24 张宇 8 套卷（二）

1. 下列函数中,在 $x=0$ 处不可导的是

A. $f(x)=|x|\tan|x|$.

B. $f(x)=|x|\tan\sqrt{|x|}$.

C. $f(x)=\sqrt{\cos|x|}$.

D. $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$.

2. 已知函数 $f(x)$，$g(x)$ 可导，且 $f'(x)>0$，$g'(x)<0$，则

A. $\int_{-1}^{0} f(x)g(x)\mathrm{d}x > \int_{0}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

B. $\int_{-1}^{0} |f(x)g(x)|\mathrm{d}x > \int_{0}^{1} |f(x)g(x)|\mathrm{d}x$.

C. $\int_{-1}^{0} f[g(x)]\mathrm{d}x > \int_{0}^{1} f[g(x)]\mathrm{d}x$.

D. $\int_{-1}^{0} f[f(x)]\mathrm{d}x > \int_{0}^{1} g[g(x)]\mathrm{d}x$.

3. 设一正方形边长为 1，作其内切圆，以四个切点为顶点作第二个正方形，对第二个正方形作其内切圆，再以其四个切点为顶点作第三个正方形，以此类推，记第 n 个正方形的面积为 a_n，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n =$$

A. 2. 　　　　B. $2\sqrt{2}$.

C. $4\sqrt{2}$. 　　　　D. $+\infty$.

4. 设平面曲线 $L: f(x,y)=1$ 过第一象限的点 A 和第三象限的点 B，$f(x,y)$ 有一阶连续偏导数，Γ 为 L 上从点 A 到点 B 的一段弧，设 $I_1=\int_{\Gamma} f(x,y)\mathrm{d}x$，$I_2=\int_{\Gamma} f(x,y)\mathrm{d}s$，$I_3=\int_{\Gamma} f'_x(x,y)\mathrm{d}x+f'_y(x,y)\mathrm{d}y$，则

A. $I_1>I_3>I_2$.

B. $I_2>I_3>I_1$.

C. $I_3>I_1>I_2$.

D. $I_3>I_2>I_1$.

5. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵，$r(\boldsymbol{AB}) \leqslant r(\boldsymbol{BA})$，记 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{CB} \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{BC} \\ \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} \boldsymbol{BA} & \boldsymbol{BAC} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$ 的秩分别为 r_1,r_2,r_3，则

A. $r_2 \leqslant r_3 \leqslant r_1$.

B. $r_2 \leqslant r_1 \leqslant r_3$.

C. $r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_3$.

D. $r_3 \leqslant r_2 \leqslant r_1$.

6. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 - 3x_2x_3 = 1$ 表示

A. 椭球面.

B. 双曲柱面.

C. 双叶双曲面.

D. 单叶双曲面.

7. 设 3 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 等价，记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，则下列结论：

①$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 与 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 同解；　②$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 同解；

③$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 与 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 同解；　④$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 同解.

所有正确结论的序号是

A. ①②.　B. ①③.

C. ②④.　D. ①②③④.

C. ②④.　　D. ①②③④.

8. 设口袋中有10个球,其中6个红球,4个白球,每次不放回地从中任取一个,取两次,若取出的两个球中有1个是白球,则两个都是白球的概率为

A. $\frac{1}{3}$.　　B. $\frac{1}{5}$.

C. $\frac{1}{4}$.　　D. $\frac{1}{6}$.

9. 设 X 服从参数为 $\lambda(\lambda > 0)$ 的泊松分布，p_1，p_2，p_3 分别是 X 取整数、偶数与奇数的概率，则

A. $p_1 = p_2 = p_3$.　　B. $p_1 = p_2 > p_3$.

C. $p_1 > p_2 > p_3$.　　D. $p_1 > p_2 = p_3$.

C. $p_1 > p_2 > p_3$.　　　　D. $p_1 > p_2 = p_3$.

10. 设 X_1, X_2 是来自正态总体 $N(\mu, 1)$ 的简单随机样本，并设原假设 $H_0: \mu = 2$，备择假设 $H_1: \mu = 4$，若拒绝域为 $W = \{\overline{X} > 3\}$，$\overline{X} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} X_i$，记 α, β 分别为犯第一类错误和第二类错误的概率，则

A. $\alpha = \beta = 1 - \Phi(\sqrt{2})$.

B. $\alpha = 1 - \Phi(\sqrt{2}), \beta = \Phi(\sqrt{2})$.

C. $\alpha = \Phi(\sqrt{2}), \beta = 1 - \Phi(\sqrt{2})$.

D. $\alpha = \beta = \Phi(\sqrt{2})$.

二、填空题：11～16小题，每小题5分，共30分

二、填空题:11 ～ 16 小题,每小题 5 分

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+2)n!} =$ ________.

12. 设可微函数 $z=f(x,y)$ 与 xOy 面的交线方程为 $y=\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t+x$，且 $f'_x(0,0)=1$，则 $f'_y(0,0)=$ ________.

13. 设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0\}$，则 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+2y^2+3z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$

________.

________.

14. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2|y|}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处沿 $\boldsymbol{l}=(1,1)$ 的方向导数是________.

数是________.

15. 设 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2ax_1x_3+2ax_2x_3$ 的正负惯性指数分别为 $p=2$，$q=0$，则 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 在点 $(0,1,1)$ 处的切平面方程为________.

$q=0$,则 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 在点$(0,1,1)$处的切平面方程为________.

16. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $X\sim N(1,\sigma^2)$ 的简单随机样本,$\sigma^2>0$ 未知,记 σ^2 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2$,则 $D(\hat{\sigma}^2)=$________.

17.（本题满分 10 分）

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1+\int_0^x (1+t)^{\frac{1}{t}}\,\mathrm{d}t}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right]$.

18.（本题满分 12 分）

设可微函数 $z=z(x,y)$ 在平面上任一点 (x,y) 处沿 x 轴正向 $\boldsymbol{i}$ 与 y 轴正向 $\boldsymbol{j}$ 的方向导数分别为 $[\mathrm{e}^{-x}-f(x)]y$ 与 $f(x)$，其中 $f(x)$ 的一阶导数连续，且 $f(0)=1$.

(1) 求 $z(x,y)$ 的表达式；

(2) 判断 $z(x,y)$ 是否有极值，若有，求之，若无，说明理由.

19.（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)$ 在$[0,2]$上一阶可导，$f(0)=0$，$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得最大值 Mx_0，$x_0\in(0,2)$，且 $f'(x)\leqslant M$. 证明：

(1) 当 $x\in[0,x_0]$ 时，有 $f(x)=Mx$；

(2) $M=0$.

20.（本题满分 12 分）

设锥面 $\Sigma(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的顶点是 $A(0,0,1)$，准线是 $\begin{cases}(x+1)^2+y^2=1,\\ z=0,\end{cases}$ 直线 L 过顶点 A 和准线上的一点 $M_1(x_1,y_1,0)$.

(1) 求直线 L 与锥面 Σ 的方程；

(2) 计算 $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+(z-1)^2}}\mathrm{d}S$.

21.（本题满分 12 分）

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$.

（1）求矩阵 $\boldsymbol{C}$；

（2）计算 $\boldsymbol{A}^{10}$.

22.(本题满分 12 分)

将长度为1的铁丝沿其上任一点折成两段,较短的一段长度记为 X,并以这两段作为矩形的两条边,记矩形面积为 Z,求:

(1)X 的概率密度;

(2)$E(Z)$.