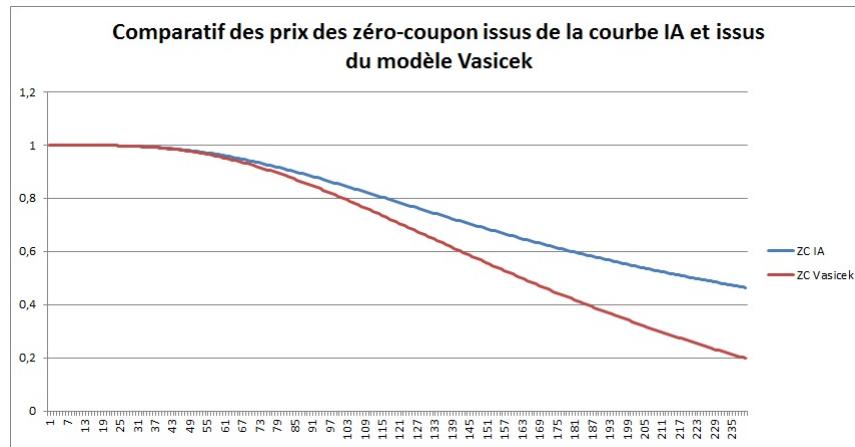


FIGURE 19 – Comparatif des prix des zéro-coupon issus de la courbe IA et issus du modèle de Vasicek

2.3.2.2 Calibration du modèle CIR

Pour calibrer ce modèle, nous allons utiliser une méthode des moindres carrés sur le prix des zéro-coupons. L'idée est de chercher $\alpha = (\sigma, \theta, k)$ qui optimisent la fonction $\sum_i^n \sum_j^d [P^{CIR}(i, i + j) - P^M(i, i + j)]^2$.

Nous allons ici aussi utiliser les prix zéro-coupon associés à la courbe de l'Institut des Actuaires. Rappelons l'expression du zéro-coupons :

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)} \quad (74)$$

en posant

$$\begin{aligned}
 A(t, T) &= \left(\frac{2he^{\frac{(k+h)(T-t)}{2}}}{2h + (k+h)(e^{(T-t)h} - 1)} \right)^{\frac{2k\theta}{\sigma^2}} \\
 B(t, T) &= \frac{2e^{h(T-t)} - 1}{2h + (k+h)(e^{(T-t)h} - 1)} \\
 h &= \sqrt{k^2 + 2\sigma^2}
 \end{aligned} \tag{75}$$

Le logiciel utilisé sera aussi le logiciel R, et ceux pour des raisons identiques. Concrètement, il nous suffit de remplacer la fonction qui donnait le prix des zéro-coupons sous Vasicek par celle qui les donne sous CIR. Un premier test sans inclure la contrainte $2k\theta > \sigma$ donne des résultats ne la satisfaisant pas. Nous utilisons alors la fonction ConstrOptim() qui nous permet de réaliser une optimisation sous contrainte, la méthode de minimisation en elle-même sera celle de Nelder et Mead. Après avoir subit les mêmes déconvenues concernant les paramètres initiaux que pour Vasicek, nous finissons par obtenir des résultats cohérents à savoir : $\alpha = 0.0825437360$, $\sigma^2 = 0.0001558738$ et $\theta = 0.0043649257$

Sur le graphique ci-dessous, nous observons, comme pour Vasicek, que nous sommes proche de la courbe des zéro-coupon pour les 30 premières dates puis, nous nous éloignons progressivement de cette courbe.

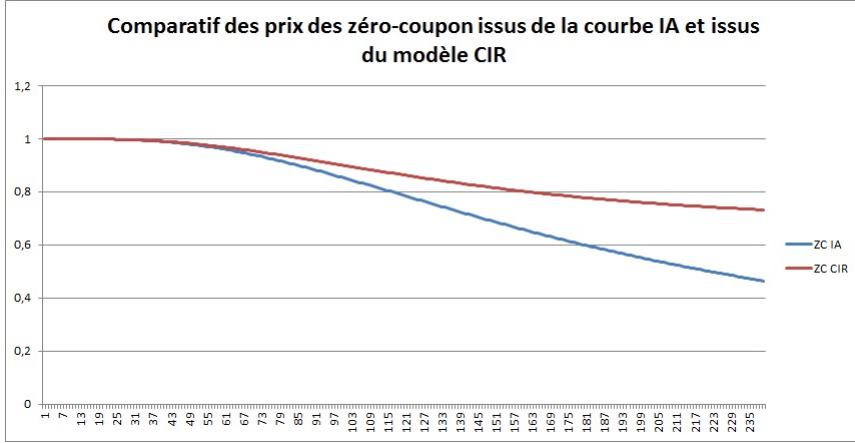


FIGURE 20 – Comparatif des prix des zéro-coupon issus de la courbe IA et issus du modèle CIR

Mémoire présenté pour le titre d'actuaire: Éléments d'implémentation d'un modèle de CVA: Étude du modèle de taux

2.3.2.3 Calibration du modèle de Hull & White à un facteur

La calibration de ce modèle implique trois décisions :

- Rendre constant le paramètre de retour à la moyenne et la volatilité ou bien les laisser dépendent du temps.
- Choisir le panel d'instruments qui serviront à la calibration qui sera soit locale soit globale.
- Considérer l'optimisation de la volatilité et du retour à la moyenne de manière séparée ou non.

Deux méthodes peuvent être utilisées. La première est une méthode séquentielle et consiste à fixer le paramètre de retour à la moyenne (PRM) en premier puis de calibrer la volatilité. La deuxième est une méthode combinatoire, les deux paramètres sont calibrés simultanément.

2.3.2.3.1 Méthode combinatoire

Nous allons ici chercher à calibrer le modèle Hull & White en fonction de divers instruments, à savoir les caps et les swaptions. Nous allons pour cela créer une subdivision de notre intervalle vraisemblable pour α . Notons-la $s_a = a_0 < \dots < a_N$. Pour chaque valeur de a_j , σ est optimisé pour minimiser la fonction :

$$err(\alpha_j, \sigma) = \sum_{i=0}^N (\zeta_i^M - \zeta_i^C(\alpha_j, \sigma))^2 \quad (76)$$

avec ζ_i^M , la volatilité de Black de marché de l'instrument i, $\zeta_i^C(\alpha_j, \sigma)$ la volatilité de Black de l'instrument i donnée par le modèle de paramètre (α_j, σ) . Par la suite, α^{opt} est choisi parmi les α_j via une minimisation de l'erreur par la méthode des moindres carrés ordinaires, On a donc :

$$\alpha^{opt} = argmin_{\alpha_j \in J}(err(\alpha_j, \sigma)) \quad (77)$$

avec J, un intervalle vraisemblable de valeurs pour α .

Maintenant que nous connaissons α^{opt} , nous réintroduisons la dépendance au temps de σ . Pour calibrer ce facteur et obtenir une structure par termes vraisemblable, nous allons utiliser des swaptions coterminale. Il s'agit de swaptions sur des swaps coterminaux. Un swap coterminal est un ensemble de swaps qui ont des dates de débuts différentes mais qui ont la même date de maturité. En utilisant des swaptions coterminales de date d'échéance différentes, nous obtiendrons notre structure par terme. Nous allons chercher pour cela utiliser la méthode des moindres carrés :

$$err(\sigma(t)) = \sum_{i=1}^K (\zeta_i^M - \zeta_i^C(\sigma(T_i))^2 | \sigma(T_k), k \in [[0, i-1]])$$

avec T_k , $k = 1..K$ les maturités des différentes swaptions coterminales. Une récurrence s'instaure. En effet, il est essentiel pour calibrer la volatilité swaption terminant en T_i de connaître celles des swaptions de maturité plus courte.

2.3.2.3.2 Méthode non combinatoire

Cette méthode revient à l'étape deux de la précédente, en effet, le paramètre α est choisi par l'utilisateur. En fonction de cet α , la volatilité sera calibrée.

2.3.2.3.3 Méthode utilisée dans le cadre de ce mémoire

Comme nous ne possédons pas de données concernant les swaptions, la méthode détaillée ci-dessus n'est donc pas applicable dans notre cas. Nous avons tenté d'utiliser la même méthode que pour le modèle de Vasicek. Compte tenu de l'ajustement du résultat au données de marché dans le calcul du prix du zéro-coupons, nous ne pouvons pas obtenir de calibration correcte. En effet, la robustesse de l'algorithme est complètement supplanté par cette ajustement qui rend la méthode inefficace. En considérant, que le modèle de Hull & White est une extension du modèle de Vasicek, nous allons considérer que la calibration de Vasicek peut-être reprise dans le Hull & White. L'ajustement à la courbe des prix de nous permettra de coller de manière parfaite aux prix attendus

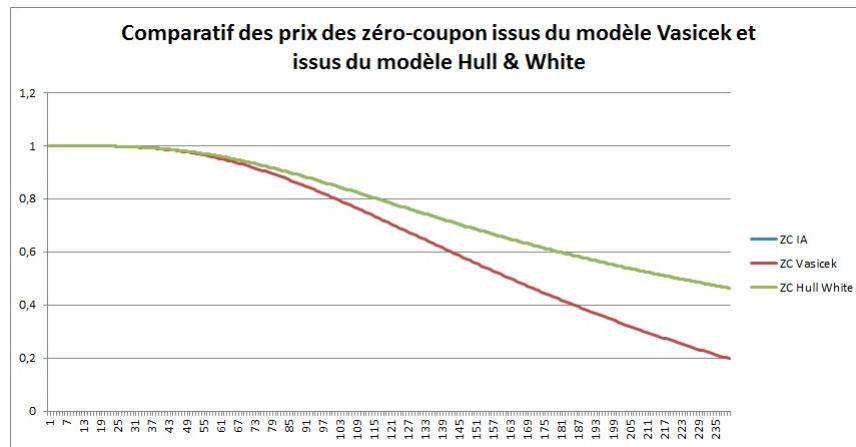


FIGURE 21 – Comparatif des prix des zéro-coupon Vasicek et Hull & White

Étant donné que ce modèle nous permet d'obtenir une exacte réPLICATION de la courbe des zéro-coupon, nous évincerons le modèle de Vasicek au profit du modèle de Hull & White dans notre recherche du taux optimal pour le calcul de CVA.

Mémoire présenté pour le titre d'actuaire: Éléments d'implémentation d'un modèle de CVA: Étude du modèle de taux

2.3.2.4 Calibration du modèle CIR++

Nous pourrions nous lancer dans une recherche de calibration complexe utilisant les divers produits existant sur le marché. Cependant, nous n'avons pas obtenu de résultat satisfaisant pour le modèle de Hull & White compte tenu que nous n'avons pas la connaissance des prix d'instruments exploitant la courbe des taux de l'Institut des Actuaires. Nous nous contenterons donc d'une calibration via la méthode des moindres carrés ordinaires. La robustesse de la méthode d'optimisation est à nouveau mis à mal par l'ajustement à l'ajustement du résultat au données de marché. Nous considérerons, à l'instar du cas du modèle Hull & White, que le modèle CIR++ est une surcouche du modèle CIR et que prendre la calibration obtenue pour CIR est une calibration acceptable pour CIR++. L'ajustement à la courbe des prix de nous permettra de coller de manière parfaite aux prix attendus comme nous pouvons le voir ci-dessous

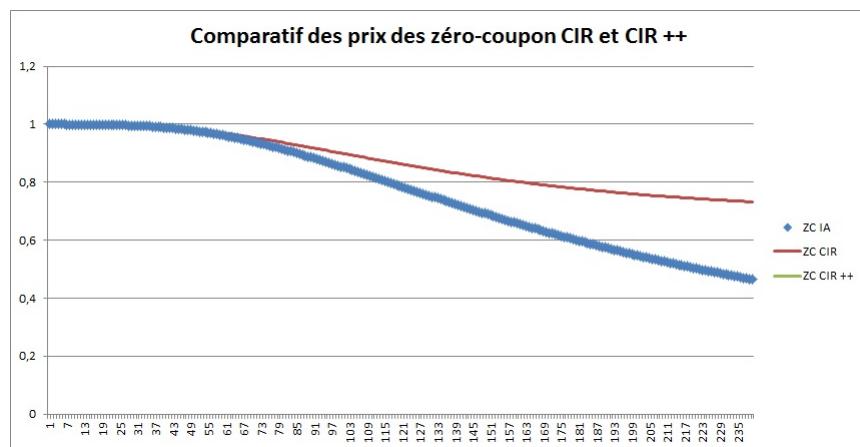


FIGURE 22 – Comparatif des prix des zéro-coupon CIR et CIR ++

Étant donné que ce modèle nous permet d'obtenir une exacte réplique de la courbe des zéro-coupon, nous évincerons le modèle CIR au profit du modèle CIR++ dans notre recherche du taux optimal pour le calcul de CVA.

2.3.2.5 Calibration du modèle BGM

L'enjeu de la calibration est ici d'évaluer les diverses volatilités $\sigma_i(t)$. Pour le modèle BGM, cette phase dépend du portefeuille que l'on souhaite évaluer. Selon son contenu, ce ne sont pas les mêmes instruments qui sont utilisés. Ici, nous allons servir des prix de marché des floors et des caps. Une des spécificités de ce modèle étant qu'il fournit

Mémoire présenté pour le titre d'actuaire: Éléments d'implémentation d'un modèle de CVA: Étude du modèle de taux

des prix cohérents avec ceux obtenus dans le modèle de Black & Scholes pour ces deux produits.

Nous allons chercher dans un premier temps à évaluer la structure de la volatilité ($\sigma_l(t)$). Nous considérerons que ces fonctions sont constantes sur les intervalles $[T_i, T_{i+1}[$. De plus, elles seront nulles dès lors que le LIBOR sera échu. La structure des volatilités sera donc une matrice trigonale inférieure de diagonale nulle. On notera pour $t \in [T_i, T_{i+1}[$:

$$\sigma_j(t) = \begin{cases} \sigma^{j,i}(t), & \text{si } j > i \\ 0, & \text{si } j \leq i \end{cases} \quad (78)$$

Un rapide calcul nous informe que ce paramétrage nécessite $\frac{120 \times (120-1)}{2} = 7140$ paramètres. Il y a clairement un surnombre de paramètres. Lesniewski[7] propose de considérer la paramétrisation suivante pour $t \in [T_i, T_{i+1}[$:

$$\sigma_j(t) = \begin{cases} \sigma^{j-i}(t), & \text{si } j > i \\ 0, & \text{si } j \leq i \end{cases} \quad (79)$$

Le problème ne contient alors plus que 119 paramètres. Notre modélisation affirme alors que la structure de volatilité de nos caps sera la même dans le futur qu'elle n'est aujourd'hui. Ceci n'est pas acceptable en l'état ; l'effet de retour à la moyenne des taux long n'est en effet pas capté ; les prix pour les longues maturités seront de piètre qualité. En fait, il est impossible d'introduire un retour à la moyenne dans le drift. En effet, le drift a été calibré par absence d'opportunité d'arbitrage, toute modification visant à introduire cet effet créerait une opportunité d'arbitrage. Une parade envisageable est d'introduire ce fameux retour à la moyenne en ajustant la volatilité. Pour cela, nous allons introduire une fonction dit d'ajustement $\kappa(\tau, \lambda) = e^{-\lambda\tau}$ par exemple. Le paramètre λ correspond à la vitesse de retour et sera choisi en fonction de la maturité. Nous obtenons donc la paramétrisation finale suivante :

$$\sigma_j(t) = \begin{cases} \sigma_{j-i}(t)\kappa_{j,i}, & \text{si } j > i \text{ et } \kappa_{j,i} = \kappa(T_j - T_i, \lambda_j) \\ 0, & \text{si } j \leq i \end{cases} \quad (80)$$

Considérons désormais un caplet à la monnaie de maturité T_m . Selon notre modèle, sa volatilité est donnée par :

$$\zeta_m(\rho_1..,\rho_m, \lambda_m)^2 = \frac{1}{T_m} \sum_{i=0}^{m-1} (\sigma^{m-i})^2 \int_{T_i}^{T_{i+1}} \kappa(T_m - t, \lambda_m)^2 dt \quad (81)$$

$$\approx \frac{1}{T_m} \sum_{i=0}^{m-1} (\sigma^{m-i})^2 \kappa_{m,i}^2 (T_{i+1} - T_i) \quad (82)$$

Avec 119 caplets de maturités échelonnées, nous pourrons donc calibrer le modèle, les paramètres λ_i resteront à la discréption de l'utilisateur. Généralement, les utilisateurs cherchent à calibrer grâce à deux instruments, le second étant la swaption. Ce produit est relativement long à évaluer car les taux swap ne sont pas des fonctions linéaires des taux Libors. Nous verrons plus loin comment approcher dans le cadre du BGM le prix des swaptions.

La seconde partie de la calibration consiste à évaluer la matrice des corrélations ρ_{il} . Le modèle actuel nous donne $\frac{120 \times (120+1)}{2} = 7260$ paramètres. Comme dans l'étape précédente, nous avons une sur-paramétrisation. Lesniewski propose un modèle paramétrique pour la volatilité à savoir :

$$\rho_{ij} = \rho_\infty + (1 - \rho_\infty) \exp\left(-\frac{\lambda|T_i - T_j|}{1 + \nu \min T_i, T_j}\right) \quad (83)$$

κ est un facteur d'asymétrie, sa valeur doit être choisie avec précaution pour que la matrice reste défini positive. λ correspond à la vitesse de convergence vers la corrélation asymptotique ρ_∞ . Étant donné que les dépendances entre les différents Libor ne varient pas beaucoup dans le temps, la calibration historique sera privilégiée.

3 Adaptation et comparaison empirique des modèles

Parmi nos modèles initialement considérés, aucun ne satisfait nos attentes en termes de simplicité des formules et de précision des résultats à exception du modèle CIR++ et du modèle Hull & White. Cependant, nous continuerons à considérer le BGM afin de fournir au lecteur des éléments essentiels pour qu'il puisse lui même comparer ce modèle aux deux autres.

3.1 Adaptation du modèle BGM

3.1.1 Réduction du nombre de Libor nécessaire dans le modèle BGM

Considérons une courbe de forward couvrant 30 ans. Sur ces 30 ans, nous aurons 120 trimestres donc 120 Libors, c'est-à-dire 120 facteurs stochastiques à simuler. Nous avons évoqué précédemment la nécessité d'avoir des calculs rapides. Il est donc nécessaire de limiter le nombre de facteurs stochastiques.

La réduction du nombre de facteurs stochastiques est aussi un enjeu de taille pour l'implémentation. En effet, un nombre de facteurs trop grand peut être très gênant pour la lisibilité du code et donc peut nuire à sa qualité. Finalement, un nombre trop important de facteurs donne lieu à une sous-détermination des paramètres du modèle -le nombre de paramètres est supérieur au nombre d'équations-. Ceci engendre une instabilité de la calibration.

Pour procéder à cette réduction de facteurs, nous allons supposer que seule une partie γ des mouvements browniens de la dynamique des Libor est indépendant. Il seront notés $Y_\zeta, \zeta \in [[1\dots\gamma]]$. On introduit de plus une dépendance η_{ij} défini comme suis :

$$\mathbb{E}[dY_i, dY_j] = \eta_{ij} dt$$

Pour obtenir l'intégralité des browniens du modèles -les 120 évoqués précédemment-, on applique la formule suivante :

$$dW_j(t) = \sum_{\zeta=1}^{\gamma} U_{j\zeta} dY_\zeta(t). \quad (84)$$

Dans l'idéal, U serait la matrice $N \times \gamma$ de transformation tel que UU' soit la matrice de corrélation des Libors. Obtenir exactement cette matrice est bien évidemment impossible. U correspond donc à une matrice de corrélation approchée. Dans ce cadre, nous pouvons

réécrire sans perte de généralités la dynamique du modèle :

$$dL_i(t) = \sigma_i(t)L_i(t) \left(\sum_{m(t) \leq l \leq i} \frac{\rho_{il}\delta_l\sigma_l(t)L_l(t)}{1 + \delta_l L_l} dt + \sum_{\zeta=1}^{\gamma} U_{i\zeta} dY_{\zeta}(t) \right) \quad (85)$$

Le modèle ne contient plus que γ facteurs, il sera donc plus facile à manipuler.

3.1.2 Pricing de swaptions sous le modèle BGM

Nous avons vu précédemment que la calibration du modèle BGM peut être effectuée via les swaptions. Il est plus que concevable que calibrer en fonction de deux instruments donnera des prix plus vraisemblables. Cependant, le prix des swaptions dans le modèle BGM provient de calculs complexes. La relative lenteur d'évaluation n'est pas adaptée au cadre de la CVA. Nous allons donc chercher une formule approchée afin d'accélérer ce processus.

Le gain d'un caplet de taux d'exercice K de maturité T_i est donné par :

$$\max(\delta_i(L(T_i, T_{i+1}) - K), 0)$$

Son prix en t est donné par :

$$A = \delta_i \mathbb{E}[\exp(-\int -t^{T_{i+1}} r_s ds)(L(T_i, T_{i+1}) - K)^+ | \mathcal{F}_t] = \delta_i P(t, T_{i+1}) \mathbb{E}[(L(t-i, T_{i+1}) - K)^+ | \mathcal{F}_t] \quad (86)$$

Le modèle BGM possède la propriété de donner des prix cohérents, pour les caps et les floors, avec les prix du modèle de Black -pratiqués sur le marché-. Nous allons donc pouvoir calibrer le modèle de manière relativement aisée en utilisant ces prix.

Considérons le swap de date de début T_d et de date d'échéance T_e et t une date antérieure à T_d .

Soit T_1^f, \dots, T_n^f les dates de paiement de la jambe fixe. La valeur actualisée des flux de cette jambe est donnée par : $Va_{swap payeur}(t) = \sum_{i=1}^n CP(t, T_i^f) \delta_i$ où $delta_i$ est la fraction d'année calculée en fonction de la convention de comptage, C le taux fixe et $P(t, T)$ le prix d'un zéro coupon de maturité T en t . C étant connu de manière certaine, on réécrit : $Va_{swap payeur}(t) = CL(t)$ avec L le niveau du swap i.e $L(t) = \sum_{i=0}^{n-1} P(t, T_i^f) \delta_i$.

Soit T_1^v, \dots, T_N^v , les dates de paiement des taux variables. Pour la jambe flottante i.e du point de vue du vendeur, nous avons : $Va_{swap vendeur}(t) = \sum_{i=1}^N L_i P(t, T_i^v) \delta_i$ avec T_i^v les dates de paiement du taux variable, et L_i le taux variable associé -un Libor par exemple-. Cette valeur peut aussi être exprimée en fonction d'un unique zéro-coupon :

$$\begin{aligned}
Va_{swapvendeur}(t) &= \sum_{i=0}^{N-1} L_i P(t, T_i^v) \delta_i \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{1}{P(T_{j-1}, T_j)} - 1 \right) P(t, T_i^v) \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{P(t, T_j)}{P(T_{j-1}, T_j)} - P(t, T_i^v) \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} (P(t, T_{j-1}) - P(t, T_i^v))
\end{aligned}$$

par télescopage :

$$Va_{swapvendeur}(0) = P(t, T_0^v) - P(t, T_N^v) \quad (87)$$

En égalisant les deux jambes à la date t et en remarquant que $T_0^v = T_d$ et $T_N^v = T_e$, on obtient le taux S du swap :

$$\begin{aligned}
Va_{swapvendeur}(t) &= Va_{swappayeur}(t) \\
S(t) \sum_{i=0}^{n-1} P(t, T_i^f) \delta_i &= P(t, T_0^v) - P(t, T_N^v) \\
S(t) &= \frac{P(t, T_0^v) - P(t, T_N^v)}{\sum_{i=0}^{n-1} P(t, T_i^f) \delta_i} = \frac{P(t, T_0^v) - P(t, T_N^v)}{L(t)} \quad (88)
\end{aligned}$$

Afin d'obtenir la dynamique du processus du taux swap, nous allons dériver s(t) avec le lemme d'Ito :

$$\begin{aligned}
dS(F_0, \dots, F_{N-1}, t) &= \frac{\partial S}{\partial t}(F_0, \dots, F_{N-1}, t) dt + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\partial S}{\partial F_i}(F_0, \dots, F_{N-1}, t) dF_i \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\partial^2 S}{\partial F_i^2}(F_0, \dots, F_{N-1}, t) \sigma_i^2 dt \\
&= 0 + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\partial S}{\partial F_i}(\mu_i dt + \sigma_i dW_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^{N-1} \frac{\partial^2 S}{\partial F_i \partial F_j} \rho_{jk} F_j F_k dt
\end{aligned}$$

d'ou la dynamique :

$$dS(F_0, \dots, F_{N-1}, t) = \Delta(F_0, \dots, F_{N-1}, t)dt + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\partial S}{\partial F_i} \sigma_i L_i dW_i \quad (89)$$

avec $\Delta(F_0, \dots, F_{N-1}, t) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\partial S}{\partial F_i} \mu_i dt + \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^{N-1} \frac{\partial^2 S}{\partial F_i \partial F_j} \rho_{jk} F_j F_k dt$

Pour résoudre cette équation différentielle stochastique, nous allons utiliser le principe de la linéarisation locale décrit par Biscay et al.[1]. Plus précisément, nous allons considérer que la structure actuelle de la courbe sera la structure future et donc poser pour tout i, $F_i(t) = F_i(0) = F_i^0$. l'équation devient alors :

$$dS(F_0, \dots, F_{N-1}, t) = \Delta(F_0^0, \dots, F_{N-1}^0, t)dt + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\partial S}{\partial F_i} L_i \sigma_i dW_i \quad (90)$$

et sa solution exacte est :

$$S(t) = S_0 + \int_0^t \Delta(F_0^0, \dots, F_{N-1}^0, u)du + \sum_{i=0}^{N-1} \int_0^t \frac{\partial S}{\partial F_i} L_i \sigma_i dW_i(u) \quad (91)$$

Sous cette approximation, les caractéristiques de S(t) sont :

$$\mathbb{E}[S(t)] = S_0 + \int_0^t \Delta(F_0^0, \dots, F_{N-1}^0, u)du \quad (92)$$

$$Var[S(t)] = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \rho_{jk} \int_0^t \frac{\partial S}{\partial F_k} \frac{\partial S}{\partial F_j} L_j L_k \sigma_j \sigma_k du \quad (93)$$

De l'expression de la variance, nous obtenons la volatilité de la swaption : $\zeta = \sqrt{\frac{1}{T_e - T_d} Var[S(t)]}$
d'où

$$\zeta_0^2 = \frac{1}{T_e - T_d} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \rho_{jk} \int_0^t \frac{\partial S}{\partial F_k} \frac{\partial S}{\partial F_j} L_j L_k \sigma_j \sigma_k du$$

Nous avons donc désormais un moyen d'évaluer une swaption. Pour évaluer plus rapidement encore ce produit, nous allons procéder à un développement limité.

Le développement limité sur $L_j(t)$ donne :

$$a \quad (94)$$

En considérant $\epsilon = 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} L_j(t) &= L_j(0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t U_{ji} L_j(L(0), s) dY_a(s) + \int_0^t \mu_j(L(0), s) ds \\ &+ \sum_{i=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{k=1}^N \int_u^t \int_0^t U_{ki} L_k(L(0), u) \frac{\partial U_{jl} L_j(F(0), s)}{\partial L_k} dY_i(u) dY_b(s) + \dots \end{aligned} \quad (95)$$

dont l'espérance est :

$$\mathbb{E}[F_j(t)] = L_j(0) + \int_0^t \mu_j(L(0), s) ds + \sum_{i=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{k=1}^N \int_u^t \int_0^t U_{ki} L_k(L(0), u) \frac{\partial U_{jl} L_j(F(0), s)}{\partial L_k} dY_i(u) dY_b(s) + \dots \quad (96)$$

Nous avons ajouté par ce développement un terme de convexité dépendant de la volatilité dans l'approximation du taux. Nous avons donc une modification de la dépendance entre deux Libors :

$$\begin{aligned} Cov[F_j(t), F_k(t)] &= \sum_{i=1}^d \sum_{l=1}^d \rho_{il} \int_0^t U_{ji} L_j(L(0), s) U_{jl} L_j(L(0), s) ds \\ &+ \sum_{i=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{o=1}^N \sum_{m=1}^d \sum_{n=1}^d \sum_{p=1}^N \rho_{im} \rho_{ln} \int_0^t \int_0^t U_{oi} L_o(L(0), u) \frac{\partial U_{jl} L_j(F(0), u)}{\partial L_o} U_{pm} \\ &\quad L_p(L(0), s) \frac{\partial U_{kn} L_k(F(0), s)}{\partial L_p} duds + \dots \end{aligned} \quad (97)$$

Ici aussi, nous avons corrigé en ajoutant un terme de convexité.

En appliquant le même processus sur $S(t)$, on a la dynamique suivante :

$$\begin{aligned} dS(t) &= \Delta(F_0^0, \dots, F_{N-1}^0, t) dt + \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\partial S}{\partial F_j} L_j dW_j(t) \\ &+ \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \varpi_{jk}(F(0), t) \int_0^t \sigma_k L_k(F(0), u) dW_k(u) dW_j(t) \end{aligned} \quad (98)$$

avec $\varpi_{jk}(F(0), t) = \frac{\partial^2 S}{\partial L_j \partial L_k} L_j \sigma_j + \frac{\partial S}{\partial F_j} \frac{\partial (L_j \sigma_j)}{\partial L_k}$. D'où le prix du swap :

$$\begin{aligned} S(t) &= S(0) + \int_0^t \Delta(F_0^0, \dots, F_{N-1}^0, s) ds + \sum_{j=0}^{N-1} \int_0^t \frac{\partial S}{\partial F_j} \sigma_j L_j dW_j(s) \\ &+ \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^t \varpi_{jk}(F(0), t) \int_0^s \sigma_k L_k(F(0), u) dW_k(u) dW_j(s) \end{aligned} \quad (99)$$

L'espérance et la variance du taux swap sont donc données par :

$$\mathbb{E}[S(t)] = S(0) + \int_0^t \Delta(F_0^0, \dots, F_{N-1}^0, s) ds \quad (100)$$

$$\begin{aligned} Var[S(t)] &= \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \left\{ \rho_{jl} \int_0^t \frac{\partial S}{\partial F_j} \sigma_j L_j(F(0), s) \frac{\partial S}{\partial F_l} \sigma_l L_l(F(0), s) ds \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{o=0}^{N-1} \left(\rho_{jl} \rho_{ko} \int_0^t \int_0^t \varpi_{jk}(F(0), s) \varpi_{lo}(F(0), s) \sigma_k L_k(F(0), u) \sigma_o L_o(F(0), u) ds do \right) \right\} \end{aligned} \quad (101)$$

On reconnaît dans cette dernière ligne l'expression de $\zeta_0^2(T_e - T_d)$. Nous allons réécrire notre variance sous forme d'un polynôme :

$$Var[S(t)] = \zeta_0^2(T_e - T_d) + \eta_0(T_e - T_d)^2 \quad (102)$$

$$\text{avec } \eta_0 = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{o=0}^{N-1} \left(\rho_{jl} \rho_{ko} \int_0^t \int_0^t \varpi_{jk}(F(0), s) \varpi_{lo}(F(0), s) \sigma_k L_k(F(0), u) \sigma_o L_o(F(0), u) ds do \right)$$

Nommons ζ_1 , l'approximation à l'ordre supérieur de ζ_0 définie comme suit :

$$\zeta_1 = \sqrt{\zeta_0^2 + \eta_0(T_e - T_d)} \quad (103)$$

Afin de diminuer la complexité du calcul et donc d'accélérer ce calcul, nous faisons un développement limité

$$\zeta_1 = \zeta_0 + \frac{\eta_0(T_e - T_d)}{2} \quad (104)$$

3.1.3 Calibration du BGM sur les swaptions et les caplets

Maintenant que nous avons accès à la volatilité des swaptions, nous allons pouvoir utiliser ce produit pour calibrer notre modèle. L'idée est d'utiliser deux produits plutôt qu'un seul pour l'optimisation. Nous allons pour cela utiliser la technique du Lagrangien. Nous allons de plus introduire un terme de stabilisation de la calibration dit terme de régularisation de Tychonoff. Soit ω_i , $i = 1..m$ le poids associé au caplet de maturité T_i , $\zeta_i(\sigma, \lambda)$ sa volatilité fournie par le modèle et ζ_i^M sa volatilité sur le marché. Soit ω_{ij} , $i = 1..m$ le poids associé à la swaption de date de début T_i de maturité T_j , $\zeta_{ij}(\sigma, \lambda)$ sa volatilité fournie par le modèle et ζ_{ij}^M sa volatilité sur le marché. Le lagrangien est

donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\sigma, \lambda) = & \frac{1}{3} \sum_{i=0}^m (\omega_i (\zeta_i(\sigma, \lambda) - \zeta_i^M))^2 \\ & + \frac{1}{3} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n (\omega_{ij} (\zeta_{ij}(\sigma, \lambda) - \zeta_{ij}^M))^2 \\ & + \frac{1}{3} \alpha \sum_{i=0}^j \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} \right)_i^2\end{aligned}\quad (105)$$

Le terme α est à la discréption de l'utilisateur selon l'intensité qu'il désire donner au facteur de stabilisation. De plus, les poids eux aussi se trouvent être à la discréption de l'utilisateur pour qu'il puisse favoriser des instruments plus que d'autres. L'optimisation se fait en dérivant le lagrangien selon σ et λ . On obtient donc le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^m (\omega_i \frac{\partial \zeta_i(\sigma, \lambda)}{\partial \sigma} (2\zeta_i(\sigma, \lambda) - \zeta_i^M)) + \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n (\omega_{ij} \frac{\partial \zeta_{ij}(\sigma, \lambda)}{\partial \sigma} (2\zeta_{ij}(\sigma, \lambda) - \zeta_{ij}^M)) + 0 = 0 \\ \sum_{i=0}^m (\omega_i \frac{\partial \zeta_i(\sigma, \lambda)}{\partial \lambda} (2\zeta_i(\sigma, \lambda) - \zeta_i^M)) + \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n (\omega_{ij} \frac{\partial \zeta_{ij}(\sigma, \lambda)}{\partial \lambda} (2\zeta_{ij}(\sigma, \lambda) - \zeta_{ij}^M)) \\ \quad + 2\alpha \sum_{i=0}^j \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t \partial \lambda} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} \right)_i = 0 \end{array} \right. \quad (106)$$

3.2 Comparaison de la stabilité et de la rapidité des modèles

Nous allons ici explorer comparer les modèles de Hull & White et CIR++. Le modèle BGM largement détaillé précédemment ne sera pas analysé. Comme nous l'avons vu, sa calibration demande un grand nombre de données de marché. De plus, son évaluation est beaucoup plus complexe que les deux autres modèles et a fortiori une machine très puissante. Sur un ordinateur classique, nous aurions eu des saturation mémoire et processeur, la durée de calcul n'aurait pas été significative.

3.2.1 Taux négatif de Hull&White

Le modèle de Hull&White est connue pour sa probabilité non-nulle de taux négatif dans l'univers risque-neutre. Nous allons dans un premier temps quantifier ce risque :

Soit Ψ , la fonction de répartition de la loi normale centrée

$$\begin{aligned} P[r(t) < 0 | \mathcal{F}_s] &= P[\mathbb{E}[r(t)|\mathcal{F}_s] + \sqrt{Var[r(t)|\mathcal{F}_s]}W < 0] \\ &= P\left[W < \frac{\mathbb{E}[r(t)]}{\sqrt{Var[r(t)]}}\right] \\ &= \Psi\left(\frac{r(s)e^{-\alpha(t-s)} + a(t) - a(s)e^{-\alpha(t-s)}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2a}[1 - e^{-2a(t-s)}]}}\right) \end{aligned} \quad (107)$$

Si l'on définit le processus suivant : $dx(t) = -\alpha(t) + \sigma dW(t)$, $x(0) = 0$. La solution de cette EDS est :

$$x(t) = x(s)\exp(-\alpha(t-s)) + \sigma \int_s^t \exp(-\alpha(t-u))dW(u)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} r(t) - x(t) &= r(s)e^{-\alpha(t-s)} + a(t) - a(s)e^{-\alpha(t-s)} + \sigma \int_s^t \exp(-\alpha(t-u))dW(u) \\ &\quad - x(s)e^{-\alpha(t-s)} - \sigma \int_s^t \exp(-\alpha(t-u))dW(u) \\ &= (r(s) - x(s) - a(s))e^{-\alpha(t-s)} + a(t) \end{aligned}$$

Donc on a :

$$\forall t, r(t) = x(t) + a(t) \quad (108)$$

On obtient alors pour $s=0$:

$$\begin{aligned} P[r(t) < 0] &= \Psi\left(\frac{x(0)e^{-\alpha t} + a(t)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2a}[1 - e^{-2\alpha t}]}}\right) \\ &= \Psi\left(-\frac{a(t)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\alpha}[1 - e^{-2\alpha t}]}}\right) \end{aligned} \quad (109)$$

L'évaluation de $a(t)$ va donc nous permettre de quantifier directement le risque de taux négatif. Nous allons évaluer ceci dans le cadre de la courbe des taux zéro-coupon, fournie par l'Institut des Actuaires, en traçant à chaque pas de la probabilité de taux négatif et en la comparant à la courbe théorique.

La courbe ci-dessous présente trois phases :

- Une première, entre les dates $t=0$ et $t=85$, où la partie d'ajustement sur la courbe des taux est dominante. La courbe suit l'anticipation du marché.

Mémoire présenté pour le titre d'actuaire: Éléments d'implémentation d'un modèle de CVA: Étude du modèle de taux

- Une deuxième, entre les dates $t=85$ et $t=274$ où le paramètre de volatilité du modèle prédomine. La probabilité de négativité des taux augmente légèrement.
- Une troisième, entre les dates $t=274$ et $t=800$ où le paramètre d'accroissement du modèle prend le pas. Les taux sont de plus en plus positifs.

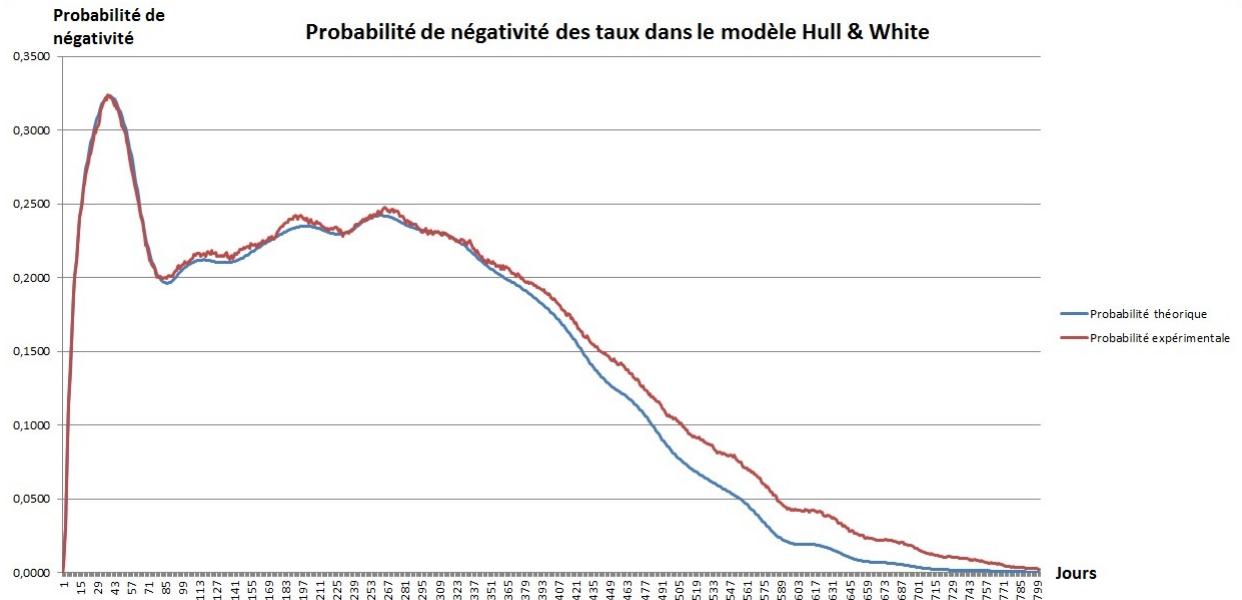


FIGURE 23 – Probabilité de négativité des taux Hull & White sous les conditions de l'IA

On peut remarquer que les deux courbes sont proches jusqu'à la date 350 avant de diverger. L'écart restant inférieur à 2%, il est très probable que les biais informatiques et les approximations des algorithmes de génération des nombres aléatoires en soient la cause.

3.2.2 Comparaison des vitesses de calculs

Nous allons dans cette section comparer les vitesses de calculs des deux modèles. Le processus dont la vitesse sera mesurée est celui de diffusion du taux et de calcul des prix du panel d'instruments suivant :

- Le taux court
- Quatre bonds zéro-coupon d'échéance de date de maturité 200, 400, 600 et 800 :
- Cinq call sur zéro-coupon de paramètres :
 - Date d'exercice : 750, Date de maturité du sous-jacent : 800, Strike : 0.99999
 - Date d'exercice : 700, Date de maturité du sous-jacent : 800, Strike : 0.99999

Mémoire présenté pour le titre d'actuaire: Éléments d'implémentation d'un modèle de CVA: Étude du modèle de taux

- Date d'exercice : 650, Date de maturité du sous-jacent : 800, Strike : 0.99999
- Date d'exercice : 700, Date de maturité du sous-jacent : 800, Strike : 0.9999
- Date d'exercice : 700, Date de maturité du sous-jacent : 800, Strike : 0.9995
- Date d'exercice : 700, Date de maturité du sous-jacent : 800, Strike : 0.999
- Six put sur zéro-coupon de paramètres :
 - Date d'exercice : 600, Date de maturité du sous-jacent : 650, Strike : 0.997
 - Date d'exercice : 600, Date de maturité du sous-jacent : 725, Strike : 0.997
 - Date d'exercice : 600, Date de maturité du sous-jacent : 775, Strike : 0.997
 - Date d'exercice : 600, Date de maturité du sous-jacent : 800, Strike : 0.997
 - Date d'exercice : 700, Date de maturité du sous-jacent : 800, Strike : 0.999

Il peut être noté que les cap et les floors n'ont pas été inclus dans ce portefeuille. Ce choix est lié directement à l'expression de ces produits, les équations de la partie 2 montrent qu'il s'agit d'un somme de call ou de put. Le ratio des temps de calcul sera pris en compte, de manière indirecte, dans notre panel. N'apportant pas de véritable valeur ajoutée en eux, ces produits aurait accru le temps de calcul de manière très importante. En effet, un cap ou floor mensuel sur un an est l'équivalent de 12 puts ou calls. Nous aurions aussi perdu en qualité de résultat. Plus le nombre de produits calculés en parallèle est important, plus le volume de données traité l'est. Des saturations de mémoire peuvent alors avoir lieu sur l'un des modèles entraînant alors une disparité flagrante des temps de calculs. La calibration utilisée dans cette analyse n'étant pas représentative des méthodes de calibrations usuellement exploitée, nous avons volontairement exclu cette étape de la comparaison. De plus, cette étape est un préliminaire à l'étude qui n'a pas vocation à être lancé aussi souvent que la diffusion.

Afin de pouvoir négliger les effets de bord, un grand nombre de simulation sera lancé. Plus précisément, notre portefeuille sera évalué sur 100 000 chemins et pour 800 dates. Nous pourrons ainsi exploiter directement les résultats pour la comparaison des prix. En effet, les quantiles exploités étant ceux à 99,5% et 0,5%, nous aurons au moins 500 simulations de chaque côté desdits quantiles. Leur véracité et stabilité seront assurées. Le lancement de chaque algorithme sera successif et dans des conditions identiques :

- Branchement de l'alimentation au réseau électrique
- Connexions réseaux éteintes
- Tâches de fonds réduites au minimum
- Absence de programme ouvert

Ceci nous permettra d'éliminer toutes les causes éventuelles d'écart parasite. La saturation de la mémoire vive sera aussi surveillée afin de s'assurer qu'aucun des deux modèles n'a été ralenti par ce phénomène

Les temps de compilation obtenus sont :

1h 02min pour le modèle de Hull & White

4h 38min pour le modèle CIR++

Le modèle CIR++ est s'avère entre quatre et cinq fois plus lent que le modèle Hull & White. Une architecture différente du code entre les deux modèles aurait pu en être la cause mais celle-ci doit être évincée. En effet, le développement a été effectué dans le but de cette comparaison et le découpage a été scrupuleusement identique. Les fonctions externes tels que *pnorm()* ou *pchisq()* n'ont quant à elles pas été examinées. Elles constituent de bons responsables potentiels de l'écart constaté. En effet, tous les calls et puts font appel à elles, il s'agit des fonctions les plus utilisées après les opérations usuelles. En utilisant le profiler d'Addactis Modeling ®, il est bien confirmé que ce sont dans les fonction d'évaluation des options que le plus de temps est passé.

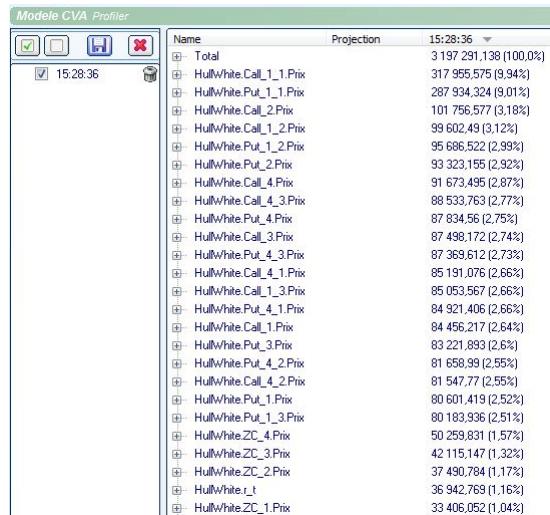


FIGURE 24 – Analyse des temps de calcul par fonction sous Addactis Modeling ®

Pour confirmer la mise en cause des fonctions externes, 8 millions d'appel à *pnorm()* et *pchisq()* ont été simulés. On obtient un temps de compilation cinq fois plus important pour le quantile de la loi du Khi-deux que pour celui de la loi normale. Une sensibilité évidente de la fonction *pchisq()* aux paramètres de degré de liberté et de décentrage est

Mémoire présenté pour le titre d'actuaire: Éléments d'implémentation d'un modèle de CVA: Étude du modèle de taux

de plus mis en lumière, le temps de compilation pouvant augmentant de 25% entre un appel de la loi centré-réduite et un appel avec des paramètres de l'ordre de grandeurs de ceux utilisés dans le modèle.

3.3 Comparaison quantitative des résultats

Nous allons dans cette section comparer produits par produits les résultats fournis par chaque modèle. Outre le quantile à 99,5% utilisé dans le cadre de la PFE, nous analyserons aussi le quantile à 0,5% car il correspond au quantile à 99,5% dans le cadre d'un vente de produit. Les quantiles à 75%, 25% et 50% nous permettrons de positionner le coeur de la distribution pour comparaison des modèles.

3.3.1 Analyse du taux court

Afin d'analyser le taux court, nous avons ajouter au graphique la courbe des taux forwards fournie calculée à partir de la courbe de l'Institut des Actuaires. Le graphique ci-dessous est le tracé de l'évolution des quantiles entre les dates $T=1$ yrs et $T=800$ yrs.

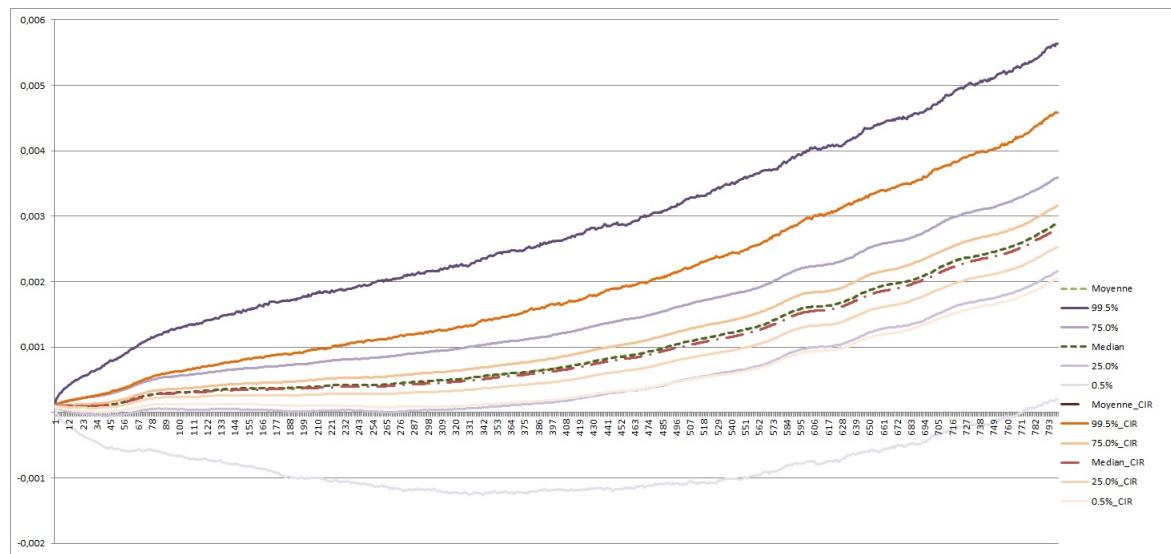


FIGURE 25 – Tracé des divers quantiles de la diffusion du taux court

Pour plus de lisibilité, les quantiles d'un même modèle ont été représentés sur une échelle de teinte d'une même couleur. Le violet pour le modèle Hull & White et le orange

Mémoire présenté pour le titre d'actuaire: Éléments d'implémentation d'un modèle de CVA: Étude du modèle de taux

pour le modèle CIR ++. La courbe de l'instut est elle en bleue.

Nous pouvons remarquer que les quantiles du modèle CIR ++ se trouvent à l'intérieur de ceux du modèle de Hull & White. Ce dernier diffuse donc un taux plus volatile que son alter ego. À première vue, ce résultat peut dérouter le lecteur. Son explication est cependant intuitive. Nous avons quantifié dans la section précédente la phénomène de négativité des taux de Hull & White alors que nous avons précisé lors de la présentation du modèle CIR que celui-ci ne pouvait pas être négatif ; la dynamique de son taux court $dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t)$ ne serait pas définie. A cette fin, l'inégalité $2k\theta > \sigma^2$ impose une valeur maximale au paramètre de volatilité σ . Dans le contexte de taux bas, cette inégalité devient très restrictive. Il est en effet d'autant plus facile d'obtenir des taux négatifs que le taux initial est proche de 0. Il pourrait être argué que ce cas n'est pas représentatif du monde réel. Nous sommes cependant forcer de noter que la conjecture actuelle et la politique de la Banque Centrale Européenne pérennise cette situation de taux bas en Europe. Il faut concéder que notre étude ne pourra pas être utilisé sur des marchés à haut taux.

Analysant de manière plus approfondie ce graphique, nous constatons que le quantile à 99,5% CIR se situe entre les quantiles à 75% et 99,5% de HW alors que le quantile à 0,05% se trouve extrêmement proche du quantile à 25%. Cette dissymétrie est afférente à la nature des distributions des taux. Alors que la loi normale est paire et non bornée, la loi du khi-deux est clairement dissymétrique par rapport à sa moyenne et n'est pas définie sur les valeurs nulle. Nous pouvons grâce à ce point noter que l'utilisation du modèle CIR++ sur des portefeuilles équilibrés entre acheteur/vendeur d'exploiter cette dissymétrie.

Finalement, on note que les moyennes et médianes de chaque modèle restent proches de la courbe de l'Institut avec un écart maximum inférieur à 5%. Ceci permet de s'assurer a posteriori de la bonne implémentation des deux modèles et confirme l'adéquation leur adéquation avec la courbe des taux de l'Institut

3.3.2 Analyse des bons zéro-coupon

Les bons zéro-coupons sont obtenus pour ces deux modèles via un ajustement des modèles standards sur les données de marchés. Les formules peuvent être vue comme

Mémoire présenté pour le titre d'actuaire: Éléments d'implémentation d'un modèle de CVA: Étude du modèle de taux

une règle de 3 appliquée sur les montants données par le Vasicek ou CIR pour faire correspondre les résultats à la courbe des taux. Bien évidemment, la courbe des zéro-coupon construite à partir des données de l'IA n'est reproduite que lors de l'utilisation des taux courts associés. Dans le cas de la diffusion, le caractère stochastique celle-ci donne une répartition statistique centrée autour de la courbe IA.

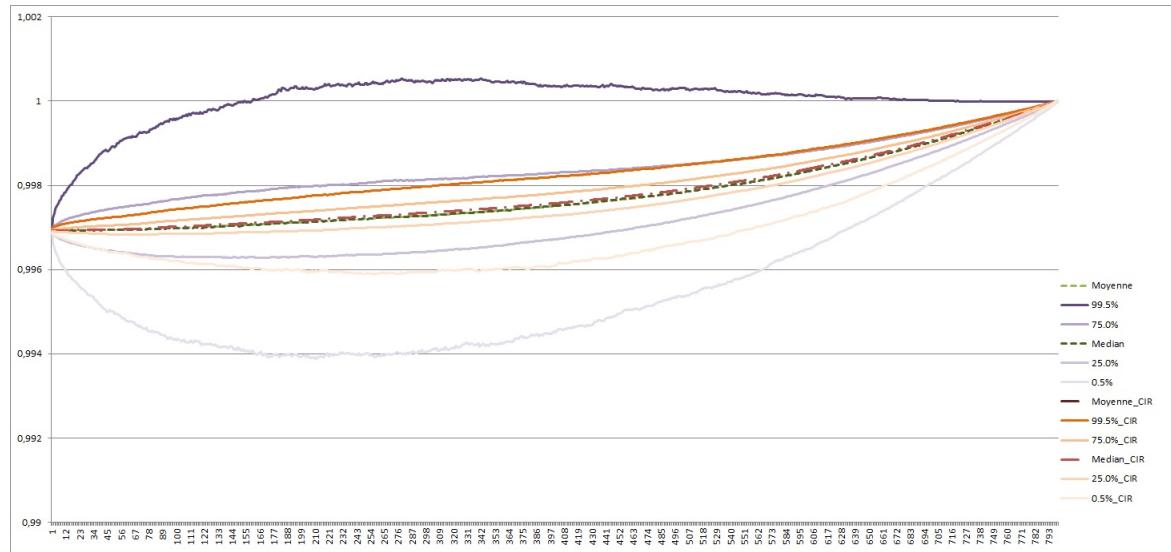


FIGURE 26 – Tracé des divers quantiles d'un zéro coupon de maturité 800

Sur ce graphique, nous pouvons observer que le quantile à 99,5% du modèle Hull & White dépasse la valeur 1. Ceci pourrait paraître étonnant au lecteur. Cependant, nous avons vu dans la section précédente que ce quantile correspond des taux négatifs. Ceci signifie que le calcul de l'escompte donne des intérêts négatifs alors qu'ils sont usuellement positif. Le pay-off du zéro-coupons restant le même, le prix en cas de taux négatif dépasse la valeur de ce pay-off de montant 1.

Le lecteur pourra aussi remarquer la position relative des quantiles. Comme pour le taux court, les quantiles du modèle CIR++ se trouvent à l'intérieur de ceux du modèle Hull & White. Nous retrouvons, de plus, la dissymétrie des positions des quantiles à 99,5% et 0,5% du modèle CIR++. Il faut cependant inverser leur rôle. Ces deux modèles

étant affines, leur expression est de la forme $P(t, T) = A(t, T) * \exp(-r(t) * B(t, T))$, l'impact du quantile à 99,5% du taux court correspond donc en ordre de grandeur au quantile à 0,5% du zéro-coupons.

Utilisons maintenant nos autres simulations de zéro-coupons. Ayant tous une date de maturité différente, nous allons pouvoir observer la sensibilité de nos modèles à ce paramètre. Sur le groupement de graphique ci-dessous, nous pouvons observer que le comportement relatif des deux modèles. Hormis, une mise à l'échelle intrinsèque au changement de date de maturité -prix initial d'autant plus élevé que la maturité est proche et arrêt de la cotation après la maturité-, il n'existe pas de changement radical.

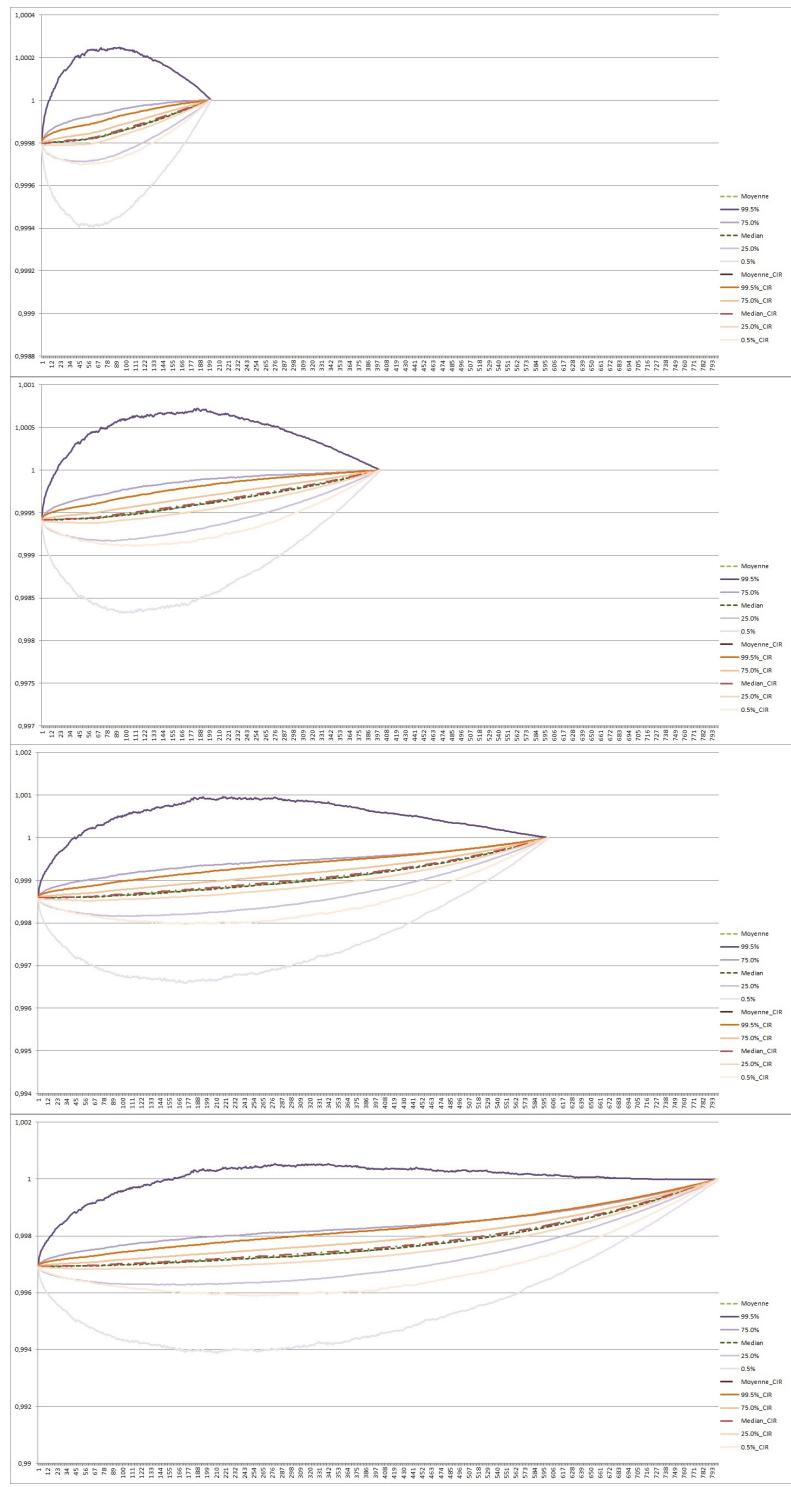


FIGURE 27 – Graphe comparatif des zéro-coupon de maturité 200, 400, 600, 800

Mémoire présenté pour le titre d'actuaire: Éléments d'implémentation d'un modèle de CVA: Étude du modèle de taux

Nous pouvons observer cependant que le quantile à 95% du modèle Hull & White atteint une valeur maximale plus haute dans le cas du zéro-coupons de maturité 600 que dans les autres cas. Ce phénomène est du à lié au changement de date de maturité. Une date plus proche donnera un prix de départ plus élevé mais la diffusion des taux entre les deux dates (ici 600 et 800) ne sera pas prise en compte. Il y aura donc une probabilité plus faible de taux négatifs.

Nous constatons ici que ces phénomènes semblent se compenser et donne un maximum pour la date 600. L'utilisateur devra donc garder en mémoire lors de sa modélisation que dans le cadre des taux bas, le quantile utilisé pour la PFE être plus élevé pour certaines maturité. Ici, il est surprenant de voir ce quantile plus élevé pour le zéro-coupon de maturité 600 que pour ceux de maturité 200 et 400. Il est par contre plus intuitif que que le produit de maturité 800 donne un montant plus faible.

3.3.3 Analyse des calls

Les calls sont des produits optionnels, ils sont donc particulièrement sensibles à la volatilité et donc aux paramètre sigma des deux modèles. Nous avons vu dans la section sur le taux court que le modèle CIR++ est moins volatile que le modèle de Hull & White. Nous nous attendons donc à ce que les quantiles de ce premier soient à l'intérieur de ceux du second comme pour les zéro-coupon. Par ailleurs, en notant que le pay-off d'un call est de la forme $C(T) = \max(S(T) - K; 0)$, nous pouvons pressentir que dans le cas d'instruments très en dessous ou très au dessus de la monnaie, le modèle le plus volatile -a priori Hull & White- donnera des résultats bien plus élevé que son concurrent.

Nous observons sur le graphique ci-dessous deux faits principaux. A l'inverse des zéro-coupons, les courbes ne convergent pas vers une valeur unique à la date de maturité du produit. Ceci provient de la nature du pay-off, il n'est pas fixé comme pour le bon mais dépend du sous-jacent. L'effet d'atténuation des écarts constaté pour le zéro-coupons n'apparaît pas. Secondelement, on note que les quantiles extrêmes Hull & White sont, comparés aux autres quantiles, beaucoup plus éloignés des valeurs moyennes que pour le taux court ou le zéro coupon. Cela est du à l'effet mentionné dans le paragraphe précédent.

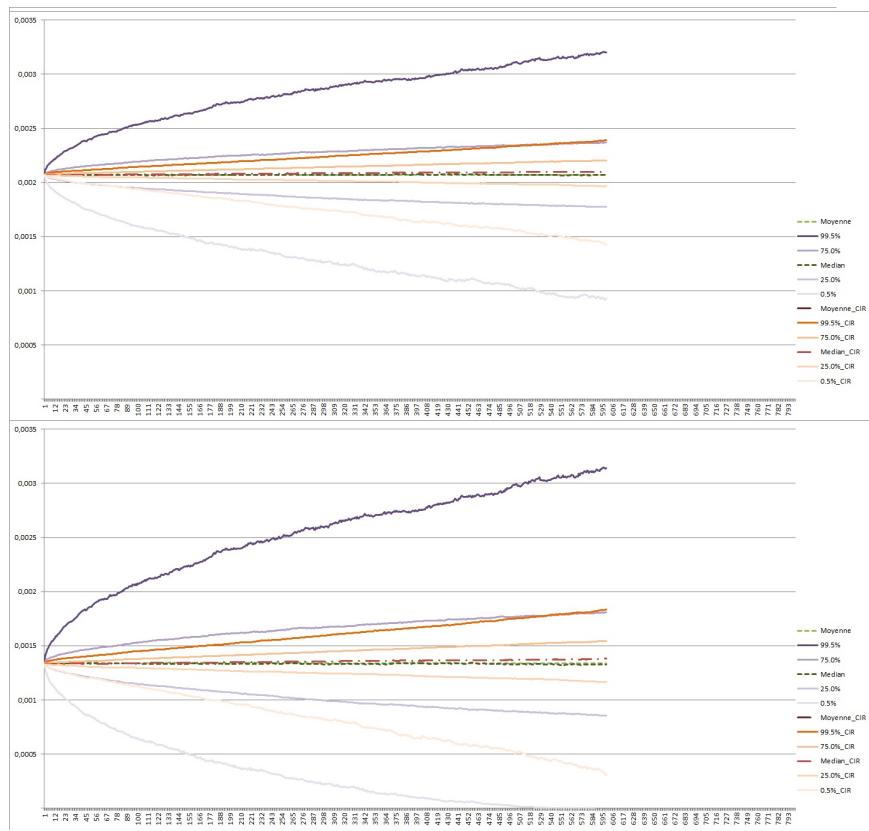


FIGURE 28 – Graphe comparatif des call de maturité 600, prix d'exercice 0.997 et maturité du sous-jacent 725/800

Comme pressenti, le modèle CIR++ nous fourni des quantiles moins élevés que son homologue. Il se confirme de plus en plus que ce modèle donne un coût du risque moindre dans le cadre de l'étude. Lorsque l'on se penche sur l'impact de la date de maturité du zéro-coupon sous-jacent à prix d'exercice constant, on ne constate pas de différence flagrante. Hormis une modification du prix initial et une remise à l'échelle des courbes, rien ne semble différer. En revanche, l'étude de l'impact du strike permet de faire ressortir deux résultats flagrants.

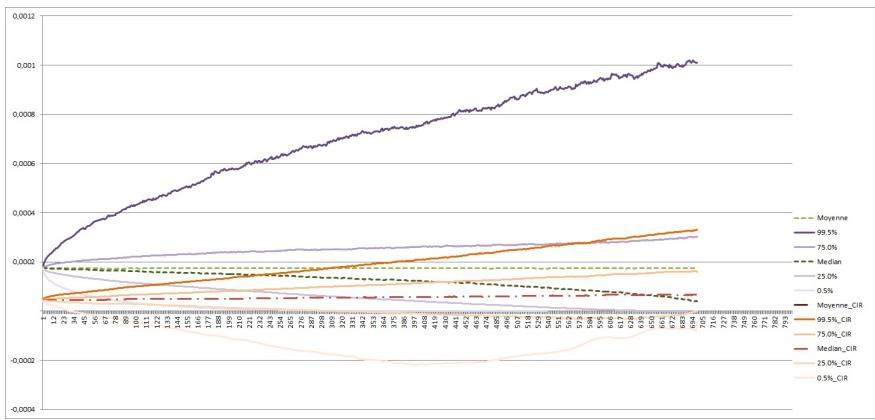


FIGURE 29 – Position relative des quantile des modèles Hull & White et CIR ++ pour un call de maturité $T=700$, de strike $K=0.999$ et de maturité du sous-jacent $S=800$

Premièrement, nous constatons que les prix en $T=0$ sont différents. Ceci s'explique par la méthode de calibration utilisée. Basée sur les zéro-coupons, elle ne permet pas de prendre en compte de manière similaire les attentes sur le marché des options. Cette différence n'est pas grave en soit, dans le monde réel chaque modèle donne un prix différent à chaque produit. Cette différence de valorisation donne sur le marché un prix moyen issue de l'arbitrage général.

Secondement, nous pouvons noter un point très problématique pour le modèle CIR++. Les quantiles à 75% et 95% passent sous la valeur 0. Bien entendu, ceci est impossible. L'implémentation du modèle pourrait être mis en cause. Lors de la lecture du log du modèle CIR++, une erreur récurrente nommée *Float Point UnderFlow* apparaît. Cette erreur correspond à un souppassement en virgule flottante, certains résultats intermédiaires non nuls sont inférieur à la valeur minimale représentable et sont alors remplacés par 0. Cette erreur n'ayant lieu que pour des résultats finaux proches de 0, elle ne compromet pas le résultat général si tant est que l'on considère les valeurs négatives comme nulles.

Concernant le modèle Hull & White, nous constatons une nouvelle fois que son quantile supérieur est bien plus élevé que les autres. Nous pouvons aussi observer un croisement des quantiles à 99,5% de CIR++ et à 75% de Hull & White. Ceci provient du type de loi utilisée pour le taux court. Alors que la loi normale donne un écart moyen à la moyenne en \sqrt{t} , la loi du khi-deux décentré semble avoir un écart plutôt linéaire du temps. On peut donc supposer que le sur des simulations à très long terme, les deux quantiles extrêmes se croiseront et le modèle CIR++ encadrera les quantiles de HW. Cette simulation n'est

cependant pas possible compte tenu de la puissance de calcul et de stockage de données nécessaire.

3.3.4 Analyse des puts

L'existence de la parité call-put devrait nous mener des observations comparables aux deux points précédents. Cette parité n'est en effet pas spécifique à un modèle. Nous ne pourrons cependant pas faire de comparaison directe avec le paragraphe précédent, les calls et les puts simulés n'étant pas de mêmes paramètres.

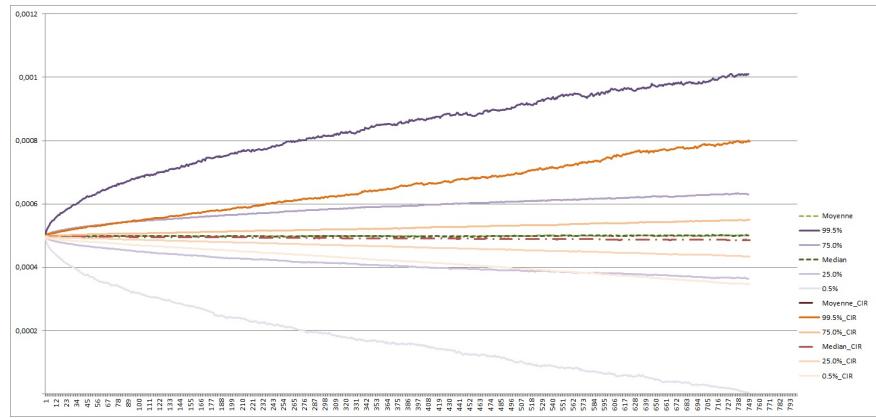


FIGURE 30 – Position relative des quantiles des modèles Hull & White et CIR ++ pour un put de maturité $T=750$, de strike $K=0.99999$ et de maturité du sous-jacent $S=800$

La distribution des quantiles sur du put ci-contre est similaire à celle des calls précédents. Plus précisément, on peut observer une sorte de symétrie par rapport à la moyenne. Le croisement de quantiles observé a désormais lieu entre ceux à 0,5% du modèle CIR++ et à 25% du modèle Hull & White et non ceux à 99,5% et 75%. Cette symétrie provient de la forme du pay-off valant $\max(S - K; 0)$ pour le call, il vaut $\max(K - S; 0)$ pour le put, d'où notre inversement des quantiles.

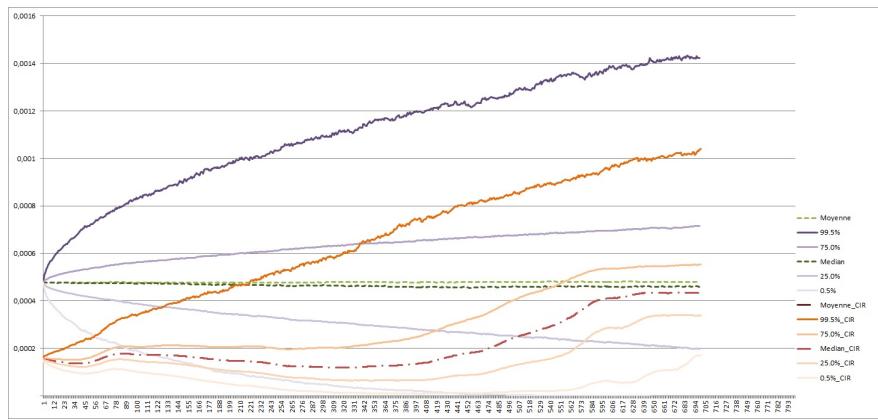


FIGURE 31 – Position relative des quantiles des modèles Hull & White et CIR ++ pour un put de maturité $T=700$, de strike $K=0.9995$ et de maturité du sous-jacent $S=800$

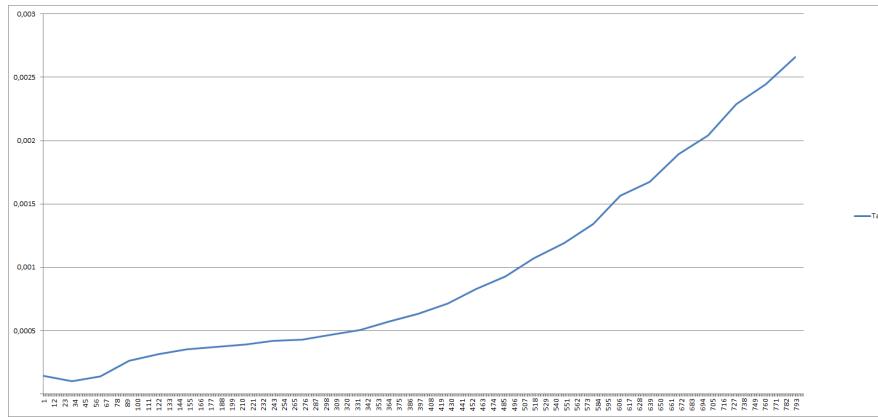


FIGURE 32 – Courbe des taux forward calculée à partir de la courbe des taux de l’Institut des Actuaires

Nous allons nous pencher sur le cas d'un put au dessus de la monnaie. Il s'agit du put de prix d'exercice 0.9995, de maturité $T=700$ et de maturité du sous-jacent $S=800$. Il est le pendant du cas du call que nous venons d'étudier. De manière similaire, nous constatons un prix initial différent et ce, pour des raisons déjà évoquées. Il est intéressant d'observer le comportement du modèle CIR++. Alors que le modèle Hull & White se comporte de manière classique avec une diffusion en racine carrée, le tracé des quantiles du CIR++ semble plus erratique. Le lecteur averti aura noté que ces tracés peuvent être rapproché de la courbe des taux forward issue de l'IA. Le décrochement initial -entre

Mémoire présenté pour le titre d'actuaire: Éléments d'implémentation d'un modèle de CVA: Étude du modèle de taux

$t=10$ et $t=90$ - est directement du à celle-ci. Rappelons-nous que l'expression d'un option sur zéro-coupon fait appel à l'évaluation d'un zéro coupon. Or, celui-ci est ajusté pour refléter au mieux la courbe des taux entrée en paramètre. Le prix de l'option est donc indirectement réajusté. La forte remontée des quantiles du modèle CIR++ à partir de la date $t=386$ est liée à la forte augmentation des taux forward constatée à partir de cette date. Plus les taux sont hauts moins le zéro-coupon est cher et plus le put l'est.

Il serait justifié de se demander pourquoi ceci n'est pas observé sur le deuxième modèle. Cela vient du facteur de volatilité. Étant plus important dans le modèle Hull & White que dans le modèle CIR++, son effet prend le pas sur l'effet d'ajustement.

Nous avons vu dans cette partie que chacun des modèles possède ses propres avantages. Le modèle de Hull & White est un modèle rapide et performant en terme de calcul. Cependant, il tend à fournir des distributions plus volatile que le modèle CIR++. A l'inverse, le modèle CIR++ est apparu comme lent en terme de calcul mais de par sa faible volatilité -lié à la courbe des taux utilisée- il fournit une distribution très centrée autour de la moyenne. De ce fait, il suit mieux la courbe des taux et permet de prendre en compte un sursaut de celle-ci. Un doute subsiste cependant sur les engagements long, le modèle CIR++ pourrait fournir, à partir d'une date, un quantile à 99.5% plus élevé que Hull & White.

4 Une autre approche de la modélisation du risque de contrepartie

Nous avons vu précédemment que la modélisation de la CVA la plus répandue aujourd’hui considère qu’il y a indépendance entre la qualité du crédit et l’exposition. Cette modélisation ne prend donc pas en compte les *Wrong/Right Way Risk*, c’est à dire la corrélation entre ces deux paramètres du crédit.

Plus précisément, le *Wrong Way Risk (WWR)* est la corrélation positive entre la qualité d’une contrepartie et l’exposition avec cette même contrepartie. Une illustration classiquement utilisée est la conclusion d’un swap payeur indexé sur le cours du baril de pétrole entre une banque *Abank* et une compagnie aérienne *Bplane* (*Abank* reçoit le taux variable et paie le taux fixe à *Bplane*). Si le cours du baril vient à augmenter, la compagnie *Bplane* verra ses coûts de fonctionnement augmenter, sa solvabilité sera donc dégradée. Or, elle doit payer le taux variable à *Abank*, taux qui du fait de son indexation sur ce même cours du baril augmentera aussi, augmentant les difficultés financières de *Bplane*. Le cumul des deux effets peut s’avérer désastreux pour *Bplane* et la mener à la faillite. Il est donc essentiel pour *Abank* de prendre en compte ce risque lors de son calcul de CVA.

Lorsqu’il y a une corrélation négative entre les deux paramètres évoqués précédemment le phénomène est appelé *Right Way Risk*. Une illustration est la conclusion d’un swap receveur lui aussi indexé sur le cours du baril de pétrole entre la même banque *Abank* et la compagnie aérienne *Bplane* (*Abank* reçoit le taux fixe et paie le taux variable à *Bplane*). Comme précédemment, si le cours du baril vient à augmenter, la compagnie *Bplane* verra ses coûts de fonctionnement augmenter, sa solvabilité sera donc dégradée. Cependant, elle reçoit le taux variable de *Abank*, taux qui du fait de son indexation sur ce même cours du baril augmentera aussi, l’augmentation des coûts de *Bplane* est donc atténuée par l’augmentation des recettes liées au swap. Le cumul des deux effets stabilise donc *Bplane*. Si *Abank* prend en compte cet effet dans son calcul de CVA, elle aura la possibilité de prendre plus de risque sur d’autres contrats.

La prise en compte des *Wrong/Right Way Risk* est donc essentiel pour refléter véritablement les risques encourus et donc la vraie valeur de la CVA. Plutôt que de chercher à ajouter une surcouche aux modèles actuels comme fait précédemment dans la section Indépendance entre l’exposition et la qualité de la contrepartie, nous allons ici présenter l’approche développée par Tim Xiao[14] qui prend naturellement en compte ces deux

phénomènes.

4.1 Caractéristiques de l'approche

Les techniques usuellement utilisées sont basées sur l'approche par date de défaut - *default time approach* ou DTA-. Elle se base donc sur la connaissance explicite des dates de défaut des diverses contreparties. Ceci est très clairement un désavantage. En effet, à l'instant t du calcul de la CVA, nous ne sommes pas en possession de suffisamment d'informations pour connaître ces dates. Comme nous l'avons vu précédemment dans la section : Génération de scénario, ces informations sont obtenues via des simulations de Monte-Carlo. L'approche de Xiao, elle est basée sur un approche par probabilité de défaut -*default probability approach* ou DPA-.

Reprendons, les résultats du modèle de Cox :

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathcal{P})$ un espace mesurable filtré avec Ω un ensemble non vide, \mathcal{F} une tribu sur Ω , $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ une filtration sur l'espace mesurable (Ω, \mathcal{F}) et \mathcal{P} une mesure sur l'espace mesurable (Ω, \mathcal{F}) tel que $\mathcal{P}(\Omega) = 1$.

Le temps de défaut d'une contrepartie est défini comme suit :

$$\tau = \inf\{t : \int_0^t h(s, \phi_s) ds \geq E\} \quad (110)$$

avec $t, \phi \mapsto h(t, \phi_t)$ une fonction de hasard associée à la contrepartie et E une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$ indépendante de ϕ_t .

On en déduit donc la probabilité de survie sur l'intervalle $[t_i, t - i + 1]$:

$$p(t_i, t_{i+1}) := P(\tau > t_{i+1} | \tau > t_i, Z) = e^{-\int_{t_i}^{t_{i+1}} h(u) du} \quad (111)$$

et la probabilité de défaut sur le même intervalle :

$$q(t_i, t_{i+1}) := P(\tau \leq t_{i+1} | \tau > t_i, Z) = 1 - e^{-\int_{t_i}^{t_{i+1}} h(u) du} \quad (112)$$

On note bien évidemment que $p(t_i, t_{i+1}) + q(t_i, t_{i+1}) = 1$, le cadre de travail adopté ne considère en effet que deux états possibles.

Afin de calculer notre CVA, il nous faut introduire un contrat financier entre deux contreparties. Considérons, par exemple, un zéro-coupon de nominal N d'échéance T . La contrepartie *Abank* recevra donc un unique nominal de montant N à la date T de la part

de la contrepartie *Bbank*. Nous nous limiterons ici aux calculs de CVA où seul Bbank peut être sujet à un défaut, et ce pour les raisons évoquées dans la section : Problèmes soulevés par la CVA bilatérale.

La valeur du contrat à la date t est donnée par l'équation suivante :

$$V^F(t) = \mathbb{E}[e^{-\int_t^T r(u)du} N | \mathcal{F}_t] \quad (113)$$

avec $\mathbb{E}[\cdot | \mathcal{F}_t]$ l'espérance conditionnelle à l'état du monde \mathcal{F}_t , $e^{-\int_t^T r(u)du} = D(t, T)$ le facteur d'actualisation entre t et T et $r(u)$ le taux court sans risque pour u appartenant à $[t, T]$

Grâce à ces rappels, nous pouvons directement introduire la DPA- ou approche par probabilité de défaut-. Introduisons la subdivision régulière $\kappa = (t_0 = t, t_1, t_2, \dots, t_n = T)$ de pas Δt . On considère que ce pas est suffisamment petit pour que le défaut ne puisse avoir lieu qu'en l'un des points de la subdivision κ . La petitesse du pas nous permet aussi d'utiliser des développements limités à l'ordre 1. Sous ces conditions, les probabilités de survie et de défaut entre t_i et t_{i+1} sont régies par :

$$\hat{p}(t) := p(t_i, t_{i+1}) \approx e^{-h(t_i)\Delta t} \approx 1 - h(t_i)\Delta t \quad (114)$$

$$\hat{q}(t) := q(t_i, t_{i+1}) \approx 1 - e^{-h(t_i)\Delta t} \approx h(t_i)\Delta t \quad (115)$$

Comme évoqué plus tôt, on ne considère pas d'état intermédiaire entre le défaut et la survie, notre espérance va donc se limiter à une somme de deux termes :

- Si il y a défaut en t_{i+1} , alors Abank récupérera à cette date une portion $\mathcal{R}(t_{i+1})$ du prix $V(t_{i+1})$ du contrat à l'instant du défaut et rien par la suite
- Si il n'y a pas défaut, alors le contrat survit et sa valeur de marché est $V(t_{i+1})$

En actualisant au taux sans risque, la valeur du contrat en t_i sachant qu'il n'y a pas eu défaut avant t_i est donc :

$$V(t_i) = \mathbb{E}[e^{-r(t_i)\Delta t} (\hat{p}(t_i) + \mathcal{R}(t_{i+1})\hat{q}(t)) V(t_{i+1}) | \mathcal{F}_{t_i}]$$

On suppose désormais qu'il existe une fonction $\mathcal{Q} : t_i \mapsto \mathcal{Q}(t_i) = \mathcal{R}(t_{i+1})$. Ceci signifie que l'on connaît à l'instant $t = t_i$ la proportion du prix du contrat que l'on récupérera si il y a faillite en $t = t_{i+1}$. Cette fonction est \mathcal{F}_{t_i} mesurable. L'équation devient donc

$$V(t_i) = \mathbb{E}[e^{-r(t_i)\Delta t} (\hat{p}(t_i) + \mathcal{Q}(t_i)\hat{q}(t)) V(t_{i+1}) | \mathcal{F}_{t_i}] \approx \mathbb{E}[e^{-(r(t_i)+s(t_i))\Delta t} V(t_{i+1}) | \mathcal{F}_{t_i}] \quad (116)$$

avec $s(t_i) = h(t_i)(1 - \mathcal{Q}(t_i))$ le spread de crédit ; le taux risqué vaut : $y(t_i) = r(t_i) + s(t_i)$. Ce taux est \mathcal{F}_{t_i} mesurable

Le terme $V(t_{i+1})$ de l'équation (116) peut sans effort être explicité :

$$V(t_{i+1}) \approx \mathbb{E}[e^{-(r(t_{i+1})+s(t_{i+1}))\Delta t} V(t_{i+2}) | \mathcal{F}_{t_{i+1}}]$$

En combinant les deux expressions, on obtient :

$$\begin{aligned} V(t_{i+1}) &\approx \mathbb{E}[e^{-y(t_i)\Delta t} V(t_{i+1}) | \mathcal{F}_{t_i}] \\ &\approx \mathbb{E}[e^{-y(t_i)\Delta t} \mathbb{E}[e^{-y(t_{i+1})\Delta t} V(t_{i+2}) | \mathcal{F}_{t_{i+1}}] | \mathcal{F}_{t_i}] \end{aligned}$$

Or $y(t_{i+1})$ est $\mathcal{F}_{t_{i+1}}$ mesurable d'où

$$\approx \mathbb{E}[e^{-y(t_i)\Delta t} e^{-y(t_{i+1})\Delta t} \mathbb{E}[V(t_{i+2}) | \mathcal{F}_{t_{i+1}}] | \mathcal{F}_{t_i}]$$

De plus, $\mathcal{F}_{t_i} \subset \mathcal{F}_{t_{i+1}}$ donc par itération de l'espérance conditionnelle :

$$\approx \mathbb{E}[e^{-y(t_i)\Delta t} e^{-y(t_{i+1})\Delta t} V(t_{i+2}) | \mathcal{F}_{t_i}]$$

Appliquons désormais ce résultat sur l'intégralité des points de la subdivision. On obtient :

$$V(t) \approx \mathbb{E}[e^{-\sum_{i=0}^{n-1} y(t_i)\Delta t} V(T) | \mathcal{F}_t]$$

En faisant tendre le pas Δt de la subdivision vers 0, on obtient le résultat suivant :

$$V(t) \approx \mathbb{E}[e^{-\int_t^T y(s)ds} V(T) | \mathcal{F}_t] \quad (117)$$

Nous avons donc deux écritures pour le prix du contrat en t , une discrète et une continue. Bien que le défaut puisse survenir à tout moment, nous allons privilégier l'écriture discrète. En effet, bien que moins précise, elle est bien moins coûteuse à utiliser termes de complexité de mise en œuvre qu'en coût de calcul. Une hypothèse classique est de considérer que les défaut ne peuvent se déclarer qu'aux dates de paiement. Cette hypothèse donne des résultats suffisamment précis pour être considérée comme valable[10].

4.2 Calcul de la CVA unilatérale

Nous allons continuer à nous placer du point de vue de Abank qui selon notre hypothèse ne peut pas faire défaut. Notre banque peut s'engager sur un contrat d'un montant X_T futur aussi bien positif-par l'achat d'un zéro-coupon par exemple-que négatif-par la vente de ce zéro-coupon-. La valeur du contrat peut aussi changer au fil du temps, par

exemple pour un contrat consistant en l'achat d'une option de vente -ou put- et la vente d'une option d'achat -ou call- de même prix d'exercice -ou strike-. Comme évoqué dans les sections précédentes, le comportement n'est pas symétrique selon que sa valeur soit positive ou négative au moment τ du défaut de la contrepartie adverse :

- Si sa valeur est négative alors la valeur du contrat restera inchangée -A bank solde simplement son dû-.
- Si sa valeur est positive alors la valeur du contrat ne sera que de $\mathcal{R}(\tau)N$ -contre N si il n'y avait pas eu défaut-.

La valeur du contrat $V(t)$ à l'instant t consistant en un unique paiement à maturité T peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned} V(t) &= \mathbb{E}\{[1_{X_T < 0} + 1_{X_T \geq 0}(p(t, T) + \mathbb{R}(T)q(t, T))] \times D(t, T)X_T | \mathcal{F}_t\} \\ &= \mathbb{E}\{[1 - 1_{X_T \geq 0}(1 - \mathbb{R}(T)) \times q(t, T)] \times D(t, T)X_T | \mathcal{F}_t\} \\ V(t) &= \mathbb{E}\{F(t, T) \times X_T | \mathcal{F}_t\} \end{aligned} \quad (118)$$

On obtient donc l'espérance d'un produit entre $F(t, T)$ qui peut être vu comme un facteur d'actualisation "risqué" et la valeur théorique du contrat. Par simple addition, on obtient la formule en cas de paiements multiples -pour un swap par exemple- :

Soit un contrat consistant en N versements X_1, \dots, X_N aux dates T_1, \dots, T_N :

$$\begin{aligned} V(t = T_0) &= \mathbb{E}\{F(T_0, T_1) \times (X_1 + V(T_1) | \mathcal{F}_t\} \\ F(., .) \text{ est ici associé à } X_1 + V(T_1) \text{ donc } F(t, T) &= D(t, T)(1 - 1_{V(T_1) + X_1 \geq 0})q(t, T)(1 - \mathcal{R}(T)). \\ &= \mathbb{E}\{F(T_0, T_1) \times X_1 | \mathcal{F}_t\} + \mathbb{E}\{F(T_0, T_1) \times \mathbb{E}\{F(T_1, T_2) \times (X_2 + V(T_2) | \mathcal{F}_{T_1}\} | \mathcal{F}_t\} \end{aligned}$$

D'où l'itération de l'espérance et \mathcal{F}_{T_1} mesurabilité de $F(T_0, T_1)$:

$$= \sum_{i=1}^2 \mathbb{E}\{\prod_{j=0}^{i-1} F(T_j, T_{j+1}) \times X_i | \mathcal{F}_t\} + \mathbb{E}\{\prod_{j=0}^{i-1} F(T_j, T_{j+1}) \times V(T_2) | \mathcal{F}_t\}$$

Par récurrence sur les N paiements, on obtient :

$$V(t = T_0) = \sum_{i=1}^N \mathbb{E}\{\prod_{j=0}^{i-1} F(T_j, T_{j+1}) \times X_i | \mathcal{F}_t\} \quad (119)$$

À ce point, on voit que la probabilité de défaut $q(.,.)$ et le montant algébrique à honorer par la contrepartie Bbank sont tous deux présents dans l'expression. En corrélant ces deux paramètres le *Wrong/Right Way Risk* sera naturellement pris en compte.

On remarque que l'évaluation de cette expression nécessite -à l'instar de ce qui est fait pour les options de types américaines- une simulation du futur afin de procéder à une évaluation rétrospective. En effet, le facteur d'actualisation risqué $F(T_i, T_{i+1})$ n'est connu qu'à la date $T_i + 1$; pour connaître la valeur de $V(t)$, il nous faudra simuler les états du monde à toutes les dates de paiement T_i . Pour cela, nous allons utiliser la technique de construction d'arbre et simulation de Monte Carlo comme dans notre approche des sections précédentes.

Ce que nous allons plus précisément chercher à évaluer est le prix de l'option de défaut qui autorise la contrepartie Bbank à ne pas honorer ses engagements. Cette option peut être exercée à tout instant t compris entre la date de souscription du contrat et sa maturité. Il s'agit donc d'une option de type américain -plus précisément bermudienne dans le cas discret-. La construction de l'arbre impliquera trois phases -montante, descendante, montante- et la valeur à maximiser sera le facteur d'actualisation risqué sachant que sa valeur sera limitée par le facteur d'actualisation sans risque.

Nous avons introduit la CVA comme le prix de marché du risque de contrepartie. On peut donc l'écrire comme suit : $CVA(t) = V^F(t) - V(t)$ avec V^F la valeur du contrat dans un univers sans risque. En remplaçant par les expressions associées, on a :

$$\begin{aligned} CVA(t = T_0) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\{D(t, T_i) \times X_i | \mathcal{F}_t\} - \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\{\prod_{j=0}^{i-1} F(T_j, T_{j+1}) \times X_i | \mathcal{F}_t\} \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbb{E}\{(D(t, T_i) - \prod_{j=0}^{i-1} F(T_j, T_{j+1})) \times X_i | \mathcal{F}_t\} \end{aligned}$$

puis on remplace $F(.,.)$ par son expression :

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^N \mathbb{E}\{(D(t, T_i) - \prod_{j=0}^{i-1} [1 - 1_{X_{T_{j+1}} + V(T_{j+1}) \geq 0} (1 - \mathbb{R}(T_{j+1})) \\ &\quad \times q(T_j, T_{j+1})] \times D(T_j, T_{j+1})) \times X_i | \mathcal{F}_t\} \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbb{E}\{D(t, T_i) (1 - \prod_{j=0}^{i-1} (1 - 1_{X_{T_{j+1}} + V(T_{j+1}) \geq 0} \times q(T_j, T_{j+1}) (1 - \mathbb{R}(T_{j+1}))) \times X_i | \mathcal{F}_t\} \end{aligned} \tag{120}$$

en considérant que les versements X_i sont tous positifs on obtient :

$$= \sum_{i=1}^N \mathbb{E}\{D(t, T_i) \left(1 - \prod_{j=0}^{i-1} (1 - q(T_j, T_{j+1})(1 - \mathcal{R}(T_{j+1})))\right) \times X_i | \mathcal{F}_t\} \quad (121)$$

Ces deux dernières formules sont à comparer avec celle donnée par l'approche classique (DTA). Pykhtin et Zhu[15] proposent la formule suivante :

$$CVA(t = T_0) = \sum_{i=1}^N (1 - \mathcal{R}(T_i)) q(T_{i-1}, T_i) B(0, T_i) E^{P_{T_i}}[E(T_i)] \quad (122)$$

avec $B(u, v)$ le prix des zéro-coupons de maturité v au jour d'évaluation u , $E(t)$ la partie positive de $V(t)$.

Xiao justifie la différence entre les deux formules par son approche différente et argue que la véracité du modèle de Pykhtin et Zhu n'est pas rigoureusement démontrée. On remarque par ailleurs que la formule de Xiao (equation (120)) ne contient pas de calcul explicite d'espérance et semble donc plus facile *a priori* à implémenter.

Conclusion

Nous avons présenté dans ce mémoire le cadre de la CVA et de son calcul. Nous avons vu qu'un modèle de taux et un modèle de défaut sont nécessaires à son calcul et que pour surveiller cet indicateur, une grande puissance de calcul est nécessaire. Pour diminuer ces exigences, nous avons aussi cherché à choisir le modèle de taux le plus efficace dans ce cadre. Le modèle de défaut pour sa part n'a pas fait l'objet d'une telle recherche. Un travail complémentaire devra donc être réalisé par le lecteur désirant construire un modèle de CVA complet.

Nous avons réduit, par analyse de la complexité des formules des instruments financiers, le panel initial de 7 modèles de taux à seulement 4 : le modèle de Vasicek, Hull & White, CIR et CIR ++. Les modèles de Dothan, Black & Karasinski ne possédaient pas assez de formules fermées pour les prix des instruments financiers. Puis, pour des raisons de fidélité à la courbe des taux, nous avons exclu les modèles Vasicek et CIR. Pour établir de manière empirique les performances des deux modèles résiduels, nous avons cherché à les comparer toutes choses égales par ailleurs.

Pour cela, nous avons éliminé les différentes sources de variabilité telles que la calibration, la modélisation et la variabilité logicielle. Ainsi, la calibration a été réalisée par la même méthode des moindres carrés, l'architecture du code a été découpée selon les mêmes fonctions et boucles ; finalement, le même ordinateur a été utilisé pour les deux modèles .

N'ayant pas entrepris une démarche de recherche sur les modèles de défaut, nous avons effectué la comparaison de ces modèles au niveau des quantiles et non de la CVA directement. Ceci permet de garder des résultats transposables tout en permettant au lecteur de choisir un modèle de taux selon ses propres critères. Il est ressorti de cette analyse deux éléments principaux :

- Le modèle de Hull & White est plus rapide à l'exécution d'un facteur 4 -expliqué en large partie par le calcul de quantile.
- Le modèle CIR ++ à calibration équivalente est d'écart-type plus faible que son concurrent. Il fournit donc des montants d'exposition plus faibles et a fortiori des expositions au quantile 99,5% plus faible.

Le modèle Hull & White doit donc être privilégié dans le cadre d'un calcul fréquent de la CVA. Le modèle CIR++ devra quant à lui être préféré dans un cas de CVA trop élevé ou de disponibilité d'une grande puissance de calcul. Pour ce qui est de la précision des

calculs, il est impossible de vérifier sur le marché si l'une des approches est meilleure que l'autre, nous évoquons en effet des quantiles, éléments sans réalité physique une fois l'événement réalisé.

Par ailleurs, il nous faut mentionner que les résultats obtenus dans le cadre de cette étude n'ont pas fait lieu d'une analyse sur des portefeuilles réels. Il est donc nécessaire de nuancer notre conclusion. Bien que les deux modèles évoqués semblent se distinguer dans leurs résultats, il revient au lecteur de réaliser par lui-même la comparaison des deux modèles sur son propre portefeuille et dans des conditions de marché réalistes.

De plus, la préférence d'un des modèles au dépend des autres devra s'appuyer sur une analyse réaliste et objective, sans que le désir d'optimisation du coût du risque soit au cœur de la recherche.

Le Libor-Market Model s'avère plus lourd tant au niveau de la calibration qu'à celui de l'évaluation. Il n'est cependant pas à exclure car il possède de bonnes propriétés. En effet, il permet de modéliser un taux observable sur le marché et dont la volatilité est directement liée au contrat. Il s'agit d'un modèle très répandu sur le marché pour l'évaluation des dérivées de taux. Nous ne l'avons donc pas considéré comme un modèle de la même catégorie que ceux évoqués précédemment. Sa présentation avait pour but de fournir au lecteur, ayant à sa disposition une grande puissance de calcul, des éléments pour qu'il puisse utiliser ce modèle s'il le souhaite.

Annexe A : Démonstration des prix zéro-coupon du modèle de Dothan

Il ne s'agit pas ici de recopier la démonstration de Dothan amenant au prix d'un zéro coupon dans son modèle mais simplement d'évoquer les grandes lignes. L'article original étant difficile à trouver, nous fournissons ainsi une idée générale de la méthode au lecteur.

Nous allons considérer un portefeuille constitué de deux zéro-coupons sans risque de prix $u_1(r, t)$ et $u_2(r, t)$. Son taux instantané est donné par $y = w_1 \frac{du_1}{u_1} + w_2 \frac{du_2}{u_2} - w_1$, w_2 les poids des deux bons Si on applique le lemme d'Ito à u_i , on obtient :

$$\frac{du_i}{u_i} = \overbrace{\frac{1}{u_i} \left(\frac{\sigma^2 r^2}{2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial r^2} + \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) dt + \frac{\sigma r}{u_i} \frac{\partial u_i}{\partial r} dZ}^{\alpha_i} \quad (123)$$

Nous allons choisir les poids tels que $w_1 \sigma_1 + w_2 \sigma_2 = 0$, $\sigma_i = \frac{\sigma r}{u_i} \frac{\partial u_i}{\partial r}$. Dans ce cas, nous avons couvert le risque et le taux rendement du portefeuille y n'est plus aléatoire. Par absence d'opportunité d'arbitrage, nous avons donc $y=r$. Ainsi, on a : $w_1(\alpha_1 - r) + w_2(\alpha_2 - r) = 0$ que l'on peut ré-écrire

$$\frac{\alpha_1 - r}{\sigma_1} = \frac{\alpha_2 - r}{\sigma_2}$$

Si l'on pose $\lambda(r, t) = \frac{\alpha_1 - r}{\sigma_1}$ alors la dynamique du taux devient :

$$\frac{1}{2} \sigma^2 r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \sigma r \lambda(r, t) \frac{\partial u}{\partial r} - ru + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

En posant $\gamma = \frac{\lambda}{\sigma}$, τ la maturité d'un bon zéro coupon, on obtient :

$$\frac{1}{2} \sigma^2 r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \sigma^2 r \gamma \frac{\partial u}{\partial r} - ru - \frac{\partial u}{\partial \tau} = 0 \quad (124)$$

En posant $x = \frac{2}{\sigma^2} r$, $s = \frac{\sigma^2}{2} \tau$, $u(r, \tau) = v(x, s)$, nous transformons le problème.

La solution $v(x, s)$ s'écrit comme la somme de $w(x, s)$ et de $f(x)$ solutions des systèmes différentiels suivant :

$$x f'' - f = 0 \text{ avec } f(0) = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad (125)$$

$$x^2 w_{xx} - xw - ws = 0 \text{ avec } w(x, 0) = 1 - f(x), w(0, s) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} w(x, s) = 0 \quad (126)$$

Appliquons changement de variable $z = 2\sqrt{x}$ et $f(x) = \frac{z}{2} h(z)$. La solution de la première équation est alors

$$f(x) = 2\sqrt{x} * K_1(2\sqrt{x})$$

avec K_1 la fonction de Bessel modifiée d'ordre 1 de seconde espèce. La solution de la seconde est donnée par

$$h(z, s) = \int_0^\infty \sin(z \sin(ha)) \int_0^\infty \frac{\mu \sin(\mu a)}{1 + \mu^2} e^{-1 + \mu^2} s / 4 d\mu da$$

Par somme puis simplifications diverses, on aboutit à l'expression :

$$P(t, T) = \frac{\bar{r}^{p^2}}{\Pi} \int_0^\infty \sin(2\sqrt{\bar{r}} \sinh(y)) \int_0^\infty f(z) \sin(yz) dz dy + \frac{2}{\gamma(2p)} \bar{r}^p K_{2p}(2\sqrt{\bar{r}})$$

Annexe B : Fonction de Bessel modifiée d'ordre n de seconde espèce

Les fonctions de Bessel d'ordre n correspondent aux solutions de l'équation différentielle suivante :

$$z^2 \frac{d^2y}{dz^2} z \frac{dy}{dz} + (z^2 - n^2)y = 0$$

Cette équation n'est pas seulement rencontrée en finance, elle l'est aussi en mécanique classique et quantique. Les solutions de cette équation dépendent de n. Si n est nombre réel non relatif, alors la fonction de Bessel de première espèce d'ordre n -notée J_n - et celle d'ordre -n - J_{-n} forment une base de l'ensemble des solutions de l'équation. Si n est un relatif, alors les fonctions d'ordre n et -n ne forment plus une base, la fonction de seconde espèce est alors nécessaire pour former une base. On la note Y_n . Les fonctions de Bessel modifiées sont quant à elle les solutions de l'équation

$$z^2 \frac{d^2y}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} - (z^2 + n^2)y = 0$$

Les solutions de cette fonction sont du type $S(x) = aJ_n(-ix) + bY_n(-ix)$, qui peut se ré-écrire $S(x) = cI_n(x) + dK_n(x)$ avec I_n et K_n les fonctions de Bessel modifiée d'ordre n de première et de deuxième espèce. L'expression de K_n sous forme intégrale est :

$$K_n(z) = \frac{\Gamma(n + 1/2)(2z)^n}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\cos(t)}{(t^2 + z^2)^{n+1/2}} dt$$

Comme évoqué dans le corps de ce mémoire, cette fonction ne correspond pas à une formule fermée. Il est donc très vraisemblable que les appels informatique à cette fonction soient très lent -en cas de calcul de l'intégral-, soit approximatif -en cas d'approximation de l'intégral-. L'éviction du modèle utilisant cette fonction -le modèle de Dothan- est belle et bien justifiée.

On peut cependant remarquer des cas de simplification. Si n=0 alors :

$$\begin{aligned} K_0(z) &= \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\cos(t)}{\sqrt{(t^2 + z^2)}} dt \\ K_0(z) &= \int_0^\infty \frac{\cos(t)}{\sqrt{(t^2 + z^2)}} dt \quad \text{car } \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \end{aligned} \tag{127}$$

Si n=1/2 alors

$$\begin{aligned} K_0(z) &= \frac{\Gamma(1)\sqrt{2z}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\cos(t)}{t^2 + z^2} dt \\ &= \frac{\sqrt{2z}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\cos(t)}{t^2 + z^2} dt \quad \text{car } \Gamma(1) = 1 \end{aligned} \tag{128}$$

Annexe C : Méthode d'optimisation de Nelder-Mead

Cette méthode a été publié en 1965 par Nelder et Mead[9]. Cette méthode de minimisation de fonctions possède la particularité de ne pas utiliser de bornes pour la résolution du problème. Elle est, de plus, dite d'ordre zéro. Cela signifie qu'elle ne nécessite pas de calcul de dérivée. Cette spécificité est grandement appréciée dans le domaine de la physique où les calculs de sensibilité sont souvent laborieux. Pour le cas qui nous occupe, c'est à dire la calibration par la méthode des moindres carrés ordinaires des prix des zéros coupons fournis par les modèles par rapport aux prix issus de la courbe de l'Institut des Actuaires, l'avantage de l'absence de calcul de gradient est l'assurance d'une même qualité de résultat quelle que soit la complexité de la formule du zéro-coupons. Nous conservons ainsi notre idée d'équité entre les modèles. Un autre avantage de cette méthode est la robustesse et la rapidité par rapport aux autres méthodes d'ordre 0. Elle garde son efficacité même lorsque les résultats doivent être précis.

Un simplexe est la généralisation d'un triangle à n dimension. Le simplexe à une dimension est un segment, à deux dimensions un triangle, à trois dimensions un tétraèdre, à n dimensions un n-simplexe. La méthode d'optimisation présentée consiste en la comparaison des valeurs de la fonction à minimiser aux sommets d'un n+1 simplexe. A chaque évaluation, ce simplexe est modifié de telle sorte que le sommet de plus grande valeur est remplacé par un point de valeur moindre.

Les paramètres d'initialisation permettent de construire le premier sommet du simplexe. Les autres sommets sont construits comme l'image de la translation de ce point par n des n+1 vecteurs de la base canonique. On obtient :

$$x_i = x_0 + a\vec{e}_i \quad i = 1 \dots n$$

avec x_0 le point initial, a un facteur d'échelle et \vec{e}_i le vecteur unitaire de la base canonique dans la i^{me} direction.

Les étapes ultérieures sont décrites dans le schéma ci-dessous.

Pour l'optimisation de la méthode CIR, nous avons du inclure des bornes au domaine d'optimisation afin de prendre en compte la contrainte $2k\theta > \sigma^2$. Cette contrainte est projetée sur chacun des axes. On note x_{min}^i l'extrémité inférieure de la contrainte projetée sur l'axe i et x_{max}^i l'extrémité supérieure. Chaque sommet du simplexe -qu'il soit initial ou intermédiaire- est projeté sur chacun des axes, notons x_p^i le projeté sur l'axe i. Le sommet du simplexe est alors recalculé selon l'équation suivante :

$$x' = \sum_{i=1}^n \max(x_{min}^i, \min(x_{max}^i, x_p^i)) \vec{e}_i$$

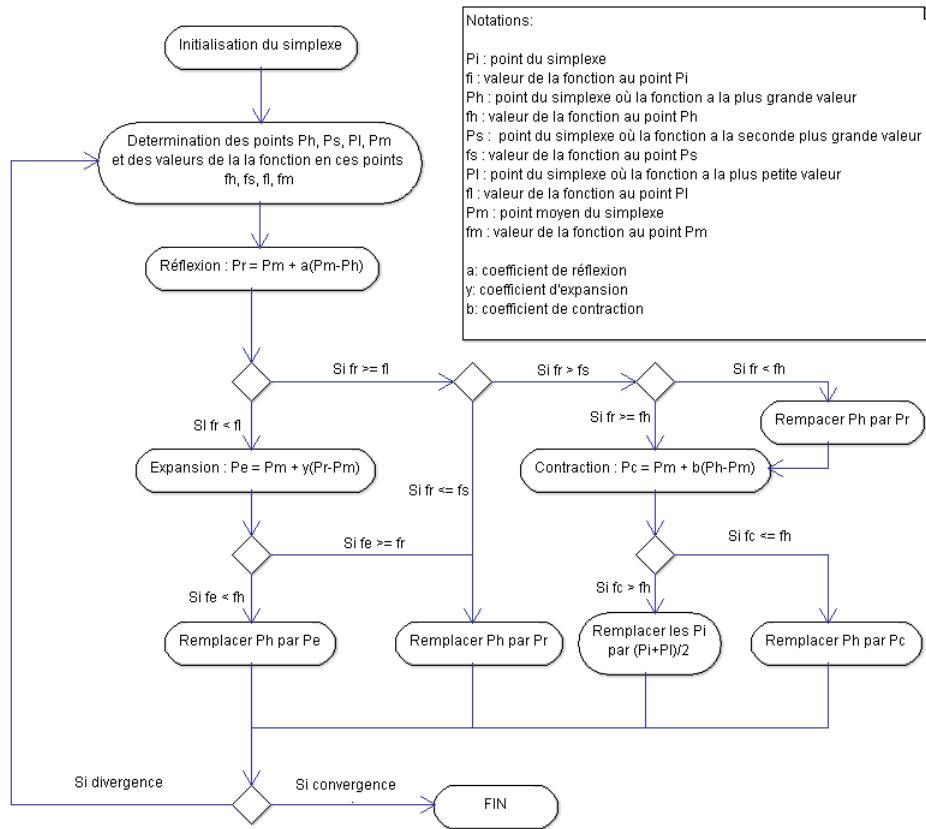


FIGURE 33 – Représentation de l'algorithme de minimisation par la méthode de Nelder-Mead

Un inconvénient de la méthode de Nelder-Mead est l'aboutissement à de minimum local. Le point de convergence dépendant du point initial, du coefficient d'échelle et des paramètres internes de l'algorithme, le lancement successif de l'algorithme avec des paramètres modifiés permet de s'assurer que le point retourné est bien le minimum global[12].

Références

- [1] R. Biscay, J.C. Jimenez, J.J. Riera, and P.A. Valdes. Local linearization method for the numerical solution of stochastic differential equations. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 48(4) :631–644, 1996.
- [2] Damiano Brigo and Fabio Mercurio. *Interest rate models-theory and practice : with smile, inflation and credit*. Springer, 2007.
- [3] Giovanni Cesari, John Aquilina, Niels Charpillon, Zlatko Filipovic, Gordon Lee, and Ion Manda. *Modelling, pricing, and hedging counterparty credit exposure : A technical guide*. Springer, 2009.
- [4] Basel Committee et al. Basel III : A global regulatory framework for more resilient banks and banking systems. *Basel Committee on Banking Supervision, Basel*, 2010.
- [5] L Uri Dothan. On the term structure of interest rates. *Journal of Financial Economics*, 6(1) :59–69, 1978.
- [6] John Hull and Alan White. Cva and wrong way risk. *Financial Analysts Journal*, 68(5) :58–69, 2012.
- [7] Andrew Lesniewski. Interest rate and credit models, 2008.
- [8] Kristian R Miltersen, Klaus Sandmann, and Dieter Sondermann. Closed form solutions for term structure derivatives with log-normal interest rates. *The Journal of Finance*, 52(1) :409–430, 1997.
- [9] John A Nelder and Roger Mead. A simplex method for function minimization. *The computer journal*, 7(4) :308–313, 1965.
- [10] Dominic O’Kane and Stuart Turnbull. Valuation of credit default swaps. *Lehman Brothers Quantitative Credit Research Quarterly*, 2003 :Q1–Q2, 2003.
- [11] George Pan. Equity to credit pricing : A new, practitioner-tested version of a firm-value model of default, providing a closed-form formula linking default probability and equity market data. *RISK-LONDON-RISK MAGAZINE LIMITED-*, 14(11) :99–104, 2001.
- [12] Marco Antônio Luersen & Rodolphe Le Riche. Globalisation de l’algorithme de nelder-mead : Application aux composites. Technical report, LMR, INSA de Rouen, France, 2001.
- [13] Clément Schaller. Etude du wrong way risk au sein de la cva. Master’s thesis, ENSIIE, 2013.
- [14] Tim Xiao. An accurate solution for credit value adjustment (cva) and wrong way risk, 2013.

Mémoire présenté pour le titre d’actuaire: Éléments d’implémentation d’un modèle de CVA: Étude du modèle de taux

- [15] Steven H Zhu and Michael Pykhtin. A guide to modeling counterparty credit risk.
GARP Risk Review, July/August, 2007.