78. Cum igitur æquatio generalis pro Lineis primi ordinis, ſeu pro Linea recta, duas tantum determinationes admittat, propoſitis duobus punctis, per quæ Linea primi ordinis, ſeu recta, tranſeat, Linea recta penitus determinatur; neque per duo puncta data plures quam una Linea recta duci poterunt, quod quidem ex Elementis intelligitur. Sin autem unum tantum proponeretur punctum, tum, ob æquationem nondum determinatam, adhuc infinitæ Lineæ rectæ per idem punctum duci poſſunt. Cap. IV.

79. Æquatio generalis pro Lineis ſecundi ordinis quinque admittit determinationes; unde ſi quinque proponantur puncta, per quæ Linea curva tranſire debeat, Linea ſecundi ordinis penitus determinatur. Hanc ob rem per quinque data puncta unica Linea ſecundi ordinis duci poteſt; ſin autem quatuor tantum vel pauciora puncta proponantur, quia iis æquatio nondum penitus determinatur, innumerabiles Lineæ, quæ omnes ſint ordinis ſecundi per ea duci poterunt. Quod ſi autem quinque illorum punctorum tria in directum jaceant, quia Linea ſecundi ordinis a recta in tribus punctis ſecari nequit, nulla Linea curva continua reperietur, ſed prodibit Linea complexa, duæ nempe Lineæ rectæ, quæ, uti jam monuimus, in æquatione generali ſecundi ordinis continentur.

80. Quia porro æquatio generalis pro Lineis tertii ordinis novem determinationes admittit, per novem puncta pro libitu aſſumta Linea tertii ordinis ſemper duci poterit, atque unica. Sin autem numerus punctorum novenario fuerit minor, tum per ea innumerabiles Lineæ tertii ordinis duci poterunt. Simili modo per quatuordecim puncta data unica Linea quarti ordinis, per viginti puncta unica Linea quinti ordinis duci poterit, & ita porro. Atque in genere Lineæ ordinis n determinabuntur per tot puncta quot hæc formula $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}$ continet unitates; ita ut, ſi numerus pun-

 ctorum

LIB. II. ctorum datorum fuerit minor, per ea puncta innumerabiles Lineæ ordinis n duci queant.

81. Nisi ergo plura puncta, quam $\frac{n(n+3)}{2}$, proponantur, semper una vel infinitæ Lineæ ordinis n per ea duci poterunt: unica scilicet, si numerus punctorum datorum fuerit $= \frac{n(n+3)}{2}$, & infinitæ, si sit minor. Nunquam autem, utcunque hæc puncta fuerint disposita, solutio evadet impossibilis; determinatio enim coëfficientium α, β, γ, δ, &c., nunquam resolutionem æquationis quadraticæ vel altioris potestatis requirit, sed tota per æquationes simplices absolvetur. Ex quo neque unquam valores imaginarii pro quantitatibus α, β, γ, &c., reperientur, neque valores multiformes; hancque ob caussam semper Linea realis per proposita puncta transiens prodibit; atque unica, si quidem tot puncta proponantur, quot determinationes æquatio generalis admittit.

82. Quoniam Axis pro lubitu assumi potest, ista coëfficientium determinatio facilior fiet, si Axis per unum punctorum datorum ducatur, atque initium Abscissarum in ipso hoc puncto A statuatur; sic enim posito $x = 0$ fieri debebit $y = 0$, unde in æquatione generali proposita

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \epsilon xy + \zeta y^2 + \eta x^3 + \&c.,$$

statim fit $\alpha = 0$. Deinde Axis quoque per aliud punctum datorum transire poterit, quo pacto numerus quantitatum, quibus positio punctorum datorum definitur, minuetur. Denique, loco Applicatarum orthogonalium ejusmodi obliquangulæ eligi possunt, ut Applicata in initio Abscissarum ducta pariter per punctum datum transeat. Curvæ enim cognitio & constructio ex æquatione æque facile deducitur, sive Applicatæ orthogonales sive obliquangulæ statuantur.

TAB. IV. Fig. 18. 83. Si quæratur Linea secundi ordinis quæ per quinque data puncta A, B, C, D, & E transeat, ducatur Axis per duo

puncta

puncta A, B: sumaturque initium Abscissarum in altero puncto A. Tum jungatur hoc punctum A cum tertio C, sumaturque angulus CAB pro obliquitate Applicatarum. Quare ex reliquis punctis D & E ad Axem ducantur Applicatæ Dd & Ee illi AC parallelæ. Ponatur $AB = a$; $AC = b$; $Ad = c$; $Dd = d$; $Ae = e$, & $eE = f$; atque sumta æquatione generali Linearum secundi ordinis

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2$$

posito	manifestum est	fore
$x = 0$		$y = 0$
$x = 0$		$y = b$
$x = a$		$y = 0$
$x = c$		$y = d$
$x = e$		$y = f$

Hinc orientur sequentes quinque æquationes

I. $0 = \alpha$
II. $0 = \alpha + \gamma b + \zeta b^2$
III. $0 = \alpha + \beta a + \delta a^2$
IV. $0 = \alpha + \beta c + \gamma d + \delta c^2 + \varepsilon cd + \zeta d^2$
V. $0 = \alpha + \beta e + \gamma f + \delta e^2 + \varepsilon ef + \zeta f^2$

Erit ergo $\alpha = 0$; $\gamma = -\zeta b$; $\beta = -\delta a$, qui valores in reliquis substituti dant

$$0 = -\delta ac - \zeta bd + \delta cc + \varepsilon cd + \zeta dd$$
$$0 = -\delta ae - \zeta bf + \delta ee + \varepsilon ef + \zeta ff$$

multiplicentur superior per ef & inferior per cd & altera ab altera subtrahatur, ut eliminetur ε, ac proveniet

$$\begin{aligned} 0 = & -\delta acef - \zeta bdef + \delta ccef + \zeta ddef \\ & + \delta acde + \zeta bcdf - \delta cdee - \zeta cdff \end{aligned}$$

seu

$\frac{\delta}{\zeta}$

$$\frac{\delta}{\zeta} = \frac{bdef - bcdf - ddef + cdff}{acde - acef - cdee + ccef},$$

unde fit

$$\delta = df(be - bc - de + cf)$$
$$\zeta = ce(ad - af - de + cf)$$

hincque omnes coëfficientes determinabuntur.

84. Determinatis autem hoc modo omnibus coëfficientibus æquationis generalis $0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \&c.$, ſuper Axe aſſumto & ſub conſtituta Applicatarum obliquitate, Linea curva deſcribetur per puncta infinita per æquationem invenienda, hæcque Linea curva tranſibit per omnia puncta propoſita. Si æquatio generalis plures admittat determinationes quam fuerint puncta propoſita, tum reliquis pro lubitu aſſumtis Linea curva per ſingula puncta data deſcribetur ope æquationis omnino determinatæ. Tribuuntur autem Abſciſſæ x ſucceſſive plures valores tam affirmativi quam negativi ut 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c., & -1, -2, -3, -4, &c., ac pro ſingulis ex æquatione inveſtigantur valores Applicatæ y convenientes, ſicque plurima innoteſcunt puncta ſatis vicina, per quæ Curva tranſibit, ex quibus proinde tractus Curvæ facile perſpicietur.

CAPUT

CAPUT V.

Cap. V.

De Lineis ſecundi Ordinis.

85. Quia in Linearum ordine primo ſola Linea recta continetur cujus indoles jam ſatis ex Geometria elementari conſtat, Lineas SECUNDI ORDINIS aliquanto diligentius contemplemur, quod eæ inter omnes Lineas curvas ſint ſimpliciſſimæ, atque per totam Geometriam ſublimiorem uſum habeant ampliſſimum. Præditæ autem ſunt iſtæ Lineæ, quæ etiam SECTIONES CONICÆ vocantur, plurimis inſignibus proprietatibus, quas cum antiquiſſimi Geometræ eruerunt, tum recentiores amplificarunt. Harumque proprietatum cognitio adeo neceſſaria judicatur, ut a pleriſque Auctoribus ſtatim poſt Geometriam elementarem explicari ſoleant. Quoniam vero iſtæ proprietates omnes non ex uno principio derivari poſſunt, ſed alias æquatio patefecit, alias generatio ex Sectione Coni, alias denique alii deſcribendi modi, hic tantum eas proprietates inveſtigabimus, quas æquatio ſola ſine aliis ſubſidiis ſuppeditat.

86. Conſideremus ergo æquationem generalem pro Lineis ſecundi ordinis, quæ eſt

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta yy,$$

quam æquationem ita comparatam eſſe oſtendimus, ut, quocunque angulo Applicatæ ad Axem inclinatæ ſtatuantur, ea tamen ſemper omnes Lineas ſecundi Ordinis in ſe complectatur. Tribuatur jam iſti æquationi hæc forma

$$yy + \frac{(\varepsilon x + \gamma)y}{\zeta} + \frac{\delta xx + \beta x + \alpha}{\zeta} = 0,$$

ex qua patet cuique Abſciſſæ x reſpondere vel duas Applica-