第 2 回

標準形と双対問題

171-T7710　成田 史弥

工学部　数理工学科　城本研究室

発表内容

1. (Remember) 線形計画問題
2. 不等式標準形
3. 等式標準形
4. 双対問題

(Remember) 線形計画問題

Def. 1.2.a（線形計画問題）

- 実定数 $a_{ij}, b_i, c_j (i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$
- 実変数 $x_j (j = 1, \ldots, n)$
- $0 \le \ell \le m$

最小化 $c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$
条件 $a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n \le b_i \ (i = 1, \ldots, \ell)$
$a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n = b_i \ (i = \ell + 1, \ldots, m)$

(Remember) 線形計画問題

Def. 1.2.a（線形計画問題）

- 実定数 $a_{ij}, b_i, c_j (i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$
- 実変数 $x_j (j = 1, \ldots, n)$
- $0 \leq \ell \leq m$

最小化 $c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$

条件 $a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n \leq b_i \ (i = 1, \ldots, \ell)$

$a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n = b_i \ (i = \ell + 1, \ldots, m)$

- 目的関数も制約式も 1 次式（線形）である
- 制約式の本数が有限である
- 制約不等式が等号つきである

不等式標準形

Def. 2.1.a（不等式標準形）

- 実定数 $a_{ij}, b_i, c_j (i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$
- 実変数 $x_j (j = 1, \ldots, n)$
- $0 \leq \ell \leq m$

最小化　$c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$
条件　$a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n \geq b_i \ (i = 1, \ldots, m)$
$x_j \geq 0 \ (j = 1, \ldots, n)$

不等式標準形

Def. 2.1.a（不等式標準形）

- 行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- ベクトル $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)^T$
- ベクトル $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_m)^T$
- ベクトル $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)^T$

最小化　$\mathbf{c}^T\mathbf{x}$

条件　$A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

不等式標準形

Def. 2.1.a（不等式標準形）

最小化　$\mathbf{c}^T\mathbf{x}$

条件　$A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

- 最小化問題である
- 制約式が全て（左辺が大の）不等式である
- 全ての変数が非負である

不等式標準形

e.g.2.1) 次の線形計画問題は不等式標準形である:

最小化 $-2x_1 - x_2 - x_3$

条件 $-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -4$

$-2x_1 - 4x_3 \geq -4$

$4x_1 - 3x_2 + x_3 \geq -1$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$

不等式標準形

Prop. 2.1

任意の線形計画問題は不等式標準形に変換できる.

不等式標準形

- 式の同値変形

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b \to \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b, \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \geq b.$$

- -1 倍

最大化 $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ → 最小化 $-\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$,

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b \to -\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \geq -b.$$

- 差による表現

変数 x（非負制約なし）

$\to x = x_1 - x_2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

等式標準形

Def. 2.1.b（等式標準形）

最小化　$c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$

条件　$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \ (i = 1, \ldots, m)$

$x_j \geq 0 \ (j = 1, \ldots, n)$

等式標準形

Def. 2.1.b（等式標準形）

最小化 $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$

条件 $\boldsymbol{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

等式標準形

Prop. 2.2

任意の線形計画問題は等式標準形に変換できる.

e.g.2.2) e.g.2.1 の不等式標準形は, 次のように等式標準形に変換される:

最小化 $-2x_1 - x_2 - x_3$

条件 $-2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -4$

$-2x_1 - 4x_3 - x_5 = -4$

$4x_1 - 3x_2 + x_3 - x_6 = -1$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0.$

双対問題

e.g.2.1:

最小化 $-2x_1 - x_2 - x_3$

条件 $-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -4$

$-2x_1 - 4x_3 \geq -4$

$4x_1 - 3x_2 + x_3 \geq -1$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$

双対問題

e.g.2.1 の双対問題:

$$\begin{aligned}
&\text{最大化} \quad -4y_1 - 4y_2 - y_3 \\
&\text{条件} \quad -2y_1 - 2y_2 + 4y_3 \leq -2 \\
&\quad -2y_1 - 3y_3 \leq -1 \\
&\quad y_1 - 4y_2 + y_3 \leq -1 \\
&\quad y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0.
\end{aligned}$$

双対問題

Def. 2.2.a（主問題）

最小化 $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$

条件 $A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

Def. 2.2.b（双対問題）

- 変数ベクトル $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$

最大化 $\mathbf{b}^T\mathbf{y}$

条件 $A^T\mathbf{y} \leq \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$

双対問題

e.g.2.1) 先の考え方を応用して, 等式標準形の双対問題について考察せよ.

双対問題

等式標準形:

最小化 $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$

条件 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$

双対問題

等式標準形:

最小化 $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$

条件 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$

等式標準形の双対問題:

最大化 $\mathbf{b}^T\mathbf{y}$

条件 $A^T\mathbf{y} \leq \mathbf{c}.$