Progressão Aritmética e Geométrica

Teoria e Resumo

Dezembro, 2021

Sumário

1 Sequências

Define-se sequências numéricas como todo conjunto formado por meio de uma “lógica” por trás (semelhante à funções). A “lógica” é chamada de Lei de Formação, esta é apresentada de três formas diferentes.

1.1 Tipos de Lei de Formação

1.1.1 Fórmula de Recorrência

Nesse exemplo, a lei de formação é apresentada da seguinte forma: mostra-se inicialmente um método para identificar o primeiro número da sequência (por exemplo, a_1), e outro para calcular qualquer outro termo a partir desse a_1 pelo anterior a_{n-1}

- Escreva a sequência finita f obedecendo à seguinte fórmula de recorrência: $a_1 = 2$ e $a_{n-1} + 3 \mid \forall n \in \{2, 3, 4\}$

Por hora, definido $a_1 = 2$, concluí-se que $a_2 = a_1 + 3$ (lei de formação dada), portanto $a_2 = 2 + 3 = 5$, executando para a_3 e a_4 obteremos o conjunto f da sequência formada.

$$f = \{2, 5, 8, 11\}$$

1.1.2 Termo em função de sua posição n

Esse método permite ser direto na formulação da lei que rege a sequência. É dado uma fórmula que calcula a_n em função de n apenas (e sem a necessidade de conhecer a_1, como na forma anterior)

- Escrever o conjunto f seguindo $a_n = 2^n$ para $n = \{1, 2, 3\}$
  - $2^1 = 2$
  - $2^2 = 4$
  - $2^3 = 8$
  - $f = \{2, 4, 8\}$

1.1.3 Propriedade da Sequência

Esse modo consiste em escrever por extenso quais propriedades aquela sequência deverá ter, e montá-la a partir disso. Um exemplo dessa aplicação: "Montar uma sequência infinita f com os números primos na ordem crescente" (já que não é possível escrever algo semelhante utilizando-se dos dois modos anteriores).

2 Progressão Aritmética

A progressão aritmética é um caso direto da aplicação da fórmula de recorrência apresentada na sessão anterior. Uma sequência do tipo P.A é montada a partir de duas afirmações.

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} + r \end{cases}$$

Logicamente, n é um número real e maior ou igual a 2. Os elementos a, r são números reais dados. Isso significa que, em uma sequência do tipo P.A, o próximo termo é igual ao termo anterior somado com uma constante r (razão). **Esta razão pode ser obtida subtraíndo o próximo elemento com o anterior**.

- $f = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$, onde $a_1 = 1$ e $r = 2$ (notando sempre que o próximo elemento é a soma do anterior com 2)
- $f = \{-2, -4, -6, -8\}$, ($a_1 = (-2)$ e $r = (-2)$)

2.1 Classificação

As classificações são simples e direta:

- Crescente: Quando o próximo termo é maior que o anterior (ou seja, $r > 0$)

Essa condição só ocorre estritamente para r positivo. Tomamos $f = \{a_1, a_1 + r\}$, nesse contexto, afirmaremos

$$a_1 + r > a_1$$

$$r > 0$$

- Constante: $r = 0$

Nesse caso, não há uma variação por toda a sequência. Tomando a mesma sequência f anterior, esperamos que o próximo termo seja igual ao primeiro:

$$a_1 + r = a_1$$

$$r = 0$$

- Descrescente: O próximo termo é menor que o anterior ($r < 0$), visualização análoga ao item crescente.

2.2 Notações Úteis

A fim de obter uma P.A "forçadamente" é interessante escrever a seguinte notação (no exemplo abaixo, pelo menos o 3 primeiros termos).

$$f = \{x - r,\ x,\ x + r\}$$

$$f = \{x,\ x + r,\ x + 2r\}$$

Uma questão exemplo envolvendo a manipulação da P.A deste modo.

- Determine a para que $\{a^2,\ (a+1)^2\ , (a+5)^2\}$ seja uma P.A

Começaremos igualando o elemento em comum: a razão. Nesse modo, r pode ser obtida subtraíndo $(a+1)^2$ de a^2, mas também pode ser obtida pela subtração de $(a+5)^2$ de $(a+1)^2$.

$$(a+1)^2 - a^2 = (a+5)^2 - (a+1)^2$$

Desenvolvendo os termos

$$\begin{aligned}(a^2+2a+1) - a^2 &= (a^2+10a+25) - (a^2+2a+1)\\ 2a+1 &= 10a+25-2a-1\\ -6a &= 23\\ a &= -\frac{23}{6}\end{aligned}$$

Portanto, a deverá assumir o valor de $-23/6$ para que a sequência dada seja uma P.A, a partir da técnica ilustrada.

2.3 Termo Geral da P.A

Na sessão referente à introdução da progressão aritmética, foi destacado a lei de formação por meio da recorrência. É possível expressar o valor de a_n a partir de alguns elementos já conhecidos (a_1 e r). É sabido que

$$\begin{cases} a_1 \\ a_2 = a_1 + r \\ a_3 = a_2 + r \\ a_4 = a_3 + r \\ \dots \\ a_n = a_{n-1} + r \end{cases}$$

A partir disso, somam-se os termos a_2 até a_n, e após isso, é estabelecido outra expressão de mesmo valor que essa soma

$$\begin{cases} a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-1} + (n-1)\cdot r \end{cases}$$

$$(a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-1}) + a_n = a_1 + (a_2 + \cdots + a_{n-1}) + (n-1)\cdot r$$

Os termos destacados entre os parênteses naturalmente irão se anular, forma-se então a fórmula geral do enésimo termo de uma progressão aritmética.

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Outro meio de entender é considerar que o termo a_n é igual ao primeiro termo conhecido da P.A somado com o número de vezes que a razão r foi computada ($n-1$ ocorre pois a_1 já fora contado, portanto deverá ficar de fora). A demonstração da validade desse teorema é dada na página 18 do FME 4 por meio de indução finita.

2.4 Interpolação Aritmética

Em toda progressão aritmética finita, há dois termos destacáveis que são chamados de **extremos**, sendo eles o primeiro e último termo de uma P.A. Naturalmente, esses termos são, respectivamente, a_1 e a_n. Os elementos que ficam entre esses valores são chamados de **meios**. A interpolação (também chamada de inserção ou intercalação) aritmética consiste em "gerar" uma P.A com extremos já definidos com k elementos no meio. Para tal feito, primeiro é necessário isolar a razão r na fórmula.

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$
$$a_n - a_1 = (n-1)r$$
$$r = \frac{a_n - a_1}{n-1}$$

Definida a razão, pode-se montar a sequência com k números.

- Interpolar 3 números entre 1 e 2, formando uma P.A.

Inicialmente, teremos $f = \{1, x, y, z, 2\}$, sendo que a sequência x, y, z ($n = 5$, já que é o total de termos da sequência) combinado com os extremos devem formar uma progressão aritmética. Calcula-se r.

$$r = \frac{2-1}{5-1} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ x = 1 + \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{5}{4} \\ y = 1 + 2\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{6}{4} \\ z = 1 + 3\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{7}{4} \\ a_n = 2 \end{cases}$$

Os elementos x, y, z foram calculados a partir da fórmula de n termos de uma P.A. A partir disso, após a interpolação encontra-se a seguinte sequência.

$$f = \left(1, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{7}{4}, 2\right)$$

2.5 Soma de n termos

2.5.1 Teorema 1 - Soma dos n Inteiros

A soma dos n primeiros números inteiros positivos é dada pela expressão

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

A demonstração pode ser feita por indução infinita.

- $\frac{1(1+1)}{2}$, válido para $n = 1$
- Admite-se a validade para $n = p$

$$1 + 2 + 3 + \cdots + p = \frac{p(p+1)}{2}$$

- Verifica-se a validade para $p + 1$

$$1 + 2 + 3 + \cdots + p + (p+1) \Leftrightarrow \frac{p(p+1)}{2} + (p+1)$$

$$\frac{p(p+1) + 2(p+1)}{2} \Leftrightarrow \frac{(p^2 + 3p + 2)}{2}$$

$$\frac{(p+1)(p+2)}{2}$$

2.5.2 Teorema 2 - Soma dos n termos da P.A

Aplicando o teorema 1 anterior, podemos escrever a soma de uma P.A na forma genérica

$$S_n = a_1 + \left(\frac{n(n-1)}{2}\right) \cdot r$$

Isso ocorre, pois

$$\begin{cases} a_1(+) \\ a_1 + r(+) \\ a_1 + 2r(+) \\ a_1 + 3r(+) \\ \dots \\ a_n = a_1 + (n-1)r \\ \hline a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \Leftrightarrow (a_1 + a_1 \dots) + [r + 2r + 3r + \dots (n-1)r] \end{cases}$$

Considerando que $(a_1 + a_1 \dots)$ é repetido n vezes. Simplificando a expressão, chegaremos em

$$(a_1 \cdot n) + [1 + 2 + \dots + (n-1)]r$$

Nota-se que $[1+2+3+\dots+(n-1)]$ é a soma dos primeiros n inteiros (teorema 1), portanto chega-se a fórmula apresentada no inicio dessa sessão.

2.5.3 Teorema 3 - Fórmula Final

Ainda é possível "simplificar" a fórmula anterior algebricamente

$$S_n = a_1 \cdot n + \frac{n(n+1)}{2} \cdot r$$
$$S_n = \frac{a_1 \cdot 2n + n(n+1)r}{2}$$
$$S_n = \frac{n[2 \cdot a_1 + (n-1)r]}{2}$$
$$S_n = \frac{n[a_1 + (a_1 + (n-1)r)]}{2}$$

A quebra de $2a_1$ para $a_1 + a_1$ é necessário para poder reescrever a expressão da seguinte forma

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

- Calcular as soma dos 25 primeiros termos da P.A $f = (1, 7, 13, \dots)$

O valor de a_1 é 1 e a razão é $r = (7 - 1) = 6$. Naturalmente, podemos computar o valor de a_{25} para usar na fórmula.

$$a_{25} = 1 + (24) \cdot 6 \Leftrightarrow 145$$

A partir disso

$$S_{25} = \frac{25(1 + 145)}{2} = 1825$$

3 Progressão Geométrica

A progressão geométrica é outro tipo de progressão, semelhante à aritmética. É definida pela fórmula de recorrência ilustrada por

$$\begin{cases} a_1 \\ a_n = a_{n-1} \cdot q \end{cases}$$

Sendo a, q números reais fornecidos (ou pelo menos implicito, no caso de q). Sendo assim, uma P.G é toda sequência a qual o próximo termo a_n seja igual ao termo anterior a_{n-1} multiplicado por uma constante q (que equivale ao r da P.A).

3.1 Classificação

As P.Gs são classificadas de 5 modos diferentes.

- Crescente: o próximo termo é maior que o anterior

$$\begin{aligned} a_n &> a_{n-1} \\ a_{n-1} \cdot q &> a_{n-1} \\ q &> \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}} \\ q &> 1 \end{aligned}$$

Nesse caso, a P.G será crescente quando $q > 1$ **e somente para sequências positivas**. Para casos em que a_1 é negativo, vale a relação $0 < q < 1$.

- Constante: Há duas situações em que isso acontece.
  - Quando $q = 1$ (já que não haverá variação na multiplicação de a_n e $a_{n-1} \cdot q$).
  - Quando $a_1 = 0$ (já que multiplicar por zero a deixará constante).

- Decrescente: há dois casos para se analisar (semelhante à crescente).
  - P.G positiva: será decrescente para $0 < q < 1$
  - P.G negativa: será decrescente para $q > 1$

- Alternantes: o próximo termo tem sinal contrário ao anterior. Isso ocorre sempre que $q < 0$, forçando a alternância de sinais.
- Estacionárias: Quando $q = 0$ e $a_1 \neq 0$, forçando-a a ficar constante após o primeiro termo.

3.2 Notações Úteis

Tal qual descrito nas notas sobre P.A, as notações úteis da P.G podem ser escritas (como exemplo, os 3 primeiros termos da P.G) como.

$$\left(x, x \cdot q, x \cdot q^2\right)$$

$$\left(\frac{x}{q}, x, x \cdot q\right)$$

Para 4 termos, têm-se $\left(x, xq, xq^2, xq^3\right)$, para n termos, $\left(x, xq, xq^2, \ldots, xq^{n-1}\right)$

- Qual número deverá ser somado a 1, 9 e 15 para termos, nessa ordem, três números em P.G.

A sequência em P.G f terá a forma de $f = \{(1+x), (9+x), (15+x)\}$. O próximo termo deverá ser igual ao produto entre o termo anterior com uma constante q. Para que essa constante q exista, é estabelecida a seguinte relação.

$$q = \frac{9+x}{1+x} = \frac{15+x}{9+x}$$

Portanto, constrói-se a seguinte expressão

$$(9+x)^2 = (15+x)(1+x)$$
$$81 + 18x + x^2 = 15 + 15x + x + x^2$$
$$81 + 18x = 15 + 16x$$
$$2x = -66$$
$$x = -33$$

3.3 Fórmula do enésimo termo

Semelhante à progressão aritmética, a P.G pode ser armada do termo a_1 até a_n ($a_1 \neq 0$, $q \neq 0$, n conhecido) da seguinte forma.

$$\begin{cases} a_2 = a_1 \cdot q \\ a_3 = a_2 \cdot q \\ \dots \\ a_n = a_{n-1} \cdot q \end{cases}$$

Caso o primeiro lado $(a_2, \dots)$ seja multiplicado, e o segundo lado $(a_1 \cdot q), (a_2 \cdot q), \dots$ também, é evidente que a igualdade se manterá, formando a seguinte equação.

$$a_2 \cdot a_3 \dots a_n = (a_1 \cdot q) \cdot (a_2 \cdot q) \cdot (a_3 \cdot q) \dots (a_{n-1} \cdot q)$$

É possível pôr o q em evidência, visto que ele aparece $n-1$ vezes (a_n não é contado) no segundo membro.

$$[a_2 \cdot a_3 \dots, a_{n-1}] \cdot a_n = (a_1[\cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_{n-1}]) \cdot q^{n-1}$$

O que está destacado por colchetes se cancelam, formando a equação final em função de n.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

3.3.1 Demonstração por Indução Finita

- Checa-se a validade para $n = 1$

$$a_1 = a_1 \cdot q^{1-1}$$
$$a_1 = a_1$$

- Admite-se válido para $n = p$

$$a_p = a_1 \cdot q^{p-1}$$

- Checa-se a validade para $n = p + 1$

$$a_{p+1} = a_1 \cdot q^{(p+1)-1} \Leftrightarrow a_1 \cdot q^{p-1} \cdot q$$

3.4 Interpolação Geométrica

A mesma definição dada para a interpolação aritmética vale para a interpolação geométrica. A razão q deverá ser isolada e os extremos a_1 e a_n devem ser definidos

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$
$$q^{n-1} = \frac{a_n}{a_1}$$
$$q = \sqrt[(n-1)]{\frac{a_n}{a_1}}$$

Porém, consideram-se os extremos, então o termo $n-1$ deverá ser reescrito como $n-1+2 = n+1$

$$q = \sqrt[(n+1)]{\frac{a_n}{a_1}}$$

- Interpolar 8 meios geométricos entre 5 e 2560

Inicialmente, define-se $a_1 = 5$ e $a_{10} = 2560$. A razão q é definida por

$$q = \sqrt[8+1]{\frac{2560}{5}} = \sqrt[9]{512} = 2$$

Gera-se a P.G f

$$f = (5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280, 2560)$$

3.5 Produto de uma P.G de n termos

Inicialmente, é importante relembrar da fórmula da soma de n números inteiros (detalhada na parte de P.A)

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

A partir disso, define-se que o produto de uma P.G de n termos é igual a:

$$P_n = (a_1)^n \cdot q^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Isso acontece pela relação sistemática de multiplicação abaixo (detalhada na parte de P.A, porém na soma).

$$\begin{cases} a_1 = a_1 \\ a_2 = a_1 \cdot q \\ a_3 = a_1 \cdot q^2 \\ \dots \\ a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \\ \hline a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n = (a_1 \cdot a_1 \cdot \dots \cdot a_1)(q^1 \cdot q^2 \cdot \dots q^{n-1}) \end{cases}$$

O produto entre q pode ser resumida usando propriedades de expoentes. O lado esquerdo é o "produto entre termos" isolado. A equação ficará.

$$(a_1)^n \cdot q^{(1+2+3+\cdots+(n-1))}$$

Como o expoente de q é nada mais que a soma de $n-1$ inteiros, voltaremos a fórmula inicial.

3.6 Soma dos n termos da P.G

Inicialmente, a soma de uma P.G finita de n termos é dada por

$$S_n = (a_1) + (a_1 \cdot q) + (a_1 \cdot q^2) + \cdots + (a_1 \cdot q^{n-2}) + (a_1 \cdot q^{n-1})$$

Se por conveniência, ambos os lados dessa equação for multiplicada por q

$$q \cdot S_n = (a_1 \cdot q) + (a_1 \cdot q^2) + \cdots + (a_1 \cdot q^{n-1}) + (a_1 \cdot q^n)$$

Observado que a_1 (isolado) aparece apenas na primeira equação, e $a_1 \cdot q^n$ aparece apenas na segunda, é possível "somar" como se fosse um sistema para eliminar o restante em comum. Já que a segunda opção é maior que a primeira $q \cdot S_n > S_n$ é preferível subtrair na ordem (2) - (1).

$$\begin{cases} q \cdot S_n = (a_1 \cdot q) + (a_1 \cdot q^2) + \cdots + (a_1 \cdot q^{n-1}) + (a_1 \cdot q^n) \\ S_n = (a_1) + (a_1 \cdot q) + (a_1 \cdot q^2) + \cdots + (a_1 \cdot q^{n-2}) + (a_1 \cdot q^{n-1}) \end{cases}$$

$$q \cdot S_n - S_n = a_1 \cdot q^n - a_1$$

Colocando S_n em evidência no primeiro membro

$$S_n(q-1) = a_1 \cdot q^n - a_1$$

Considerando $q \neq 1$, chegaremos na seguinte expressão

$$S_n = \frac{a_1 \cdot q^n - a_1}{(q-1)}$$

4 Progressão Geométrica Infinita

4.1 Limite de uma Sequência

Considerando uma progressão geométrica com $a_1 = \frac{1}{2}$ e $q = \frac{1}{2}$ com extremo até o infinito. Os 4 primeiros termos são dados por

$$f = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\right)$$

É perceptível que n e a_n são valores inversamente proporcionais. Ou seja, quanto maior n, menor será a_n. A partir de um certo ponto, n será tão grande a ponto de a_n chegar muito perto de 0. Um exemplo disso: podemos computar a partir de qual termo n os valores de a_n serão menores que 0.001

$$\frac{1}{2^n} - 0 < \frac{1}{1000}$$
$$2^n > 1000$$

Nesse contexto, determinamos que o elemento da sequência a_n ficará menor que 0.001 em algum n entre 9 e 10. Porém, como n é obrigatorialmente inteiro, teremos certeza que ficará menor a partir de $n > 9$ (já que $2^9 = 512$). Se chamarmos a aproximação pedida (no caso, foi 0.001) de ε (> 0), é possível encontrar um número n_o natural tal que

$$\frac{1}{2^n} - 0 < \varepsilon$$

Quando $n > n_o$. Sendo n o número real (que no caso anterior seria n tal qual $9 < n < 10$) e n_o o número natural usado no final (no caso anterior $n = 9$). A sequência dada se aproximará de 0 quando n tender ao infinito.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

4.1.1 Definição

Uma P.G $f = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ tem um limite l se dado $\varepsilon > 0$, é possível obter um número n_o natural tal que $|a_n - l| < \varepsilon$ quando $n > n_o$. Caso exista, afirma-se que a sequência f converge-se para l.

Toda a sequência $f = (1, q^2, q^3, \ldots, q^n, \infty)$ com $-1 < q < 1$, o elemento a_n com o aumento de n sempre tenderá a 0.

4.2 Soma de termos da P.G infinita

4.2.1 Exemplo preliminar

Considere a P.G infinita

$$f = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\right)$$

Formemos uma sequência com a soma de $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ termos.

$$g = (S_1, S_2, \ldots)$$

Sendo

$$\begin{cases} S_1 = \frac{1}{2} \\ S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\ S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \\ \ldots \end{cases}$$

A expressão S_n será dada pela soma de tudo até esse elemento, simbolizada nessa sequência por

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

Observando-se a sequência de somas anteriores, é visto um padrão entre o número do denominador e o do numerador. No exemplo S_2, a soma resultou em $\frac{3}{4}$, em $S_3 = \frac{7}{8}$, ou seja, é estabelecido algo como

$$S_n = \frac{n-1}{n}$$

No entanto, esse n nada mais é que 2^n (notando que o denominador sempre se conserva após a soma), portanto ficaremos com

$$S_n = \frac{2^n - 1}{2^n} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2^n}$$

De fato, podemos definir para qual valor l a sequência de somas tenderá (e por consequência, o valor da soma desses n termos) quanto maior n

$$\lim_{n \to +\infty} S_n \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$
$$\lim_{n \to +\infty} (1) - \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right) \Leftrightarrow l = 1$$

4.2.2 Teorema da Soma

Em resumo, seja uma P.A infinita genérica (obecedendo os termos já colocados), a soma dos termos (o limite l da sequência de soma) será sempre igual a expressão

$$\boxed{S_n = \frac{a_1}{1-q}}$$