24 张宇 8 套卷（一）

1. 已知 $x=0$ 是函数 $f(x)=\dfrac{\int_0^x e^{t^2}\,dt+ax}{x-b\sin x}$ 的第一类间断点，则(a,b) 取值不可以是

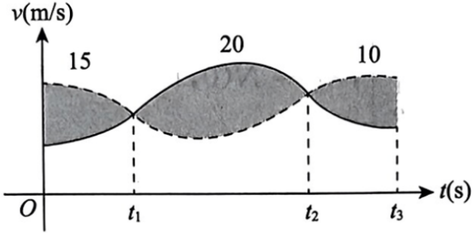
A. $(1,1)$.

B. $(-1,1)$.

C. $(1,-1)$.

D. $(-1,-1)$.

2. 甲、乙两人赛跑，图中实线和虚线分别为甲和乙的速度曲线（单位：m/s），三块阴影部分面积依次为 15，20，10，且当 $t=0$ 时，甲在乙前面 10 m 处，则在$[0,t_3]$上，甲、乙相遇的次数为



A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

3. 设函数 $f(x,y)=|x|+y|y|$，则

A. $f'_x(0,0)$ 存在，$f'_y(0,0)$ 存在.

B. $f'_x(0,0)$ 存在，$f'_y(0,0)$ 不存在.

C. $f'_x(0,0)$ 不存在，$f'_y(0,0)$ 存在.

D. $f'_x(0,0)$ 不存在，$f'_y(0,0)$ 不存在.

4. 使得$\oint_L (2y^3-3y)\mathrm{d}x-x^3\mathrm{d}y$ 的值最大的平面正向边界曲线L 为

A. $3x^2+y^2=1$.

B. $2x^2+y^2=1$.

C. $x^2+3y^2=1$.

D. $x^2+2y^2=1$.

5. 多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} x & -1 & 2x & -x \\ 2 & x & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -x & -1 \\ -1 & 2 & 1 & x \end{vmatrix}$ 的常数项为

A. 2.

B. 4.

C. 6.

D. 8.

6. $f(x_1,x_2,x_3)=-2x_1x_2-2x_1x_3+6x_2x_3=0$ 是

A. 柱面.　　　　　　B. 单叶双曲面.

C. 双叶双曲面.　　　　D. 锥面.

7. 已知 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，记矩阵 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} \end{pmatrix}$ 的秩分别为 r_1, r_2, r_3，则

A. $r_1 = r_2 \geqslant r_3$.

B. $r_1 = r_2 \leqslant r_3$.

C. $r_1 = r_3 \geqslant r_2$.

D. $r_1 = r_3 \leqslant r_2$.

8. 设 $P[A \mid (A \cup BC)] = \frac{1}{2}$，$P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$，其中 A，B 互不相容，B，C 相互独立，则

$P(A) =$

A. $\frac{1}{4}$。

B. $\frac{3}{4}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. 1.

9. 设 X_1,X_2 相互独立，$X_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$，$X_2 \sim N(0,1)$，$Y = 2X_1X_2 - X_2$，则 Y 服从

A. $1-\Phi(2y)$.　　B. $1-\Phi(y)$.

C. $\Phi(2y)$.　　D. $\Phi(y)$.

10. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，$E(X)=\theta$. 检验 $H_0: \theta=0$；$H_1: \theta \neq 0$，且拒绝域 $W_1=\{|\overline{X}|>1\}$ 和 $W_2=\{|\overline{X}|>2\}$ 分别对应显著性水平 α_1 和 α_2，则

A. $\alpha_1=\alpha_2$.

B. $\alpha_1>\alpha_2$.

C. $\alpha_1<\alpha_2$.

D. α_1 和 α_2 的大小关系不确定.

二、填空题：11 ~ 16 小题，每小题 5 分，共 30 分.

11. 函数 $u(x,y,z)=xy-2z^2$ 在点$(1,1,-2)$处的最大方向导数为________.

12. 已知函数 $f(x)=x\int_{1}^{x}\frac{e^{t^2}}{t}dt$，则 $f(x)$ 在$[0,1]$上的平均值为________.

13. 以 $y_1 = x^2$ 和 $y_2 = x^2 - e^{2x}$ 为特解的一阶非齐次线性微分方程为________.

14. 设 Σ 为平面 $x-y+z=1$ 介于三坐标平面间的有限部分，法向量与 z 轴夹角为锐角，$f(x)$ 连续，则 $\iint\limits_{\Sigma}[f(xz)+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[2f(xz)+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[f(xz)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

Σ

15. 向量空间 $V=\{(x,y,z)\mid(x,y,z)\in\mathbf{R}^3,x-2z=0\}$ 的一个基为________.

16. 在区间$[0,1]$上任取一点，将其分为两个区间，留下其中任一区间记其长度为 X，再从留下的区间上任取一点，将其分为两个区间，并取其中任一区间，记其长度为 Y，则 $E(Y)=$ ________.

17. (本题满分 10 分)

已知 $f(x,y)$ 满足 $\mathrm{e}^{-2x}\dfrac{\partial f}{\partial x}=4y+2y^2+2x+1$，且 $f(0,y)=2y+y^2$. 求：

(1) $f(x,y)$ 的表达式；

(2) $f(x,y)$ 的极值.

18.（本题满分 12 分）

设 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时，$a_n(x)$ 满足

$$x(1-x)a_n'(x)+[(n+2)x-n]a_n(x)=0, n=1,2,\cdots,$$

$$a_n\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^{n+2}}.$$

(1) 求 $a_n(x)$ 的表达式；

(2) 判别 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)(0 \leqslant x \leqslant 1)$ 的敛散性.

19.（本题满分 12 分）

计算曲线积分 $I=\oint_{\Gamma} yz\,\mathrm{d}x-zx\,\mathrm{d}y+3xy\,\mathrm{d}z$，其中 Γ 为曲线 $\begin{cases} x^2+y^2-2y=0, \\ 2y-z+1=0, \end{cases}$ 从 z 轴正向往下看，Γ 为逆时针方向.

20.（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶导数连续，$f(1)\leqslant 0$，$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-|x|]=0$. 证明：

(1) 存在 $\xi\in(1,+\infty)$，使得 $f'(\xi)>1$；

(2) 存在 $\eta\in(-\infty,+\infty)$，使得 $f''(\eta)=0$.

21.（本题满分 12 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1&0&6\\4&4&4\\0&8&9\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$，其中 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$.

（1）用正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将其化为标准形，并求出 $\boldsymbol{Q}$；

（2）求 $g(x_1,x_2,x_3)=\dfrac{f(x_1,x_2,x_3)}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ 的最大值，并求出一个最大值点，其中 $x_1^2+x_2^2+x_3^2\neq 0$.

22.（本题满分 12 分）

设 X_1, X_2 为来自总体 $X \sim U[0,2\theta]$ 的简单随机样本，Y_1, Y_2, Y_3 为来自总体 $Y \sim U[0,4\theta]$ 的简单随机样本，且两样本相互独立，其中 $\theta(\theta > 0)$ 是未知参数. 利用样本 X_1, X_2, Y_1, Y_2, Y_3，求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$，并求 $D(\hat{\theta})$.