LIB. II. $(u-c)+\frac{A}{t^{n-1}}=0$. Prorsus autem omnes si deessent, tota æquatio divisibilis foret per $u-c$, ideoque ipsa recta $u-c=0$, foret Curvæ portio.

203. Si ponatur $u-c=z$; seu, si Abscissæ in ipsa Asymtota recta capiantur, omnes Asymtotæ curvilineæ, quas unicus supremi membri Factor suppeditat, in hac æquatione generali comprehenduntur $z=\frac{C}{t^k}$, denotante k numerum quemvis integrum exponente n minorem. Quemadmodum ergo hæ Asymtotæ curvilineæ sint comparatæ, si Abscissa t ponatur infinita, videamus. Sit ergo XY Asymtota recta pro Axe sumta, & A initium Abscissarum, ducta recta CD orientur quatuor regiones, quas litteris P, Q, R & S designemus. Sit nunc primum $z=\frac{C}{t}$: &, quia sumto t negativo, fit z quoque negativa, Curva duos habebit ramos EX & FY in regionibus oppositis P & S ad rectam XY convergentes. Idem eveniet, si k fuerit numerus quicunque impar. At, si fuerit $k=2$, seu $z=\frac{C}{tt}$, quia, sive t statuatur affirmativa sive negativa, z perpetuo affirmativa manet, Curva constabit duobus ramis EX & FY in regionibus P & Q ad rectam XY convergentibus; quod idem contingit, si k fuerit numerus par quicunque, hoc tantum discrimine, quod convergentia eo fiat promtior, quo major sit exponens k.

TAB. X. Fig. 36.

TAB. X. Fig. 37.

204. Habeat supremum membrum P binos Factores $ay-bx$ inter se æquales; atque facta eadem, qua ante, ad alium Axem translatione, fiet

$P=$

$$P = \qquad\qquad + \alpha t^{n-2} u^2 + \alpha t^{n-3} u^3 + \&c.$$
$$Q = \beta t^{n-1} + \beta t^{n-2} u + \beta t^{n-3} u^2 + \beta t^{n-4} u^3 + \&c.$$
$$R = \gamma t^{n-2} + \gamma t^{n-3} u + \gamma t^{n-4} u^2 + \gamma t^{n-5} u^3 + \&c.$$
$$S = \delta t^{n-3} + \delta t^{n-4} u + \delta t^{n-5} u^2 + \delta t^{n-6} u^3 + \&c.$$
$$\&c.$$

Hinc, prout primus membri Q terminus affuerit, sive minus, duæ oriuntur æquationes

I.

$$\alpha t^{n-2} u^2 + \beta t^{n-1} = 0$$

seu

$$\alpha u^2 + \beta t = 0$$

II.

$$\alpha t^{n-2} u^2 + \beta t^{n-2} u + \gamma t^{n-2} = 0$$

seu

$$\alpha u^2 + \beta u + \gamma = 0.$$

Quod si ergo prima æquatio $\alpha u^2 + \beta t = 0$, locum habet, Asymtota sit Parabola, cum cujus ambobus ramis duo Curvæ rami in infinito confundentur. Curva ergo in binis regionibus P & R ramos habebit cum Parabola EAF denique congruentes. TAB. X. *Fig.* 38.

205. Sin autem altera æquatio $\alpha u u + \beta u + \gamma = 0$, resultet, tum videndum est an habeat duas radices reales an secus. Posteriori casu enim hac æquatione nulli prorsus rami in infinitum excurrentes denotantur. Sint ergo ambæ radices reales & inæquales, altera $u = c$, altera $u = d$, atque Curva duas habebit Asymtotas rectas inter se parallelas. Cujusnam vero utraque sit indolis, ut ante, investigabimus; scilicet, cum sit $\alpha u u + \beta u + \gamma = (u - c)(u - d)$, ponatur ubique $u = c$, præterquam in Factore $u - c$, ac prodibit $(c - d) t^{n-2}$ $(u - c)$

LIB. II. $(u-c)+t^{n-3}(\alpha c^3+\beta c^2+\gamma c+\delta)+t^{n-4}(\alpha c^4+\beta c^3+\gamma c^2+\delta c+\varepsilon)+$ &c. $=0$. Nisi ergo secundus terminus evanescat, sequentes omnes, posito $t=\infty$, evanescent, eritque Asymtota $(u-c)+\frac{A}{t}=0$; si terminus secundus evanescat, fiet $(u-c)+\frac{A}{t^2}=0$, atque ita porro. Si omnes termini, præter ultimum constantem, fuerint $=0$, erit $(u-c)+\frac{A}{t^{n-2}}=0$, quarum Curvarum figuras, si $t=\infty$, jam supra omnes descripsimus.

206. At, si ambæ radices æquationis $\alpha uu+\beta u+\gamma=0$, fuerint æquales, seu $\alpha uu+\beta u+\gamma=(u-c)^2$, quia $u=c$, si hic valor in reliquis terminis substituatur, prodibit ista æquatio, $t^{n-2}(u-c)^2+t^{n-3}(\alpha c^3+\beta c^2+\gamma c+\delta)+t^{n-4}(\alpha c^4+\beta c^3+\gamma c^2+\delta c+\varepsilon)+$ &c. $=0$: unde, prout, excepto primo, vel non desit secundus, vel non desit tertius deficiente primo, vel non quartus deficientibus secundo & tertio, sequentes oriuntur æquationes pro Asymtotis:

$$(u-c)^2+\frac{A}{t}=0;$$

$$(u-c)^2+\frac{A}{tt}=0;$$

$$(u-c)^2+\frac{A}{t^3}=0;$$

usque ad

$$(u-c)^2+\frac{A}{t^{n-2}}=0;$$

Si omnes termini præter ultimum constantem desint. Verum si etiam ultimus evanesceret, foret $(u-c)^2=0$, ideoque Linea recta ipsa foret Curvæ portio, Curvaque adeo complexa.

207. Quanquam sic omnes casus, quos duo Factores æquales præbeant,

præbeant, enumerati videntur, tamen ultima æquatio alias adhuc induere poteſt formas, unde diverſæ Aſymtotæ ſequuntur. Evenit hoc, ſi Factor poteſtatis t^{n-3} per $u-c$ diviſibilis deprehendatur: tum enim, uti in primo termino, relinquatur $u-c$ ac adjiciatur inſuper terminus ſequens qui proxime adeſt, hocque caſu ejuſmodi emergent æquationes

CAP. VIII.

$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{t}+\frac{B}{tt}=0$$

$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{t}+\frac{B}{t^3}=0$$

uſque ad

$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{t}+\frac{B}{t^{n-2}}=0.$$

Sin autem ſecundus terminus penitus deſit, vel per $(u-c)^2$ diviſibilis fuerit, tum ſpectetur terminus tertius, qui ſi per $u-c$ diviſibilis deprehendatur, in eo $u-c$ relinquatur, atque præterea ſequens proximus terminus adjungatur. Hocque caſu ejuſmodi orientur æquationes

$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{tt}+\frac{B}{t^3}=0$$

$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{tt}+\frac{B}{t^4}=0$$

uſque ad

$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{tt}+\frac{B}{t^{n-2}}=0.$$

Quod ſi etiam tertius terminus deſit, & quartus per $u-c$ diviſibilis reperiatur, vel etiam hoc deficiente quintus, & ita porro, naſcetur hujuſmodi æquatio pro Curva Aſymtota,

$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{t^p}+\frac{B}{t^q}=0,$$

 ubi

LIB. II· ubi exponens p ſemper minor erit quam q, & q minor quam $n - 1$.

208. Ponamus $u - c = z$, atque hæ æquationes omnes in hac forma $zz - \frac{Az}{t^p} + \frac{B}{t^q} = 0$, continentur. Ad quam evolvendam tres caſus ſunt ſpectandi, prout fuerit q major quam $2p$, vel q æqualis $2p$, vel q minor quam $2p$.

Caſu primo, quo q ſuperat $2p$; duæ æquationes in illa continentur, $z - \frac{A}{t^p} = 0$, & $Az - \frac{B}{t^{q-p}} = 0$: utraque enim, facto $t = \infty$, ſatisfacit. Nam, poſito $z = \frac{A}{t^p}$, æquatio ſuperior abit in $\frac{A^2}{t^{2p}} - \frac{AA}{t^{2p}} + \frac{B}{t^q}$, ſeu $A^2 - A^2 + \frac{B}{t^{q-2p}} = 0$, quod, ob q majorem quam $2p$, verum eſt, erit autem p minor quam $\frac{n-2}{2}$.

At, ſi $z = \frac{B}{At^{q-p}}$, fiet $\frac{BB}{A^2 t^{2q-2p}} - \frac{B}{t^q} + \frac{B}{t^q}$, ſeu $\frac{BB}{A^2 t^{q-2p}} - B + B = 0$, quod verum eſt ob terminum primum evaneſcentem facto $t = \infty$. Hoc ergo caſu ſuper eadem Aſymtota recta duæ habentur Aſymtotæ curvilineæ, ideoque quatuor rami in infinitum excurrentes.

Secundus caſus, quo $q = 2p$, præbet æquationem $zz - \frac{Az}{t^p} + \frac{B}{t^{2p}} = 0$, quæ, vel eſt imaginaria, ſi AA minor quam $4B$, quo caſu nulla Aſymtota extat, vel duas præbet Aſymtotas ſimiles $z = \frac{C}{t^p}$, ſi AA major quam $4B$.

In tertio caſu, ſi q minor quam $2p$, æquationis medius terminus ſemper