1

Coordenadas

As coordenadas de um ponto P são descritas por dois números reais x, y que indicam a posição em relação ao eixo x e y no sistema cartesiano (esse modelo pode ser chamado de ortogonal, ortonormal ou retangular). Dizer que um ponto P localiza-se em $P(3,4)$ significa que ele está em $x = 3$ (reta do eixo x) e $y = 4$ (reta do eixo y). Um adendo importante: **todo ponto P representa um conjunto de duas incógnitas a serem achadas**.

1.1 Relação entre P e (p_x, p_y)

Entre o conjunto de pontos P do plano cartesiano e o conjunto de pares ordenados $(p_x, p_y) \in \mathbb{R}$, existe uma correspondência biunívoca (ou seja, para P existe apenas, e somente apenas um (p_x, p_y) e vice-versa).

Isso implica que as coordenadas (a,b) são diferentes das (b,a), ou seja, a ordem de a, b importa[1].

1.2 Distância entre dois pontos

Dado dois pontos P_1 e P_2, com coordenadas (x_1, y_1) e (x_2, y_2) respectivamente, a distância entre esses pontos é dada pela seguinte equação.

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \tag{1.1}$$

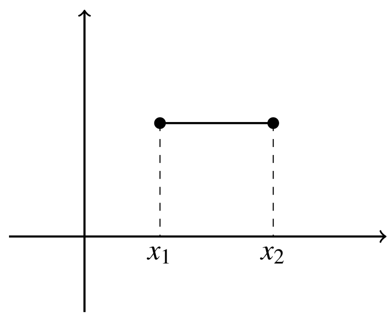
Onde Δx e Δy é a variação $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$

[1] A demonstração dessa afirmação, e por conseguinte dessa propriedade, é feita no FME 7, página 10

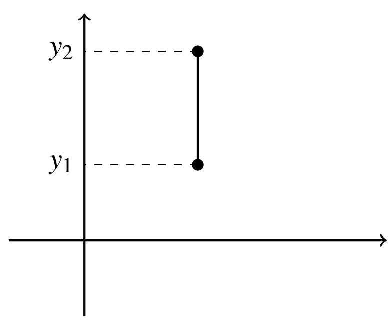
Casos e Demonstração da Fórmula

Há dois casos em que o cálculo da distância entre os pontos é intuitiva.

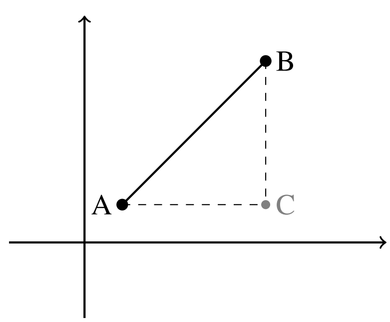
- O segmento de reta formado é paralelo ao eixo x. Nesse caso, $d = |x_2 - x_1|$



- O segmento de reta é paralelo ao eixo y. Nesse caso, $d = |y_2 - y_1|$.



A demonstração da fórmula decorre desses dois casos. Considerando que os pontos não estejam paralelos ao eixo e o segmento de reta esteja inclinado, formando um triângulo retângulo, como representado abaixo.



Surge um novo ponto C no ângulo reto do triângulo formado. $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ são paralelos aos eixos, e as coordenadas de C são (x_B, y_A). Os casos demonstrados anteriormente dão a expressão que indica a medida de $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$. Aplicando o Teorema de Pitágoras com essas informações chega-se na fórmula 1.1 mostrada no começo da sessão.

Questões Exemplo

1. (**UFR-RJ**) A palavra "perímetro" vem da combinação de dois elementos gregos: o primeiro *peri*, significa "em torno de", e o segundo, *metron*, significa medida. O perímetro do trapézio cujo vértices têm coordenadas $(-1,0),(9,0),(8,5)$ e $(1,5)$ é igual a:

A questão pede a soma dos lados de um trapézio. De fato, é só computar a medida d dos 4 lados em função de seus pontos.

$$d_1 = \sqrt{(9-[-1])^2+(0)^2} \Rightarrow \sqrt{100} = 10$$
$$d_2 = \sqrt{(9-8)^2+5^2} \Rightarrow \sqrt{26}$$
$$d_3 = \sqrt{(8-1)^2+0^2} \Rightarrow \sqrt{49} = 7$$
$$d_4 = \sqrt{(1-[-1])^2+5^2} \Rightarrow \sqrt{29}$$

Notando que, em d_4 trabalha-se com os pontos $(1,5)$ e $(-1,0)$, já que é necessário "fechar" esse trapézio. Portanto o perímetro será igual $10+\sqrt{26}+7+\sqrt{29} \Rightarrow 17+\sqrt{26}+\sqrt{29}$.

2. Dados A$(1,2)$, C$(3,-4)$ extremidades da diagonal de um quadrado, determine as coordenadas do vértice B e D, sabendo que $x_B > x_D$. [a]

[a] Essa questão foi retirada diretamente da Universidade Federal Clube de Regatas do Flamengo e elaborada pelo Jorge Jesus em parceria com o Bruno Henrique e Gabigol

Sendo $\overline{AC}$ a diagonal, é esperado que os lados desse quadrado sejam iguais a $d_{AC} \cdot \sqrt{2}$, e portanto a distância entre todos os vértices do mesmo. Computando d_{AC}:

$$d_{AC} = \sqrt{(3-1)^2+(-4-2)^2} \Rightarrow \sqrt{4+36} = \sqrt{40} \tag{1.2}$$

Portanto os lados terão medida $\sqrt{80}$. Dessa informação deriva-se que $d_{AB} = d_{BC} = d_{CD} = \sqrt{80}$. Escrevendo as expressões para determinar as coordenadas de B.

$$\sqrt{(x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2}$$
$$(x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2$$
$$(x_b-1)^2+(y_b-2)^2$$

A expressão acima, apesar de conter duas icógnitas, será resolvível quando montada a expressão para as coordenadas DS. Efetuando os produtos notáveis.

$$(x_b^2-2x_b+1)+(y_b^2-4y_b+4)$$
$$x_b^2-2x_b+y_b^2-4y_b+5$$
$$x_b(x_b-2)+y_b(y_b-4)+5$$