中国人民大学 信息学院
RENMIN UNIVERSITY OF CHINA SCHOOL OF INFORMATION

程序设计1荣誉课程

5. 算法1——穷举法

授课教师：游伟 副教授、孙亚辉 副教授

授课时间：周二14:00 – 15:30，周四10:00 – 11:30（教学三楼3304）

上机时间：周二18:00 – 21:00（理工配楼二层机房）

课程主页：https://www.youwei.site/course/programming

引子：21级图灵班选拔卷第一、二题

一、设有限集合$A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$，$\sum_{i=1}^{n}a_i$叫做**集合A的和**，记作$\boldsymbol{S_A}$.

- 若集合$P=\{x|x=2n-1,n是正整数,n\le 4\}$，$P$的含有3个元素的全体子集分别为$P_1,P_2,\dots,P_k$，求$\sum_{i=1}^{k}S_{P_i}$.
- 若集合$Q=\{x|x=2n-1,n是正整数,n\le 20\}$，定义$Q^{20}$为$Q$的所有非空子集中满足集合的和不大于20的子集构成的集合（即$Q^{20}=\{X|X\subseteq Q \text{ and } X\neq\emptyset \text{ and } S_X\le 20\}$）。例如：$\{1,5,9\}\in Q^{20}$，而$\{1,5,7,9\}\notin Q^{20}$。求$\left|Q^{20}\right|$（即$Q^{20}$的元素个数）.

二、Rachel is a deceitful child. She has a funny pattern of telling lies. She tells lies six days a week and will always tell the truth on a certain day of a week.

Rachel made the following statements on three consecutive days:

- Day 1: "I lie on Monday and Tuesday."
- Day 2: "Today is either Thursday, Saturday, or Sunday."
- Day 3: "I lie on Wednesday and Friday."

Which day does Rachel tell the truth?

目录

穷举法

- 基本思想：将问题的所有可能的答案一一列举，然后根据条件判断此答案是否合适，保留合适的，丢弃不合适的
- 使用穷举算法解题的基本思路：
  - 确定穷举变量、穷举范围和判定条件
  - 逐一枚举可能的解，验证每个解是否是问题的解
- 枚举算法一般按照如下3个步骤进行
  - 确定题解的可能范围，不能遗漏任何一个真正解，也要避免重复
  - 判断是否是真正解的方法
  - 使可能解的范围降至最小，以便提高解决问题的效率

4.1 用穷举法解决逻辑问题

- 示例1：谁做的好事
- 示例2：破案

示例1：谁做的好事

图灵班有四位同学中的一位做了好事，不留名，表扬信来了之后，校长问这四位是谁做的好事。

A说：不是我。

B说：是C。

C说：是D。

D说：他胡说。

已知三个人说的是真话，一个人说的是假话。现在要根据这些信息，找出做了好事的人。

输出可行解，如果无解则输出“No Solution”。（特判是否有解）

示例1：谁做的好事

- 将四个人说的四句话写成关系表达式
  - 在声明变量时，我们让 thisman 表示要寻找的做了好事的人，定义它是字符变量，其可能的取值范围为{'A', 'B', 'C', 'D'}，分别代表四个人
  - 让 "==" 的含义为"是"，让 "!=" 的含义为"不是"

char thisman = ''; // 定义字符变量并初始化为空

说话人	说的话	写成关系表达式
A	"不是我"	thisman!='A'
B	"是C"	thisman=='C'
C	"是D"	thisman=='D'
D	"他胡说"	thisman!='D'

示例1：谁做的好事

- 穷举所有可能的状态
  - A、B、C、D四个人，只有一位是做好事者。令做好事者为1，未做好事者为0，可以有如下4种状态（情况）
  - 第一种状态是假定A是做好事者，第二种状态是假定B是做好事者，…
  - 所谓穷举是按照这四种假定逐一去测试四个人的话有几句是真话，如果不满足三句为真，就否定掉这一假定，换下一个状态再试

状态	A	B	C	D	赋值表达式
1	1	0	0	0	thisman='A'
2	0	1	0	0	thisman='B'
3	0	0	1	0	thisman='C'
4	0	0	0	1	thisman='D'

示例1：谁做的好事

- 情况1：假定让thisman=‘A’代入四句话中

说话人	说的话	关系表达式	值
A	thisman!=‘A’;	‘A’!=‘A’	0
B	thisman==‘C’;	‘A’==‘C’	0
C	thisman==‘D’;	‘A’==‘D’	0
D	thisman!=‘D’;	‘A’!=‘D’	1

四个关系表达式的值的和为1，不满足3句话为真，
假设不成立，因此显然不是‘A’做的好事。

示例1：谁做的好事

- 情况2：假定让thisman=‘B’代入四句话中

说话人	说的话	关系表达式	值
A	thisman!=‘A’;	‘B’!=‘A’	1
B	thisman==‘C’;	‘B’==‘C’	0
C	thisman==‘D’;	‘B’==‘D’	0
D	thisman!=‘D’;	‘B’!=‘D’	1

四个关系表达式的值的和为2，不满足3句话为真，假设不成立，因此显然不是‘B’做的好事。

示例1：谁做的好事

- 情况3：假定让thisman=‘C’代入四句话中

说话人	说的话	关系表达式	值
A	thisman!=‘A’;	‘C’!=‘A’	1
B	thisman==‘C’;	‘C’==‘C’	1
C	thisman==‘D’;	‘C’==‘D’	0
D	thisman!=‘D’;	‘C’!=‘D’	1

四个关系表达式的值的和为3，假设成立，因此就是‘C’做的好事。

示例1：谁做的好事

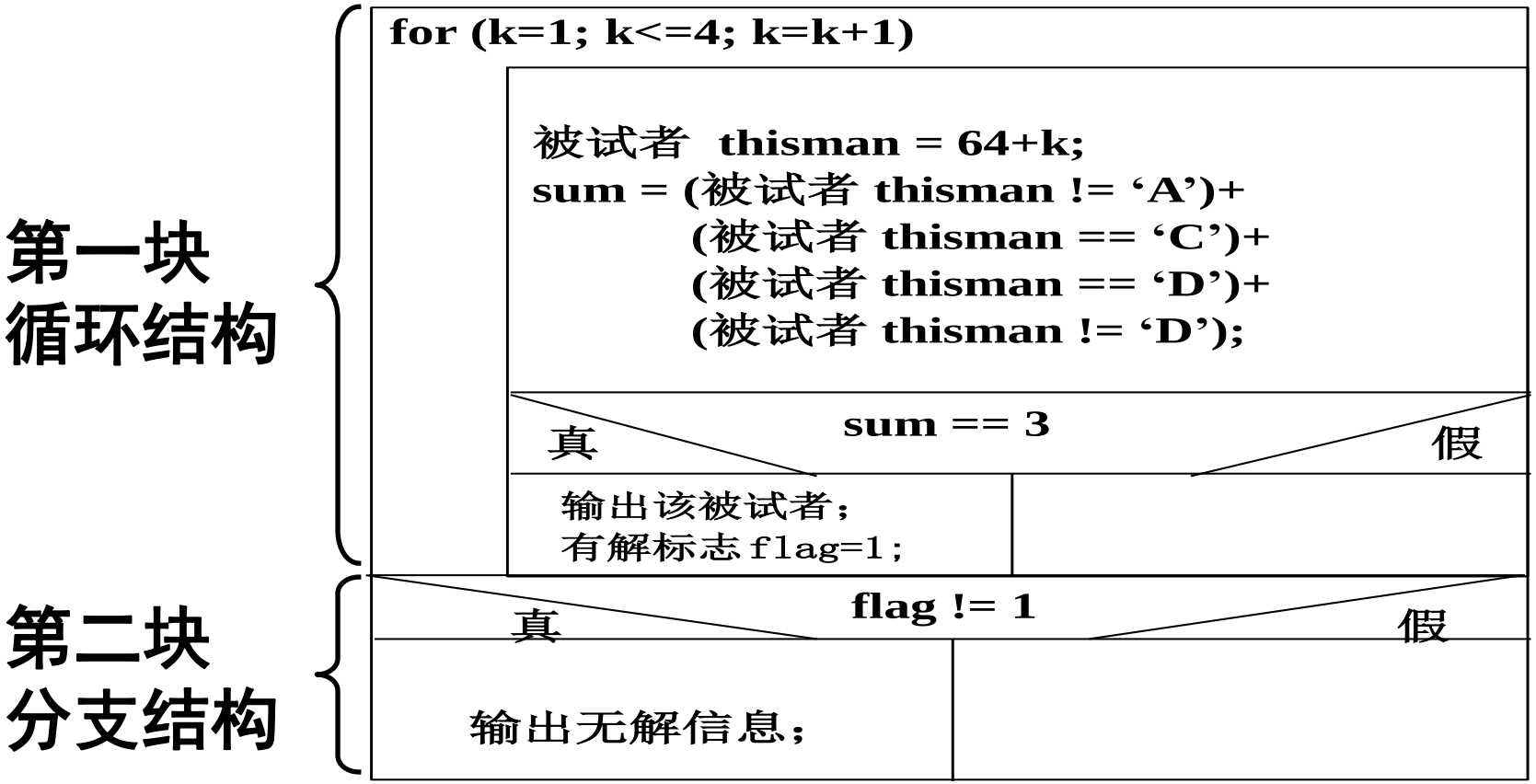
- 情况4：假定让thisman=‘D’代入四句话中

说话人	说的话	关系表达式	值
A	thisman!=‘A’;	‘D’!=‘A’	1
B	thisman==‘C’;	‘D’==‘C’	0
C	thisman==‘D’;	‘D’==‘D’	1
D	thisman!=‘D’;	‘D’!=‘D’	0

四个关系表达式的值的和为2，不满足3句话为真，假设不成立，因此显然不是‘D’做的好事。

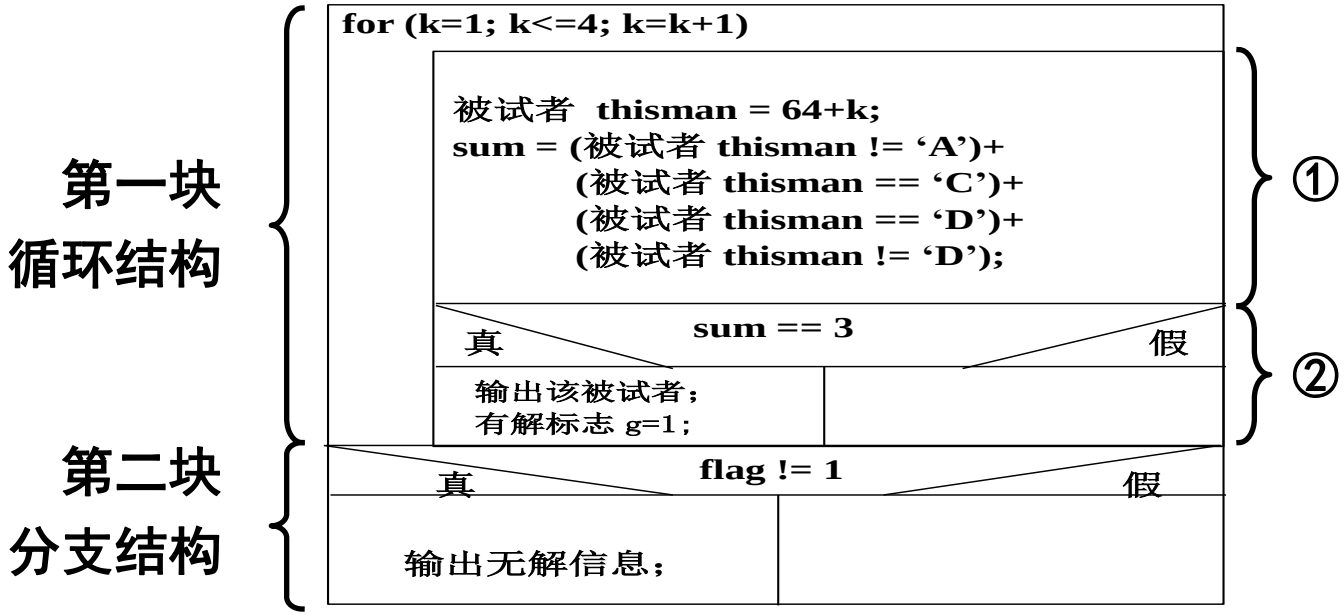
示例1：谁做的好事

- 用流程图表示



示例1：谁做的好事

- 用流程图表示
  - 第一块是循环结构，功能是产生被试对象，依次为A、B、C、D。并测试四句话有多少句为真，如有3句为真，则可确定做好事者，同时置有解标志为1（①中含两条赋值语句，②中含一条分支语句）
  - 第二块为分支结构，功能是判断是否无解，如为真，则输出无解信息



示例1：谁做的好事

- 程序源代码

```
1.  #include <stdio.h>

2.  int main(int argc, char **argv) {
3.    int k=0, sum=0, flag=0;
4.    char thisman = ' ';
5.    for (k=1; k<=4; k++) {
6.      thisman = 64+k; //A的ASCII码是65
7.      sum = (thisman!='A') + (thisman=='C') + (thisman=='D') + (thisman!='D');
8.      if (sum == 3) {
9.        printf("%c did the good thing.\n", thisman);
10.       flag = 1;
11.     }
12.   }
13.   if (flag != 1) printf("Can't find who did the good thing.\n");
14. }
```

思考：可否通过穷举谁说的假话来解题？

代码的问题：B、C说谎的时候，没有穷举所有可能的情况

谁做的好事（枚举撒谎者）

```
1. int main() {
2.     char liar = ' ', thisman = ' ';
3.     int a, b, c, d, sum, flag = 0;
4.     for (liar = 'A'; liar <= 'D'; liar++) {
5.         switch (liar) {
6.         case 'A':
7.             thisman = 'A';
8.             a = (thisman != 'A');
9.             b = (thisman == 'B');
10.            c = (thisman == 'C');
11.            d = (thisman != 'D');
12.            sum = a + b + c + d;
13.            if (sum == 3) {
14.                printf("A did the good thing");
15.                flag = 1;
16.            }
17.            break;
18.        case 'B':
19.            thisman = 'D';
20.            a = (thisman != 'A');
21.            b = (thisman == 'B');
22.            c = (thisman == 'C');
23.            d = (thisman != 'D');
24.            sum = a + b + c + d;
25.            if (sum == 3) {
26.                printf("D did the good thing");
27.                flag = 1;
28.            }
29.            break;
30.        case 'C':
31.            thisman = 'C';
32.            a = (thisman != 'A');
33.            b = (thisman == 'B');
34.            c = (thisman == 'C');
35.            d = (thisman != 'D');
36.            sum = a + b + c + d;
37.            if (sum == 3) {
38.                printf("C did the good thing");
39.                flag = 1;
40.            }
41.            break;
42.        case 'D':
43.            thisman = 'D';
44.            a = (thisman != 'A');
45.            b = (thisman == 'B');
46.            c = (thisman == 'C');
47.            d = (thisman != 'D');
48.            sum = a + b + c + d;
49.            if (sum == 3) {
50.                printf("D did the good thing");
51.                flag = 1;
52.            }
53.            break;
54.        }
55.    }
56.    if (flag == 0) printf("no solution");
57.    return 0;
58.}
```

by 武思豪

谁做的好事（枚举撒谎者）

```
#include <stdio.h>
#include <string.h>
int ans[4] = {0, 0, 0, 0}; //做好事情况，1表示做好事
void jd(int a, int b) { //judge,按照ppt表格内的逻辑编写
  if (a == 0) { //a是枚举第几个人，b是他的说话状态
    if (b == 0) {
      ans[0] = 1;
      return;
    }
  }
  if (a == 1) {
    if (b == 1) {
      ans[2] = 1;
      return;
    }
  }
  if (a == 2) {
    if (b == 1) {
      ans[3] = 1;
      return;
    }
  }
  if (a == 3) {
    if (b == 0) {
      ans[3] = 1;
      return;
    }
  }
}
int main()
{
    int truee[4] = {1, 1, 1, 1}; //撒谎情况，0表示撒谎

    for (int i = 0; i <= 3; i++)
    {
        //第一次没加这句错了，因为每一次循环都要重新开始累加
        memset(ans, 0, sizeof(ans));
        truee[i] = 0;      // 0代表说假话，for循环枚举
        jd(0, truee[0]);   // 对每个人的真假状态进行judge
        jd(1, truee[1]);   // 用jd函数对ans数组进行赋值
        jd(2, truee[2]);
        jd(3, truee[3]);
        if ((ans[0] + ans[1] + ans[2] + ans[3]) == 1)
        {
        // 结果确定，只有一个人做了这件事情
            printf("%c", 'A' + i);
            return 0;
        }
        truee[i] = 1;      // 恢复当年的模样
    }
    printf("not found");
    return 0;
}
```

by 任宣宇

谁做的好事（枚举撒谎者）

- 将每个人的陈述转换成表达式：
  - 数组statements记录每个人的陈述，statements[i][j]代表第i个人对第j个人是不是做好事的描述
  - statements[i][j] == 1：第i个人认为第j个人做了好事
  - statements[i][j] == -1：第i个人认为第j个人没有做好事
  - statements[i][j] == 0：第i个人对第j个人是否做好事没有描述
- 如果i撒谎，则i对每个人的描述取反，statements[i][j] *= -1
- 判断是否可行：
  - 每个i对每个j的描述不产生冲突
  - 做好事的人数只能为1

谁做的好事（枚举撒谎者）

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

int main()
{
   int liar, i, j, sum, abs_sum;
   int contradiction; //是否冲突 (abs_sum > abs(sum))
   int cnt_good; //做好事的人数，只能为1
   int solution = 0;
   int statements[4][4] = {
     {-1, 0, 0, 0}, //A说：不是我
     {0, 0, 1, 0},  //B说：是C
     {0, 0, 0, 1},  //C说：是D
     {0, 0, 0, -1}, //D说：他胡说
   };

   for (liar = 0; liar <= 3; liar++)
   {
     contradiction = 0;

     for (j = 0; j <= 3; j++) //liar撒谎则他的描述取反
       statements[liar][j] *= -1;

     cnt_good = 0;
     for (j = 0; j <= 3; j++) {
       for (sum = 0, i = 0; i <= 3; i++)
         sum += statements[i][j];
       for (abs_sum = 0, i = 0; i <= 3; i++)
         abs_sum += abs(statements[i][j]);
       if (abs_sum > abs(sum)) {  //几个人的描述产生矛盾
         contradiction = 1;
         break;
       }

       if (!contradiction && sum > 0) cnt_good++;
     }

     if (cnt_good == 1) {  //做好事的人数只能为1
       printf("%c lies.", 'A'+liar);
       solution = 1;
     }

     for (j = 0; j <= 3; j++) //恢复原样
       statements[liar][j] *= -1;
   }

   if (!solution) printf("No solustion\n");
   return 0;
}
```

by UV

示例2：破案

某地刑侦大队对涉及六个嫌疑人的一桩疑案进行分析：

- A、B 至少有一人作案；
- A、E、F 三人中至少有两人参与作案；
- A、D 不可能是同案犯；
- B、C 或同时作案，或与本案无关；
- C、D 中有且仅有一人作案；
- 如果 D 没有参与作案，则 E 也不可能参与作案

输出一组可行解。

示例2：破案

- 将案情的每一条写成逻辑表达式
  - CC1：A和B至少有一人作案
  - CC2：A和D不可能是同案犯
  - CC3：A、E、F 中至少有两人涉嫌作案
  - CC4：B和C或同时作案，或都与本案无关
  - CC5：C、D中有且仅有一人作案
  - CC6：如果D没有参与作案，则E也不可能参与作案
- 将案情分析的6条归纳成一个破案综合判断条件CC

CC = CC1 && CC2 && CC3 && CC4 && CC5 && CC6

示例2：破案

- CC1：A和B至少有一人作案
  - 令 A 变量表示 A 作案，B 变量表示 B 作案
  - 显然这是或的关系，有CC1=（A || B）

A	B	CC1
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

示例2：破案

- CC2：A和D不可能是同案犯
  - CC2= ! (A && D)

A	D	A&&D	CC2
1	0	0	1
1	1	1	0
0	0	0	1
0	1	0	1

示例2：破案

- CC3：A、E、F 中至少有两人涉嫌作案
  - 有3种不同的情况
    - 情况1：A 和 E 作案，（A && E）
    - 情况2：A 和 F 作案，（A && F）
    - 情况3：E和 F 作案，（E && F）
  - 这三种可能性是 或 的关系，CC3= (A && E) || (A && F) || (E && F)
- CC4：B和C或同时作案，或都与本案无关
  - 有2种不同的情况
    - 情况1：同时作案，（B && C）
    - 情况2：都与本案无关，（!B && !C）
  - 这两种可能性是 或 的关系，CC4= (B && C) || (!B && !C)
- CC5：C、D中有且仅有一人作案
  - CC5= (C && !D) || (!C && D)

示例2：破案

- CC6：如果D没有参与作案，则E也不可能参与作案
  - 分析这一条比较麻烦一些，可以列出真值表再归纳
  - CC6= D || !E（实际上是蕴含关系：!D->!E 等价于 D->E 等价于 D || !E）

D	E	!E	CC6	含 义	
1	1	0	1	D作案，E也作案	可能
1	0	1	1	D作案，E不作案	可能
0	0	1	1	D不作案，E也不可能作案	可能
0	1	0	0	D不作案，E却作案	不可能

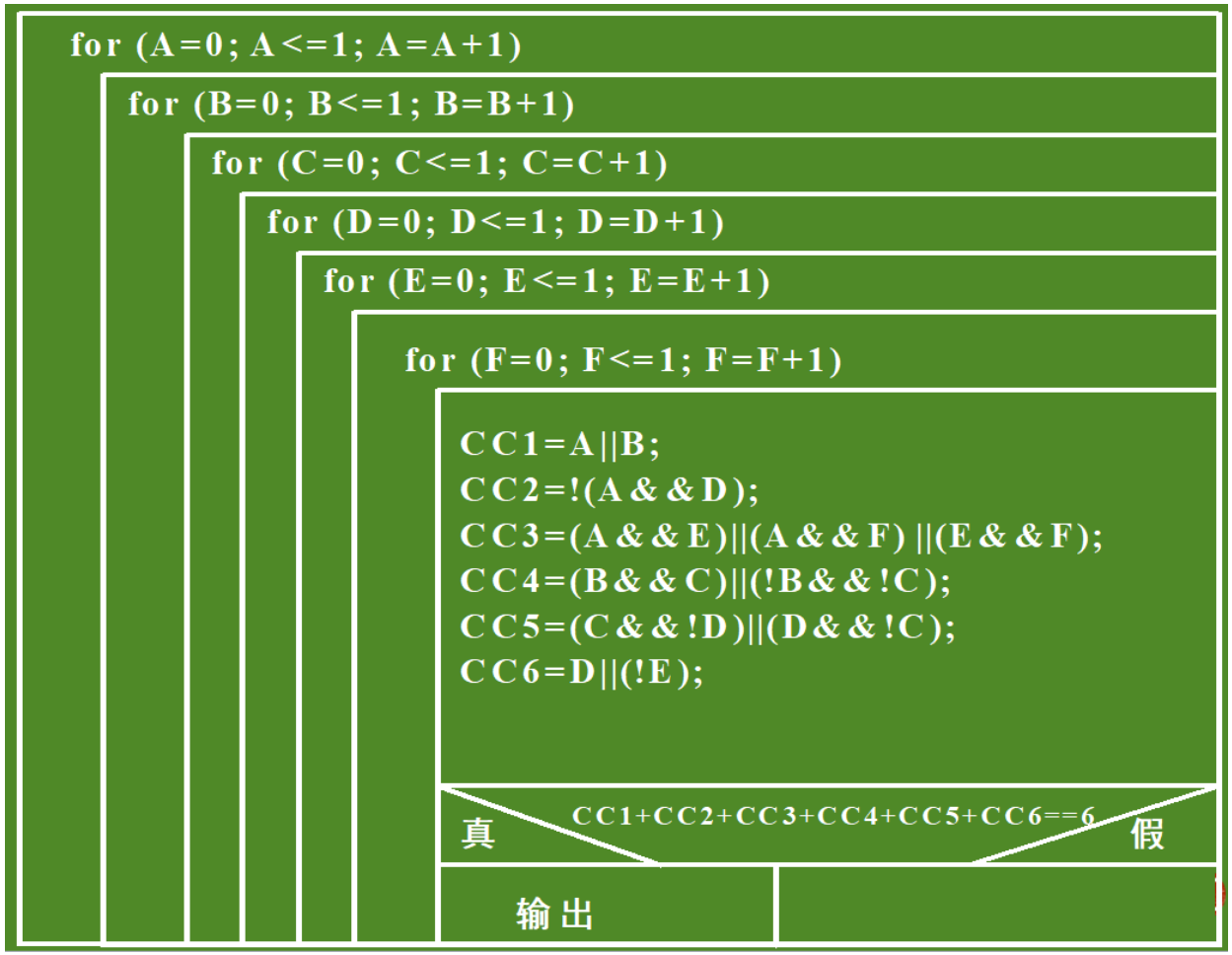
示例2：破案

- 采取穷举方法，穷举什么呢？穷举组合
  - 6个人每个人都有作案或不作案两种可能，故有2^6种组合，从这些组合中挑出符合6条分析的作案者
  - 定义 6 个整数变量，分别表示 6 个人A，B，C，D，E，F
  - 枚举每个人的可能性：让 0 表示不是罪犯，让 1 表示是罪犯

A	B	C	D	E	F
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	0
……	……				……
1	1	1	1	1	1

示例2：破案

- 用流程图表示



示例2：破案

- 程序源代码

这段程序有什么问题?

```
1.  #include <stdio.h>
2.  int main(int argc, char **argv) {
3.    int cc1, cc2, cc3, cc4, cc5, cc6;
4.    int A, B, C, D, E, F;
5.    for (A=0; A<=1; A++)
6.      for (B=0; B<=1; B++)
7.        for (C=0; C<=1; C++)
8.          for (D=0; D<=1; D++)
9.            for (E=0; E<=1; E++)
10.             for (F=0; F<=1; F++)
11.             {
12.               cc1 = A||B; cc2 = !(A&&D); cc3 = (A&&E)||(A&&F)||(E&&F);
13.               cc4 = (B&&C)||(!B&&!C); cc5 = (C&&!D)||(!C&&D); cc6 = D||!E;
14.               if (cc1+cc2+cc3+cc4+cc5+cc6 == 6) {
15.                 printf("A:%d B:%d C:%d D:%d E:%d F:%d\n", A, B, C, D, E, F);
16.                 break;
17.               }
18.             }
19. }
```

```
A:1 B:1 C:1 D:0 E:0 F:1
```

思考：用穷举法求解选拔题二

二、Rachel is a deceitful child. She has a funny pattern of telling lies. She tells lies six days a week and will always tell the truth on a certain day of a week.

Rachel made the following statements on three consecutive days:

- Day 1: “I lie on Monday and Tuesday.”
- Day 2: “Today is either Thursday, Saturday, or Sunday.”
- Day 3: “I lie on Wednesday and Friday.”

Which day does Rachel tell the truth?

求解选拔题二

- 穷举变量：
  - truth：代表Rachel周几说真话
  - day：代表Day1是周几
- 穷举范围：0~6，分别代表周日/一/二/三/四/五/六（为什么这么表示？）
- 判定条件分四种情况：
  - 情况1：Day1说真话 ⇔ day == truth
  - 情况2：Day2说真话 ⇔ (day+1)%7 == truth
  - 情况3：Day3说真话 ⇔ (day+2)%7 == truth
  - 情况4：其它 ⇔ truth != day && truth != (day+1)%7 && truth != (day+2)%7

Day 1: "I lie on Monday and Tuesday."
Day 2: "Today is either Thursday, Saturday, or Sunday."
Day 3: "I lie on Wednesday and Friday."

情况1：Day1说真话

- day == truth ←情况1对应的逻辑表达式
- truth != 1 && truth != 2 ←Day1对应的逻辑表达式 (T)
- !((day+1)%7 == 4 || (day+1)%7 == 6 || (day+1)%7 == 0) ←Day2对应的逻辑表达式 (F)

  化简后得：(day+1)%7 != 4 && (day+1)%7 != 6 && (day+1)%7 != 0
- !(truth != 3 && truth != 5) ←Day3对应的逻辑表达式 (F)

  化简后得：truth == 3 || truth == 5
- 综合上述表达式：

```
if (day == truth) flag =
        (truth != 1 && truth != 2) &&
        ((day+1)%7 != 4 && (day+1)%7 != 6 && (day+1)%7 != 0) &&
        (truth == 3 || truth == 5);
```

Day 1: "I lie on Monday and Tuesday."
Day 2: "Today is either Thursday, Saturday, or Sunday."
Day 3: "I lie on Wednesday and Friday."

情况2：Day2说真话

- (day+1)%7 == truth ←情况2对应的逻辑表达式
- !(truth != 1 && truth != 2) ←Day1对应的逻辑表达式 (F)

  化简后得：truth == 1 || truth == 2
- (day+1)%7 == 4 || (day+1)%7 == 6 || (day+1)%7 == 0 ←Day2对应的逻辑表达式 (T)
- !(truth != 3 && truth != 5) ←Day3对应的逻辑表达式 (F)

  化简后得：truth == 3 || truth == 5
- 综合上述表达式：

```
if ((day+1)%7 == truth) flag =
        (truth == 1 || truth == 2) &&
        ((day+1)%7 == 4 || (day+1)%7 == 6 || (day+1)%7 == 0) &&
        (truth == 3 || truth == 5);
```

Day 1: “I lie on Monday and Tuesday.”
Day 2: “Today is either Thursday, Saturday, or Sunday.”
Day 3: “I lie on Wednesday and Friday.”

情况3：Day3说真话

- (day+2)%7 == truth ←情况3对应的逻辑表达式
- !(truth != 1 && truth != 2) ←Day1对应的逻辑表达式 (F)

  化简后得：truth == 1 || truth == 2
- !((day+1)%7 == 4 || (day+1)%7 == 6 || (day+1)%7 == 0) ←Day2对应的逻辑表达式 (F)

  化简后得：(day+1)%7 != 4 && (day+1)%7 != 6 && (day+1)%7 != 0
- truth != 3 && truth != 5 ←Day3对应的逻辑表达式 (T)
- 综合上述表达式：

```
if ((day+2)%7 == truth) flag =
        (truth == 1 || truth == 2) &&
        ((day+1)%7 != 4 && (day+1)%7 != 6 && (day+1)%7 != 0) &&
        (truth != 3 && truth != 5);
```

Day 1: “I lie on Monday and Tuesday.”
Day 2: “Today is either Thursday, Saturday, or Sunday.”
Day 3: “I lie on Wednesday and Friday.”

情况4：其它

- day != truth && (day+1)%7 != truth && (day+2)%7 != truth ←情况4对应的逻辑表达式
- !(truth != 1 && truth != 2) ←Day1对应的逻辑表达式 (F)

  化简后得：truth == 1 || truth == 2
- !((day+1)%7 == 4 || (day+1)%7 == 6 || (day+1)%7 == 0) ←Day2对应的逻辑表达式 (F)

  化简后得：(day+1)%7 != 4 && (day+1)%7 != 6 && (day+1)%7 != 0
- !(truth != 3 && truth != 5) ←Day3对应的逻辑表达式 (F)

  化简后得：truth == 3 || truth == 5
- 综合上述表达式：

```
if ((day+2)%7 == truth) flag =
        (truth == 1 || truth == 2) &&
        ((day+1)%7 != 4 && (day+1)%7 != 6 && (day+1)%7 != 0) &&
        (truth == 3 && truth == 5)
```

Day 1: "I lie on Monday and Tuesday."
Day 2: "Today is either Thursday, Saturday, or Sunday."
Day 3: "I lie on Wednesday and Friday."

求解选拔题二

- 程序源代码

```
1. int main(void) {
2.   int truth, day, flag = 0;
3.   for (truth = 0; truth < 7; truth++) {
4.     for (day = 0; day < 7; day++) {
5.       if (day == truth) flag = (truth != 1 && truth != 2) &&
6.               ((day+1)%7 != 4 && (day+1)%7 != 6 && (day+1)%7 != 0) &&
7.               (truth == 3 || truth == 5);
8.       else if ((day+1)%7 == truth) flag = (truth == 1 || truth == 2) &&
9.               ((day+1)%7 == 4 || (day+1)%7 == 6 || (day+1)%7 == 0) &&
10.              (truth == 3 || truth == 5);
11.      else if ((day+2)%7 == truth) flag = (truth == 1 || truth == 2) &&
12.              ((day+1)%7 != 4 && (day+1)%7 != 6 && (day+1)%7 != 0) &&
13.              (truth != 3 && truth != 5);
14.        else flag = (truth == 1 || truth == 2) &&
15.                  ((day+1)%7 != 4 && (day+1)%7 != 6 && (day+1)%7 != 0) &&
16.                  (truth == 3 && truth == 5);
17.        if (flag) { flag = 1; break; }
18.      }
19.      if (flag) break;
20.    }
21.  printf("truth: %d day: %d", truth, day);
22.}
```

4.2 用穷举法解决数值问题

- 示例3：百钱买百鸡
- 示例4：同构数

示例3：百钱买百鸡

公元前五世纪，我国古代数学家张丘建在《算经》一书中提出了“百鸡问题”：鸡翁一值钱五，鸡母一值钱三，鸡雏三值钱一。百钱买百鸡，问鸡翁、鸡母、鸡雏各几何?

输出所有可行解。

一般解法

- 穷举变量： n_cocks，n_hens，n_chicks分别表示鸡翁、鸡母、鸡雏数量
- 穷举范围：
  - 0 ≤ n_cocks 100
  - 0 ≤ n_hens ≤ 100
  - 0 ≤ n_chicks ≤ 100
- 判定条件：
  - n_cocks + n_hens + n_chicks = 100（百鸡）
  - 5 * n_cocks + 3 * n_hens + n_chicks / 3 = 100（百钱）

一般解法

总共执行了$101^3=1030301$次判定

- 程序源代码

```
1. #include <stdio.h>

2. int main(int argc, char **argv)
3. {
4.   int n_cocks, n_hens, n_chicks, cnt = 0;
5.   for (n_cocks = 0; n_cocks <= 100; n_cocks++)
6.     for (n_hens = 0; n_hens <= 100; n_hens++)
7.       for (n_chicks = 0; n_chicks <= 100;n_chicks+=3)
8.       {
9.         if (n_cocks + n_hens + n_chicks == 100 && 5 * n_cocks + 3 * n_hens + n_chicks / 3 == 100)
10.          printf("n_cocks: %d, n_hens: %d, n_chicks: %d\n", n_cocks, n_hens, n_chicks);
11.        cnt++;
12.      }
13.  printf("cnt: %d\n", cnt);
14.}
```

```
n_cocks: 0, n_hens: 25, n_chicks: 75
n_cocks: 3, n_hens: 20, n_chicks: 77
n_cocks: 4, n_hens: 18, n_chicks: 78
n_cocks: 7, n_hens: 13, n_chicks: 80
n_cocks: 8, n_hens: 11, n_chicks: 81
n_cocks: 11, n_hens: 6, n_chicks: 83
n_cocks: 12, n_hens: 4, n_chicks: 84
cnt: 1030301
```

这段程序有什么问题?

优化解法

- 穷举变量： n_cocks，n_hens，n_chicks分别表示鸡翁、鸡母、鸡雏数量
- 穷举范围：
  - 0 ≤ n_cocks ≤ min(100, 100/5),
  - 0 ≤ n_hens ≤ min(100-n_cocks, (100-5*n_cocks)/3)
  - 0 ≤ n_chicks ≤ min(100-n_cocks-n_hens, (100-5*n_cocks-3*n_hens)*3)
- 判定条件：
  - n_cocks + n_hens + n_chicks = 100（百鸡）
  - 5 * n_cocks + 3 * n_hens + n_chicks / 3 = 100（百钱）

优化解法

总共执行了8133次判定

- 程序源代码

```
1. #include <stdio.h>

2. int min(int x, int y)
3. {
4.   return (x < y ? x : y);
5. }

6. int main(int argc, char **argv)
7. {
8.   int n_cocks, n_hens, n_chicks, cnt = 0;
9.   for (n_cocks = 0; n_cocks <= min(100, 100/5); n_cocks++)
10.    for (n_hens = 0; n_hens <= min(100-n_cocks, (100-5*n_cocks)/3); n_hens++)
11.      for (n_chicks = 0; n_chicks <= min(100-n_cocks-n_hens,(100-5*n_cocks-3*n_hens)*3); n_chicks += 3)
12.      {
13.        if (n_cocks + n_hens + n_chicks == 100 && 5 * n_cocks + 3 * n_hens + n_chicks / 3 == 100)
14.          printf("n_cocks: %d, n_hens: %d, n_chicks: %d\n", n_cocks, n_hens, n_chicks);
15.        cnt++;
16.      }
17.  printf("cnt: %d\n", cnt);
18.}
```

```
n_cocks: 0, n_hens: 25, n_chicks: 75
n_cocks: 4, n_hens: 18, n_chicks: 78
n_cocks: 8, n_hens: 11, n_chicks: 81
n_cocks: 12, n_hens: 4, n_chicks: 84
cnt: 8133
```

示例4：同构数

穷举[a, b]之间的同构数。所谓“同构数”，是指一个正整数n是它平方的尾部，则称n为同构数。例如6的平方数是36，6出现在36的右端，6就是同构数；76的平方数是5776，76也是同构数。

输出数位和最大的一组解。一个数的“数位和”是指这个数的每个数位的和。

示例4：同构数

- 穷举变量及其范围：$i \in [a, b]$
- 判断条件：i是i*i的尾部
- 难点：
  - 如何判断一个数是另一个数的尾部?
  - 如何求数位和?
  - 如何记录最大的解?

示例4：同构数

- 如何判断一个数是另一个数的尾部

```
1. int is_suffix(int x, int y) { //判断x是否为y的尾部
2.   int flag = 1;
3.   while (x > 0 && y > 0) {
4.     if (x % 10 != y %10) { flag = 0; break; }
5.     x /= 10, y /= 10;
6.   }
7.   return flag;
8. }
```

- 如何求数位和

```
1. int sum_of_digits(int i) { //求i的数位和
2.   int sum = 0;
3.   while (i > 0) {
4.     sum += (i%10);
5.     i /= 10;
6.   }
7.   return sum;
8. }
```

- 如何记录最大的解

```
1. int max_sum = 0;   //max_sum记录目前为止最大的数位和，赋初值为0，因为正数求和的最小值为0
2. int max_i = 0;     //max_i记录目前为止数位和最大的同构数

3. int sod = sum_of_digits(i);
4. if (sod > max_sum) {
5.   max_sum = sod;
6.   max_i = i;
7. }
```

示例4：同构数

- 程序源代码

```
1. int sum_of_digits(int i) {  //求i的数位和
2.   int sum = 0;
3.   while (i > 0) { sum += (i%10); i /= 10; }
4.   return sum;
5. }
6. int is_suffix(int x, int y) {  //判断x是否为y的尾部
7.   int flag = 1;
8.   while (x > 0 && y > 0) {
9.     if (x % 10 != y %10) { flag = 0; break; }
10.    x /= 10, y /= 10;
11.  }
12.  return flag;
13.}
14.int main() {
15.  int a, b, i, sod;
16.  int max_sum = 0, max_i = 0;
17.  scanf("%d %d", &a, &b);
18.  for (i = a; i <= b; i++) {
19.    if (i%10 != 1 && i%10 != 5 && i%10 != 6) continue;    //优化：个位数必须是1或5或6，才有可能是同构数
20.    if (!is_suffix(i, i*i)) continue;
21.    sod = sum_of_digits(i);
22.    if (sod > max_sum) { max_sum = sod; max_i = i; }
23.  }
24.  printf("max_i: %d\n", max_i);
25.}
```

思考：用穷举法求解选拔题一

一、设有限集合$A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$，$\sum_{i=1}^{n}a_i$叫做**集合A的和**，记作$\boldsymbol{S_A}$.

- 若集合$P=\{x|x=2n-1,n是正整数,n\le 4\}$，$P$的含有3个元素的全体子集分别为$P_1,P_2,\dots,P_k$，求$\sum_{i=1}^{k}S_{P_i}$.
- 若集合$Q=\{x|x=2n-1,n是正整数,n\le 20\}$，定义$Q^{20}$为$Q$的所有非空子集中满足集合的和不大于20的子集构成的集合（即$Q^{20}=\{X|X\subseteq Q \text{ and } X\neq\emptyset \text{ and } S_X\le 20\}$）。例如：$\{1,5,9\}\in Q^{20}$，而$\{1,5,7,9\}\notin Q^{20}$。求$|Q^{20}|$（即$Q^{20}$的元素个数）.

求解选拔题一

- Q= $\{x|x = 2n - 1, n是正整数, n \leq 20\}$

  = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19}

- 穷举变量：
  - 穷举Q的1个元素的子集，1个穷举变量
  - 穷举Q的2个元素的子集，2个穷举变量
  - 穷举Q的3个元素的子集，3个穷举变量
  - 穷举Q的4个元素的子集，4个穷举变量
  - 无需穷举Q的5+个元素的子集，因为5+个元素必然大于20
- 判定条件：各穷举变量的和小等于20

求解选拔题一

- 程序源代码

```
1.  #include <stdio.h>

2.  int main(int argc, char **argv) {
3.    int a, b, c, d;
4.    int cnt1=0, cnt2=0, cnt3=0, cnt4=0;

5.    //穷举Q的1个元素的子集
6.    for (a=1; a<=19; a+=2) cnt1++;
7.    printf("cnt1: %d\n", cnt1);

8.    //穷举Q的2个元素的子集
9.    for (a=1; a<=19; a+=2)
10.     for (b=a+2; b<=19; b+=2)
11.       if (a+b <= 20) cnt2++;
12.   printf("cnt2: %d\n", cnt2);
```

```
11.   //穷举Q的3个元素的子集
12.   for (a=1; a<=19; a+=2)
13.     for (b=a+2; b<=19; b+=2)
14.       for (c=b+2; c<=19; c+=2)
15.         if (a+b+c <= 20) cnt3++;
16.    printf("cnt3: %d\n", cnt3);

17.   //穷举Q的4个元素的子集
18.   for (a=1; a<=19; a+=2)
19.     for (b=a+2; b<=19; b+=2)
20.       for (c=b+2; c<=19; c+=2)
21.         for (d=c+2; d<=19; d+=2)
22.           if (a+b+c+d <= 20) cnt4++;
23.   printf("cnt4: %d\n", cnt4);
24.
25.   printf("total: %d", cnt1+cnt2+cnt3+cnt4);
26. }
```

```
cnt1: 10
cnt2: 25
cnt3: 16
cnt4: 4
total: 55
```

思考：假如$Q=\{x|x=2n-1, n是正整数, n\leq m\}$，$m$由用户输入，那么如何进行穷举？