第 3 回

線形計画問題に対する諸定理

171-T7710　成田 史弥

工学部　数理工学科　城本研究室

発表内容

1. 基本定理
2. 双対定理 (duality theorem)
3. 相補性定理 (complementary slackness theorem)

基本定理

Th.2.1 基本定理

実行可能で有界な線形計画問題は最適解をもつ.

双対定理 (duality theorem)

Th.2.2 弱双対定理 (weak duality theorem)

主問題と双対問題のそれぞれの許容解 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ に対して,

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \geq \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}$$

が成立する.

双対定理 (duality theorem)

Cor.2.1

主（双対）問題が非有界であれば, 他方は実行不可能である.

双対定理 (duality theorem)

Cor.2.2

主問題と双対問題のそれぞれの許容解 $\mathbf{x}^*$ と $\mathbf{y}^*$ の目的関数値が一致するならば, $\mathbf{x}^*$ と $\mathbf{y}^*$ はそれぞれ主最適解と双対最適解である.

双対定理 (duality theorem)

e.g.2.3

最小化 $-2x_1 - x_2 - x_3 \equiv f(\mathrm{x})$

条件 $-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -4$

$-2x_1 - 4x_3 \geq -4$

$4x_1 - 3x_2 + x_3 \geq -1$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$

最大化 $-4y_1 - 4y_2 - y_3 \equiv g(\mathrm{y})$

条件 $-2y_1 - 2y_2 + 4y_3 \leq -2$

$-2y_1 - 3y_3 \leq -1$

$y_1 - 4y_2 + y_3 \leq -1$

$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0.$

双対定理 (duality theorem)

Th.2.3 双対定理 (duality theorem)

線形計画問題では, 主問題あるいは双対問題の一方が最適解をもつならば, 他方も最適解をもち, それぞれの最適値は一致する.

相補性定理 (complementary slackness theorem)

Th.2.4 相補性定理 (complementary slackness theorem)

主問題と双対問題のそれぞれの許容解 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ がともに最適解であるための必要十分条件は,

$$\mathbf{x}^T(\mathbf{c} - \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y}) = \mathbf{0}$$

かつ

$$(A\mathbf{x} - \mathbf{b})^\mathsf{T} = \mathbf{0}$$

が成立することである.

相補性定理 (complementary slackness theorem)

N.B.2.10

Th.2.4（相補性定理）の条件式は, それぞれ以下の様に書き換えられる:

各 $j = 1, \ldots, n$ に対して, $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$ または $x_j = 0$,

各 $i = 1, \ldots, m$ に対して, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$ または $y_i = 0$.

これらの条件を合わせて相補性 (complementary slackness) という.

相補性定理 (complementary slackness theorem)

N.B.2.11

相補性定理は, 「許容解 $\mathbf{x}$ が最適解であるための必要十分条件は, $\mathbf{x}$ と相補性を満たす双対許容解が存在することである」とも書き換えられる.

線形計画問題の最適性 $=$ 主実行可能性 $+$ 双対実行可能性 $+$ 相補性

相補性定理 (complementary slackness theorem)

強相補性 (strict complementary slakness)

条件:

各 $j = 1, \dots, n$ に対して, $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i < c_j$ または $x_j > 0$,

各 $i = 1, \dots, m$ に対して, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j > b_i$ または $y_i > 0$.

と相補性を合わせた条件を
強相補性 (strict complementary slakness)
という.

相補性定理 (complementary slackness theorem)

Th.2.5

主問題と双対問題が最適解をもつならば, 強相補性を満たす最適解が存在する.