Sequências e Progressões

Mickael Lima

Dezembro, 2021

Sumário

1 Sequências

Define-se sequências numéricas como todo conjunto formado por meio de uma "lógica" por trás (semelhante à funções). A "lógica" é chamada de Lei de Formação, esta é apresentada de três formas diferentes.

1.1 Tipos de Lei de Formação

1.1.1 Fórmula de Recorrência

Nesse exemplo, a lei de formação é apresentada da seguinte forma: mostra-se inicialmente um método para identificar o primeiro número da sequência (por exemplo, a_1), e outro para calcular qualquer outro termo a partir desse a_1 pelo anterior a_{n-1}

- Escreva a sequência finita f obedecendo à seguinte fórmula de recorrência: $a_1 = 2$ e $a_{n-1} + 3 \mid \forall n \in \{2, 3, 4\}$

Por hora, definido $a_1 = 2$, concluí-se que $a_2 = a_1 + 3$ (lei de formação dada), portanto $a_2 = 2 + 3 = 5$, executando para a_3 e a_4 obteremos o conjunto f da sequência formada.

$$f = \{2, 5, 8, 11\}$$

1.1.2 Termo em função de sua posição n

Esse método permite ser direto na formulação da lei que rege a sequência. É dado uma fórmula que calcula a_n em função de n apenas (e sem a necessidade de conhecer a_1, como na forma anterior)

- Escrever o conjunto f seguindo $a_n = 2^n$ para $n = \{1, 2, 3\}$
  - $2^1 = 2$
  - $2^2 = 4$
  - $2^3 = 8$
  - $f = \{2, 4, 8\}$

1.1.3 Propriedade da Sequência

Esse modo consiste em escrever por extenso quais propriedades aquela sequência deverá ter, e montá-la a partir disso. Um exemplo dessa aplicação: "Montar uma sequência infinita f com os números primos na ordem crescente" (já que não é possível escrever algo semelhante utilizando-se dos dois modos anteriores).

2 Progressão Aritmética

A progressão aritmética é um caso direto da aplicação da fórmula de recorrência apresentada na sessão anterior. Uma sequência do tipo P.A é montada a partir de duas afirmações.

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} + r \end{cases}$$

Logicamente, n é um número real e maior ou igual a 2. Os elementos a, r são números reais dados. Isso significa que, em uma sequência do tipo P.A, o próximo termo é igual ao termo anterior somado com uma constante r (razão). **Esta razão pode ser obtida subtraíndo o próximo elemento com o anterior**.

- $f = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$, onde $a_1 = 1$ e $r = 2$ (notando sempre que o próximo elemento é a soma do anterior com 2)
- $f = \{-2, -4, -6, -8\}$, ($a_1 = (-2)$ e $r = (-2)$)

2.1 Classificação

As classificações são simples e direta:

- Crescente: Quando o próximo termo é maior que o anterior (ou seja, $r > 0$)

Essa condição só ocorre estritamente para r positivo. Tomamos $f = \{a_1, a_1 + r\}$, nesse contexto, afirmaremos

$$a_1 + r > a_1$$
$$r > 0$$

- Constante: $r = 0$

Nesse caso, não há uma variação por toda a sequência. Tomando a mesma sequência f anterior, esperamos que o próximo termo seja igual ao primeiro:

$$a_1 + r = a_1$$
$$r = 0$$

- Descrescente: O próximo termo é menor que o anterior ($r < 0$), visualização análoga ao item crescente.

2.2 Notações Úteis

A fim de obter uma P.A “forçadamente” é interessante escrever a seguinte notação (no exemplo abaixo, pelo menos o 3 primeiros termos).

$$f = \{x - r,\ x,\ x + r\}$$
$$f = \{x,\ x + r,\ x + 2r\}$$

Uma questão exemplo envolvendo a manipulação da P.A deste modo.

- Determine a para que $\{a^2,\ (a+1)^2\ ,(a+5)^2\}$ seja uma P.A

Começaremos igualando o elemento em comum: a razão. Nesse modo, r pode ser obtida subtraíndo $(a+1)^2$ de a^2, mas também pode ser obtida pela subtração de $(a+5)^2$ de $(a+1)^2$.

$$(a+1)^2 - a^2 = (a+5)^2 - (a+1)^2$$

Desenvolvendo os termos

$$(a^2 + 2a + 1) - a^2 = (a^2 + 10a + 25) - (a^2 + 2a + 1)$$
$$2a + 1 = 10a + 25 - 2a - 1$$
$$-6a = 23$$
$$a = -\frac{23}{6}$$

Portanto, a deverá assumir o valor de $-23/6$ para que a sequência dada seja uma P.A, a partir da técnica ilustrada.

2.3 Termo Geral da P.A

Na sessão referente à introdução da progressão aritmética, foi destacado a lei de formação por meio da recorrência. É possível expressar o valor de a_n a partir de alguns elementos já conhecidos (a_1 e r). É sabido que

$$\begin{cases} a_1 \\ a_2 = a_1 + r \\ a_3 = a_2 + r \\ a_4 = a_3 + r \\ \dots \\ a_n = a_{n-1} + r \end{cases}$$

A partir disso, somam-se os termos a_2 até a_n, e após isso, é estabelecido outra expressão de mesmo valor que essa soma

$$\begin{cases} a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-1} + (n-1) \cdot r \end{cases}$$

$$(a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-1}) + a_n = a_1 + (a_2 + \cdots + a_{n-1}) + (n-1) \cdot r$$

Os termos destacados entre os parênteses naturalmente irão se anular, forma-se então a fórmula geral do enésimo termo de uma progressão aritmética.

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Outro meio de entender é considerar que o termo a_n é igual ao primeiro termo conhecido da P.A somado com o número de vezes que a razão r foi computada ($n-1$ ocorre pois a_1 já fora contado, portanto deverá ficar de fora). A demonstração da validade desse teorema é dada na página 18 do FME 4 por meio de indução finita.

2.4 Interpolação Aritmética

Em toda progressão aritmética finita, há dois termos destacáveis que são chamados de **extremos**, sendo eles o primeiro e último termo de uma P.A. Naturalmente, esses termos são, respectivamente, a_1 e a_n. Os elementos que ficam entre esses valores são chamados de **meios**. A interpolação (também chamada de inserção ou intercalação) aritmética consiste em "gerar" uma P.A com extremos já definidos com k elementos no meio. Para tal feito, primeiro é necessário isolar a razão r na fórmula.

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$a_n - a_1 = (n-1)r$$

$$r = \frac{a_n - a_1}{n-1}$$

Definida a razão, pode-se montar a sequência com k números.

- Interpolar 3 números entre 1 e 2, formando uma P.A.

Inicialmente, teremos $f = \{1, x, y, z, 2\}$, sendo que a sequência x, y, z ($n = 5$, já que é o total de termos da sequência) combinado com os extremos devem formar uma progressão aritmética. Calcula-se r.

$$r = \frac{2-1}{5-1} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ x = 1 + \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{5}{4} \\ y = 1 + 2\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{6}{4} \\ z = 1 + 3\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{7}{4} \\ a_n = 2 \end{cases}$$

Os elementos x, y, z foram calculados a partir da fórmula de n termos de uma P.A. A partir disso, após a interpolação encontra-se a seguinte sequência.

$$f = \left(1, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{7}{4}, 2\right)$$

2.5 Soma de n termos

2.5.1 Teorema 1 - Soma dos n Inteiros

A soma dos n primeiros números inteiros positivos é dada pela expressão

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

A demonstração pode ser feita por indução infinita.

- $\frac{1(1+1)}{2}$, válido para $n = 1$
- Admite-se a validade para $n = p$

$$1 + 2 + 3 + \cdots + p = \frac{p(p+1)}{2}$$

- Verifica-se a validade para $p + 1$

$$1 + 2 + 3 + \cdots + p + (p+1) \Leftrightarrow \frac{p(p+1)}{2} + (p+1)$$

$$\frac{p(p+1) + 2(p+1)}{2} \Leftrightarrow \frac{(p^2 + 3p + 2)}{2}$$

$$\frac{(p+1)(p+2)}{2}$$

2.5.2 Teorema 2 - Soma dos n termos da P.A

Aplicando o teorema 1 anterior, podemos escrever a soma de uma P.A na forma genérica

$$S_n = a_1 + \left(\frac{n(n-1)}{2}\right) \cdot r$$

Isso ocorre, pois

$$\begin{cases} a_1(+) \\ a_1 + r(+) \\ a_1 + 2r(+) \\ a_1 + 3r(+) \\ \dots \\ a_n = a_1 + (n-1)r \\ \hline a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \Leftrightarrow (a_1 + a_1 \dots) + [r + 2r + 3r + \dots (n-1)r] \end{cases}$$

Considerando que $(a_1 + a_1 \dots)$ é repetido n vezes. Simplificando a expressão, chegaremos em

$$(a_1 \cdot n) + [1 + 2 + \cdots + (n-1)]r$$

Nota-se que $[1+2+3+\cdots+(n-1)]$ é a soma dos primeiros n inteiros (teorema 1), portanto chega-se a fórmula apresentada no inicio dessa sessão.

2.5.3 Teorema 3 - Fórmula Final

Ainda é possível "simplificar" a fórmula anterior algebricamente

$$S_n = a_1 \cdot n + \frac{n(n+1)}{2} \cdot r$$
$$S_n = \frac{a_1 \cdot 2n + n(n+1)r}{2}$$
$$S_n = \frac{n[2 \cdot a_1 + (n-1)r]}{2}$$
$$S_n = \frac{n[a_1 + (a_1 + (n-1)r)]}{2}$$

A quebra de $2a_1$ para $a_1 + a_1$ é necessário para poder reescrever a expressão da seguinte forma

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

- Calcular as soma dos 25 primeiros termos da P.A $f = (1, 7, 13, \dots)$

O valor de a_1 é 1 e a razão é $r = (7 - 1) = 6$. Naturalmente, podemos computar o valor de a_{25} para usar na fórmula.

$$a_{25} = 1 + (24) \cdot 6 \Leftrightarrow 145$$

A partir disso

$$S_{25} = \frac{25(1 + 145)}{2} = 1825$$

O próximo tópico de sequência é **progressão geométrica**