Resolução da L.E (P.A e P.G)

Mickael Lima

Dezembro, 2021

1 Progressão Aritmética

1.1 Fundamentos

1.1.1 Questão 1

A questão lida com a formação básica de uma P.A. Para determinar o termo x pedido, podemos igualar a constante de razão r da seguinte forma:

$$(2x+1) - x = (5x+7) - (2x+1)$$
$$x + 1 = 3x + 6$$
$$-2x = 5$$
$$x = -\frac{5}{2}$$

A prova real é realizada substituíndo x na sequência e verificando se de fato a mesma forma uma P.A com os três primeiros termos dados.

$$f = \left(-\frac{5}{2}, -2 \cdot \frac{5}{2} + 1, -5 \cdot \frac{5}{2} + 7\right)$$
$$f = (-2.5, -4, -5.5)$$

De fato, forma-se a P.A de $a_1 = (-2.5)$ e $r = (-1.5)$.

1.1.2 Questão 2

O enunciado pede duas condições a ser cumpridas (além da formação em P.A)

- A soma dos 3 números deve ser igual a 3
- A soma dos 3 números, cada um ao quadrado, deve ser igual a 11

Isso implica no seguinte sistema

$$\begin{cases}(x-r)+x+(x+r)=3\\(x-r)^2+x^2+(x+r)^2=11\end{cases}$$

Do primeiro membro, nota-se inicialmente que r irá ser cancelado pela soma entre $-r$ e $+r$. Ficando apenas $3x=3$. Desse modo, descobre-se $x=1$. Jogando essa informação no segundo membro, poderemos manipular e descobrir r efetivamente.

$$(1-r)^2+1+(1+r)^2=11$$

$$(1^2-2r+r^2)+1+(1^2+2r+r^2)=11$$

$$3+2r^2=11$$

$$r=\pm 2$$

Sendo $x=1$ e $r=\pm 2$, podemos montar duas progressões aritméticas f (para $r=2$) e g (para $r=-2$), como ilustrado abaixo.

$$f=(-1,1,3)$$

$$g=(3,1,-1)$$

- Soma: $-1+1+3=3$
- Soma dos quadrados: $3^2+1^2+(-1)^2=11$

1.1.3 Questão 3

Chamaremos l de lado, d a diagonal e a a área. Montemos a sequência $f=(l,d,a)$. Como o enunciado pede o valor algébrico de l, é interessante reescrever todos esses valores em função do mesmo. Utilizando os conhecimentos importados da Geometria Plana, podemos afirmar que a P.A terá a forma

$$f=(l,l\sqrt{2},l^2)$$

A P.A se estabelecerá com a existência de r. Utilizando a mesma técnica da primeira questão, temos

$$l\sqrt{2} - l = l^2 - l\sqrt{2}$$
$$l\sqrt{2} + l\sqrt{2} - l = l^2$$
$$2 \cdot l\sqrt{2} - l = l^2$$
$$l = \frac{2 \cdot l\sqrt{2} - l}{l}$$
$$l = \frac{2 \cdot l\sqrt{2}}{l} - \frac{l}{l}$$
$$l = 2\sqrt{2} - 1$$

1.1.4 Questão 4

- Hipótese: $\Rightarrow f = (a, b, c)$ é uma P.A
- Tese: $\Rightarrow g = (a^2bc, ab^2c, abc^2)$ é uma P.A

A hipótese afirma que a sequência é, de fato, uma P.A. Isso permite-nos concluir que $b - a = c - b$. Se todos os 3 primeiros elementos forem multiplicados por abc, é necessário verificar se essa igualdade mantem-se juntamente com essa proporção. Na P.A da tese, tem-se

$$g = (a^2bc, ab^2c, abc^2)$$

Supondo que ela, de fato, é uma P.A, a igualdade $ab^2c - a^2bc = abc^2 - ab^2c$ é válida. No entanto, isso nada mais é que a igualdade da sequência f multiplicada por abc também. Outro modo de ver isso é considerar o seguinte:

$$ab^2c - a^2bc = abc(b - a)$$
$$abc^2 - ab^2c = abc(c - b)$$

O que mantem a mesma relação.

1.1.5 Questão 5

Temos inicialmente $a_1 = 60$ e uma razão r negativa igual a -7. Haverá o enésimo termo a qual a_n ficará negativo, que pode ser ilustrado por $a_n = 60 + (n - 1) \cdot -7$. Fixaremos $a_n < 0$ e trabalharemos com essa inequação.

$$60 + (n - 1) \cdot -7 < 0$$
$$60 - 7n + 7 < 0$$
$$67 - 7n < 0$$

$$-7n < -67$$
$$n > \frac{67}{7} \approx 9.5$$

Como n obrigatoriamente é um número inteiro, admitimos $n \geq 10$. Portanto, a sequência ficará negativa após o décimo termo. Isso é facilmente provado ao verificar a_{10}.

$$a_{10} = 60 \cdot (9) \cdot -7 = (60 - 63) = (-3)$$