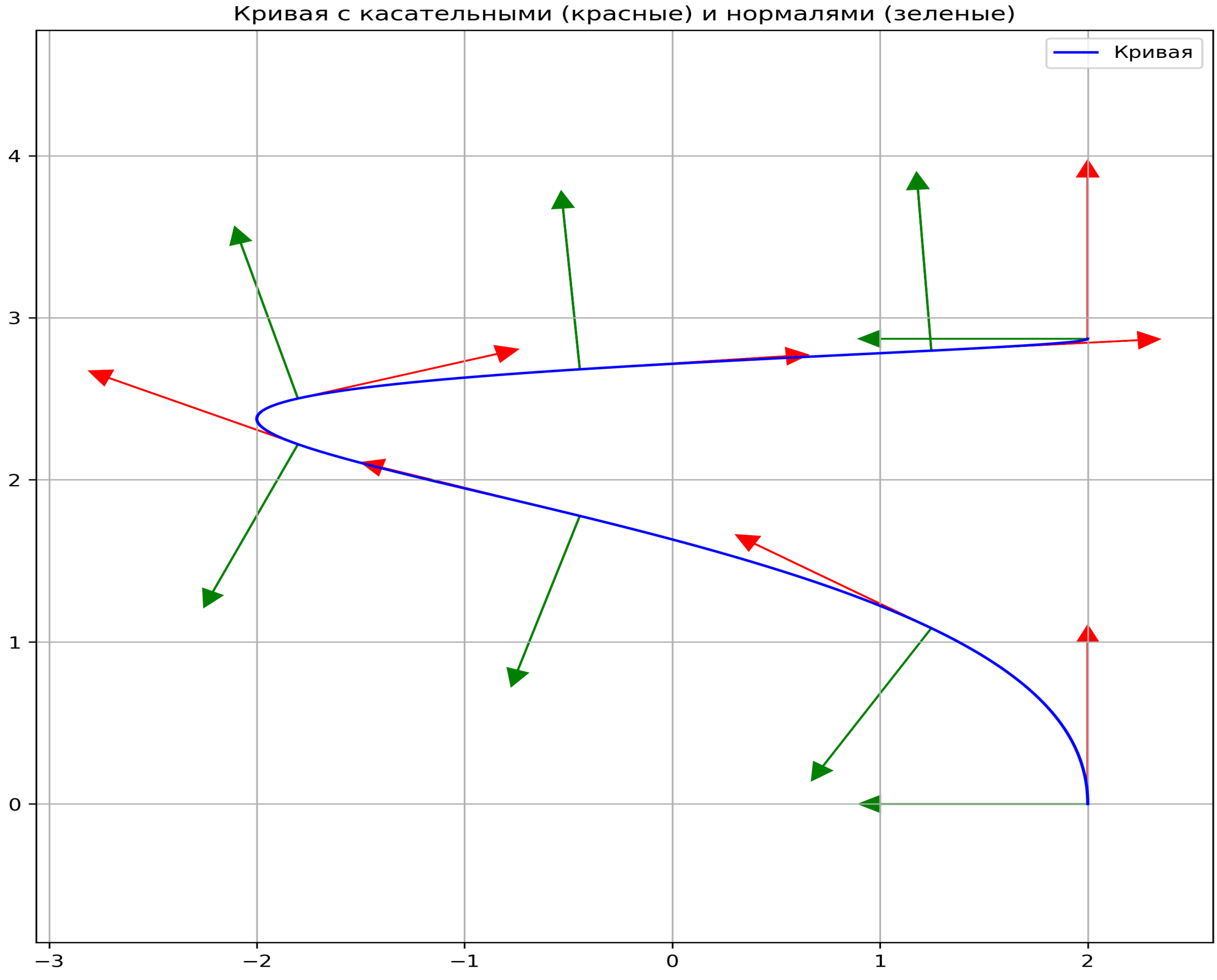
Проект 1-1

1. Плоская кривая определена формулой:

(u, ((a*cos(u))i + b(1-e^(-u/2))j)), 0 ≤ u < ∞

где a=2 и b=3 – действительные числа.



На графике:

- Синяя линия - кривая
- Красные стрелки - касательные векторы
- Зеленые стрелки - нормальные векторы

2. Доказательство изоморфизма групп T(2) и R^2:

1. φ: T(2) R^2 определяется как отображение, сопоставляющее каждому движению плоскости вектор смещения начала координат.
2. Это отображение является биекцией:
   - Инъективность: разные движения дают разные векторы смещения
   - Сюръективность: любой вектор смещения достижим некоторым движением
3. φ сохраняет операцию: $\varphi(x \quad y) = \varphi(x) + \varphi(y)$

Следовательно, φ является изоморфизмом групп.

Проект 1-10

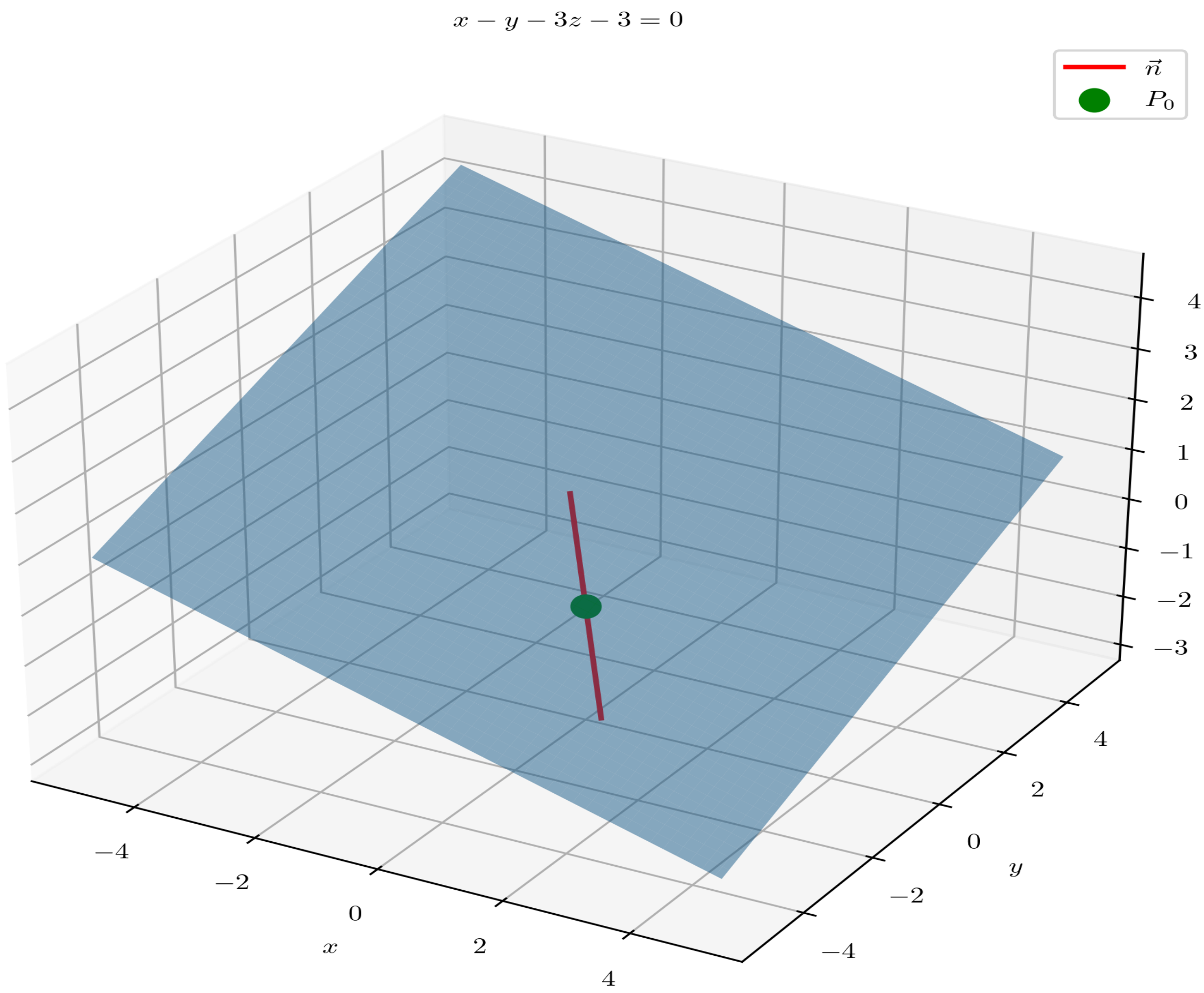
1. Нормаль к плоскости x - y - 3z - 3 = 0:

а) Точка пересечения с осью OZ:

   P0 = (0, 0, -1)

Параметрическое уравнение нормали:

   r(t) = (0.0, 0.0, -1.0) +



2. Нелинейная проекция T:

а) Доказательство нелинейности T:

1) Проверим однородность:
   $T(cr) = cr/(a\cdot r) = r/(a\cdot r) = T(r)$
   Однородность выполняется

2) Проверим аддитивность:
   $T(r + r) = (r + r)/(a\cdot(r + r))$
   $T(r) + T(r) = r/(a\cdot r) + r/(a\cdot r)$
   $T(r + r) \neq T(r) + T(r)$

3) Следовательно, T - нелинейное отображение

б) Матрица A порядка 4 для $T[x] = [Ax]$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & a & a & 0 \end{vmatrix}$$

где $a = (a, a, a)$ - фиксированный вектор

Проверка:
1) Для $x = (x, x, x, x)$ получаем:
   $Ax = (x, x, x, a\cdot r)$
2) В проективном пространстве:
   $[Ax] = [x:x:x:a\cdot r] = [x/(a\cdot r):x/(a\cdot r):x/(a\cdot r):1]$
   что совпадает с определением $T[x]$

Проект 1-2

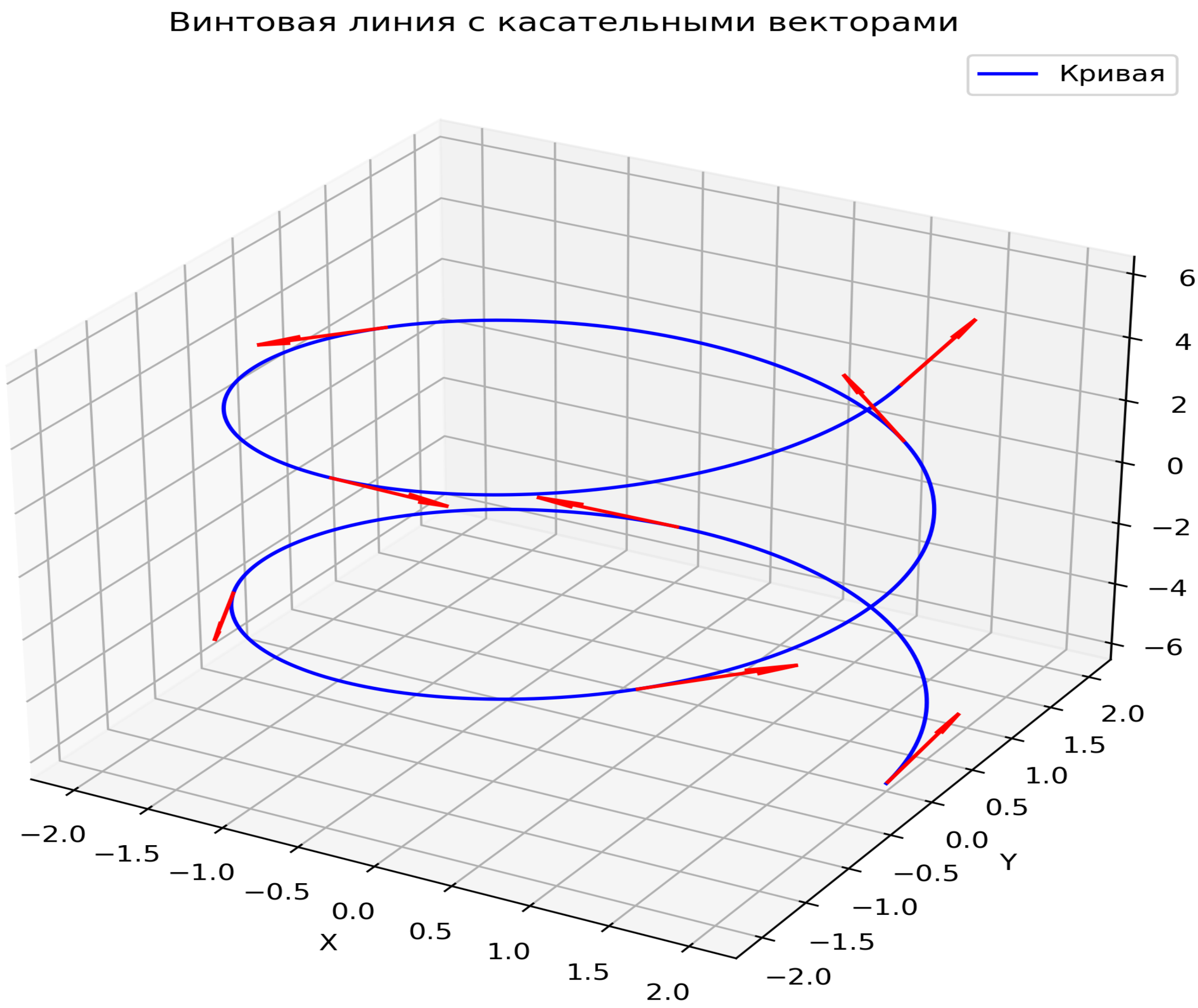
1. Кривая задана параметрически:

(u, (a*cos(u), a*sin(u), b*u)), -∞ < u < ∞

где a=2 и b=1

Касательный вектор T(u):

(-a*sin(u), a*cos(u), b) / sqrt(a² + b²)



Кривизна κ(u):

κ = a/(a² + b²) = const

Кривизна постоянна и зависит только от a и b

2. Доказательство коммутативности S(2):

S(2) - подгруппа линейных преобразований R^2.

Для любых A, B   S(2):

1) AB и BA - линейные преобразования

2) det(AB) = det(A)det(B) = 1

3) (AB) (AB) = I

Следовательно, S(2) - коммутативная подгруппа.

Проект 1-3

1а. Для явного представления кривой (x, (x, y(x))):

Касательный вектор T(x):

T(x) = (1, dy/dx) / sqrt(1 + (dy/dx)²)

Кривизна κ(x):

κ(x) = d²y/dx² / (1 + (dy/dx)²)^(3/2)

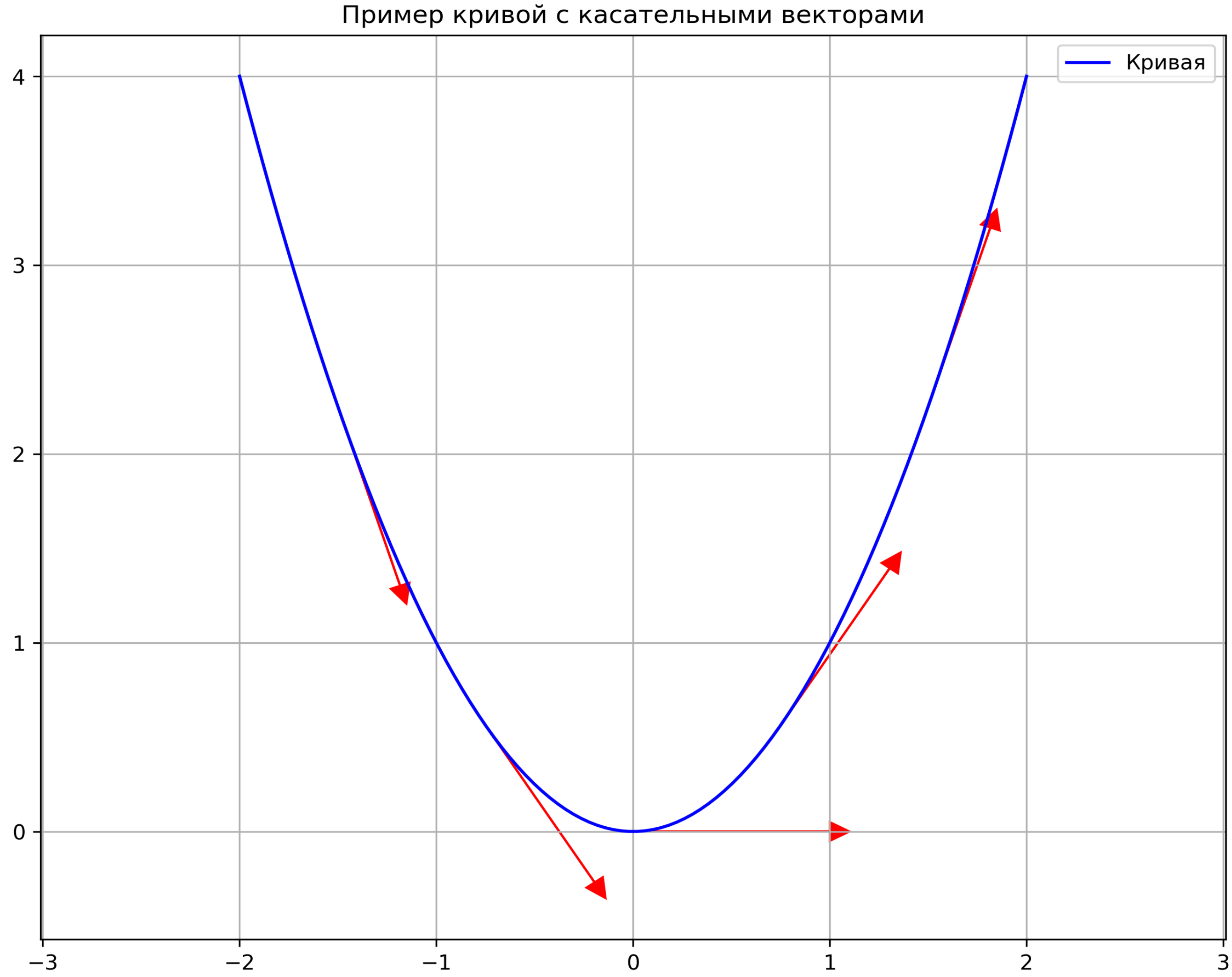
1б. Для параметрического представления (u, (x(u), y(u))):

Касательный вектор T(u):

T(u) = (dx/du, dy/du) / sqrt((dx/du)² + (dy/du)²)

Кривизна κ(u):

κ(u) = (dx/du * d²y/du² - dy/du * d²x/du²) / ((dx/du)² + (dy/du)²)^(3/2)



2. Доказательство некоммутативности S(2) и SO(2)

Рассмотрим конкретный пример:

1) Пусть S   S(2) - отражение относительно оси x:
   $S(x,y) = (x, -y)$

2) Пусть R   SO(2) - поворот на угол θ:
   $R(x,y) = (x\cdot\cos\theta - y\cdot\sin\theta, x\cdot\sin\theta + y\cdot\cos\theta)$

3) Вычислим композиции SR и RS:

$$SR(x,y) = S(R(x,y)) = S(x\cdot\cos\theta - y\cdot\sin\theta, x\cdot\sin\theta + y\cdot\cos\theta) = (x\cdot\cos\theta - y\cdot\sin\theta, -(x\cdot\sin\theta + y\cdot\cos\theta))$$

$$RS(x,y) = R(S(x,y)) = R(x, -y) = (x\cdot\cos\theta + y\cdot\sin\theta, x\cdot\sin\theta - y\cdot\cos\theta)$$

4) Сравним результаты:
   В SR: первая координата = $x\cdot\cos\theta - y\cdot\sin\theta$
   вторая координата = $-(x\cdot\sin\theta + y\cdot\cos\theta)$

   В RS: первая координата = $x\cdot\cos\theta + y\cdot\sin\theta$
   вторая координата = $x\cdot\sin\theta - y\cdot\cos\theta$

5) Очевидно, что $SR \neq RS$ при $\theta \neq 0$
   Следовательно, элементы групп S(2) и SO(2) в общем случае не коммутируют

Геометрическая интерпретация:
- SR сначала поворачивает точку, затем отражает результат
- RS сначала отражает точку, затем поворачивает результат
- Эти операции дают разные результаты для общего случая

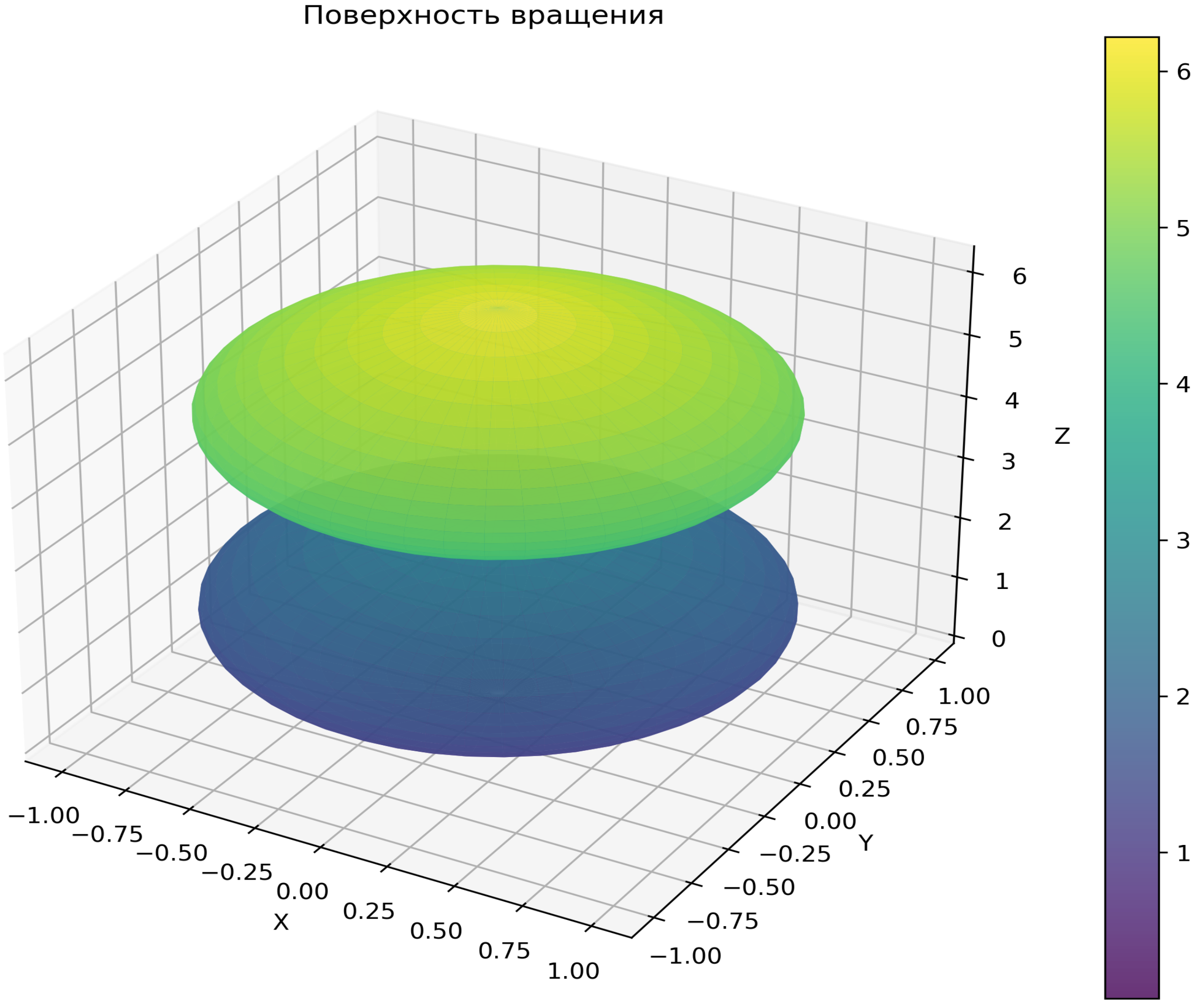
Проект 1-4

1а. Поверхность вращения кривой (u, (p(u)i + q(u)k)):

При вращении вокруг оси OZ получаем:

((u, φ), (p(u)cos(φ)i + p(u)sin(φ)j + q(u)k))

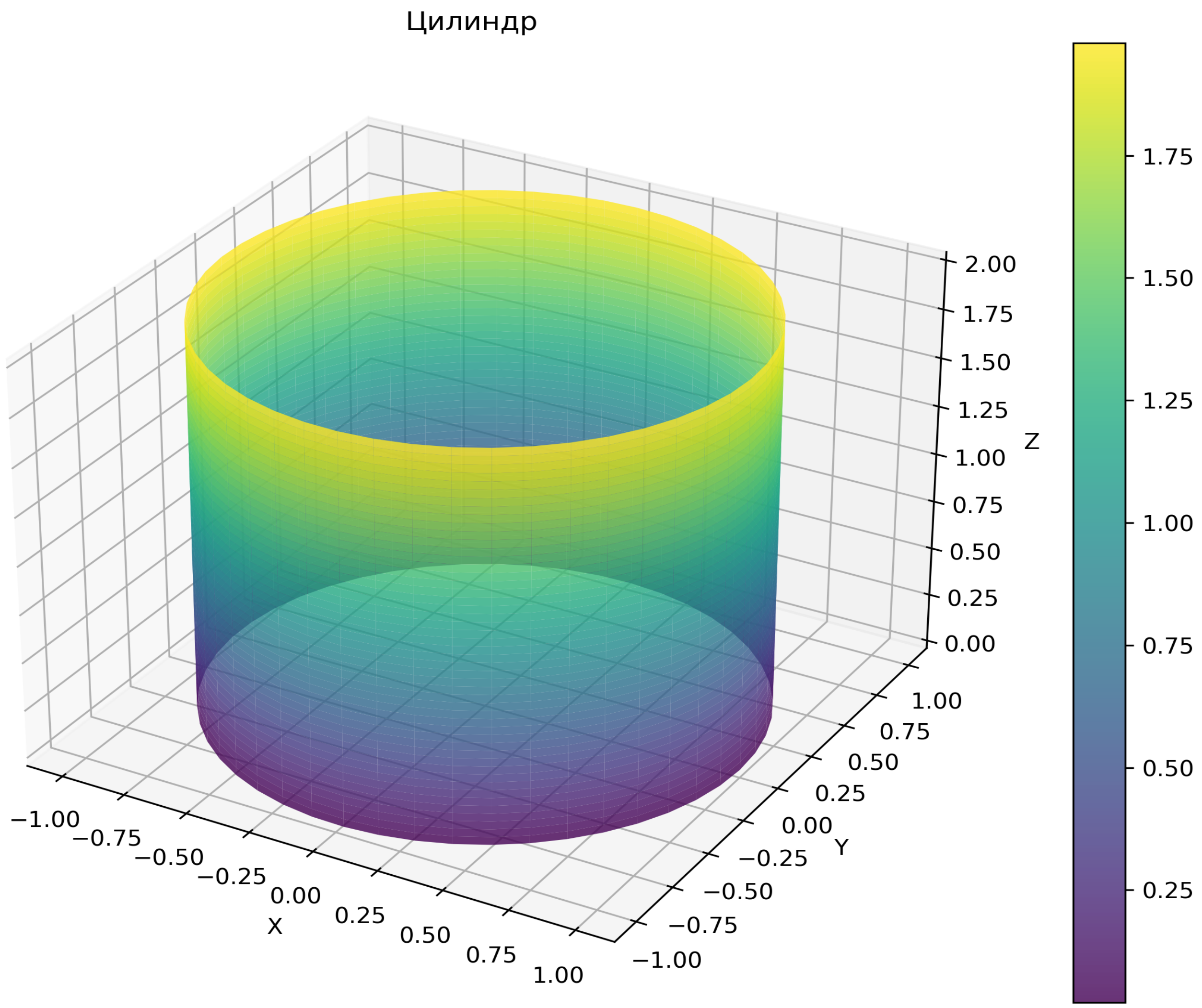
где 0 ≤ u ≤ 6.283185307179586, 0 ≤ φ ≤ 2π



1б. Симметричное параметрическое представление цилиндра:

p(u) = R (константа)

q(u) = u



2. Доказательство некоммутативности единицы S(2) с SO(2):

Пусть E - единица в S(2) (отражение относительно оси x), и $R(\theta)$ - поворот на угол θ в SO(2).

Тогда:

$$E(x,y) = (x,-y)$$

$$R(\theta)(x,y) = (x\cdot\cos\theta - y\cdot\sin\theta,\ x\cdot\sin\theta + y\cdot\cos\theta)$$

$$\begin{aligned} ER(\theta)(x,y) &= E(x\cdot\cos\theta - y\cdot\sin\theta,\ x\cdot\sin\theta + y\cdot\cos\theta) = \\ &= (x\cdot\cos\theta - y\cdot\sin\theta,\ -(x\cdot\sin\theta + y\cdot\cos\theta)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(\theta)E(x,y) &= R(\theta)(x,-y) = \\ &= (x\cdot\cos\theta + y\cdot\sin\theta,\ x\cdot\sin\theta - y\cdot\cos\theta) \end{aligned}$$

$ER(\theta) \neq R(\theta)E$, следовательно, единица S(2) не коммутирует с SO(2)

Проект 1-5

1а. Поверхность вращения кривой $(u, (p(u)i + q(u)k))$:

При вращении вокруг оси OZ получаем:

$((u, \varphi), (p(u)\cos(\varphi)i + p(u)\sin(\varphi)j + q(u)k))$

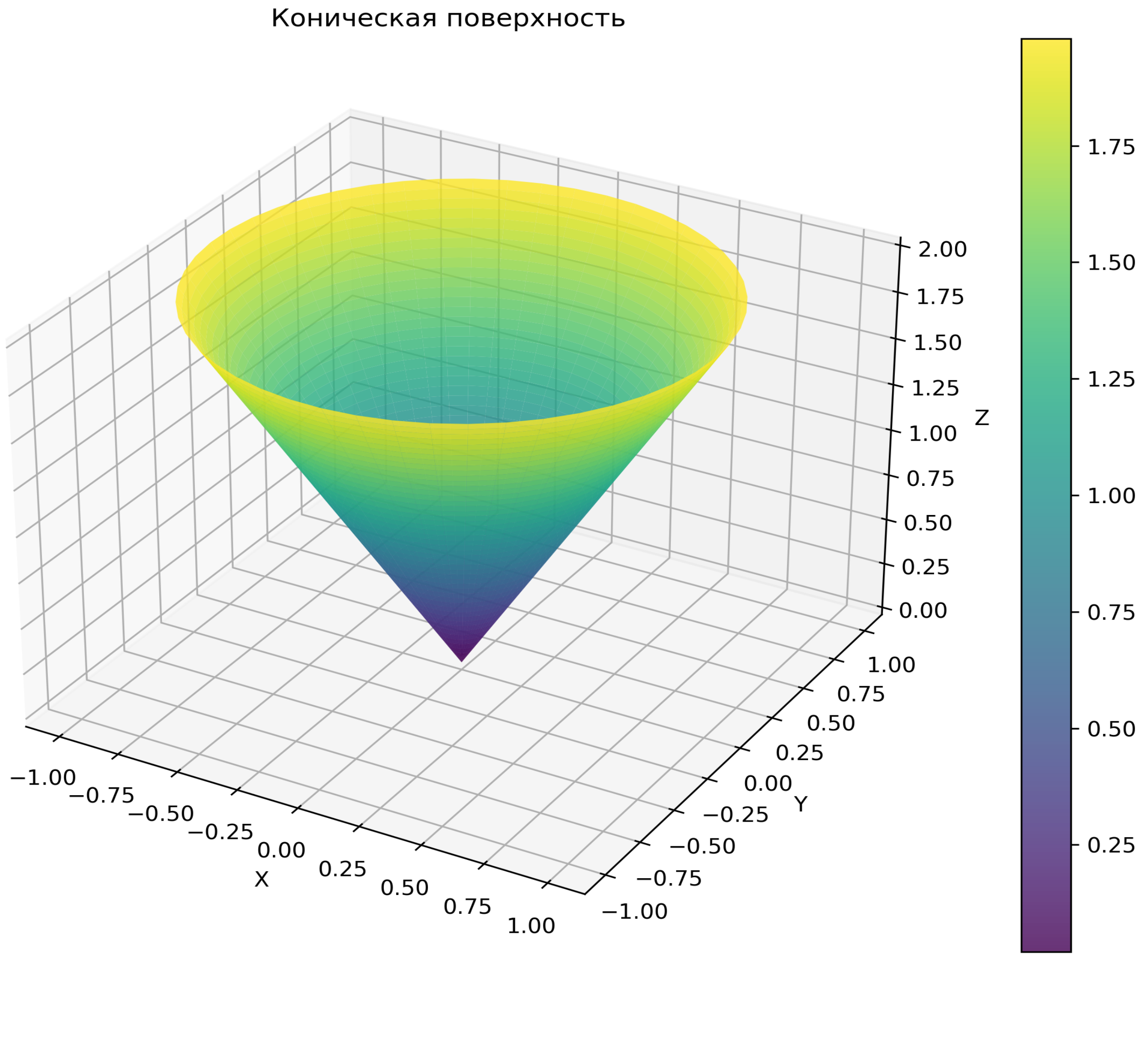
$0 \le \varphi \le 2\pi$

1б. Параметрическое представление конуса:

$p(u) = ru/h$

$q(u) = u$

где h - высота конуса, r - радиус основания



2. Матричные преобразования в R^3:

а) Матрица An для векторного произведения $n \times r$:

$$
\begin{matrix} 0 & -n3 & n2 \\ n3 & 0 & -n1 \\ -n2 & n1 & 0 \end{matrix}
$$

где $n = (n1, n2, n3)$ - заданный вектор

б) Матрица поворота $Wn(\theta)$:

$$Wn(\theta) = I + (1-\cos\theta)An^2 + \sin\theta\ An$$

Развернутая матрица поворота:

```
n2**2*cos(theta) - n2**2 + n3**2*cos(theta) - n3**2 + 1
-n1*n2*cos(theta) + n1*n2 - n3*sin(theta)
-n1*n3*cos(theta) + n1*n3 + n2*sin(theta)

-n1*n2*cos(theta) + n1*n2 + n3*sin(theta)
n1**2*cos(theta) - n1**2 + n3**2*cos(theta) - n3**2 + 1
-n1*sin(theta) - n2*n3*cos(theta) + n2*n3

-n1*n3*cos(theta) + n1*n3 - n2*sin(theta)
n1*sin(theta) - n2*n3*cos(theta) + n2*n3
n1**2*cos(theta) - n1**2 + n2**2*cos(theta) - n2**2 + 1
```

Проект 1-6

1а. Поверхность вращения кривой (u, (p(u)i + q(u)k)):

При вращении вокруг оси OZ получаем:

((u, φ), (p(u)cos(φ)i + p(u)sin(φ)j + q(u)k))

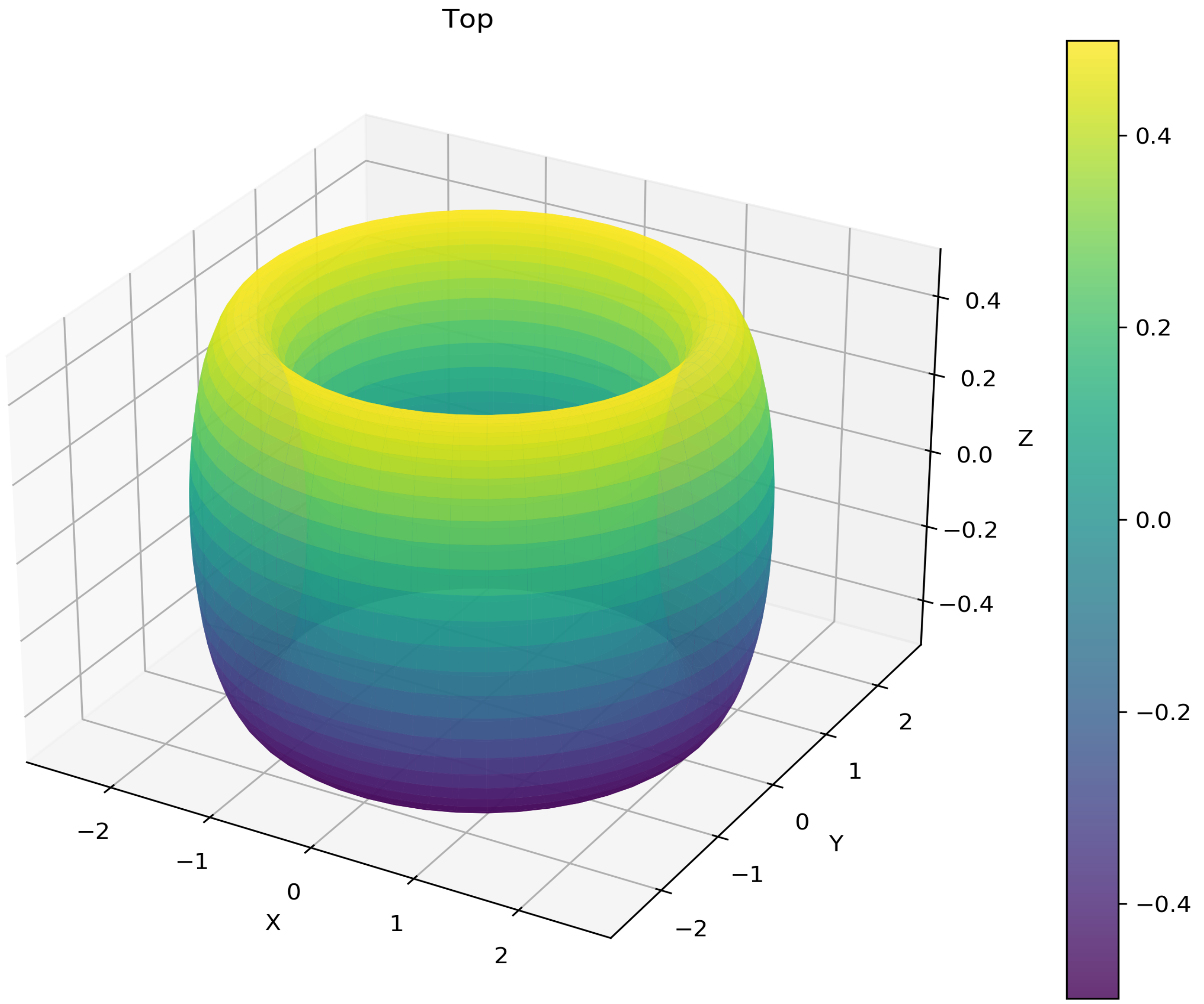
$0 \le \varphi \le 2\pi$

1б. Параметрическое представление тора:

p(u) = R + r·cos(u)

q(u) = r·sin(u)

где R - радиус центральной окружности, r - радиус трубки



2. Определитель матрицы поворота $Wn(\theta)$:

Матрица поворота $Wn(\theta) = I + (1-\cos\theta)An^2 + \sin\theta\ An$

Определитель матрицы поворота:

```
n1**4*cos(theta)**2 - 2*n1**4*cos(theta) + n1**4 + 2*n1**2*n2**2*cos(theta)**2 - 4*n1**2*n2**2*cos(theta) + 2*n1**2*n2**2 + 2*n1**2*n3**2*cos(theta)**2 - 4*n1**2*n3**2*cos(theta) + 2*n1**2*n3**2 - n1**2*cos(theta)**2 + 2*n1**2*cos(theta) - n1**2 + n2**4*cos(theta)**2 - 2*n2**4*cos(theta) + n2**4 + 2*n2**2*n3**2*cos(theta)**2 - 4*n2**2*n3**2*cos(theta) + 2*n2**2*n3**2 - n2**2*cos(theta)**2 + 2*n2**2*cos(theta) - n2**2 + n3**4*cos(theta)**2 - 2*n3**4*cos(theta) + n3**4 - n3**2*cos(theta)**2 + 2*n3**2*cos(theta) - n3**2 + 1
```

После упрощения получаем:

$$\det(Wn(\theta)) = 1$$

Это доказывает, что определитель матрицы поворота всегда равен 1, что подтверждает сохранение ориентации пространства при повороте.

Проект 1-7

1. Пересечение цилиндров C и C :

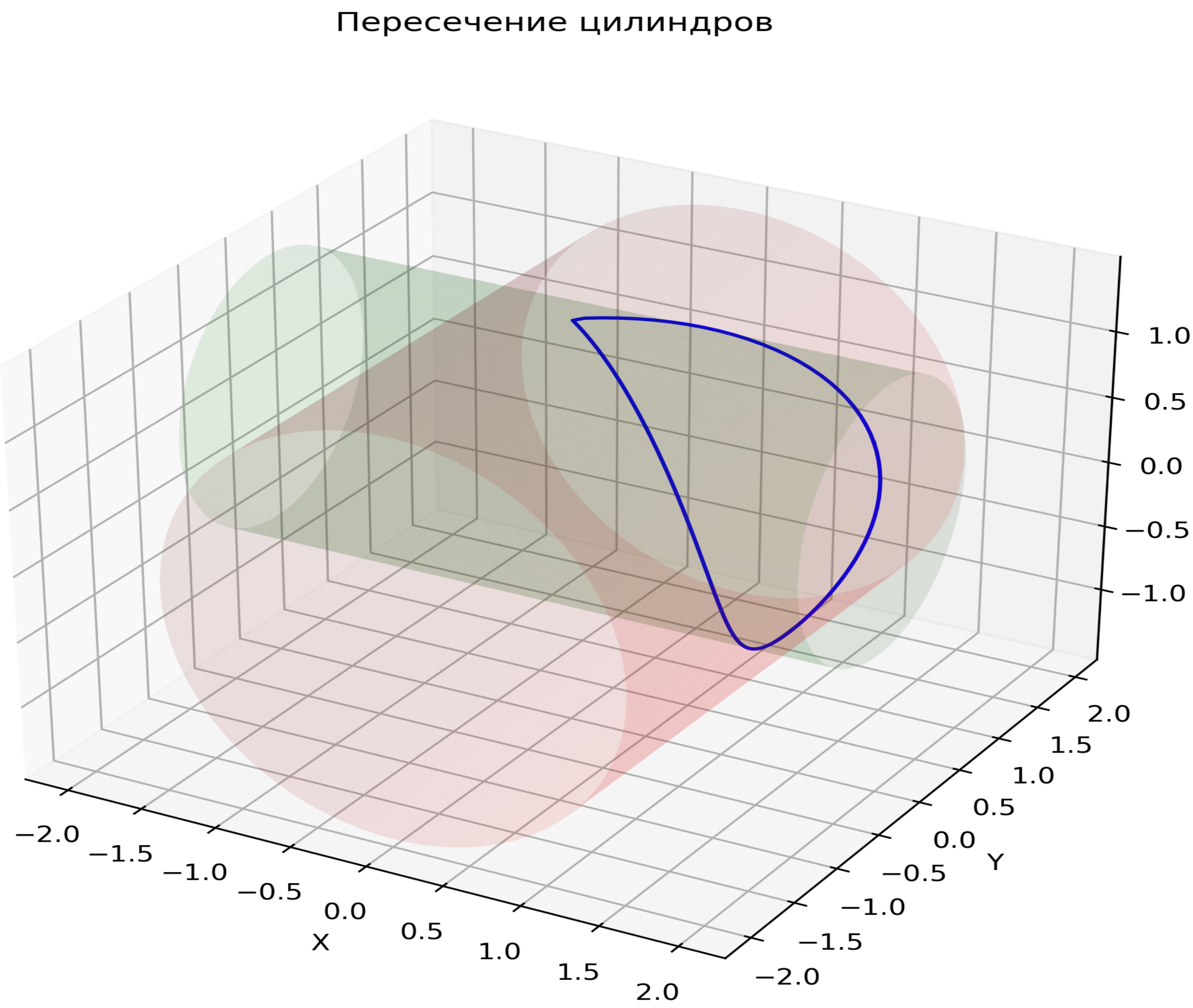
C : $x^2 + z^2 = b^2$, $-l \le y \le l$

C : $y^2 + (z-\alpha)^2 = a^2$, $0 \le x \le h$

Кривая пересечения:

$r(\theta) = ((b^2 - (\alpha + a\cdot\sin\theta)^2)^{\wedge}(1/2), a\cdot\cos\theta, \alpha + a\cdot\sin\theta)$

$0 \le \theta < 2\pi$



2. Доказательство нелинейности проекции T:

а) T - нелинейная проекция в R^3:

Доказательство:

1) T(r) = r/(a·r) при a·r ≠ 0
2) Проверим однородность:
   T(cr) = cr/(a·cr) = r/(a·r) = T(r)
   Однородность выполняется

3) Проверим аддитивность:
   T(r + r) = (r + r)/(a·(r + r))
   T(r) + T(r) = r /(a·r) + r /(a·r)

   T(r + r) ≠ T(r) + T(r)
   Аддитивность не выполняется

4) Следовательно, T - нелинейное отображение

б) Доказательство T[(r, 1)] = [(r, a·r)]:
   При a·r ≠ 0:
   T(r) = r/(a·r)
   Точка (r, 1) переходит в (r/(a·r), 1/(a·r))
   Это эквивалентно точке (r, a·r) в проективном пространстве

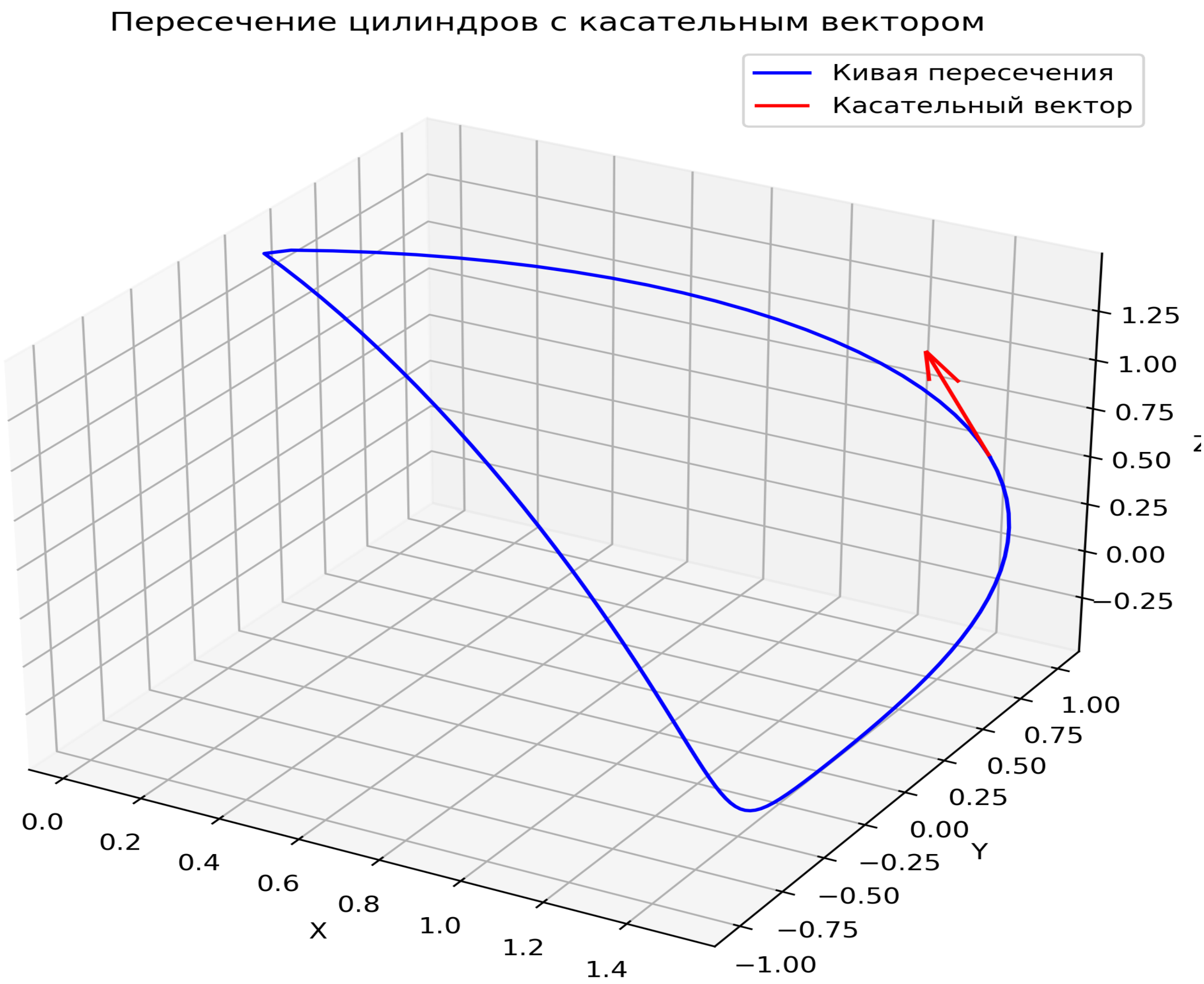
Проект 1-8

1. Касательный вектор в точке $\theta = 0$:

$T(\theta) = 1/ab \cdot (-a\alpha, 0, a(b^2 - \alpha^2)^{(1/2)})$

где:

- a - радиус второго цилиндра
- b - радиус первого цилиндра
- α - смещение второго цилиндра



2. Собственный вектор матрицы поворота $W_n(\theta)$:

Доказательство того, что n является собственным вектором:

1) Матрица поворота $W_n(\theta) = I + (1-\cos\theta)A_n^2 + \sin\theta\, A_n$

2) Для собственного вектора n должно выполняться:
   $W_n(\theta)n = n$

3) Подставляя выражение для $W_n(\theta)$:
   $(I + (1-\cos\theta)A_n^2 + \sin\theta\, A_n)n = n$

4) Упрощая:
   $In + (1-\cos\theta)A_n^2 n + \sin\theta\, A_n n = n$
   $n + (1-\cos\theta)(-n) + \sin\theta(0) = n$
   $n - n + n = n$

5) Следовательно, n действительно является собственным вектором с собственным значением 1 при любом θ

Геометрическая интерпретация:
- Вектор n является осью вращения
- Все точки на прямой, задаваемой вектором n, остаются неподвижными при повороте
- Собственное значение 1 означает, что поворот не меняет направление оси вращения

Проект 1-9

1. Нормаль к плоскости 2x - y + z + 2 = 0:

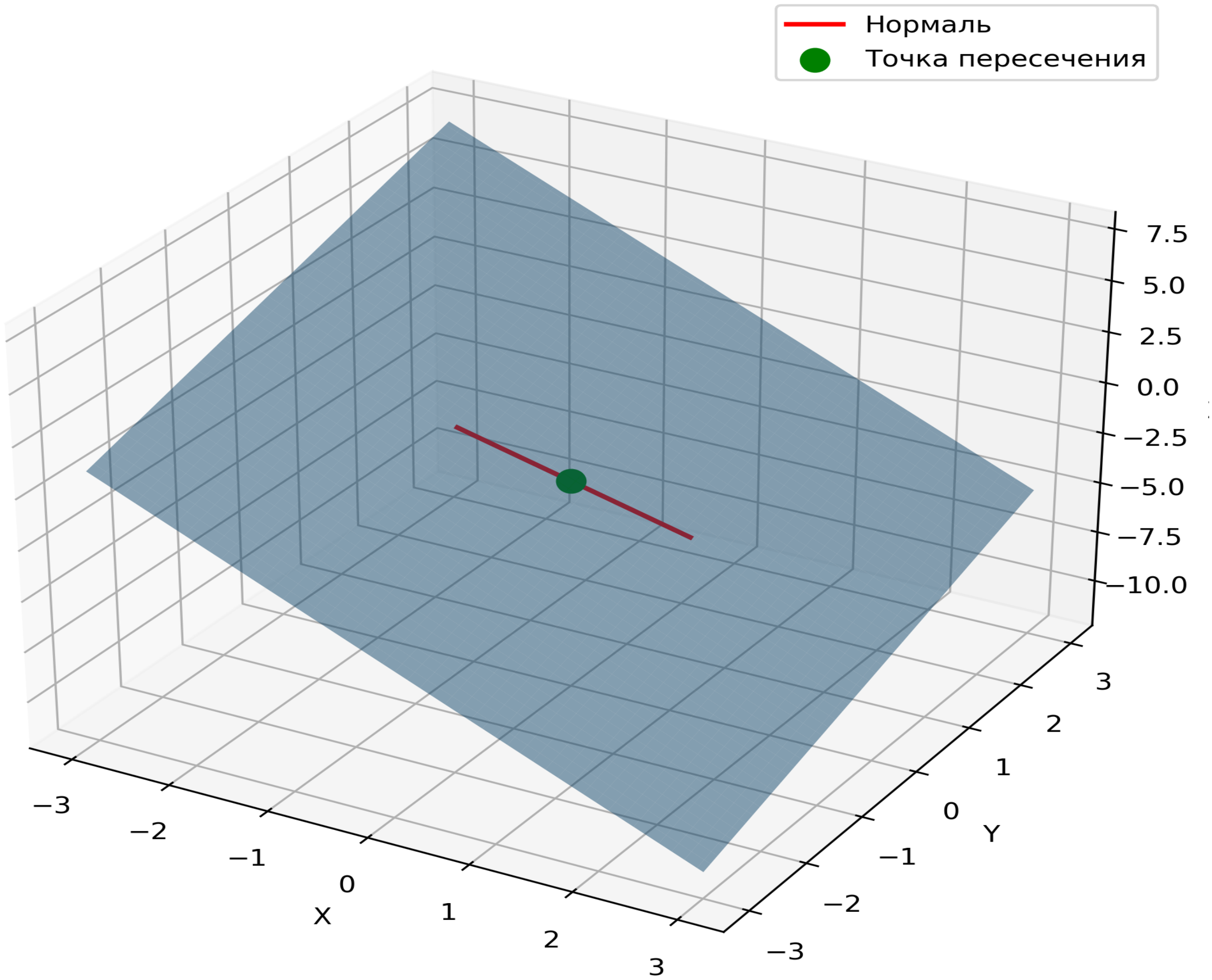
a) Точка пересечения с осью OZ:

P = (0, 0, -2)

Параметрическое уравнение нормали:

r(t) = (0.0, 0.0, -2.0) +

t·(0.816, -0.408, 0.408)



2. Доказательство изоморфизма Sn и SO(2):

Доказательство:

1) $Sn = \{Wn(\theta): 0 \le \theta < 2\pi\}$ - подгруппа поворотов вокруг оси n

2) SO(2) - группа поворотов плоскости

3) Построим изоморфизм φ: Sn   SO(2):
   $\varphi(Wn(\theta)) = R(\theta)$, где $R(\theta)$ - матрица поворота на угол θ

4) Проверим свойства изоморфизма:
   - Инъективность: разные углы дают разные повороты
   - Сюръективность: любой поворот SO(2) достижим
   - Гомоморфизм: $\varphi(Wn(\theta\ )\cdot Wn(\theta\ )) = \varphi(Wn(\theta\ ))\cdot\varphi(Wn(\theta\ ))$

5) Матрица поворота $R(\theta)$ в SO(2):

$$\begin{matrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{matrix}$$

6) Свойства:
   - $\det(R(\theta)) = 1$
   - $R(\theta)\cdot R(\theta)\ \ = I$
   - $R(\theta\ )\cdot R(\theta\ ) = R(\theta\ \ + \theta\ )$

Следовательно, Sn   SO(2)