

Resolução da L.E (P.A e P.G)

Mickael Lima

Dezembro, 2021

1 Progressão Aritmética

1.1 Fundamentos

1.1.1 Questão 1

A questão lida com a formação básica de uma P.A. Para determinar o termo x pedido, podemos igualar a constante de razão r da seguinte forma:

$$\begin{aligned}(2x + 1) - x &= (5x + 7) - (2x + 1) \\ x + 1 &= 3x + 6 \\ -2x &= 5 \\ x &= -\frac{5}{2}\end{aligned}$$

A prova real é realizada substituindo x na sequência e verificando se de fato a mesma forma uma P.A com os três primeiros termos dados.

$$\begin{aligned}f &= \left(-\frac{5}{2}, -2 \cdot \frac{5}{2} + 1, -5 \cdot \frac{5}{2} + 7\right) \\ f &= (-2.5, -4, -5.5)\end{aligned}$$

De fato, forma-se a P.A de $a_1 = (-2.5)$ e $r = (-1.5)$.

1.1.2 Questão 2

O enunciado pede duas condições a ser cumpridas (além da formação em P.A)

- A soma dos 3 números deve ser igual a 3
- A soma dos 3 números, cada um ao quadrado, deve ser igual a 11

Isso implica no seguinte sistema

$$\begin{cases} (x-r) + x + (x+r) = 3 \\ (x-r)^2 + x^2 + (x+r)^2 = 11 \end{cases}$$

Do primeiro membro, nota-se inicialmente que r irá ser cancelado pela soma entre $-r$ e $+r$. Ficando apenas $3x = 3$. Desse modo, descobre-se $x = 1$. Jogando essa informação no segundo membro, poderemos manipular e descobrir r efetivamente.

$$\begin{aligned} (1-r)^2 + 1 + (1+r)^2 &= 11 \\ (1^2 - 2r + r^2) + 1 + (1^2 + 2r + r^2) &= 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 + 2r^2 &= 11 \\ r &= \pm 2 \end{aligned}$$

Sendo $x = 1$ e $r = \pm 2$, podemos montar duas progressões aritméticas f (para $r = 2$) e g (para $r = -2$), como ilustrado abaixo.

$$\begin{aligned} f &= (-1, 1, 3) \\ g &= (3, 1, -1) \end{aligned}$$

- Soma: $-1 + 1 + 3 = 3$
- Soma dos quadrados: $3^2 + 1^2 + (-1)^2 = 11$

1.1.3 Questão 3

Chamaremos l de lado, d a diagonal e a a área. Montemos a sequência $f = (l, d, a)$. Como o enunciado pede o valor algébrico de l , é interessante reescrever todos esses valores em função do mesmo. Utilizando os conhecimentos importados da Geometria Plana, podemos afirmar que a P.A terá a forma

$$f = (l, l\sqrt{2}, l^2)$$

A P.A se estabelecerá com a existência de r . Utilizando a mesma técnica da primeira questão, temos

$$l\sqrt{2} - l = l^2 - l\sqrt{2}$$

$$l\sqrt{2} + l\sqrt{2} - l = l^2$$

$$2 \cdot l\sqrt{2} - l = l^2$$

$$l = \frac{2 \cdot l\sqrt{2} - l}{l}$$

$$l = \frac{2 \cdot l\sqrt{2}}{l} - \frac{l}{l}$$

$$l = 2\sqrt{2} - 1$$

1.1.4 Questão 4

- Hipótese: $\Rightarrow f = (a, b, c)$ é uma P.A
- Tese: $\Rightarrow g = (a^2bc, ab^2c, abc^2)$ é uma P.A

A hipótese afirma que a sequência é, de fato, uma P.A. Isso permite-nos concluir que $b - a = c - b$. Se todos os 3 primeiros elementos forem multiplicados por abc , é necessário verificar se essa igualdade mantém-se juntamente com essa proporção. Na P.A da tese, tem-se

$$g = (a^2bc, ab^2c, abc^2)$$

Supondo que ela, de fato, é uma P.A, a igualdade $ab^2c - a^2bc = abc^2 - ab^2c$ é válida. No entanto, isso nada mais é que a igualdade da sequência f multiplicada por abc também. Outro modo de ver isso é considerar o seguinte:

$$ab^2c - a^2bc = abc(b - a)$$

$$abc^2 - ab^2c = abc(c - b)$$

O que mantém a mesma relação.

1.1.5 Questão 5

Temos inicialmente $a_1 = 60$ e uma razão r negativa igual a -7 . Haverá o enésimo termo a qual a_n ficará negativo, que pode ser ilustrado por $a_n = 60 + (n - 1) \cdot -7$. Fixaremos $a_n < 0$ e trabalharemos com essa inequação.

$$60 + (n - 1) \cdot -7 < 0$$

$$60 - 7n + 7 < 0$$

$$67 - 7n < 0$$

$$\begin{aligned} -7n &< -67 \\ n &> \frac{67}{7} \approx 9.5 \end{aligned}$$

Como n obrigatoriamente é um número inteiro, admitimos $n \geq 10$. Portanto, a sequência ficará negativa após o décimo termo. Isso é facilmente provado ao verificar a_{10} .

$$a_{10} = 60 \cdot (9) \cdot -7 = (60 - 63) = (-3)$$

1.1.6 Questão 6

Podemos definir a_{10} e a_{12} a partir da fórmula do n -ésimo termo.

$$\begin{cases} a_{10} = a_1 + 9r \\ a_{12} = a_1 + 11r \end{cases}$$

As expressões necessárias para montar a P.A são a_1 e r , montando o sistema e resolvendo-o por soma.

$$\begin{cases} 7 = a_1 + 9r \\ 8 = -a_1 - 11r \quad (\times -1) \\ \hline 15 = -2r \\ r = -\frac{15}{2} \end{cases}$$

Substituindo r na primeira equação, encontra-se $a_1 = \frac{149}{2}$. A formação da P.A pode ser feita com essas duas informações.

1.1.7 Questão 7

Entre 100 e 1000, sabe-se que há 999 números. Por partes, chamaremos a sequência f de números divisíveis por 2 e g por 3 (não necessariamente o número deve ser divisível por 2 e 3 ao mesmo tempo).

- Na sequência f , podemos afirmar que a_1 é igual a 100 (pois é o primeiro número entre 100 e 1000 divisível por 2), $r = 2$ e $a_n = 998$ (último número divisível por 2). É necessário saber quantos n termos essa P.A tem

$$1000 = 100 + (n - 1)2$$

$$1000 = 100 + 2n - 2$$

$$1000 = 98 + 2n$$

$$2n = 902$$

$$n = 451$$

- A lógica é a mesma para múltiplos de 3. $a_1 = 102$, $a_n = 999$, $r = 3$

$$999 = 102 + (n - 1)3$$

$$999 = 102 + 3n - 3$$

$$999 = 99 + 3n$$

$$3n = 900$$

$$n = 300$$