Hinc erit $B = \eta\mathfrak{k}D + \mathfrak{k}k\mathfrak{B}$, $B' = \zeta\mathfrak{k}D + \mathfrak{k}k\mathfrak{B}'$, adeoque, propter $\mathfrak{k}k = \pm 1$, vel $B \equiv \mathfrak{B}$, $B' \equiv \mathfrak{B}'$, vel $B \equiv -\mathfrak{B}$, $B' \equiv -\mathfrak{B}'$ (mod. D). In casu priori valores (B, B'), $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}')$ aequiualentes vocamus, in posteriori oppositos; repraesentationem formae Φ autem ad quemlibet valorem expr. $\sqrt{\Delta(p, -q, r)}$ (mod. D), qui ex ipsa per methodum in I deduci potest, *pertinere* dicemus. Hinc omnes valores, ad quos eadem repraesentatio pertinet, vel aequiualentes erunt vel oppositi.

III. Vice versa autem, si vt ante in I repraesentatio formae Φ per f haec $x = \alpha t + \beta u$ etc. ad valorem (B, B') pertinet, qui inde deducitur adiumento transformationis

$$\begin{array}{ccc} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{array}$$

eadem quoque ad quemuis alium valorem $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}')$ pertinebit, qui illi vel aequiualens est vel oppositus; i. e. loco ipsorum γ, γ', γ'' alios integros δ, δ', δ'' accipere licebit, pro quibus aequatio (Ω) haec $(\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')\delta + (\alpha''\beta - \alpha\beta'')\delta' + (\alpha\beta' - \alpha'\beta)\delta'' = \pm 1$ locum habeat, et qui ita comparati sint, vt coëfficiens 4 et 5 in forma ei adiuncta, in quam f per substitutionem (S)

$$\begin{array}{ccc} \alpha, & \beta, & \delta \\ \alpha', & \beta', & \delta' \\ \alpha'', & \beta'', & \delta'' \end{array}$$

transit, resp. fiant $= \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$. Statuatur enim $\pm B = \mathfrak{B} + \eta D$, $\pm B' = \mathfrak{B}' + \zeta D$ (accipiendo hic et postea signa superiora vel inferiora, prout valores (B, B'), $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}')$ aequiualentes sunt vel oppositi), vnde ζ, η erunt integri, transeatque g per substitutionem

$$\begin{matrix} 1, & 0, & \zeta \\ 0, & 1, & \eta \\ 0, & 0, & \pm 1 \end{matrix}$$

in formam $\mathfrak{g}$, cuius determinantem esse Δ, in forma adiuncta vero coëfficientes 4 et 5 resp. $= \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ fieri facile perspicietur. Faciendo autem $\alpha\zeta + \beta\eta \pm \gamma = \delta$, $\alpha'\zeta + \beta'\eta \pm \gamma' = \delta'$, $\alpha''\zeta + \beta''\eta \pm \gamma'' = \delta''$, nullo negotio patebit, f per substitutionem (S) transire in $\mathfrak{g}$, atque aequationi (Ω) satisfactum esse. *Q. E. D.*

283. Ex his principiis deducitur methodus sequens, omnes repraesentationes proprias formae binariae $\phi = ptt + 2qtu + ruu$ determinantis D per ternariam f determinantis Δ inueniendi.

I. Eruantur omnes valores diuersi (i. e. non aequiualentes) expressionis $\sqrt{\Delta(p, -q, r)}$ (mod. D). Hoc problema pro eo casu, vbi ϕ est forma primitiua atque Δ ad D primus, supra (art. 233) solutum est, casusque reliqui ad hunc facillime reducuntur, quam tamen rem fusius hic explicare breuitas non permittit. Obseruamus tantummodo, quoties Δ ad D primus sit, expressionem $\Delta(p, -q, r)$ residuum quadraticum ipsius D esse non posse, nisi ϕ fuerit forma primitiua. Supponendo enim $\Delta p = BB - DA'$, $-\Delta q = BB' - DB''$, $\Delta r = B'B' - DA$, fit $(DB'' - \Delta q)^2 = (DA' + \Delta p)(DA + \Delta r)$; hinc, per euolutionem et substituendo $qq - pr$ pro D, fit $(qq -$

$pr)\ (B''B'' - AA') - \Delta\,(Ap + 2B''q + A'r) + \Delta\Delta = 0$, vnde facile concluditur, si p, q, r diuisorem communem haberent, hunc etiam ipsum $\Delta\Delta$ metiri; tunc vero Δ ad D primus esse non posset. Quare p, q, r diuisorem communem habere nequeunt, siue φ erit forma primitiua.

II. Designemus multitudinem horum valorum per m, supponamusque, inter eos reperiri n valores, qui sibi ipsis oppositi sint (statuendo $n = 0$ quando tales non adsunt). Tunc manifestum est, ex $m - n$ reliquis valoribus binos semper oppositos fore (quoniam cuncti valores complete haberi supponuntur); reiiciatur e binis quibusque valoribus oppositis vnus ad libitum, remanebuntque omnino valores $\frac{1}{2}(m + n)$. Ita e. g. ex octo valoribus expr. $\sqrt{-1} \times (19, 3, 41)$ (mod. 770) his $(44, 237)$, $(171, -27)$, $(269, -83)$, $(291, -127)$, $(-44, -237)$, $(-171, 27)$, $(-269, 83)$, $(-291, 127)$, quatuor posteriores sunt reiiciendi, tamquam quatuor prioribus oppositi. Ceterum perspicuum est, si (B, B') sit valor sibi ipsi oppositus, $2B$, $2B'$, et proin etiam $2\Delta p$, $2\Delta q$, $2\Delta r$ per D diuisibiles fore; quodsi itaque Δ, D inter se primi sunt, etiam $2p$, $2q$, $2r$ per D diuisibiles erunt, et quum, per I, in hoc casu etiam p, q, r diuisorem communem habere nequeant, etiam 2 per D diuisibilis esse debebit, quod fieri nequit nisi D vel $= \pm 1$, vel $= \pm 2$. Quamobrem pro omnibus valoribus ipsius D maioribus quam 2 semper erit $n = 0$, si Δ ad D est primus.

III. His ita factis manifestum est, quamuis repraesentationem propriam formae φ per f ne-