$(a\xi + a'\xi' + a''\xi'' + \text{etc.})\, x \equiv f\xi + f'\xi' + f''\xi'' + \text{etc.}$
$(b\upsilon + b'\upsilon' + b''\upsilon'' + \text{etc.})\, y \equiv f\upsilon + f'\upsilon' + f''\upsilon'' + \text{etc.}$
$(c\zeta + c'\zeta' + c''\zeta'' + \text{etc.})\, z \equiv f\zeta + f'\zeta' + f''\zeta'' + \text{etc.}$
etc.

quas breuitatis gratia ita exhibemus:

$\Sigma\,(a\xi)\, x \equiv \Sigma\,(f\xi)$
$\Sigma\,(b\upsilon)\, y \equiv \Sigma\,(f\upsilon)$
$\Sigma\,(c\zeta)\, z \equiv \Sigma\,(f\zeta)$ etc.

4) Iam plures casus sunt distinguendi. *Primo* quando omnes incognitarum coefficientes, $\Sigma\,(a\xi)$, $\Sigma\,(a\upsilon)$ etc. ad congruentiarum modulum m sunt primi, hae congruentiae secundum praecepta ante tradita solui possunt, problematisque solutio completa per congruentias formae $x \equiv p$ (mod. m), $y \equiv q$ (mod. m) etc. exhibebitur *). E. g. Si proponuntur congruentiae $x + 3y + z \equiv 1$; $4x + y + 5z \equiv 7$; $2x + 2y + z \equiv 3$ (mod. 8), inuenietur $\xi = 9$, $\xi' = 1$, $\xi'' = -14$, vnde fit $-15x \equiv -26$; quare $x \equiv 6$ (mod. 8); eodem modo inuenitur $15y \equiv -4$, $15z \equiv 1$, et hinc $y \equiv 4$, $z \equiv 7$ (mod. 8).

5) *Secundo* quando non omnes coefficientes, $\Sigma\,(a\xi)$, $\Sigma\,(b\upsilon)$ etc. ad modulum sunt primi,

*) Obseruare conuenit hancce conclusionem demonstratione egere, quam autem hic supprimimus. Proprie enim nihil aliud ex analysi nostra sequitur, quam quod congruentiae propositae per alios incognitarum x, y etc. valores solui nequeant: hos vero satisfacere non sequitur. Fieri enim posset vt nulla omnino solutio daretur. Similis paralogismus etiam in aequationum linearium explicatione plerumque committitur.

sint α, β, γ etc. diuisores communes maximi ipsius m cum $\Sigma(a\xi)$, $\Sigma(b\upsilon)$, $\Sigma(c\zeta)$ etc. resp., patetque problema impossibile esse, nisi illi numeros $\Sigma(f\xi)$, $\Sigma(f\upsilon)$, $\Sigma(f\zeta)$ etc. resp. metiantur. Quando vero hae conditiones locum habent, congruentiae in (3) complete resoluentur per tales $x \equiv p (\text{mod. } \frac{m}{\alpha})$, $y \equiv q (\text{mod. } \frac{m}{\beta})$, $z \equiv r (\text{mod. } \frac{m}{\gamma})$ etc., aut si mauis dabuntur α valores diuersi ipsius x (i. e. secundum m incongrui puta p, $p + \frac{m}{\alpha} \ldots p + \frac{(\alpha - 1)m}{\alpha}$), β valores diuersi ipsius y etc., illis congruentiis satisfacientes: manifestoque omnes solutiones congruentiarum propositarum (si quae omnino dantur) inter illas reperientur. Attamen hanc conclusionem conuertere non licet; nam plerumque non omnes combinationes omnium α valorum ipsius x cum omnibus ipsius y cum omnibus ipsius z etc. problemati satisfaciunt, sed quaedam tantum, quarum nexum per vnam pluresue congruentias conditionales exhibere licet. At quum completa huius problematis resolutio ad sequentia non sit necessaria, hoc argumentum fusius hoc loco non exsequimur, exemploque ideam qualemcunque de eo dedisse sat habemus.

Propositae sint congruentiae $3x + 5y + z \equiv 4$, $2x + 3y + 2z \equiv 7$, $5x + y + 3z \equiv 6 (\text{mod. } 12)$. Hic fiunt ξ, ξ', ξ''; $\upsilon, \upsilon', \upsilon''$; ζ, ζ', ζ'' resp. $= 1, -2, 1; 1, 1, -1; -13, 22, -1$, vnde $4x \equiv -4$, $7y \equiv 5$, $28z \equiv 96$. Hinc prodeunt quatuor valores ipsius x puta $\equiv 2, 5, 8, 11$; vnus valor ipsius y puta $\equiv 11$; quatuor valores ipsius z puta $\equiv 0, 3, 6, 9$ (mod. 12). Iam vt sciamus, quasnam combinationes valorum ipsius x cum valoribus ipsius z adhibere liceat, substituimus in congruentiis propp. pro x, y, z resp. $2 + 3t$, 11, $3u$, vnde transeunt in has $57 + 9t + 3u \equiv 0$, $30 + 6t + 6u \equiv 0$, $15 + 15t + 9u \equiv 0 \pmod{12}$, quibus facile intelligitur aequiualere has $19 + 3t + u \equiv 0$, $10 + 2t + 2u \equiv 0$, $5 + 5t + 3u \equiv 0 \pmod{4}$. Prima manifesto requirit vt sit $u \equiv t + 1 \pmod{4}$, quo valore in reliquis substituto etiam his satisfieri inuenitur. Hinc colligitur, valores ipsius x hos $2, 5, 8, 11$ (qui prodeunt statuendo $t \equiv 0, 1, 2, 3$) necessario combinandos esse cum valoribus ipsius z his $z \equiv 3, 6, 9, 0$ resp., ita vt omnino quatuor solutiones habeantur

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv 2,\ 5,\ 8,\ 11 \\ y \equiv 11, 11, 11, 11 \\ z \equiv 3,\ 6,\ 9,\ 0 \end{array}\right\} \pmod{12}$$

* * *

His disquisitionibus, per quas sectionis propositum iam absolutum est, adhac quasdam propositiones similibus principiis innixas adiungimus, quibus in sequentibus frequenter opus erit.

38. Problema. *Inuenire, quot numeri positiui dentur numero positiuo dato A minores simulque ad ipsum primi.*

Designemus breuitatis gratia multitudinem numerorum positiuorum ad numerum datum primorum ipsoque minorum per praefixum characterem ϕ. Quaeritur itaque ϕA.