Resolução da L.E (P.A e P.G)

Mickael Lima

Dezembro, 2021

1 Progressão Aritmética

1.1 Fundamentos

1.1.1 Questão 1

A questão lida com a formação básica de uma P.A. Para determinar o termo x pedido, podemos igualar a constante de razão r da seguinte forma:

$$(2x+1) - x = (5x+7) - (2x+1)$$
$$x + 1 = 3x + 6$$
$$-2x = 5$$
$$x = -\frac{5}{2}$$

A prova real é realizada substituíndo x na sequência e verificando se de fato a mesma forma uma P.A com os três primeiros termos dados.

$$f = \left(-\frac{5}{2}, -2\cdot\frac{5}{2}+1, -5\cdot\frac{5}{2}+7\right)$$
$$f = (-2.5, -4, -5.5)$$

De fato, forma-se a P.A de $a_1 = (-2.5)$ e $r = (-1.5)$.

1.1.2 Questão 2

O enunciado pede duas condições a ser cumpridas (além da formação em P.A)

- A soma dos 3 números deve ser igual a 3
- A soma dos 3 números, cada um ao quadrado, deve ser igual a 11

Isso implica no seguinte sistema

$$\begin{cases}(x-r)+x+(x+r)=3\\(x-r)^2+x^2+(x+r)^2=11\end{cases}$$

Do primeiro membro, nota-se inicialmente que r irá ser cancelado pela soma entre $-r$ e $+r$. Ficando apenas $3x=3$. Desse modo, descobre-se $x=1$. Jogando essa informação no segundo membro, poderemos manipular e descobrir r efetivamente.

$$(1-r)^2+1+(1+r)^2=11$$
$$(1^2-2r+r^2)+1+(1^2+2r+r^2)=11$$

$$3+2r^2=11$$
$$r=\pm 2$$

Sendo $x=1$ e $r=\pm 2$, podemos montar duas progressões aritméticas f (para $r=2$) e g (para $r=-2$), como ilustrado abaixo.

$$f=(-1,1,3)$$
$$g=(3,1,-1)$$

- Soma: $-1+1+3=3$
- Soma dos quadrados: $3^2+1^2+(-1)^2=11$

1.1.3 Questão 3

Chamaremos l de lado, d a diagonal e a a área. Montemos a sequência $f=(l,d,a)$. Como o enunciado pede o valor algébrico de l, é interessante reescrever todos esses valores em função do mesmo. Utilizando os conhecimentos importados da Geometria Plana, podemos afirmar que a P.A terá a forma

$$f=(l,l\sqrt{2},l^2)$$

A P.A se estabelecerá com a existência de r. Utilizando a mesma técnica da primeira questão, temos

$$l\sqrt{2} - l = l^2 - l\sqrt{2}$$
$$l\sqrt{2} + l\sqrt{2} - l = l^2$$
$$2 \cdot l\sqrt{2} - l = l^2$$
$$l = \frac{2 \cdot l\sqrt{2} - l}{l}$$
$$l = \frac{2 \cdot l\sqrt{2}}{l} - \frac{l}{l}$$
$$l = 2\sqrt{2} - 1$$

1.1.4 Questão 4

- Hipótese: $\Rightarrow f = (a, b, c)$ é uma P.A
- Tese: $\Rightarrow g = (a^2bc, ab^2c, abc^2)$ é uma P.A

A hipótese afirma que a sequência é, de fato, uma P.A. Isso permite-nos concluir que $b - a = c - b$. Se todos os 3 primeiros elementos forem multiplicados por abc, é necessário verificar se essa igualdade mantem-se juntamente com essa proporção. Na P.A da tese, tem-se

$$g = (a^2bc, ab^2c, abc^2)$$

Supondo que ela, de fato, é uma P.A, a igualdade $ab^2c - a^2bc = abc^2 - ab^2c$ é válida. No entanto, isso nada mais é que a igualdade da sequência f multiplicada por abc também. Outro modo de ver isso é considerar o seguinte:

$$ab^2c - a^2bc = abc(b - a)$$
$$abc^2 - ab^2c = abc(c - b)$$

O que mantem a mesma relação.

1.1.5 Questão 5

Temos inicialmente $a_1 = 60$ e uma razão r negativa igual a -7. Haverá o enésimo termo a qual a_n ficará negativo, que pode ser ilustrado por $a_n = 60 + (n - 1) \cdot -7$. Fixaremos $a_n < 0$ e trabalharemos com essa inequação.

$$60 + (n - 1) \cdot -7 < 0$$
$$60 - 7n + 7 < 0$$
$$67 - 7n < 0$$

$$-7n < -67$$
$$n > \frac{67}{7} \approx 9.5$$

Como n obrigatoriamente é um número inteiro, admitimos $n \geq 10$. Portanto, a sequência ficará negativa após o décimo termo. Isso é facilmente provado ao verificar a_{10}.

$$a_{10} = 60 \cdot (9) \cdot -7 = (60 - 63) = (-3)$$

1.1.6 Questão 6

Podemos definir a_{10} e a_{12} a partir da fórmula do enésimo termo.

$$\begin{cases} a_{10} = a_1 + 9r \\ a_{12} = a_1 + 11r \end{cases}$$

As expressões necessárias para montar a P.A são a_1 e r, montando o sistema e resolvendo-o por soma.

$$\begin{cases} 7 = a_1 + 9r \\ \underline{8 = -a_1 - 11r \ \ (\times - 1)} \\ 15 = -2r \\ r = -\frac{15}{2} \end{cases}$$

Substituíndo r na primeira equação, encontra-se $a_1 = \frac{149}{2}$. A formação da P.A pode ser feita com essas duas informações.

1.1.7 Questão 7

Entre 100 e 1000, sabe-se que há 999 números. Por partes, chamaremos a sequência f de números divisíveis por 2 e g por 3 (não necessariamente o número deve ser divisível por 2 e 3 ao mesmo tempo).

- Na sequência f, podemos afirmar que a_1 é igual a 100 (pois é o primeiro número entre 100 e 1000 divisível por 2), $r = 2$ e $a_n = 998$ (último número divisível por 2). É necessário saber quantos n termos essa P.A tem

$$1000 = 100 + (n - 1)2$$
$$1000 = 100 + 2n - 2$$
$$1000 = 98 + 2n$$
$$2n = 902$$
$$n = 451$$

- A lógica é a mesma para múltiplos de 3. $a_1 = 102$, $a_n = 999$, $r = 3$

$$999 = 102 + (n-1)3$$
$$999 = 102 + 3n - 3$$
$$999 = 99 + 3n$$
$$3n = 900$$
$$n = 300$$

1.1.8 Questão 8

A P.A que representaria a sequência dos 200 primeiros números ímpares positivos é gerada com $a_1 = 1$ e $r = 2$. Utiliza-se a fórmula

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Determina-se inicialmente $a_n = 1 + (200-1)2 \Leftrightarrow 399$, após isso, na fórmula

$$S_{200} = \frac{200(1+399)}{2} \Leftrightarrow 100(400) = 40000$$

Para calcularmos a soma de n elementos dessa sequência já estabelecida, seguimos os mesmos passos

$$a_n = 1 + 2(n-1) \Leftrightarrow 2n - 1$$

$$S_n = \frac{n(1 + 2n - 1)}{2} \Leftrightarrow \frac{2n^2}{2} = n^2$$

1.1.9 Questão 9

A fonte está a 15 metros da primeira parte que será "regada". Quando chegar nas primeiras 3 roseiras, andará mais 2 metros para regá-las (vai regar a primeira roseira de imediato, andará até a segunda (1 metro) e até a terceira (1 metro)). Depois disso, terá que voltar para reabastecer a água, voltando todo o caminho novamente, totalizando

$$15 + 2 + 2 + 15 = 34$$

Esse é o trajeto realizado inicialmente, e o primeiro termo da P.A ($a_1 = 34$). A cada viagem, o percurso aumenta em 6 metros (já que são 3 metros a mais na ida e 3 metros a mais na volta, adicionados com os caminhos anteriores), portanto $r = 6$. Como ele rega 3 roseiras a cada 1 viagem, então ele fará no total 20 viagens para regar todas as 60 ($n = 20$). Montada a P.A, utiliza-se a mesma técnica da questão anterior.

$$a_{20} = 34 + (19)6 = 148$$

$$S_{20} = \frac{20(34 + 148)}{2} = 10(182) = 1820$$

Portanto, o jardineiro andou 1820 metros.

1.1.10 Questão 10 (*)

A primeira afirmativa da questão diz que o somatório dos 10 primeiros termos da P.A dada é igual a expressão

$$10 + 25d$$

E que o somatório dos 50 primeiros termos dessa mesma P.A equivale à 4550. É possível igualar esses valores com S_{10} e S_{50} para descobrir os termos notáveis.

$$\frac{n(a_1 + a_n)}{2} = 10 + 25d$$

Porém $a_n = a_1 + (n - 1)d$ (d é a razão r da questão) e $n = 10$ para esse caso

$$\frac{10(a_1 + a_1 + 9d)}{2} = 10 + 25d$$

$$\frac{10(2a_1 + 9d)}{2} = 10 + 25d$$

$$5(2a_1 + 9d) = 10 + 25d$$

$$10a_1 + 45d = 10 + 25d$$

$$10a_1 = 10 - 20d$$

$$a_1 = \frac{10 - 20d}{10} \Leftrightarrow 1 - 2d$$

Achado uma expressão que relaciona a_1 com d para o somatório dos 10 primeiros termos ($a_1 = 1 - 2d$), agora é necessário descobrir outra relação no somatório de 50 para obter um sistema.

$$\frac{50(a_1 + a_1 + 49d)}{2} = 4550$$

$$\frac{50(2a_1 + 49d)}{2} = 4550$$

$$25(2a_1 + 49d) = 4550$$

$$50a_1 + 1225d = 4550$$

$$a_1 = \frac{4550 - 1225d}{50} \Leftrightarrow \frac{4550}{50} - \frac{1225d}{50}$$

$$a_1 = 91 - \frac{49d}{2}$$

Podemos, por fim, igualar essas duas relações e descobrir o valor de d.

$$91 - \frac{49d}{2} = 1 - 2d$$

$$-\frac{49d}{2} = -2d - 90$$

$$\frac{49d}{2} = 2d + 90$$

$$49d = 2(2d + 90)$$

$$49d = 4d + 180$$

$$45d = 180$$

$$d = 4$$

Substituindo d na expressão mais simples $1 - 2d$ teremos $a_1 = -7$. A expressão pedida é

$$4 - (-7) = 11$$

Letra D.