APPEND. Ad hoc igitur opus eſt, ut præter æquationem inter x & y, qua natura projectionis exprimitur, habeatur æquatio inter z & x, vel inter z & y, vel etiam inter tres z, x, y, ex qua longitudo perpendiculi $QM = z$ pro quovis puncto Q innoteſcat.

136. Cum autem æquatio inter z & x exprimat projectionem Curvæ GMH in plano BAD factam, æquatio autem inter z & y projectionem in plano CAD, atque æquatio inter tres variabiles z, y & x exhibeat Superficiem, in qua Curva GMH verſetur: manifeſtum eſt primum ex duabus projectionibus ejuſdem Curvæ GMH in duobus planis factis ipſam Curvam GMH cognoſci. Tum vero perſpicuum eſt, ſi detur Superficies, in qua Linea curva GMH contineatur, atque præterea ejus projectio in quodam plano, pariter Curvam illam fore cognitam. Erigantur enim ex ſingulis projectionis punctis rectæ normales QM, quarum interſectio cum Superficie definiet Curvam GMH quæſitam.

137. His præmiſſis, quæ ad indolem cujuſque Curvæ non in eodem plano conſtitutæ cognoſcendam pertinent, non difficile erit interſectionem duarum quarumvis Superficierum definire. Quemadmodum enim interſectio duorum planorum eſt Linea recta, ita interſectio duarum Superficierum quarumvis erit Linea, ſive recta ſive curva; hæcque vel in eodem plano poſita vel ſecus. Utcunque autem fuerit comparata, ſingula ejus puncta ad utramque Superficiem pertinebunt, ideoque in æquatione utriuſque Superficiei continebuntur. Quod ſi ergo ambæ Superficies exprimantur æquationibus inter ternas Coordinatas, quæ ad eadem tria plana principalia inter ſe normalia ſeu ad eoſdem tres Axes inter ſe normales AB, AC & AD referantur, tum ambæ iſtæ æquationes conjunctæ naturam interſectionis exprimient.

138. Propoſitis ergo duabus Superficiebus ſe mutuo ſecantibus, utriuſque natura exprimi debet æquatione inter tres Coordinatas, quæ ad eoſdem Axes principales referantur: ſicque habebuntur duæ æquationes inter tres Coordinatas x,

y &

y & z, ex quibus si una eliminetur, æquatio inter binas reliquas præbebit projectionem intersectionis in plano, quod his duabus Coordinatis constituitur, factæ. Hoc igitur modo quoque intersectio cujusque Superficiei a plano factæ investigari poterit: cum enim æquatio generalis pro plano sit $\alpha z + \beta y + \gamma x = f$, si in æquatione Superficiei loco z substituatur ejus valor ex illa æquatione oriundus, nempe $z = \frac{f - \beta y - \gamma x}{\alpha}$, prodibit æquatio pro projectione intersectionis in plano Coordinatarum x & y facta. Simul vero æquatio $z = \frac{f - \beta y - \gamma x}{\alpha}$ pro quovis puncto Q projectionis præbebit quantitatem perpendiculi QM ad ipsam intersectionem pertingentis. CAP. VI.

139. Quod si eveniat ut æquatio pro projectione fiat impossibilis, uti si inveniretur $xx + yy + aa = 0$; tum hoc erit indicium, ambas Superficies se mutuo nusquam intersecare. Sin autem æquatio projectionis in unicum punctum deducat, seu, si projectio in punctum evanescat, tum ipsa quoque intersectio erit punctum, ideoque ambæ Superficies se mutuo in puncto contingent; qui contactus itaque ex æquatione cognosci poterit. Datur autem præterea contactus linearis, quando duæ Superficies se in infinitis punctis contingunt; Lineaque contactus vel erit recta vel curva. Recta scilicet erit, si planum tangat Cylindrum vel Conum: Conus rectus autem a Globo intus tangetur per Peripheriam Circuli. Qui contactus ex æquatione cognoscentur, si pro projectione ejusmodi prodierit æquatio, quæ duas habeat radices æquales, propterea quod contactus nil aliud est, nisi concursus duarum intersectionum.

140. Ad hæc clarius explicanda ponamus Globum secari a plano quocunque. Sumamus æquationem ad Centrum Globi accommodatam $zz + yy + xx = aa$, pro plano autem utcunque posito hæc habebitur æquatio

$$\alpha z + \beta y + \gamma x = f,$$

unde

APPEND. unde, cum sit $z = \frac{f - \beta y - \gamma x}{\alpha}$, sequens orietur æquatio inter x & y pro projectione

$$0 = ff - \alpha^2 a^2 - 2\beta f y - 2\gamma f x + (\alpha^2 + \beta^2) y^2 + 2\beta\gamma x y + (\alpha^2 + \gamma^2) x x,$$

quam patet esse Ellipsin, si quidem æquatio fuerit realis; sin autem fuerit imaginaria Globus a plano nusquam tangetur: at, si Ellipsis in punctum evanescat, planum & Globus se mutuo tangent. Qui casus ut eruatur, quæratur

$$y = \frac{\beta f - \beta\gamma x \pm \alpha\sqrt{(a^2(\alpha^2 + \beta^2) - f^2 + 2\gamma f x - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) x x)}}{\alpha^2 + \beta^2},$$

ubi si f ejusmodi habuerit valorem, ut quantitas radicalis nunquam fieri possit realis, nullus dabitur contactus, neque intersectio.

141. Ponamus esse $f = a\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}$ eritque

$$y = \frac{\beta f - \beta\gamma x \pm \alpha x\sqrt{-(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} \mp \alpha\gamma a\sqrt{-1}}{\alpha^2 + \beta^2};$$

cui æquationi realiter satisfieri nequit, nisi sit

$$x = \frac{\gamma a}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}}, \ \& \ y = \frac{\beta a}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}}.$$

Quare, si fuerit $f = a\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}$, planum, quod exprimitur æquatione $\alpha z + \beta y + \gamma x = f$, Globum tanget; punctumque contactus habebitur, si capiatur

$$x = \frac{\gamma a}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}}; \ y = \frac{\beta a}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}}, \ \& \ z = \frac{\alpha a}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}}$$

quorum valorum veritas per Geometriam elementarem, ubi contactus Sphæræ a plano docetur, comprobari potest.

142. Hinc igitur generalis regula deducitur, cujus ope cognosci potest, utrum Superficies quæcunque a plano aliave Superficie

Superficie tangatur an non? Eliminata enim ex ambabus æquationibus una variabili, videndum eſt an æquatio reſultans reſolvi poſſit in Factores ſimplices an minus. Si enim habeat duos Factores ſimplices imaginarios, dabitur contactus in puncto, quod innoteſcet ponendo utrumque Factorem $= 0$. Sin autem habeat duos Factores ſimplices reales eoſque inter ſe æquales, Superficies ſe mutuo ſecundum Lineam rectam tangent. Quod ſi vero illa æquatio habeat duos Factores non ſimplices æquales; ſeu, ſi fuerit per quadratum diviſibilis, tum ejus radix nihilo æqualis poſita exhibebit projectionem illius Lineæ, quæ ex contactu oritur. Hinc quoque patet ſi eadem illa æquatio quatuor habuerit Factores imaginarios, tum Superficies ſe mutuo in duobus punctis contingere. Cap. VI.

143. Quo hæc plenius explicentur, inveſtigemus contactum Coni & Globi cujus Centrum in Axe Coni ſit poſitum. Æquatio pro Globo eſt $zz + yy + xx = aa$, pro Cono autem $(f - z)^2 = mxx + nyy$, poſito quod Vertex Coni intervallo f a Centro Globi ſit remotus. Eliminemus hinc variabilem y, eritque

$$(f - z)^2 = naa - nzz + (m - n)xx,$$

pro projectione interſectionis in plano Coordinatarum x & z. Sit primum Conus rectus, ſeu $m = n$, eritque

$$z = \frac{f \pm \sqrt{(n(1+n)aa - nff)}}{1+n}.$$

Quare, ſi fuerit $f = a\sqrt{(1+n)}$, erit dupliciter $z = \frac{a}{\sqrt{(1+n)}}$, ideoque contactus erit linearis; ſcilicet per Circulum, cujus projectio in plano per Axem tranſeunte eſt Linea recta ad Axem normalis.

144. Pro Cono autem ſcaleno, ubi m, & n ſunt inæquales, æquatio inventa videtur ſemper dare interſectionem, cum ta-

APPEND. men ſæpius nulla exiſtat. Semper enim, ſi quidem m ſuperet n, prodibit æquatio realis pro projectione interſectionis: at vero notandum eſt realitatem projectionis non ſemper indicare interſectionem realem. Ut enim ipſa interſectio ſit realis non ſufficit projectionem eſſe realem, ſed inſuper perpendicula a projectione ad interſectionem ducta realia eſſe oportet. Quamvis igitur omnis Curva realis habeat quaſvis projectiones reales; tamen non viciſſim ex realitate projectionis realitas ipſius Curvæ, quæ quæritur, concludi poteſt. Hæcque cautela perpetuo probe eſt adhibenda, ne realitate æquationum, quas pro projectionibus invenimus, abutamur.

145. Hoc incommodum evitabimus, ſi projectionem in plano Ordinatarum x & y quæramus: quia enim in hoc plano nullum datur punctum, cui non punctum in conica Superficie reſpondeat, ſi projectio in hoc plano fuerit realis, ipſa quoque interſectio erit realis. Cum igitur ſit $z = \sqrt{(aa - xx - yy)}$, fiet ex altera æquatione

$$f - \sqrt{(aa - xx - yy)} = \sqrt{(mxx + nyy)}$$

ſeu

$$aa + ff - (1+m)xx - (1+n)yy = 2f\sqrt{(aa - xx - yy)}$$

porroque

$$\left.\begin{matrix} (aa-ff)^2 \begin{matrix} -2(aa-ff) \\ -2(aa+ff)m \end{matrix}\Big\} x^2 \begin{matrix} -2(aa-ff) \\ -2(aa+ff)n \end{matrix}\Big\} y^2 + \\ (1+m)^2x^4 + 2(1+m)(1+n)x^2y^2 + (1+n)^2y^4 \end{matrix}\right\} = 0$$

unde fit

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{aa - ff + n(aa+ff) - (1+m)(1+n)xx \pm}{(1+n)^2} \\ \dfrac{2f}{(1+n)^2}\sqrt{(n(1+n)aa - nff + (m-n)(1+n)xx)} \end{matrix}\right\} = y^2$$

&

$aa -$