# Lista de Exercício com Resolução

Progressão Aritmética e Geométrica

Dezembro, 2021

## Fundamentos - P.A

1. Determine $x$ de modo que $(x; 2x+1; 5x+7)$ seja uma P.A.

2. Obtenha 3 números em P.A, de modo que a soma entre esses seja igual a 3 e a soma de seus quadrados seja 11

3. Os números que exprimem o lado, a diagonal e a área de um quadrado estão, respectivamente, em P.A. Determine quanto mede o lado.

4. Demonstre que se $(a, b, c)$ é uma P.A, então $(a^2bc, ab^2c, abc^2)$ também é.

5. Determine qual é o primeiro termo negativo da P.A $f = \{60, 53, 46, \dots\}$.

6. Sabe-se que $a_{10} = 7$ e que $a_{12} = -8$. Monte a P.A.

7. De 100 a 1000, quanto são os múltiplos de 2 ou 3.

8. Obtenha a soma dos 200 primeiros termos da sequência dos números ímpares positivos. Cálcule também a soma dos $n$ primeiros termos iniciais dessa mesma sequência.

9. Um jardineiro tem que regar 60 roseiras plantadas ao longo de uma vereda retilínea e distando 1 m uma da outra. Ele enche seu regador numa fonte situada na mesma vereda, a 15 m da primeira roseira, e a cada viagem rega 3 roseiras. Começando e terminando na fonte, determine qual é o percurso total que ele terá que caminhar até regar todas as roseiras.

10. **(ITA-SP)** Considere a progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{50})$ de razão $d$. Se $\sum_{n=1}^{10} a_n = 10 + 25d$ e $\sum_{n=1}^{50} = 4550$. Então $d - a_1$ é igual a:

    (a) 3 (b) 6 (c) 9 (d) 11 (e) 14

# Fundamentos - P.G

1. Prove que se $x, y, z$, nessa ordem, formam uma P.G, vale a relação

$$(x+y+z)(x-y+z) = x^2 + y^2 + z^2$$

2. Os lados de um triângulo retângulo apresentam medidas em P.G. Determine o valor de $q$.

3. Dada uma P.G finita $(a_1, a_2, \ldots, a_{10})$ onde $a_1 = 2$ e $a_2 = 6$, então determine se $(a_{10})^{\frac{1}{8}} = 3 \cdot (2)^{\frac{1}{8}}$ é uma sentença verídica.

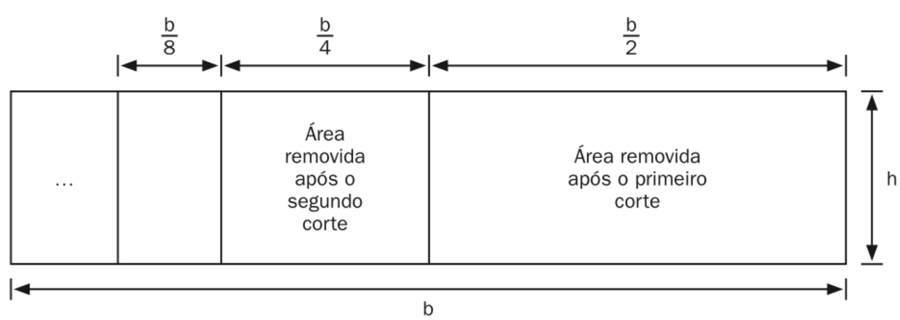
4. Prove que se $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ é P.G, então $\left(\frac{1}{a_1}, \ldots\right)$ também é.

5. Determine $\sum_{i=3}^{n} 2^i = 4088$

6. Sabendo que $0 < q < 1$, calcule o valor da expressão da P.G infinita

$$q + 2q^2 + 3q^3 + \ldots$$

7. **(IME–RJ)** Uma placa metálica com base $b$ e altura $h$ sofre sucessivas reduções da sua área, em função da realização de diversos cortes, conforme ilustrado na figura abaixo. A cada passo, a área à direita é removida e a placa sofre um novo corte. Determine a soma das áreas removidas da placa original após serem realizados $n$ cortes.



8. **(ITA-SP)** Seja $(a_1, a_2, \dots)$ uma progressão geométrica de razão $0 < a_1 < 1$ e soma igual a $3a_1$. A soma dos três primeiros termos dessa progressão geométrica é igual a

(a) $\dfrac{8}{27}$ (b) $\dfrac{20}{27}$ (c) $\dfrac{26}{27}$ (d) $\dfrac{30}{27}$ (e) $\dfrac{38}{27}$

9. **(Dep. de Matemática da Clínica Espiritual de Marabá - PA)** Para que os produtos dos termos da sequência

$$\left(1, \sqrt{3}, \sqrt{3}^2, \sqrt{3}^3, \dots \sqrt{3}^{(n-1)}\right)$$

Seja igual a $3^{14}$, deverão ser consideradas, nessa sequência:

(a) 8 termos (b) 6 termos (c) 10 termos (d) 9 termos (e) 7 termos

10. **(ITA-SP)** A progressão infinita $(a_1, \dots, a_n, \dots)$ tem razão $r < 0$. Sabe-se que a progressão infinita $(a_1, \dots, a_{(5n+1)}, \dots)$ tem soma 8 e a progressão infinita $(a_1, \dots, a_{(5n)}, \dots)$ tem soma 2. Determine a soma da progressão $(a_1, \dots, a_n, \dots)$

# Resolução das Questões

## Progressão Aritmética

### Questão 1

---

A questão lida com a formação básica de uma P.A. Para determinar o termo $x$ pedido, podemos igualar a constante de razão $r$ da seguinte forma:

$$(2x+1) - x = (5x+7) - (2x+1)$$
$$x + 1 = 3x + 6$$
$$-2x = 5$$
$$x = -\frac{5}{2}$$

A prova real é realizada substituíndo $x$ na sequência e verificando se de fato a mesma forma uma P.A com os três primeiros termos dados.

$$f = \left(-\frac{5}{2}, -2 \cdot \frac{5}{2} + 1, -5 \cdot \frac{5}{2} + 7\right)$$
$$f = (-2.5, -4, -5.5)$$

De fato, forma-se a P.A de $a_1 = (-2.5)$ e $r = (-1.5)$.

### Questão 2

---

O enunciado pede duas condições a ser cumpridas (além da formação em P.A)

- A soma dos 3 números deve ser igual a 3
- A soma dos 3 números, cada um ao quadrado, deve ser igual a 11

Isso implica no seguinte sistema

$$\begin{cases} (x-r) + x + (x+r) = 3 \\ (x-r)^2 + x^2 + (x+r)^2 = 11 \end{cases}$$

Do primeiro membro, nota-se inicialmente que $r$ irá ser cancelado pela soma entre $-r$ e $+r$. Ficando apenas $3x = 3$. Desse modo, descobre-se $x = 1$. Jogando essa informação no segundo membro, poderemos manipular e descobrir $r$ efetivamente.

$$(1-r)^2 + 1 + (1+r)^2 = 11$$
$$(1^2 - 2r + r^2) + 1 + (1^2 + 2r + r^2) = 11$$

$$3 + 2r^2 = 11$$
$$r = \pm 2$$

Sendo $x = 1$ e $r = \pm 2$, podemos montar duas progressões aritméticas $f$ (para $r = 2$) e $g$ (para $r = -2$), como ilustrado abaixo.

$$f = (-1, 1, 3)$$
$$g = (3, 1, -1)$$

- Soma: $-1 + 1 + 3 = 3$
- Soma dos quadrados: $3^2 + 1^2 + (-1)^2 = 11$

**Questão 3**

---

Chamaremos $l$ de lado, $d$ a diagonal e $a$ a área. Montemos a sequência $f = (l, d, a)$. Como o enunciado pede o valor algébrico de $l$, é interessante reescrever todos esses valores em função do mesmo. Utilizando os conhecimentos importados da Geometria Plana, podemos afirmar que a P.A terá a forma

$$f = (l, l\sqrt{2}, l^2)$$

A P.A se estabelecerá com a existência de $r$. Utilizando a mesma técnica da primeira questão, temos

$$
\begin{aligned}
l\sqrt{2} - l &= l^2 - l\sqrt{2} \\
l\sqrt{2} + l\sqrt{2} - l &= l^2 \\
2 \cdot l\sqrt{2} - l &= l^2 \\
l &= \frac{2 \cdot l\sqrt{2} - l}{l} \\
l &= \frac{2 \cdot l\sqrt{2}}{l} - \frac{l}{l} \\
l &= 2\sqrt{2} - 1
\end{aligned}
$$

**Questão 4**

---

- Hipótese: $\Rightarrow f = (a, b, c)$ é uma P.A
- Tese: $\Rightarrow g = (a^2bc, ab^2c, abc^2)$ é uma P.A

A hipótese afirma que a sequência é, de fato, uma P.A. Isso permite-nos concluir que $b - a = c - b$. Se todos os 3 primeiros elementos forem multiplicados por $abc$, é necessário verificar se essa igualdade mantem-se juntamente com essa proporção. Na P.A da tese, tem-se

$$g = (a^2bc, ab^2c, abc^2)$$

Supondo que ela, de fato, é uma P.A, a igualdade $ab^2c - a^2bc = abc^2 - ab^2c$ é válida. No entanto, isso nada mais é que a igualdade da sequência $f$ multiplicada por $abc$ também. Outro modo de ver isso é considerar o seguinte:

$$
\begin{aligned}
ab^2c - a^2bc &= abc(b - a) \\
abc^2 - ab^2c &= abc(c - b)
\end{aligned}
$$

O que mantem a mesma relação.

**Questão 5**

---

Temos inicialmente $a_1 = 60$ e uma razão $r$ negativa igual a $-7$. Haverá o enésimo termo a qual $a_n$ ficará negativo, que pode ser ilustrado por $a_n = 60 + (n-1) \cdot -7$. Fixaremos $a_n < 0$ e trabalharemos com essa inequação.

$$
\begin{gathered}
60 + (n-1) \cdot -7 < 0 \\
60 - 7n + 7 < 0 \\
67 - 7n < 0 \\
-7n < -67 \\
n > \frac{67}{7} \approx 9.5
\end{gathered}
$$

Como $n$ obrigatoriamente é um número inteiro, admitimos $n \geq 10$. Portanto, a sequência ficará negativa após o décimo termo. Isso é facilmente provado ao verificar $a_{10}$.

$$a_{10} = 60 \cdot (9) \cdot -7 = (60 - 63) = (-3)$$

**Questão 6**

---

Podemos definir $a_{10}$ e $a_{12}$ a partir da fórmula do enésimo termo.

$$
\begin{cases}
a_{10} = a_1 + 9r \\
a_{12} = a_1 + 11r
\end{cases}
$$

As expressões necessárias para montar a P.A são $a_1$ e $r$, montando o sistema e resolvendo-o por soma.

$$
\begin{cases}
7 = a_1 + 9r \\
\underline{8 = -a_1 - 11r \quad (\times -1)} \\
15 = -2r \\
r = -\frac{15}{2}
\end{cases}
$$

Substituíndo $r$ na primeira equação, encontra-se $a_1 = \frac{149}{2}$. A formação da P.A pode ser feita com essas duas informações.

## Questão 7

---

Entre 100 e 1000, sabe-se que há 999 números. Por partes, chamaremos a sequência $f$ de números divisíveis por 2 e $g$ por 3 (não necessariamente o número deve ser divisível por 2 e 3 ao mesmo tempo).

- Na sequência $f$, podemos afirmar que $a_1$ é igual a 100 (pois é o primeiro número entre 100 e 1000 divisível por 2), $r = 2$ e $a_n = 1000$ (último número divisível por 2). É necessário saber quantos $n$ termos essa P.A tem

$$1000 = 100 + (n-1)2$$
$$1000 = 100 + 2n - 2$$
$$1000 = 98 + 2n$$
$$2n = 902$$
$$n = 451$$

- A lógica é a mesma para múltiplos de 3. $a_1 = 102$, $a_n = 999$, $r = 3$

$$999 = 102 + (n-1)3$$
$$999 = 102 + 3n - 3$$
$$999 = 99 + 3n$$
$$3n = 900$$
$$n = 300$$

## Questão 8

---

A P.A que representaria a sequência dos 200 primeiros números ímpares positivos é gerada com $a_1 = 1$ e $r = 2$. Utiliza-se a fórmula

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Determina-se inicialmente $a_n = 1 + (200-1)2 \Leftrightarrow 399$, após isso, na fórmula

$$S_{200} = \frac{200(1+399)}{2} \Leftrightarrow 100(400) = 40000$$

Para calcularmos a soma de $n$ elementos dessa sequência já estabelecida, seguimos os mesmos passos

$$a_n = 1 + 2(n-1) \Leftrightarrow 2n - 1$$

$$S_n = \frac{n(1+2n-1)}{2} \Leftrightarrow \frac{2n^2}{2} = n^2$$

**Questão 9**

---

A fonte está a 15 metros da primeira parte que será "regada". Quando chegar nas primeiras 3 roseiras, andará mais 2 metros para regá-las (vai regar a primeira roseira de imediato, andará até a segunda (1 metro) e até a terceira (1 metro)). Depois disso, terá que voltar para reabastecer a água, voltando todo o caminho novamente, totalizando

$$15 + 2 + 2 + 15 = 34$$

Esse é o trajeto realizado inicialmente, e o primeiro termo da P.A ($a_1 = 34$). A cada viagem, o percurso aumenta em 6 metros (já que são 3 metros a mais na ida e 3 metros a mais na volta, adicionados com os caminhos anteriores), portanto $r = 6$. Como ele rega 3 roseiras a cada 1 viagem, então ele fará no total 20 viagens para regar todas as 60 ($n = 20$). Montada a P.A, utiliza-se a mesma técnica da questão anterior.

$$a_{20} = 34 + (19)6 = 148$$
$$S_{20} = \frac{20(34+148)}{2} = 10(182) = 1820$$

Portanto, o jardineiro andou 1820 metros.

**Questão 10 (*)**

---

A primeira afirmativa da questão diz que o somatório dos 10 primeiros termos da P.A dada é igual a expressão

$$10 + 25d$$

E que o somatório dos 50 primeiros termos dessa mesma P.A equivale à 4550. É possível igualar esses valores com $S_{10}$ e $S_{50}$ para descobrir os termos notáveis.

$$\frac{n(a_1 + a_n)}{2} = 10 + 25d$$

Porém $a_n = a_1 + (n-1)d$ ($d$ é a razão $r$ da questão) e $n = 10$ para esse caso

$$\frac{10(a_1 + a_1 + 9d)}{2} = 10 + 25d$$

$$\frac{10(2a_1 + 9d)}{2} = 10 + 25d$$

$$5(2a_1 + 9d) = 10 + 25d$$

$$10a_1 + 45d = 10 + 25d$$

$$10a_1 = 10 - 20d$$

$$a_1 = \frac{10 - 20d}{10} \Leftrightarrow 1 - 2d$$

Achado uma expressão que relaciona $a_1$ com $d$ para o somatório dos 10 primeiros termos ($a_1 = 1 - 2d$), agora é necessário descobrir outra relação no somatório de 50 para obter um sistema.

$$\frac{50(a_1 + a_1 + 49d)}{2} = 4550$$

$$\frac{50(2a_1 + 49d)}{2} = 4550$$

$$25(2a_1 + 49d) = 4550$$

$$50a_1 + 1225d = 4550$$

$$a_1 = \frac{4550 - 1225d}{50} \Leftrightarrow \frac{4550}{50} - \frac{1225d}{50}$$

$$a_1 = 91 - \frac{49d}{2}$$

Podemos, por fim, igualar essas duas relações e descobrir o valor de $d$.

$$91 - \frac{49d}{2} = 1 - 2d$$
$$-\frac{49d}{2} = -2d - 90$$
$$\frac{49d}{2} = 2d + 90$$
$$49d = 2(2d + 90)$$
$$49d = 4d + 180$$
$$45d = 180$$
$$d = 4$$

Substituindo $d$ na expressão mais simples $1 - 2d$ teremos $a_1 = -7$. A expressão pedida é

$$4 - (-7) = 11$$

Letra D.

# 1 Progressão Geométrica

## 1.1 Fundamentos

**Questão 1**

---

- Hipótese $\Rightarrow f = (x, y, z)$ é uma P.G
- Tese $\Rightarrow (x + y + z)(x - y + z) = x^2 + y^2 + z^2$

Inicialmente, se $f$ é P.G, então vale a relação

$$\frac{y}{x} = \frac{z}{y}$$

Isso implica $y^2 = z \cdot x$. Desenvolvendo a tese algebricamente, têm-se

$$(x + y + z)(x - y + z) \Rightarrow (x^2 - xy + xz) + (yx - y^2 + yz) + (zx - zy + z^2)$$

Anulando os termos possíveis, obtemos

$$x^2 + 2xz - y^2 + z^2$$

No entanto, $y^2 = zx$.

$$x^2 + 2y^2 - y^2 + z^2$$

O que converge para

$$x^2 - y^2 + z^2$$

**Questão 2**

---

**Pendente**

**Questão 3**

---

Construindo a P.G tal qual $a_1 = 2$, $a_2 = 6$ (é imediato que $q = 3$). Chegaremos ao décimo termo por

$$a_{10} = 2 \cdot 3^9$$

Ou seja, a expressão dada no enunciado em número é igual a

$$(2 \cdot 3^9)^{\frac{1}{8}} = 3 \cdot (2)^{\frac{1}{8}}$$
$$2^{\frac{1}{8}} \cdot 3^{\frac{9}{8}} = 3 \cdot (2^{\frac{1}{8}})$$

O que é absurdo, portanto a sentença é falsa.

**Questão 4**

---

A primeira sequência tem como razão:

$$q = \frac{a_2}{a_1}$$

A segunda sequência têm como razão (considerando que ela é uma P.G)

$$q' = \frac{\frac{1}{a_2}}{\frac{1}{a_1}} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2}$$

Portanto, ambas são P.G de razão inversa ($q' = q^{-1}$)

**Questão 5**

---

A P.G tem razão $q = 2$ e seu termo $a_1 = 2^3$ (de acordo com a notação de somatório). A determinação do valor de $n$ decorre de que a soma de todos os termos entre $a_1$ e $a_n$ é igual a 4088, portanto.

$$\frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = 4088$$
$$2^3(2^n - 1) = 4088$$
$$2^{n+3} - 8 = 4088$$
$$2^{n+3} = 4096$$
$$2^{n+3} = 2^{12}$$
$$n = 9$$