tiones, ex quibus coniunctis cum aequ. 1, 2, 3, 4 atque hac, ${}^m\alpha\,{}^m\delta - {}^m\beta\,{}^m\gamma = 1$ deducitur eodem modo vt supra, terminum primum A, formae F, termino primo formae ${}^m f$ aequalem esse, illiusque terminum medium medio huius congruum secundum modulum A, vnde sequitur, quia vtraque forma est reducta, adeoque vtriusque terminus medius inter $\sqrt{D}$ et $\sqrt{D} \pm A$ situs, hos terminos medios aequales esse: hinc vero deducitur $\frac{{}^m\delta}{{}^m\beta} = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{B}}$. Veritas itaque assertionis (I) deriuata hic est ex suppositione illam esse falsam.

Supponendo autem $\frac{{}^m\delta}{{}^m\beta} = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{B}}$, prorsus simili modo et per easdem aequationes demonstratur, esse etiam $\frac{{}^m\gamma}{{}^m\alpha} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}$, quod erat secundum (II). Hinc vero adiumento aequationum $\mathfrak{A}\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\mathfrak{C} = 1$, ${}^m\alpha\,{}^m\delta - {}^m\beta\,{}^m\gamma = 1$ deducitur esse vel $\mathfrak{A} = {}^m\alpha$, $\mathfrak{B} = {}^m\beta$, $\mathfrak{C} = {}^m\gamma$, $\mathfrak{D} = {}^m\delta$, vel $-\mathfrak{A} = {}^m\alpha$, $-\mathfrak{B} = {}^m\beta$, $-\mathfrak{C} = {}^m\gamma$, $-\mathfrak{D} = {}^m\delta$, formasque F, ${}^m f$ identicas. *Q. E. D.*

194. Quum formae quas supra socias vocauimus (art. 187, 6) semper sint improprie aequiualentes (art. 160), perspicuum est, si formae reductae F, f improprie aequiualentes sint, formaeque F socia forma G, formas f, G proprie aequiualentes fore adeoque formam G in periodo formae f contentam. Quodsi itaque formae F, f tum proprie tum improprie aequiualentes sunt, patet, tum F tum G in pe-

riodo formae f reperiri debere. Quare periodus haec sibi ipsi socia erit, duasque formas ancipites continebit (art. 187, 7). Vnde theorema art. 165 egregie confirmatur ex quo iam poteramus esse certi, formam aliquam ancipitem dari formis F, f aequiualentem.

195. Problema. *Propositis duabus formis quibuscunque Φ, φ eiusdem determinantis: diiudicare vtrum aequiualentes sint, annon.*

Sol. Quaerantur duae formae reductae F, f, propositis Φ, φ resp. proprie aequiualentes (art. 183). Quae prout aut proprie tantum aequiualent, aut improprie tantum, aut vtroque modo, aut neutro; etiam propositae aut proprie tantum aequiualentes erunt, aut improprie tantum, aut vtroque aut neutro modo. Euoluatur periodus alterutrius formae reductae *e. g.* periodus formae f. Si forma F in hac periodo occurrit neque vero simul forma ipsi F socia, manifesto casus *primus* locum habebit; contra si socia haec adest neque vero F ipsa, *secundus*; si vtraque, *tertius*; si neutra, *quartus*.

Ex. Propositae sint formae (129, 92, 65), (42, 59, 81) determinantis 79. His proprie aequiualentes inueniuntur reductae (10, 7, — 3), (5, 8, — 3). Periodus formae prioris haec est: (10, 7, — 3), (— 3, 8, 5), (5, 7, — 6), (— 6, 5, 9), (9, 4, — 7) (— 7, 3, 10). In qua quum forma (5, 8, — 3) ipsa non reperiatur, sed tamen socia (— 3, 8, 5): formas propositas improprie tantum aequiualere concludimus.

Si omnes formae reductae determinantis dati eodem modo vt supra (art. 187, 5) in periodos P, Q, R etc. distribuuntur, atque e quauis periodo forma aliqua ad libitum eligitur, ex P, F; ex Q, G; ex R, H etc.: inter has formas F, G, H etc. duae quae proprie aequiualeant esse non poterunt. Quaeuis autem alia forma eiusdem determinantis alicui ex istis proprie aequiualens erit et quidem *vnicae* tantum. Hinc manifestum est, *omnes formas huius determinantis in totidem c l a s s e s distribui posse, quot habeantur periodi*, scilicet referendo eas quae formae F proprie aequiualent in primam classem, eas quae formae G proprie aequiualent in secundam etc. Hoc modo omnes formae in eadem classe contentae proprie aequiualentes erunt, formae vero e classibus diuersis non poterunt proprie aequiualere. Sed hic huic argumento infra fusius explicando non immoramur.

196. Problema. *Propositis duabus formis proprie aequiualentibus* Φ, φ: *inuenire transformationem propriam alterius in alteram.*

Sol. Per methodum art. 183 inueniri poterunt duae series formarum Φ, Φ', Φ'' ... Φ^n et φ, φ', φ'' ... φ^ν tales vt quaeuis forma sequens praecedenti proprie aequiualeat, vltimaeque Φ^n, φ^ν sint formae reductae; et quum Φ, φ proprie aequiualentes esse supponantur, necessario Φ^n in periodo formae φ^ν contenta erit. Sit $\varphi^\nu = f$ ipsiusque periodus vsque ad formam Φ^n haec f, f', f'' ... f^{m-1}, Φ^n, ita vt in hac periodo index formae Φ^n sit m; designenturque formae quae oppositae sunt sociis formarum