Sequências e Progressões II

Mickael Lima

Dezembro, 2021

Sumário

1 Progressão Geométrica

A progressão geométrica é outro tipo de progressão, semelhante à aritmética. É definida pela fórmula de recorrência ilustrada por

$$\begin{cases} a_1 \\ a_n = a_{n-1} \cdot q \end{cases}$$

Sendo a, q números reais fornecidos (ou pelo menos implicito, no caso de q). Sendo assim, uma P.G é toda sequência a qual o próximo termo a_n seja igual ao termo anterior a_{n-1} multiplicado por uma constante q (que equivale ao r da P.A).

1.1 Classificação

As P.Gs são classificadas de 5 modos diferentes.

- Crescente: o próximo termo é maior que o anterior

$$\begin{aligned} a_n &> a_{n-1} \\ a_{n-1} \cdot q &> a_{n-1} \\ q &> \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}} \\ q &> 1 \end{aligned}$$

Nesse caso, a P.G será crescente quando $q > 1$ **e somente para sequências positivas**. Para casos em que a_1 é negativo, vale a relação $0 < q < 1$.

- Constante: Há duas situações em que isso acontece.
  - Quando $q = 1$ (já que não haverá variação na multiplicação de a_n e $a_{n-1} \cdot q$).
  - Quando $a_1 = 0$ (já que multiplicar por zero a deixará constante).

- Decrescente: há dois casos para se analisar (semelhante à crescente).
  - P.G positiva: será decrescente para $0 < q < 1$
  - P.G negativa: será decrescente para $q > 1$

- Alternantes: o próximo termo tem sinal contrário ao anterior. Isso ocorre sempre que $q < 0$, forçando a alternância de sinais.
- Estacionárias: Quando $q = 0$ e $a_1 \neq 0$, forçando-a a ficar constante após o primeiro termo.

1.2 Notações Úteis

Tal qual descrito nas notas sobre P.A, as notações úteis da P.G podem ser escritas (como exemplo, os 3 primeiros termos da P.G) como.

$$\left(x, x \cdot q, x \cdot q^2\right)$$
$$\left(\frac{x}{q}, x, x \cdot q\right)$$

Para 4 termos, têm-se (x, xq, xq^2, xq^3), para n termos, $(x, xq, xq^2, \ldots, xq^{n-1})$

- Qual número deverá ser somado a 1, 9 e 15 para termos, nessa ordem, três números em P.G.

A sequência em P.G f terá a forma de $f = \{(1+x), (9+x), (15+x)\}$. O próximo termo deverá ser igual ao produto entre o termo anterior com uma constante q. Para que essa constante q exista, é estabelecida a seguinte relação.

$$q = \frac{9+x}{1+x} = \frac{15+x}{9+x}$$

Portanto, constrói-se a seguinte expressão

$$(9+x)^2 = (15+x)(1+x)$$
$$81 + 18x + x^2 = 15 + 15x + x + x^2$$
$$81 + 18x = 15 + 16x$$
$$2x = -66$$
$$x = -33$$

1.3 Fórmula do enésimo termo

Semelhante à progressão aritmética, a P.G pode ser armada do termo a_1 até a_n ($a_1 \neq 0$, $q \neq 0$, n conhecido) da seguinte forma.

$$\begin{cases} a_2 = a_1 \cdot q \\ a_3 = a_2 \cdot q \\ \ldots \\ a_n = a_{n-1} \cdot q \end{cases}$$

Caso o primeiro lado $(a_2, \ldots)$ seja multiplicado, e o segundo lado $(a_1 \cdot q), (a_2 \cdot q), \ldots$ também, é evidente que a igualdade se manterá, formando a seguinte equação.

$$a_2 \cdot a_3 \ldots a_n = (a_1 \cdot q) \cdot (a_2 \cdot q) \cdot (a_3 \cdot q) \ldots (a_{n-1} \cdot q)$$

É possível pôr o q em evidência, visto que ele aparece $n-1$ vezes (a_n não é contado) no segundo membro.

$$[a_2 \cdot a_3 \ldots, a_{n-1}] \cdot a_n = (a_1[\cdot a_2 \cdot a_3 \ldots a_{n-1}]) \cdot q^{n-1}$$

O que está destacado por colchetes se cancelam, formando a equação final em função de n.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

1.3.1 Demonstração por Indução Finita

- Checa-se a validade para $n = 1$

$$a_1 = a_1 \cdot q^{1-1}$$
$$a_1 = a_1$$

- Admite-se válido para $n = p$

$$a_p = a_1 \cdot q^{p-1}$$

- Checa-se a validade para $n = p + 1$

$$a_{p+1} = a_1 \cdot q^{(p+1)-1} \Leftrightarrow a_1 \cdot q^{p-1} \cdot q$$

1.4 Interpolação Geométrica

A mesma definição dada para a interpolação aritmética vale para a interpolação geométrica. A razão q deverá ser isolada e os extremos a_1 e a_n devem ser definidos

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$
$$q^{n-1} = \frac{a_n}{a_1}$$
$$q = \sqrt[(n-1)]{\frac{a_n}{a_1}}$$

Porém, consideram-se os extremos, então o termo $n-1$ deverá ser reescrito como $n-1+2 = n+1$

$$q = \sqrt[(n+1)]{\frac{a_n}{a_1}}$$

- Interpolar 8 meios geométricos entre 5 e 2560

Inicialmente, define-se $a_1 = 5$ e $a_{10} = 2560$. A razão q é definida por

$$q = \sqrt[8+1]{\frac{2560}{5}} = \sqrt[9]{512} = 2$$

Gera-se a P.G f

$$f = (5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280, 2560)$$

1.5 Produto de uma P.G de n termos

Inicialmente, é importante relembrar da fórmula da soma de n números inteiros (detalhada na parte de P.A)

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

A partir disso, define-se que o produto de uma P.G de n termos é igual a:

$$P_n = (a_1)^n \cdot q^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Isso acontece pela relação sistemática de multiplicação abaixo (detalhada na parte de P.A, porém na soma).

$$\begin{cases} a_1 = a_1 \\ a_2 = a_1 \cdot q \\ a_3 = a_1 \cdot q^2 \\ \dots \\ a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \\ \hline a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n = (a_1 \cdot a_1 \cdot \dots \cdot a_1)(q^1 \cdot q^2 \cdot \dots q^{n-1}) \end{cases}$$

O produto entre q pode ser resumida usando propriedades de expoentes. O lado esquerdo é o “produto entre termos” isolado. A equação ficará.

$$(a_1)^n \cdot q^{(1+2+3+\cdots+(n-1))}$$

Como o expoente de q é nada mais que a soma de $n-1$ inteiros, voltaremos a fórmula inicial.

1.6 Soma dos n termos da P.G

Inicialmente, a soma de uma P.G finita de n termos é dada por

$$S_n = (a_1) + (a_1 \cdot q) + (a_1 \cdot q^2) + \cdots + (a_1 \cdot q^{n-2}) + (a_1 \cdot q^{n-1})$$

Se por conveniência, ambos os lados dessa equação for multiplicada por q

$$q \cdot S_n = (a_1 \cdot q) + (a_1 \cdot q^2) + \cdots + (a_1 \cdot q^{n-1}) + (a_1 \cdot q^n)$$

Observado que a_1 (isolado) aparece apenas na primeira equação, e $a_1 \cdot q^n$ aparece apenas na segunda, é possível "somar" como se fosse um sistema para eliminar o restante em comum. Já que a segunda opção é maior que a primeira $q \cdot S_n > S_n$ é preferível subtrair na ordem (2) - (1).

$$\begin{cases} q \cdot S_n = (a_1 \cdot q) + (a_1 \cdot q^2) + \cdots + (a_1 \cdot q^{n-1}) + (a_1 \cdot q^n) \\ S_n = (a_1) + (a_1 \cdot q) + (a_1 \cdot q^2) + \cdots + (a_1 \cdot q^{n-2}) + (a_1 \cdot q^{n-1}) \end{cases}$$

$$q \cdot S_n - S_n = a_1 \cdot q^n - a_1$$

Colocando S_n em evidência no primeiro membro

$$S_n(q-1) = a_1 \cdot q^n - a_1$$

Considerando $q \neq 1$, chegaremos na seguinte expressão

$$S_n = \frac{a_1 \cdot q^n - a_1}{(q-1)}$$

2 Progressão Geométrica Infinita

2.1 Limite de uma Sequência

Considerando uma progressão geométrica com $a_1 = \frac{1}{2}$ e $q = \frac{1}{2}$ com extremo até o infinito. Os 4 primeiros termos são dados por

$$f = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\right)$$

É perceptível que n e a_n são valores inversamente proporcionais. Ou seja, quanto maior n, menor será a_n. A partir de um certo ponto, n será tão grande a ponto de a_n chegar muito perto de 0. Um exemplo disso: podemos computar a partir de qual termo n os valores de a_n serão menores que 0.001

$$\frac{1}{2^n} - 0 < \frac{1}{1000}$$
$$2^n > 1000$$

Nesse contexto, determinamos que o elemento da sequência a_n ficará menor que 0.001 em algum n entre 9 e 10. Porém, como n é obrigatorialmente inteiro, teremos certeza que ficará menor a partir de $n > 9$ (já que $2^9 = 512$). Se chamarmos a aproximação pedida (no caso, foi 0.001) de ε (> 0), é possível encontrar um número n_o natural tal que

$$\frac{1}{2^n} - 0 < \varepsilon$$

Quando $n > n_o$. Sendo n o número real (que no caso anterior seria n tal qual $9 < n < 10$) e n_o o número natural usado no final (no caso anterior $n = 9$). A sequência dada se aproximará de 0 quando n tender ao infinito.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

2.1.1 Definição

Uma P.G $f = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ tem um limite l se dado $\varepsilon > 0$, é possível obter um número n_o natural tal que $|a_n - l| < \varepsilon$ quando $n > n_o$. Caso exista, afirma-se que a sequência f converge-se para l.

Toda a sequência $f = (1, q^2, q^3, \ldots, q^n, \infty)$ com $-1 < q < 1$, o elemento a_n com o aumento de n sempre tenderá a 0.

2.2 Soma de termos da P.G infinita

2.2.1 Exemplo preliminar

Considere a P.G infinita

$$f = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\right)$$

Formemos uma sequência com a soma de $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ termos.

$$g = (S_1, S_2, \ldots)$$

Sendo

$$\begin{cases} S_1 = \frac{1}{2} \\ S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\ S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \\ \dots \end{cases}$$

A expressão S_n será dada pela soma de tudo até esse elemento, simbolizada nessa sequência por

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

Observando-se a sequência de somas anteriores, é visto um padrão entre o número do denominador e o do numerador. No exemplo S_2, a soma resultou em $\frac{3}{4}$, em $S_3 = \frac{7}{8}$, ou seja, é estabelecido algo como

$$S_n = \frac{n-1}{n}$$

No entanto, esse n nada mais é que 2^n (notando que o denominador sempre se conserva após a soma), portanto ficaremos com

$$S_n = \frac{2^n - 1}{2^n} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2^n}$$

De fato, podemos definir para qual valor l a sequência de somas tenderá (e por consequência, o valor da soma desses n termos) quanto maior n

$$\lim_{n \to +\infty} S_n \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$
$$\lim_{n \to +\infty} (1) - \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right) \Leftrightarrow l = 1$$

2.2.2 Teorema da Soma

Em resumo, seja uma P.A infinita genérica (obecedendo os termos já colocados), a soma dos termos (o limite l da sequência de soma) será sempre igual a expressão

$$\boxed{S_n = \frac{a_1}{1-q}}$$