nulla genera respondebunt. Iam formae $(1, 0, -2p)$ competit character primus; formae $(-1, 0, 2p)$ quartus; quare qui reiici debent sunt secundus atque tertius. Quum itaque character formae $(p, 0, -2)$ relatiue ad numerum 8 sit 1 *et* 3, 8, ipsius character relatiue ad p non poterit esse alius quam Rp, vnde $-2Rp$.

VII. Est $+2$ residuum cuiusuis numeri primi p formae $8n+7$, quod per methodum duplicem demonstrare licet. *Primo*, quum ex I et V sit $-1Np$, $-2Np$, erit $+2Rp$. *Secundo* quum vel $(8, 1, \frac{1+p}{8})$ vel $(8, 3, \frac{9+p}{8})$ sit forma proprie primitiua determinantis p (prout n par vel impar), ipsius character erit Rp, adeoque $8Rp$ et $2Rp$.

VIII. Quilibet numerus primus p formae $4n+1$ est non residuum cuiusuis numeri imparis q, qui ipsius p non residuum est. Patet enim, si p esset residuum ipsius q, dari formam proprie primitiuam determinantis p cuius character Np.

IX. Simili modo si numerus quicunque impar q est non residuum numeri primi p formae $4n+3$, erit $-p$ non residuum ipsius q; alioquin enim daretur forma positiua pr. primitiua determinantis $-p$ cuius character Np.

X. Quiuis numerus primus p formae $4n+1$ est residuum cuiusuis alius numeri primi q, qui ipsius p residuum est. Si etiam q est formae

$4n+3$, erit etiam $-q$ residuum ipsius p (propter II) adeoque pRq (ex IX).

XI. Si numerus quicunque primus q est residuum alius numeri primi p formae $4n+3$, erit $-p$ residuum ipsius q. Si enim q est formae $4n+1$, ex VIII sequitur pRq, adeoque (per II), $-pRq$; casus autem vbi etiam q est formae $4n+3$ huic methodo se subducit, attamen facile ex consideratione determinantis $+pq$ absolui potest. Scilicet quum ex quatuor characteribus pro hoc determinante assignabilibus Rp, Rq; Rp, Nq; Np, Rq; Np, Nq duobus nulla genera respondere possint, atque formarum $(1, 0, -pq)$, $(-1, 0, pq)$ characteres respectiue sint primus et quartus, character secundus et tertius nulli formae pr. prim. det. pq competere possunt. Quum itaque character formae $(q, 0, -p)$ resp. numeri p per hyp. sit Rp, eiusdem formae character respectu numeri q debet esse Rq, adeoque $-pRq$. *Q. E. D.*

Si in proposs. VIII et IX, q supponitur designare numerum primum, hae cum X et XI iunctae theorema fundamentale sect. praec. exhibent.

263. Postquam theorema fundamentale demonstratione noua comprobauimus, eam characterum semissem, quibus nullae formae pr. primitiuae (positiuae) respondere possunt, pro determinante quocunque non quadrato dato discernere ostendemus, quod negotium eo breuius absoluere licebit, quum ipsius fundamentum iam

in disquisitione artt. 147 - 150 sit contentum. Sit ee quadratum maximum, determinantem propositum D metiens, atque $D = D'ee$, ita vt D' nullum factorem quadratum implicet; porro sint a, b, c etc. omnes diuisores primi impares ipsius D', adeoque D' sine respectu signi sui vel productum ex his numeris vel duplum huius producti. Designetur per Ω complexus characterum particularium Na, Nb, Nc etc., solus, quando $D' \equiv 1$ (mod. 4); adiuncto charactere 3, 4, quando $D' \equiv 3$ atque e impar aut impariter par; adiunctis his 3, 8 atque 7, 8, quando $D' \equiv 3$ atque e pariter par; adiuncto vel charactere 3 *et* 5, 8, vel duobus 3, 8 atque 5, 8, quando $D' \equiv 2$ (mod. 8) atque e vel impar vel par; denique adiuncto vel charactere 5 *et* 7, 8, vel duobus 5, 8 atque 7, 8, quando $D' \equiv 6$ (mod. 8) atque e vel par vel impar. His ita factis, omnibus characteribus integris, in quibus multitudo impar characterum particularium Ω continetur, nulla genera proprie primitiua (positiua) determinantis D respondere poterunt. In omnibus casibus characteres particulares, qui exprimunt relationem ad tales diuisores primos ipsius D qui ipsum D' non metiuntur, ad generum possibilitatem vel impossibilitatem nihil conferunt. — Ex theoria combinationum autem facillime perspicitur, hoc modo reuera semissem omnium characterum integrorum assignabilium excludi.

Demonstratio horum praeceptorum adornatur sequenti modo. E principiis sect. praec., siue theorematibus in art. praec. denuo demonstratis nullo negotio deducitur, si p sit numerus