1. 设 $f(x)=\begin{cases} x\ln x, & x>0, \\ x^2+x, & x\leqslant 0, \end{cases}$ 若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\,(a<b)$ 取得最小值，则 $(a,b)=$

A. $(-1,1)$.

B. $(-1,2)$.

C. $(0,1)$.

D. $(1,2)$.

2. 设 $f(x)$ 是奇函数，若 $x=-1$ 是 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上的唯一零点，且 $f'(-1)=1$，则 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的严格单调增区间为

A. $(-\infty,0)$.

B. $(0,+\infty)$.

C. $(-\infty,-1),(0,1)$.

D. $(-1,0),(1,+\infty)$.

C. $(-\infty,-1),(0,1)$.　　　　D. $(-1,0),(1,+\infty)$.

3. 设 L 为曲线 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$，取逆时针方向，$I=\oint_L 4y\mathrm{d}x+(x+y)^2\mathrm{d}y$，$J=\oint_L 4x\mathrm{d}x+(x+y)^2\mathrm{d}y$，$K=\oint_L 4xy\mathrm{d}x+(x+y)^2\mathrm{d}y$，则 I,J,K 的大小顺序为

A. $I<K<J$.　　B. $J<K<I$.　　C. $I<J<K$.　　D. $K<I<J$.

4. 设 $a_n=\cos n\pi\cdot\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $n=1,2,\cdots$, 则

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛.

B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛.

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 发散.

D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 发散.

5. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,-2)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,k,-2,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,-3,2,k+4)^{\mathrm{T}}$,则

A. 对任意常数 k,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

B. 当 $k=3$ 时,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

C. 当 $k=-4$ 时,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

D. $k\neq 3$ 且 $k\neq -4$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的充要条件.

D. $k\neq 3$ 且 $k\neq -4$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的充要条件.

6. 以下两个矩阵,可用同一可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 相似对角化的是

A. $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

B. $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

C. $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

D. $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

7. 设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 是 3 维向量空间 $\mathbf{R}^3$ 的一个基,则基 $\boldsymbol{e}_1,2\boldsymbol{e}_2,3\boldsymbol{e}_3$ 到基 $\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{e}_1$ 的过

7. 设 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 是 3 维向量空间 $\mathbf{R}^3$ 的一个基,则基 $\boldsymbol{\beta}_1,2\boldsymbol{\beta}_2,3\boldsymbol{\beta}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_3-\boldsymbol{\beta}_1$ 的过渡矩阵为

A. $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -6 \\ -8 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

C. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.　　D. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

8. 设 $X \sim N(0,1)$，$Y = X + |X|$，则 $P\{Y > 1\} =$

A. $\Phi\left(\frac{1}{2}\right)$.　　B. $1-\Phi\left(\frac{1}{2}\right)$.　　C. $\Phi(1)$.　　D. $1-\Phi(1)$.

9. 设总体 $X \sim f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{x}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\theta}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$ $\theta>0$ 未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，记 $\hat{\theta}_m$ 与 $\hat{\theta}_L$ 分别是 θ 的矩估计量和最大似然估计量，则

A. $\hat{\theta}_m=\dfrac{2}{\pi}(\overline{X})^2, E(\hat{\theta}_m)=\theta.$

B. $\hat{\theta}_m=\dfrac{1}{\pi}(\overline{X})^2, E(\hat{\theta}_m)=\theta.$

C. $\hat{\theta}_L=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2, E(\hat{\theta}_L)=\theta.$

D. $\hat{\theta}_L=\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2, E(\hat{\theta}_L)=\theta.$

10. 设总体 $X \sim N(\mu, 2^2)$，其中 μ 为未知参数，$X_1, X_2, \cdots, X_9$ 是来自总体 X 的简单随机样本，记关于 μ 的置信度为 0.95 的置信区间长度为 L，则 L 的数学期望 $E(L) =$

A. $\frac{2}{3} z_{0.025}$.　　B. $\frac{4}{3} z_{0.025}$.　　C. $\frac{2}{3} z_{0.05}$.　　D. $\frac{4}{3} z_{0.05}$.

二、填空题：11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分

二、填空题：11 ～ 16 小题，每小题 5 分，共 30 分.

11. 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，$f(0,0)=0$，$f'_x(0,0)=1$，$f'_y(0,0)=-1$，且 $\boldsymbol{n}=(-1,1,1)$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{(x,y,f(x,y))\cdot\boldsymbol{n}}{e^{\sqrt{x^2+y^2}}-1}=$ ________.

12. 设曲面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 与平面 $z=x$ 的交线为 L，起点为 $A(0,1,0)$，终点为 $B(0,-1,0)$，则 $\int_L (x+y-z)\mathrm{d}x+|y|\mathrm{d}z=$ ________。

13. 设连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = x\mathrm{e}^x$，则 $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{f(\ln x)}{x}\mathrm{d}x =$ ________.

14. 设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 1\}$，则 Ω 的形心的竖坐标 $\bar{z}=$ ________.

15. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2-ax_3)^2+(ax_3+x_1)^2$ 的秩为 2，则 $a=$ ________.

16. 设总体 X 的概率分布如下：

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

从总体中抽取 n 个简单随机样本，N_1 表示 n 个样本中取到 -1 的个数，N_2 表示 n 个样本中取到 0 的个数，N_3 表示 n 个样本中取到 1 的个数，则 N_1 与 N_2 的相关系数为________.

17.(本题满分 10 分)

设 $y=f(x)$ 由方程 $|x|y^3+y-1=0$ 确定,求 $y=f(x)$ 的极大值.

18.（本题满分 12 分）

已知 $f(x)=|x|,-\pi\leqslant x\leqslant\pi$.

(1) 将 $f(x)$ 展开成余弦级数；

(2) 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$.

19.（本题满分 12 分）

已知函数 $f(x)$ 满足 $f''(x)+f'(x)=0$ 及 $f''(x)+2f'(x)+f(x)=-1$，且 $f(0)=0$.

(1) 求 $f(x)$ 的表达式；

(2) 设 $a>0$，级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} f(n^{-a}\ln n)$ 收敛，求 a 的取值范围.

20.（本题满分 12 分）

计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(xyz+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(xyz+y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2+y^2+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为柱面 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1(0\leqslant z<2)$ 的外侧.

21.（本题满分 12 分）

已知 3 维列向量 $\boldsymbol{\xi}$ 不是 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}$ 是 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解. 记 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi})$.

(1) 证明 $\boldsymbol{P}$ 可逆；

(2) $\boldsymbol{A}$ 能否相似对角化？若能，求出一个与之相似的对角矩阵，若不能，请说明理由.

22.（本题满分 12 分）

设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 的分布列为 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ p & p & 1-2p \end{pmatrix}$，$Y$ 服从参数为 1 的指数分布，令 $Z=XY$，若 Y 与 Z 既不相关，也不独立，求：

(1) Z 的概率密度；

(2) p 的值.