Cálculo 1: Anotações

Mickael Lima

Março de 2023

Sumário

Capítulo 1

Limites

1.1 Definição Intuitiva de Limite

Seja $f(x)$ uma função definida dentro do conjunto real $\mathbb{R}$, onde não necessariamente $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, chama-se de **limite de $f(x)$ com x tendendo a a** o valor de que $f(x)$ se aproxima quando a distância entre x e a se aproxima de 0 (ou seja, a se aproxima do valor de x). A notação matemática de limite é dada abaixo:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \tag{1.1}$$

Nota-se que $f(a)$ não precisa estar definido[1], tampouco é obrigatório que $f(a) = L$, apesar deste ser o caso na maioria das vezes.

1.1.1 Limites Laterais

A distância entre x e a pode ser tanto para os casos em que $x > a$ e $a > x$. No caso em que $x > a$, o limite vem da direita, para $x < a$ o limite vem da esquerda. As notações para limites de esquerda e direita são dadas colocando um sinal acima de a, sendo positivo quando a distância entre x e a é positiva e negativo quando a distância entre x e a é negativa.

$$\lim_{x \to a^+} f(x), \lim_{x \to a^-} f(x)$$

Nesse contexto, em adição a sessão 1.1, pode-se completar a definição fornecida.

Definição 1.1

O limite da função $f(x)$ só é definido se, e somente se, os limites laterais também forem definidos e **iguais** entre si.

[1] Por exemplo, se $x \to 2$ em $\frac{x^2-4x+4}{x-2}$, o limite está definido e é igual a 0, apesar de $f(2)$ ser indefinido

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^- f(x)}$$

1.1.2 Limites Infinitos

No caso

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$$

O valor de L é indefinido, pois a função tenderá ao infinito (ou seja, L será tão grande quando queira).

1.2 Propriedade dos Limites

Considere as funções reais $f(x)$ e $g(x)$ e que os limites bilaterais L_f e L_g para $x \to a$ estejam definidos. Nessa situação, as seguintes propriedades são válidas.

1.2.1 Soma

Definição 2.1

O limite da soma é igual a soma dos limites

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) \tag{1.2}$$

1.2.2 Subtração

Definição 2.2

O limite da diferença é igual a diferença entre os limites (análogo a 2.1)

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) \tag{1.3}$$

1.2.3 Multiplicação

Definição 2.3

O limite do produto é o produto dos limites

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} \tag{1.4}$$

Essa regra também serve para constantes, usando $\lim_{x\to a} c = c$ tem-se

$$\lim_{x\to a}[c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x\to a} f(x) \tag{1.5}$$

1.2.4 Divisão

Definição 2.4

O limite do quociente é o quociente dos limites

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}, \lim_{x\to a} g(x) \neq 0 \tag{1.6}$$

1.2.5 Implicações

As propriedades acima implicam em novas propriedades, seja por recursão ou apenas por consequência. Abaixo algumas dessas implicações

- Pela definição intuitiva, $\boldsymbol{\lim_{x\to a} x = a}$
- Usando 2.3, pode-se constatar que $\boldsymbol{\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n}$
- Unindo os dois itens anteriores, chega-se em $\boldsymbol{\lim_{x\to a} x^n = a^n}$
- O item anterior também implica que $\boldsymbol{\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}}$
- Também, $\boldsymbol{\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}}$

1.2.6 O Teorema do Confontro

Dada três funções reais, denotadas de $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$, de modo quê

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \tag{1.7}$$

Se, e somente se, o limite de $f(x)$ para $x \to c$ e o limite de $h(x)$ para $x \to c$ forem **iguais**, ou seja

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x)$$

Então, obrigatoriamente, o limite de $g(x)$ para $x \to c$ será igual ao limite de $f(x)$ e $h(x)$, pois todas as 3 funções se espremerão em um único ponto c. Em resumo

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) \tag{1.8}$$

Usa-se o Teorema do Sanduíche juntamente a uma inequação imitando a condição da equação 1.7.

1.3 Definição Formal de Limite

Para definirmos limite com um grau maior de formalidade e fugir das definições intuitivas que causam ambiguidade, pode-se olhar limites de forma analítica. Considere a função condicional $f(x)$ definida por

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{se } x \neq 3 \\ 6, & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

Sabe-se que se x tender a 3, $f(x)$ tenderá a 5 (porque $2(3)-1=5$), apesar de $f(3)\neq 5$, já que para análise de limite o que realmente importa é a vizinhança de $f(5)$. Analisaremos então como $f(x)$ lida com a a variação em x.

Inicialmente, nota-se que a distância de x até 3 é $|x-3|$[2], e que a distância de $f(x)$ até 5 é $|f(x)-5|$. Pergunta-se então como se pode relacionar Δx com Δy, de modo que Δy seja menor que 0.1. Logo, temos o seguinte problema

- $|f(x)-5| < 0.1$, leia-se: $\Delta y < 0.1$
- $|x-3| < \delta$, leia-se: $\Delta x < \delta$

Devemos achar um número δ no eixo x que faça Δy ser menor que 0.1. Percebe-se que se $|x-3|=0$, teremos $x=3$, o que atrapalha a análise proposta, e portanto, é necessário especificar que $|x-3|>0$ para que $x\neq 3$

- $|f(x)-5| < 0.1$
- $0 < |x-3| < \delta$

Se expandirmos o primeiro ponto, teremos

- $|(2x-1)-5| < 0.1 \therefore |2(x-3)| < 0.1$

Reescrevendo as informações, obtemos

- $2|(x-3)| < 0.1$[3]
- $0 < |x-3| < \delta$

Com isso, é notável que o número δ é igual a 0.05. Isso significa que se Δx estiver próximo de 0.05, então Δy está perto de 0.1. De maneira análoga, se Δx estiver próximo de 0.005, então Δy estará perto de 0.01, e assim sucessivamente.

No entanto, note que Δx apresenta uma "taxa de erro", e não define o valor exato do limite de $f(x)$ (esse procedimento é equivalente a usar $x = 2.9999$ ou 3.0001 para definir L). Com isso, utilizaremos a letra grega ε, que simboliza o menor número positivo possível (tão pequeno quanto se queira). Então

- $|f(x)-5| < \varepsilon$
- $0 < |x-3| < \delta$

Escrevendo ε em função de δ, tem-se

$$\varepsilon = 2\delta$$

[2] Analise o eixo x graficamente, é semelhante ao Δx

[3] O 2 pode ser retirado do módulo por ser uma constante

Definição 3.1

Seja $f(x)$ uma função definida em algum intervalo aberto que contenha a (não necessariamente definida para $f(a)$), dizemos que o limite de $f(x)$ para $x \to a$ é igual a L, denotado simbolicamente por

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se para todo número $\varepsilon > 0$ houver também um número $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$

Em termos de intervalos, podemos reescrever $0 < |x-a| < \delta$ como $-\delta < x-a < \delta$, que se traduz como $a-\delta < x < a+\delta$, o que auxilia na visualização de "vizinhança".