Метод Монте-Карло: Теория и Примеры

Царюк Артем Владимирович

21 ИТ-МО

Метод Монте-Карло - это широкий класс вычислительных алгоритмов, основанных на многократной случайной выборке для получения численных результатов. Основная идея метода заключается в использовании случайности для решения задач, которые могут быть детерминированными в принципе.

Ключевые особенности метода:

1. Использование случайных чисел
2. Многократное повторение эксперимента
3. Статистическая обработка результатов
4. Повышение точности с увеличением числа испытаний

Метод применяется в:

- Физике (моделирование частиц, квантовая механика)
- Математике (вычисление интегралов, оптимизация)
- Экономике (оценка рисков, прогнозирование)
- Оптимизации (поиск глобальных минимумов)
- Теории вероятностей (проверка гипотез)

История метода:

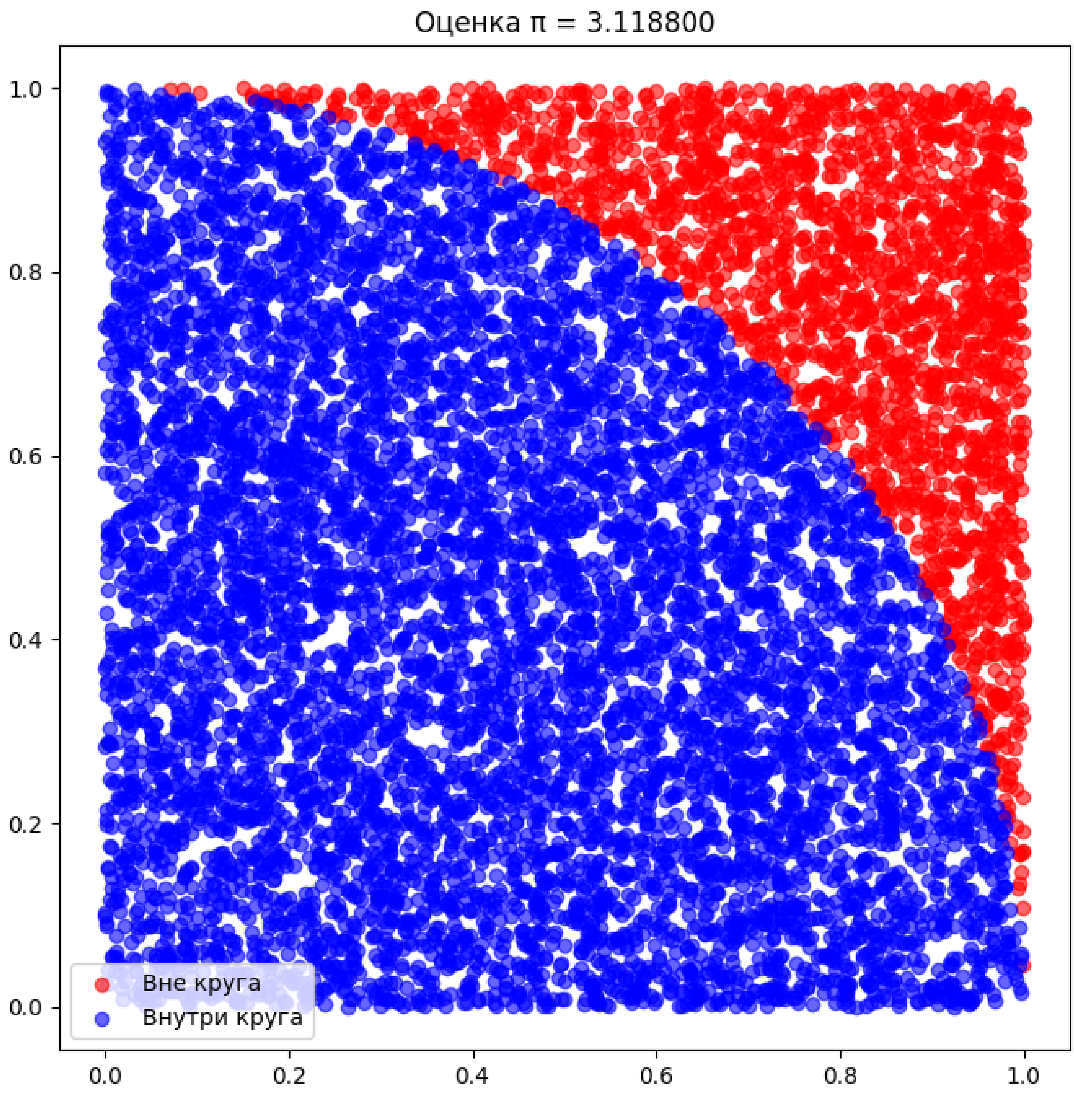
Метод был разработан в 1940-х годах в рамках Манхэттенского проекта. Название "Монте-Карло" предложил Николас Метрополис, вдохновленный казино в Монако, где дядя его коллеги Станислава Улама часто играл в рулетку.

1. Оценка числа π

Метод основан на отношении площади четверти круга к площади квадрата. Случайно генерируются точки в квадрате 1x1, и подсчитывается доля точек, попавших в четверть круга радиусом 1.

Теоретическое значение π = 3.141592653589793...

Полученная оценка π: 3.118800

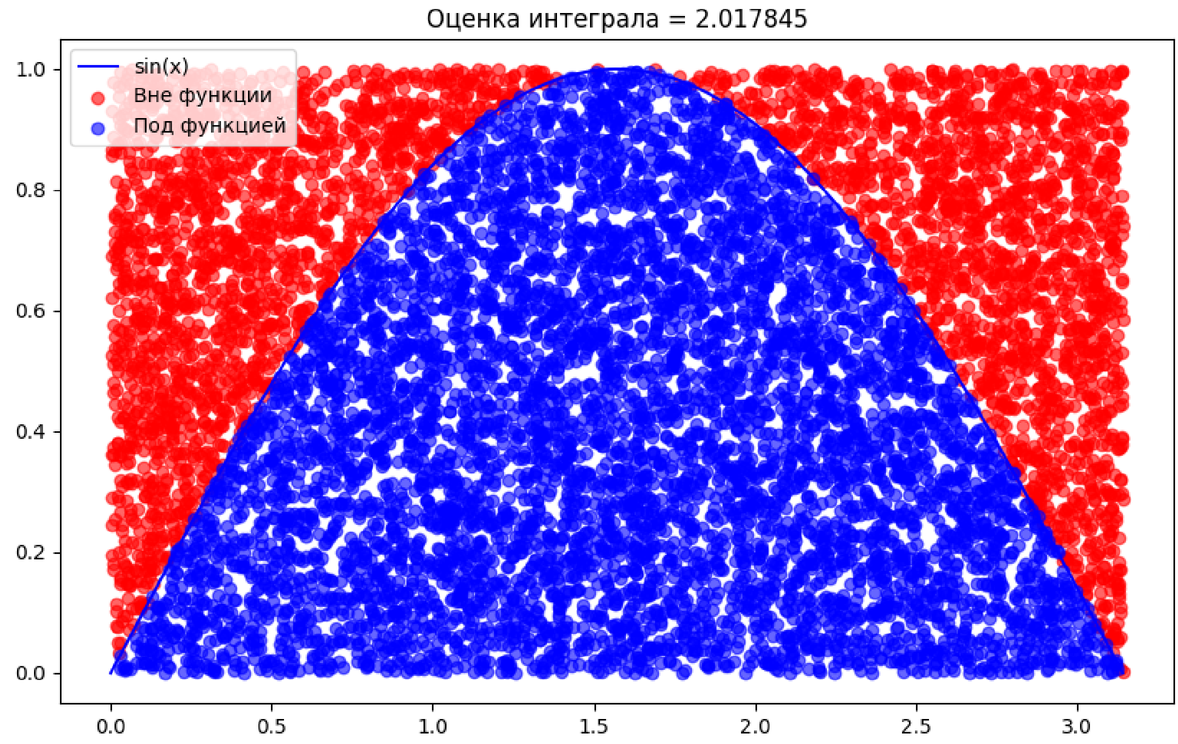


2. Оценка определенного интеграла

Вычисление интеграла sin(x) от 0 до π методом Монте-Карло. Метод основан на оценке площади под кривой путем случайного выбра точек.

Теоретическое значение интеграла = 2.000000...

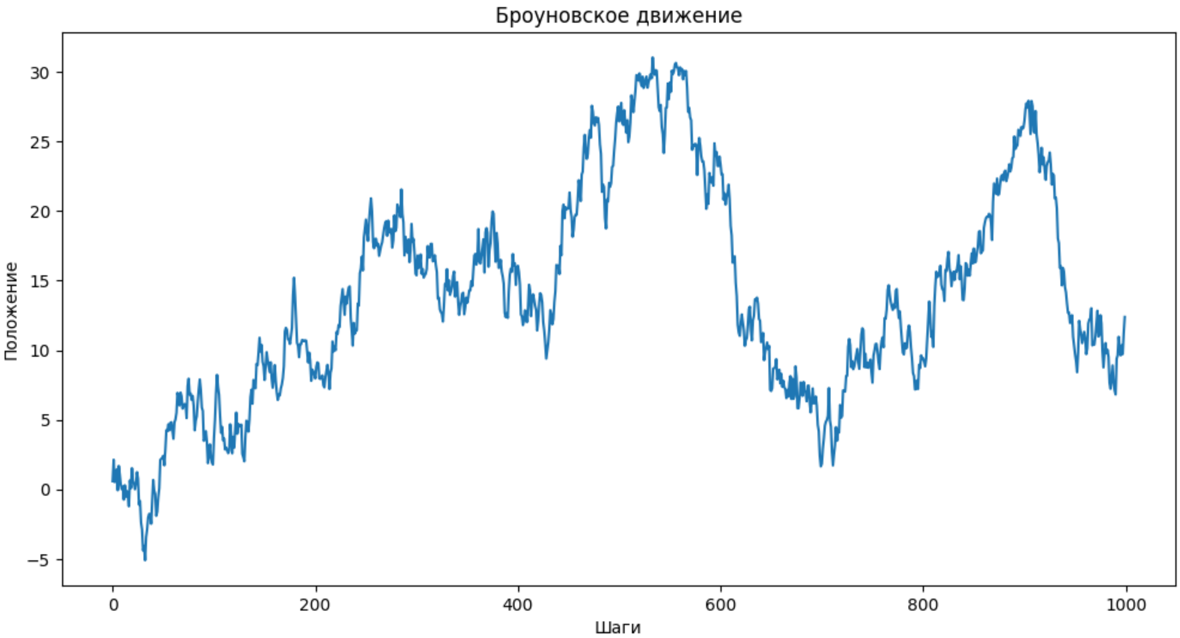
Оценка интеграла: 2.017845



3. Броуновское движение

Броуновское движение - это случайное движение частиц, взвешенных в жидкости или газе. Названо в честь ботаника Роберта Броуна, впервые описавшего это явление в 1827 году.

Модель описывает множество физических процессов, от движения молекул до колебаний цен на финансовых рынках.



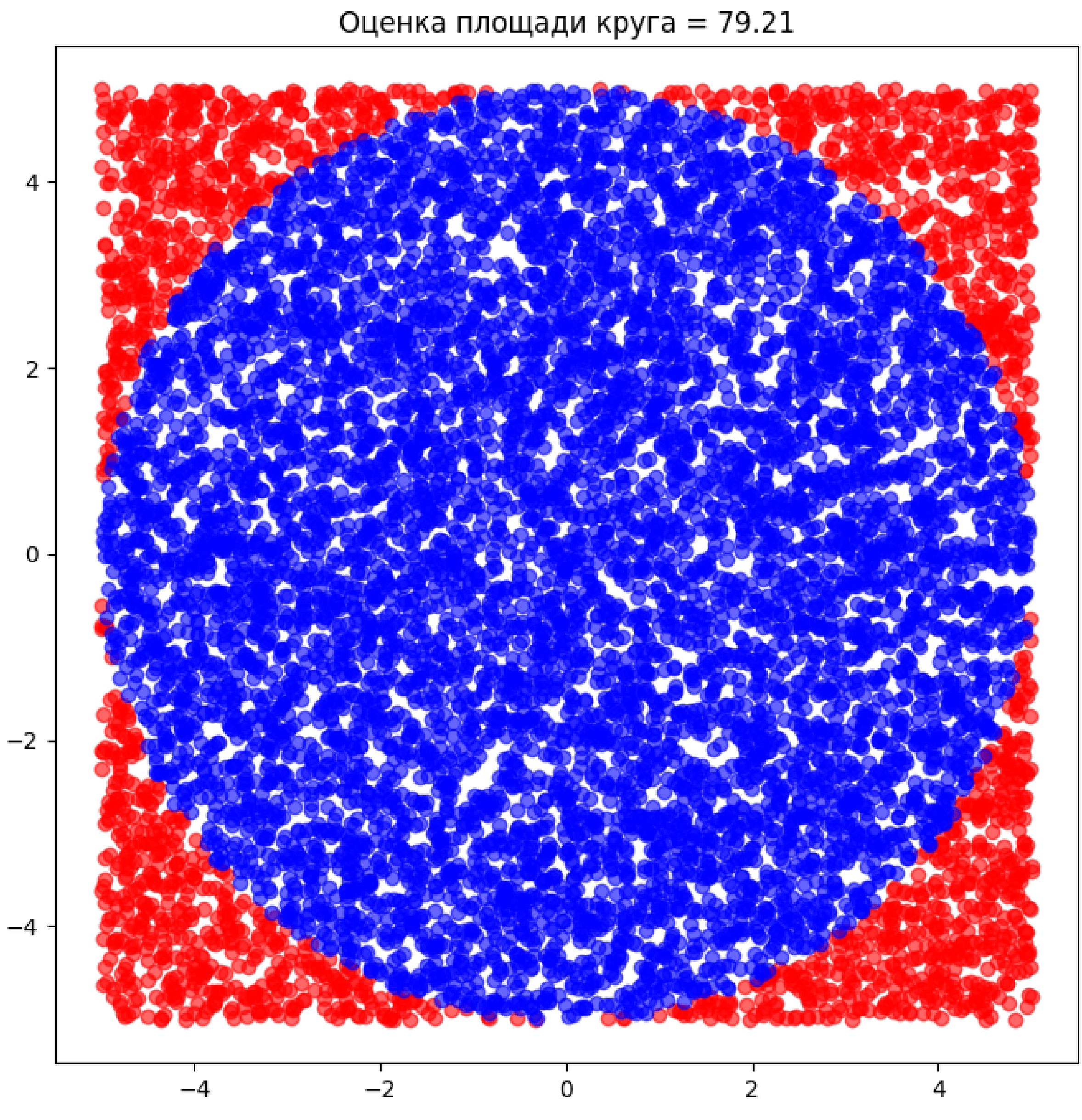
4. Оценка площади круга

Оценка площади круга методом Монте-Карло. Точки случайно размещаются в квадрате, описанном вокруг круга.

Теоретическая площадь круга радиусом r = πr^2

Для r = 5: площадь = 78.539816...

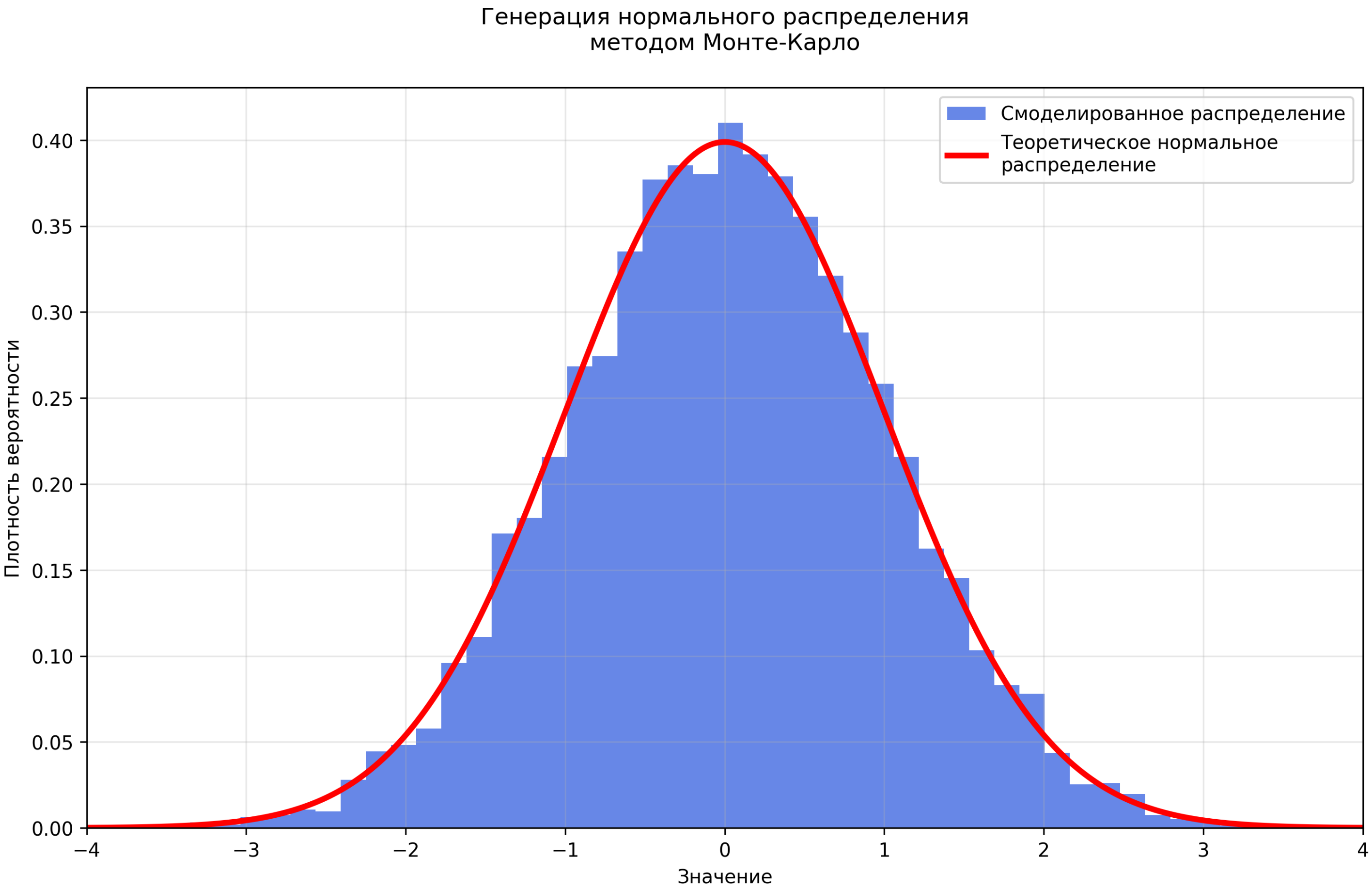
Оценка площади круга радиусом 5: 79.21



5. Генерация нормального распределения

Демонстрация центральной предельной теоремы: сумма множества независимых случайных величин стремится к нормальному распределению.

График показывает сравнение полученного распределения с теоретической кривой нормального распределения.

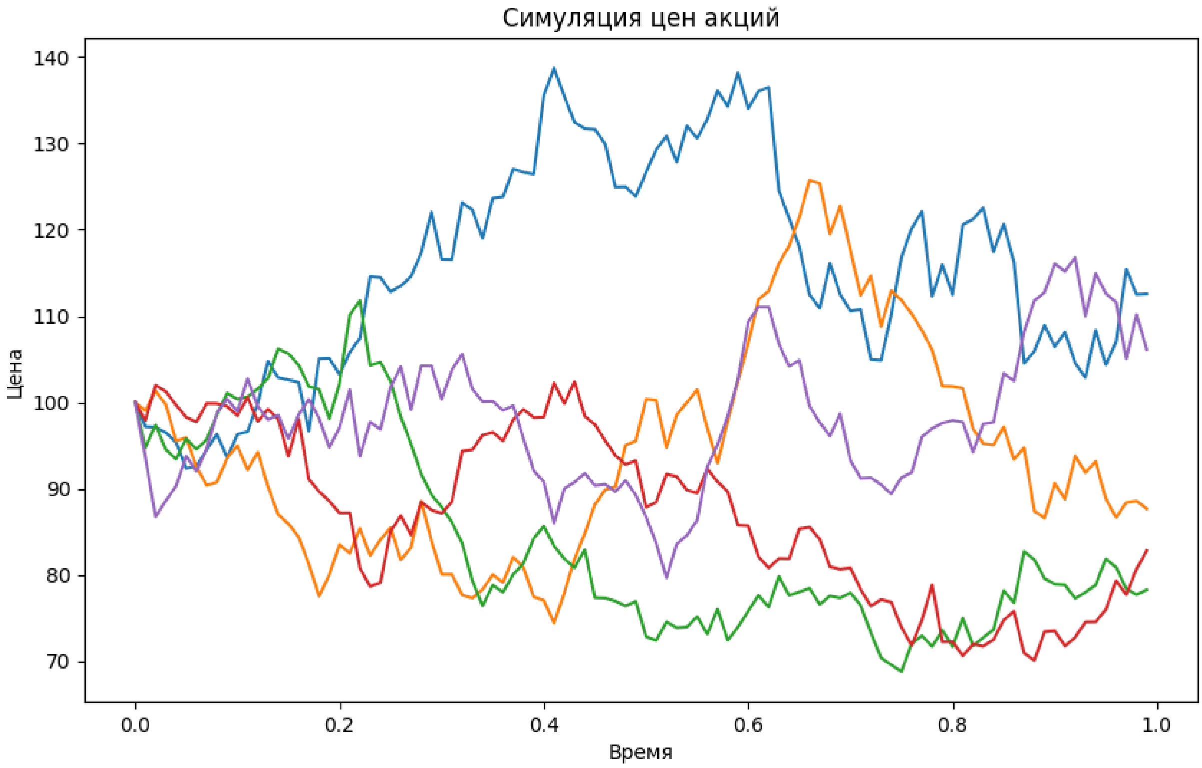


6. Симуляция цен акций

Моделирование движения цен акций по модели Блэка-Шоулза. Модель описывает изменение цены с учетом волатильности и тренда.

Параметры модели:

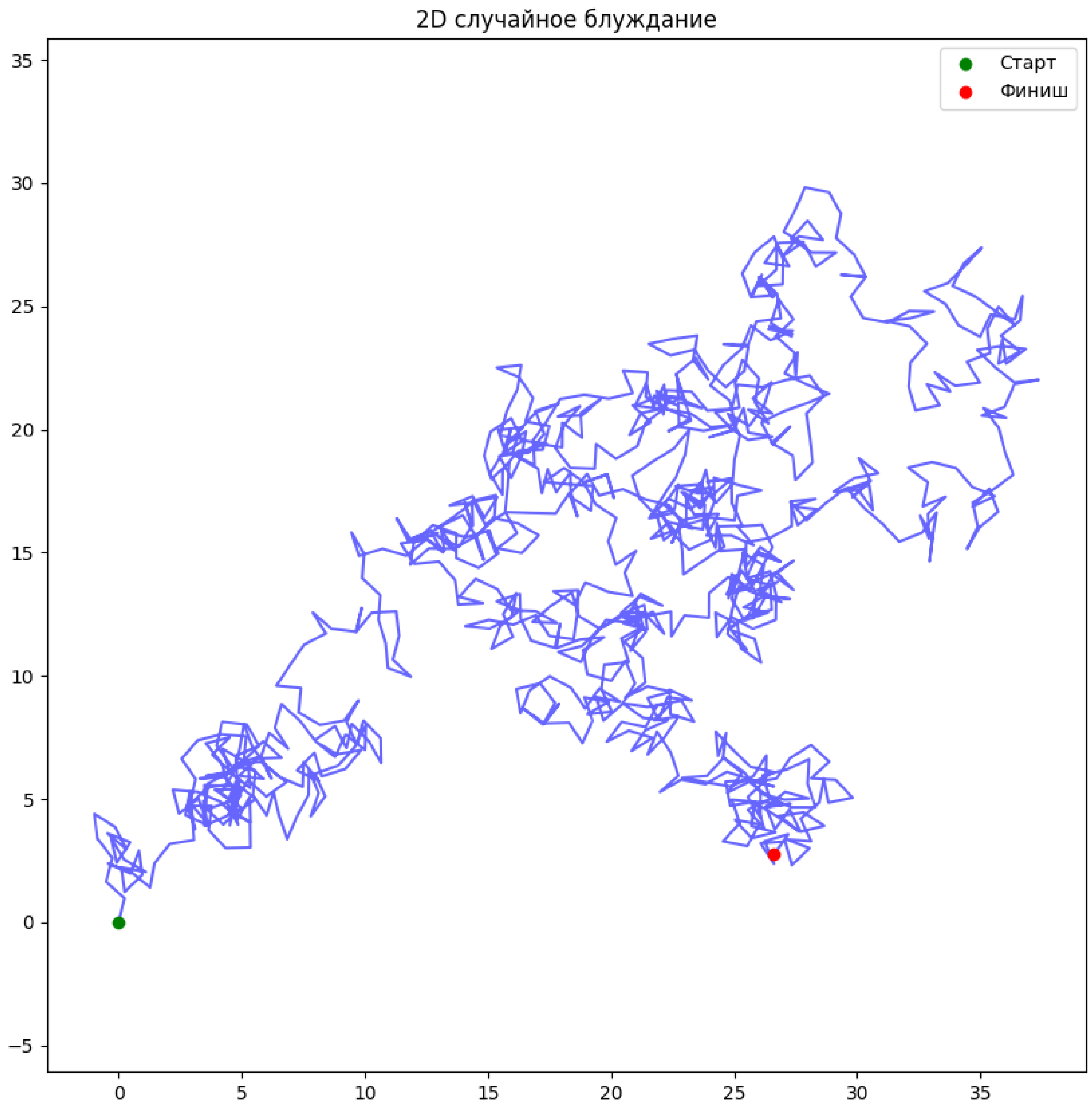
- Начальная цена (S0)
- Тренд (μ)
- Волатильность (σ)



7. 2D случайное блуждание

Двумерное случайное блуждание - обобщение одномерного случайного процесса. На каждом шаге частица движется в случайном направлении.

Среднее расстояние от начала координат после n шагов пропорционально √n.



8. Парадокс дней рождения

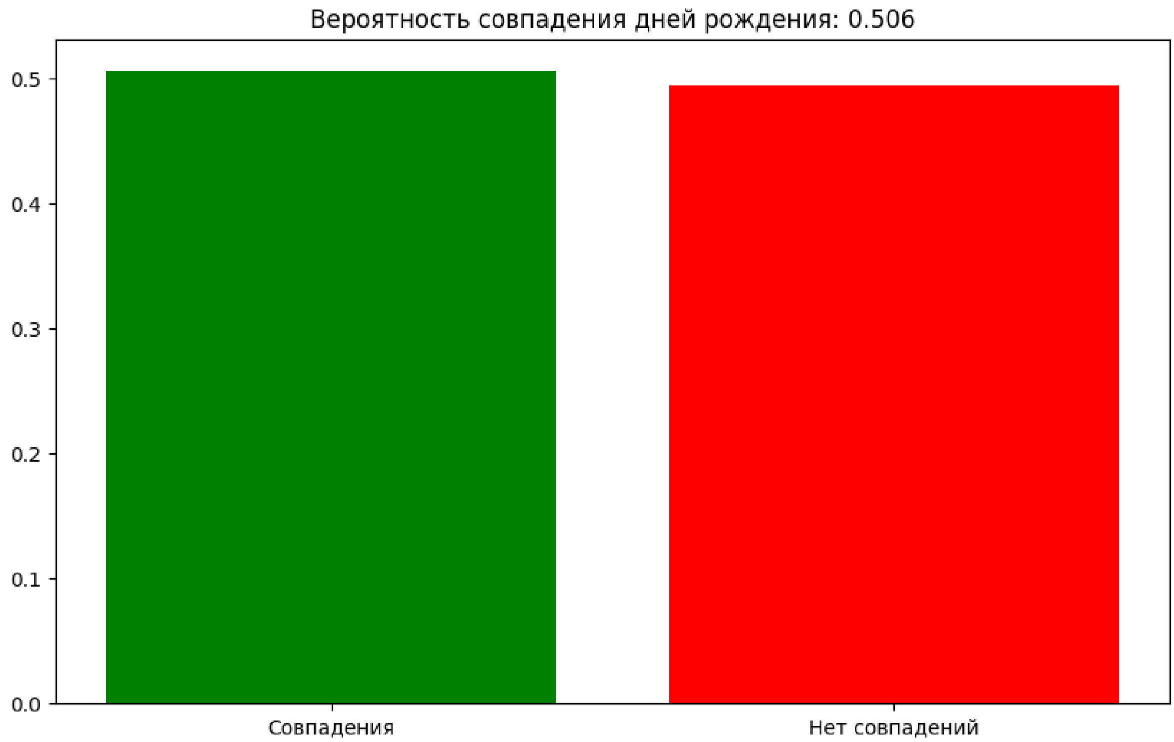
Вероятность того, что в группе из n человек у кого-то совпадут дни рождения.

Для группы из 23 человек теоретическая вероятность ≈ 0.507

Для группы из 30 человек ≈ 0.706

Для группы из 50 человек ≈ 0.970

Вероятность совпадения в группе из 23 человек: 0.506



9. Парадокс Монти Холла

Классическая вероятностная задача, основанная на телеигре. Игрок выбирает одну из трех дверей, за одной из которых приз. Ведущий открывает пустую дверь и предлагает игроку изменить выбор.

Теоретические вероятности:

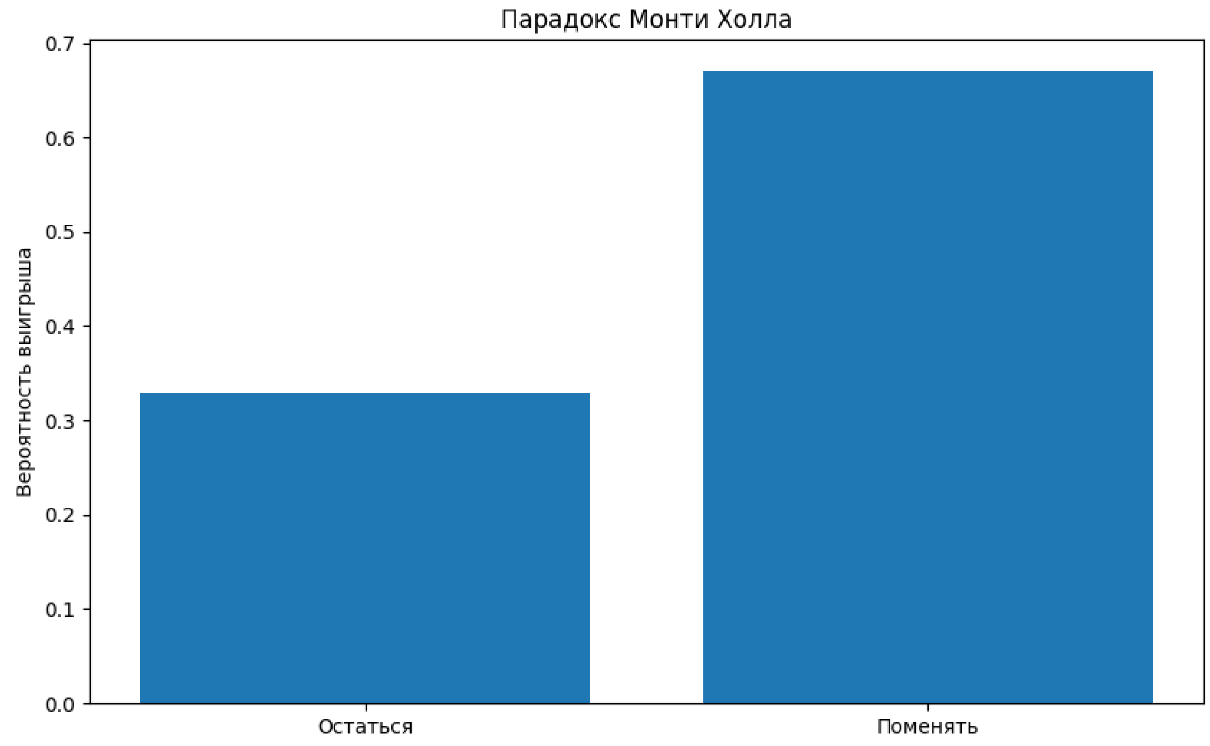
- Остаться при своем выборе: 1/3 (≈ 0.333)

- Изменить выбор: 2/3 (≈ 0.667)

Вероятность выигрыша:

Остаться: 0.330

Поменять выбор: 0.670



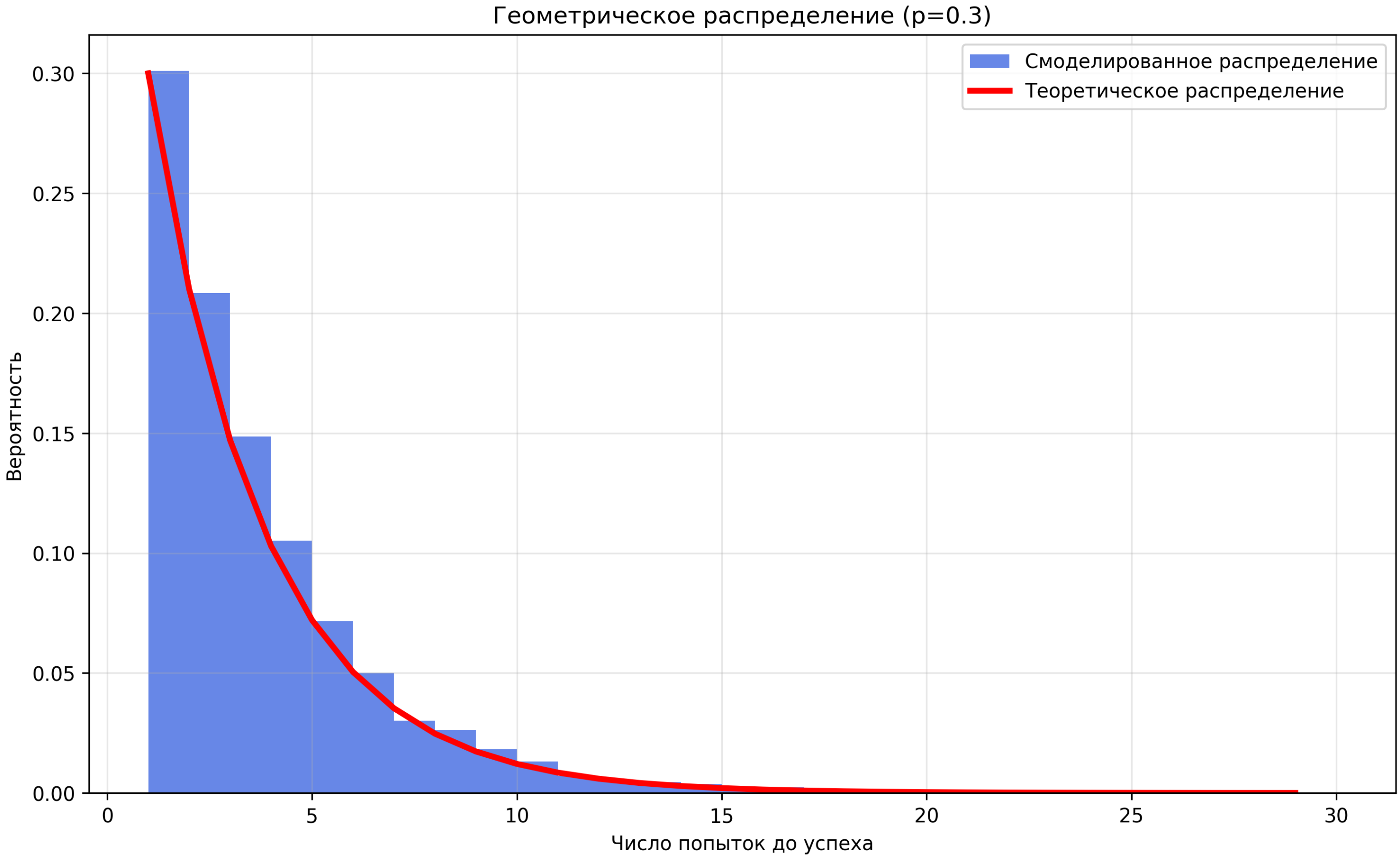
10. Геометрическое распределение

Моделирование геометрического распределения - распределения числа испытаний Бернулли до первого успеха.

Теоретическое среднее значение для p = 0.3:

E(X) = 1/p = 3.333...

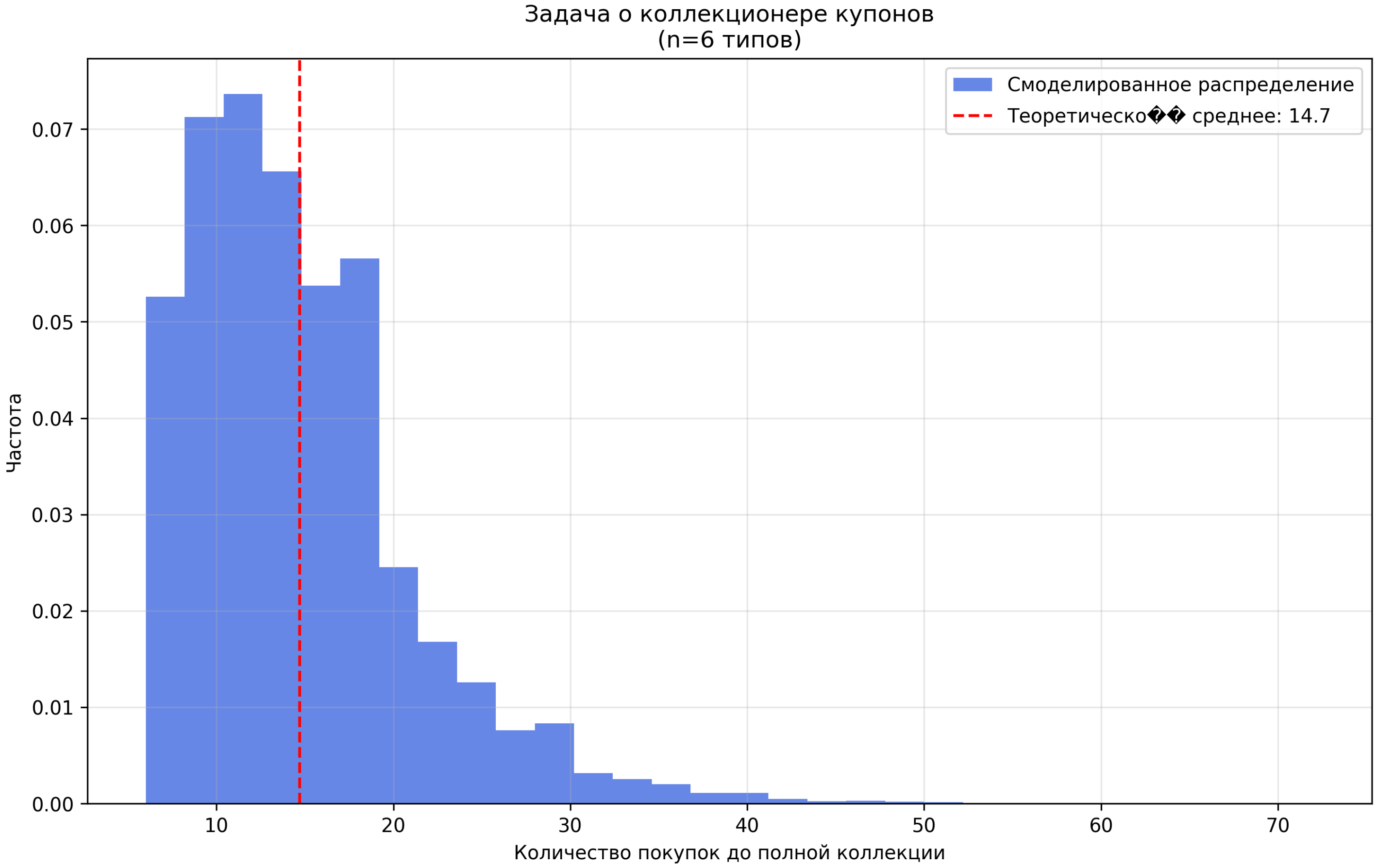
Среднее число попыток: 3.33 (теоретическое: 3.33)



11. Задача о коллекционере

Среднее число покупок для сбора полной коллекции.

Среднее число покупок: 14.7



12. Время достижения барьера

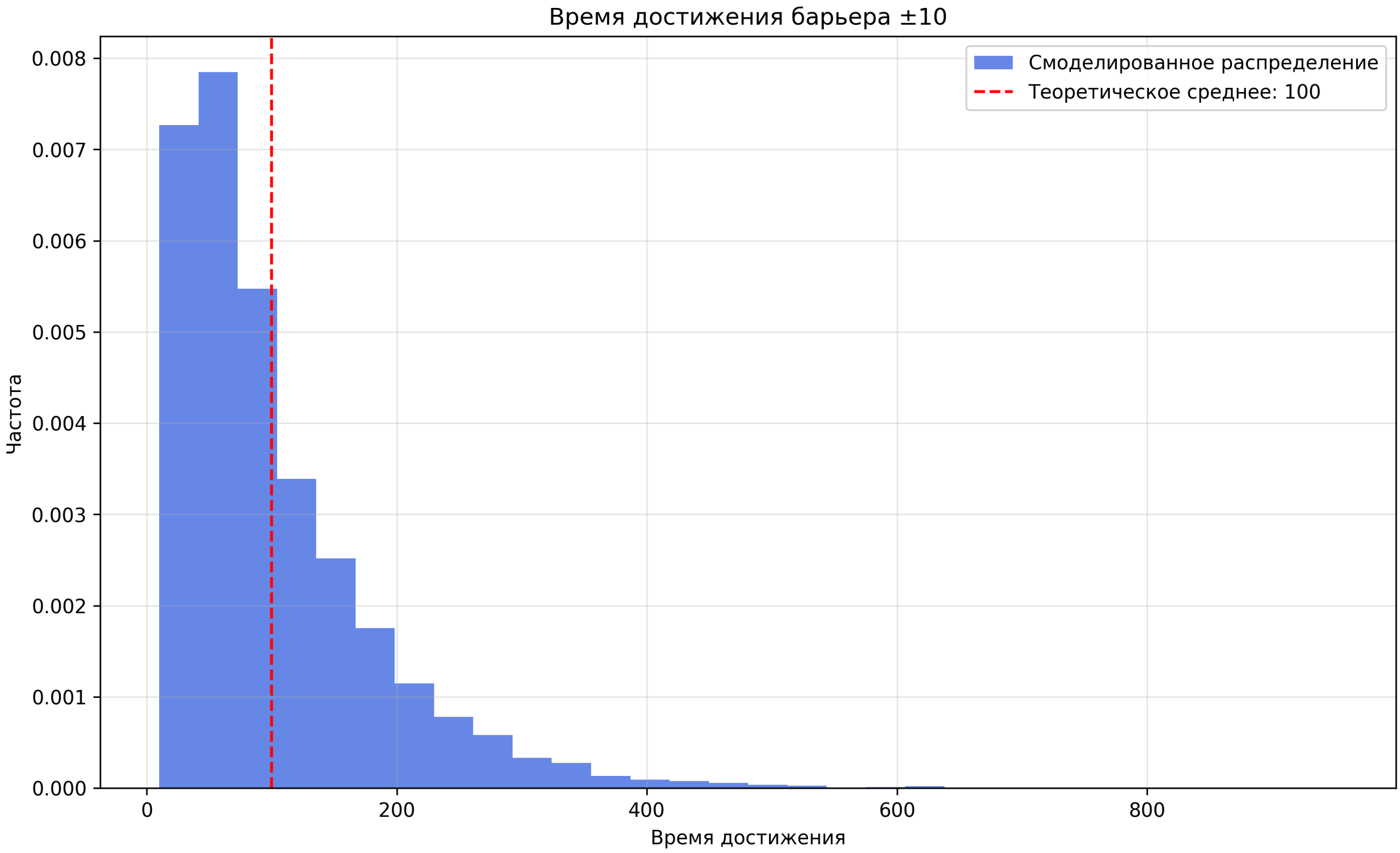
Исследование времени, необходимого частице в случайном блуждании для достижения заданного уровня (барьера).

Теоретическое среднее время достижения барьера h:

$E(T) = h^2$

Это классическая задача теории случайных процессов.

Среднее время достижения: 101.30 (теоретическое: 100)



13. Гипергеометрическое распределение

Моделирование выборки без возвращения из конечной популяции.

Параметры:

N - размер популяции

K - число успешных элементов

n - размер выборки

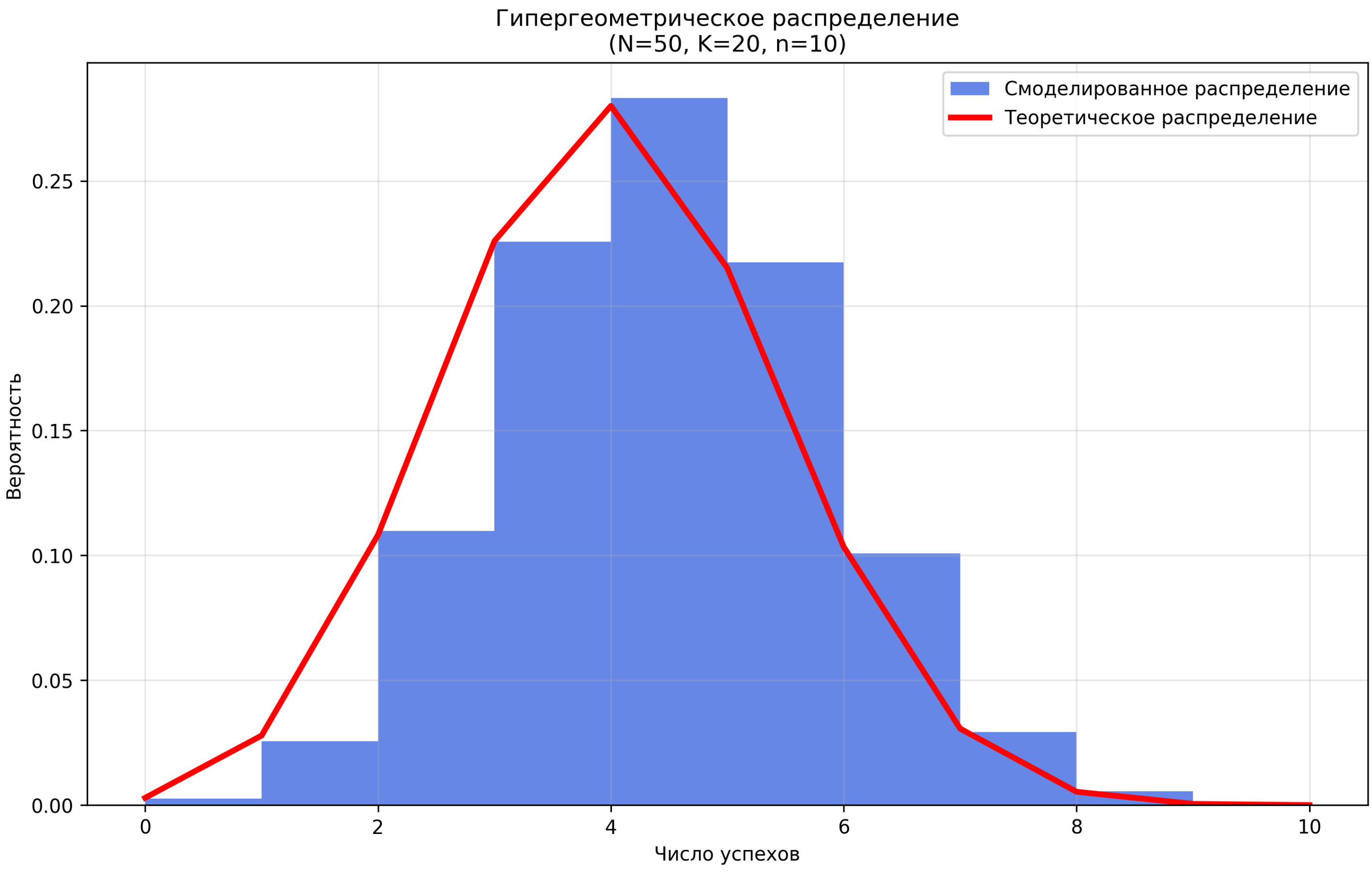
Применяется в:

- Контроле качества

- Экологии

- Социологических исследованиях

Среднее число успехов: 4.00



14. Распределение χ²

Распределение суммы квадратов независимых стандартных нормальных величин.

Степени свободы (df) определяют форму распределения.

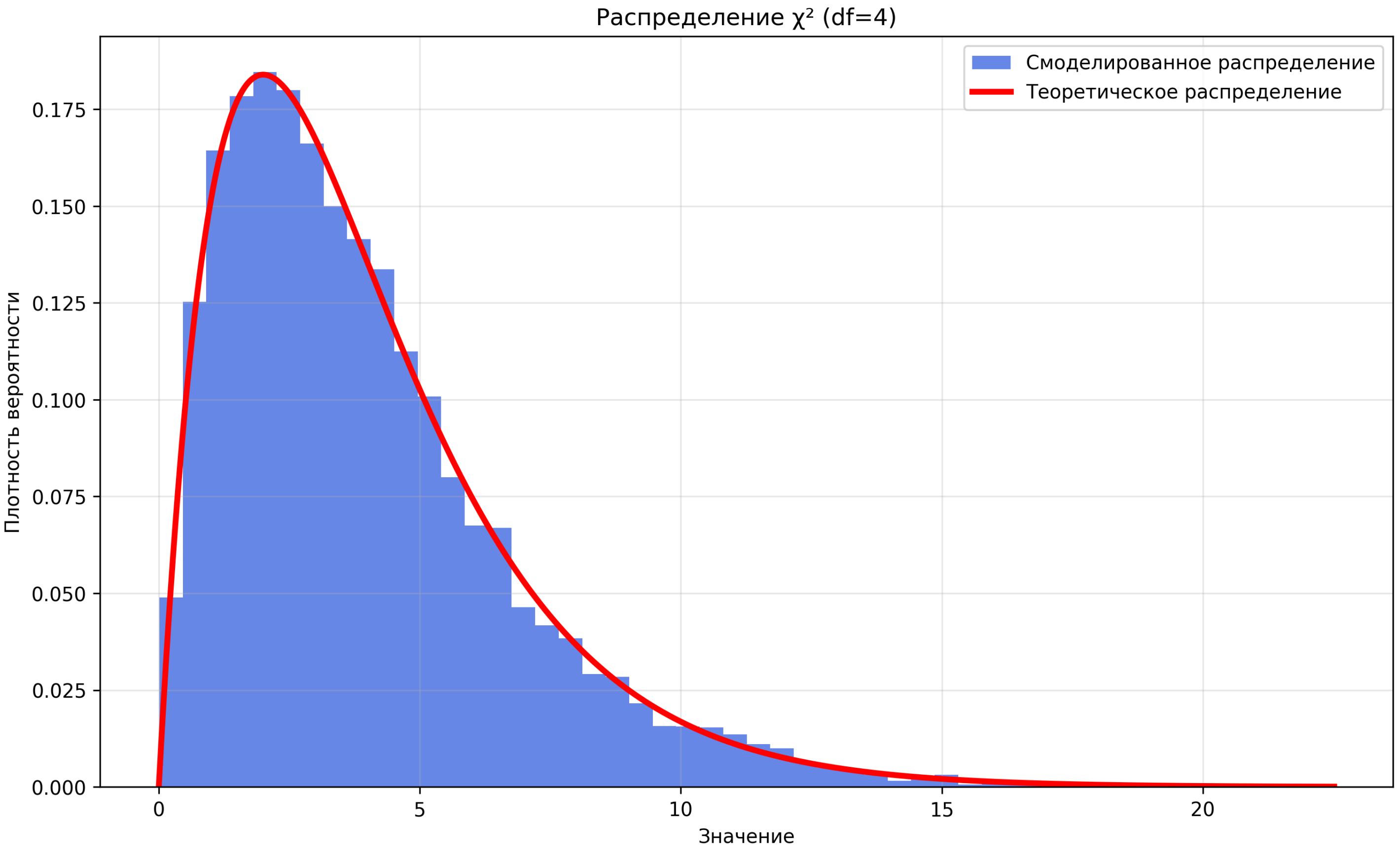
Применяется в:

- Проверке гипотез

- Анализе категориальных данных

- Оценке качества подгонки

Среднее значение: 3.98 (теоретическое: 4.00)



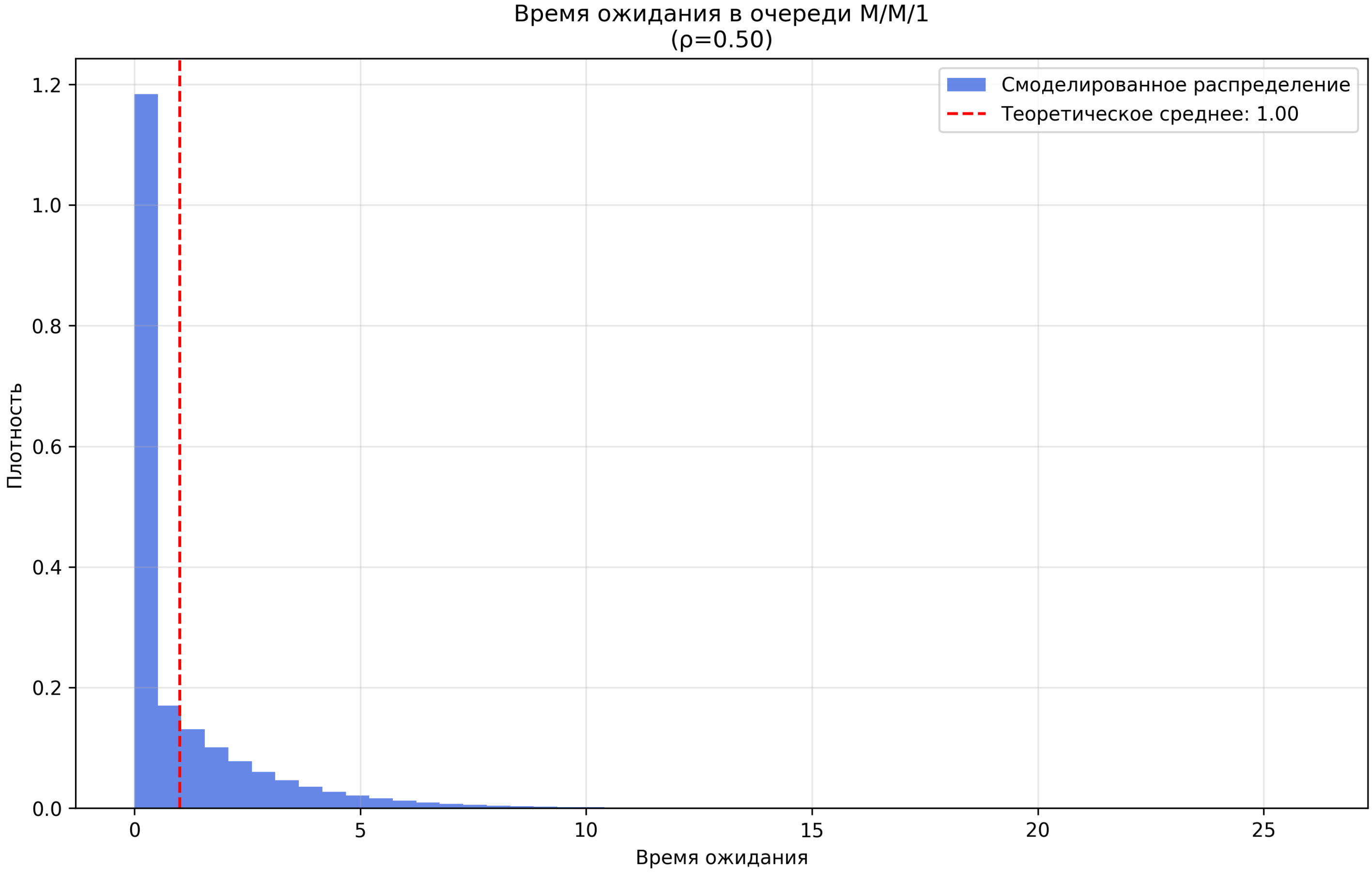
15. Система массового обслуживания

Моделирование очереди типа M/M/1 (пуассоновский поток заявок, экспоненциальное время обслуживания, один сервер).

Параметры системы:

- λ (интенсивность прибытия)
- μ (интенсивность обслуживания)
- ρ = λ/μ (коэффициент загрузки)

Среднее время ожидания: 0.99



16. Бутстрап-анализ

Метод статистического вывода, основанный на многократной генерации выборок из имеющихся данных.

Позволяет:

- Оценивать параметры распределения

- Строить доверительные интервалы

- Проводить статистические тесты

Не требует предположений о форме распределения.

Среднее: 10.30

95% CI: [9.91, 10.70]