Sequências e Progressões

Mickael Lima

Dezembro, 2021

1 Sequências

Define-se sequências numéricas como todo conjunto formado por meio de uma "lógica" por trás (semelhante à funções). A "lógica" é chamada de Lei de Formação, esta é apresentada de três formas diferentes.

1.1 Tipos de Lei de Formação

1.1.1 Fórmula de Recorrência

Nesse exemplo, a lei de formação é apresentada da seguinte forma: mostra-se inicialmente um método para identificar o primeiro número da sequência (por exemplo, a_1), e outro para calcular qualquer outro termo a partir desse a_1 pelo anterior a_{n-1}

- Escreva a sequência finita f obedecendo à seguinte fórmula de recorrência: $a_1 = 2$ e $a_{n-1} + 3 \mid \forall n \in \{2, 3, 4\}$

Por hora, definido $a_1 = 2$, concluí-se que $a_2 = a_1 + 3$ (lei de formação dada), portanto $a_2 = 2 + 3 = 5$, executando para a_3 e a_4 obteremos o conjunto f da sequência formada.

$$f = \{2, 5, 8, 11\}$$

1.1.2 Termo em função de sua posição n

Esse método permite ser direto na formulação da lei que rege a sequência. É dado uma fórmula que calcula a_n em função de n apenas (e sem a necessidade de conhecer a_1, como na forma anterior)

- Escrever o conjunto f seguindo $a_n = 2^n$ para $n = \{1, 2, 3\}$
  - $2^1 = 2$
  - $2^2 = 4$
  - $2^3 = 8$
  - $f = \{2, 4, 8\}$

1.1.3 Propriedade da Sequência

Esse modo consiste em escrever por extenso quais propriedades aquela sequência deverá ter, e montá-la a partir disso. Um exemplo dessa aplicação: "Montar uma sequência infinita f com os números primos na ordem crescente" (já que não é possível escrever algo semelhante utilizando-se dos dois modos anteriores).

2 Progressão Aritmética

A progressão aritmética é um caso direto da aplicação da fórmula de recorrência apresentada na sessão anterior. Uma sequência do tipo P.A é montada a partir de duas afirmações.

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} + r \end{cases}$$

Logicamente, n é um número real e maior ou igual a 2. Os elementos a, r são números reais dados. Isso significa que, em uma sequência do tipo P.A, o próximo termo é igual ao termo anterior somado com uma constante r (razão). **Esta razão pode ser obtida subtraíndo o próximo elemento com o anterior**.

- $f = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$, onde $a_1 = 1$ e $r = 2$ (notando sempre que o próximo elemento é a soma do anterior com 2)
- $f = \{-2, -4, -6, -8\}$, ($a_1 = (-2)$ e $r = (-2)$)

2.1 Classificação

As classificações são simples e direta:

- Crescente: Quando o próximo termo é maior que o anterior (ou seja, $r > 0$)

Essa condição só ocorre estritamente para r positivo. Tomamos $f = \{a_1, a_1 + r\}$, nesse contexto, afirmaremos

$$a_1 + r > a_1$$
$$r > 0$$

- Constante: $r = 0$

Nesse caso, não há uma variação por toda a sequência. Tomando a mesma sequência f anterior, esperamos que o próximo termo seja igual ao primeiro:

$$a_1 + r = a_1$$
$$r = 0$$

- Descrescente: O próximo termo é menor que o anterior ($r < 0$), visualização análoga ao item crescente.

2.2 Notações Úteis

A fim de obter uma P.A "forçadamente" é interessante escrever a seguinte notação (no exemplo abaixo, pelo menos o 3 primeiros termos).

$$f = \{x - r,\ x,\ x + r\}$$
$$f = \{x,\ x + r,\ x + 2r\}$$

Uma questão exemplo envolvendo a manipulação da P.A deste modo.

- Determine a para que $\{a^2,\ (a+1)^2\ , (a+5)^2\}$ seja uma P.A

Começaremos igualando o elemento em comum: a razão. Nesse modo, r pode ser obtida subtraíndo $(a+1)^2$ de a^2, mas também pode ser obtida pela subtração de $(a+5)^2$ de $(a+1)^2$.

$$(a+1)^2 - a^2 = (a+5)^2 - (a+1)^2$$

Desenvolvendo os termos

$$(a^2 + 2a + 1) - a^2 = (a^2 + 10a + 25) - (a^2 + 2a + 1)$$
$$2a + 1 = 12a + 26$$
$$10a = -25$$
$$a = -\frac{5}{2}$$

Portanto, a deverá assumir o valor de $-5/2$ para que a sequência dada seja uma P.A, a partir da técnica ilustrada.