

APPEND. 32. Hujusmodi ergo Superficies non solum animo facile concipitur, sed etiam construitur atque in data materia efformatur. Ponamus enim in æquatione deesse variabilem z , ita ut æquatio tantum sit inter Coordinatas $AP = x$ & $AQ = PM = y$; ex hac in plano APQ describatur Linea curva **T A B.** BMD . Quo facto concipiatur Linea recta infinita ad planum hoc perpetuo normalis secundum Lineam hanc curvam **XXXI.** BMD circumferri; atque hæc recta motu suo producet seu efformabit Superficiem, per eam æquationem indicatam. Unde perspicuum est, si Linea BMD fuerit Circulus, tum Superficiem ex eo ortam fore Cylindri recti; sin autem Linea BMD fuerit Ellipsis, tum Superficiem Cylindri scaleni generari. Quod si Linea BMD non fuerit continua, sed ex pluribus rectis conflata figuram exhibens rectilineam, tum Superficies resultabit prismatica.

33. Quod hoc Superficierum genus Cylindros & omnia Prismata in se complectitur, universum hoc genus Superficierum appellari conveniet *cylindricum*, seu *prismaticum*; singulæ autem species sub hoc genere contentæ determinabuntur per figuram planam BMD , ex qua, modo ante descripto, sint ortæ: atque ista figura BMD *Basis* appellabitur. Quoties ergo in æquatione pro Superficie una trium variabilium x , y , z deest, tum Superficies hac æquatione contenta erit cylindrica seu prismatica. Quod si autem duæ variabiles y & x simul desint; tum ob $x = \text{Constanti}$, Linea BMD abibit in rectam ad Axem AD normalem, atque propterea Superficies fiet plana normalis ad planum APQ .

34. Post hoc Superficierum genus maxime notari meretur id, quod oritur ex æquatione inter tres variabiles x , y & z homogenea, seu in qua tres istæ variabiles ubique eundem dimensionum numerum constituunt, cujusmodi est $zz = mxz + xx + yy$. Hinc enim omnes sectiones, quæ fiunt per plana uni ex tribus principalibus parallela, erunt figuræ inter se similes. Namque, si tribuatur ipsi z valor constans h , manifestum est æquationem $hh = mhx + xx + yy$, si pro h succes-

sive

sive alii alique valores tribuantur, infinitas continere figuras C A P. H.
inter se similes; quarum Parametri sint æquales, seu propor-
tionales ipsi b . Cum igitur hæ sectiones non solum sint simi-
les, sed etiam crescant in ratione distantiarum a plano APQ ,
Lineæ, quæ ex puncto A per singularum sectionum puncta ho-
mologa ducuntur, erunt rectæ.

35. Proposita ergo hujusmodi æquatione inter tres variabi-
les x, y , & z homogenea, tribuatur ipsi z valor datus $AR = b$;
sitque TS, Mm figura in plano ipsi APQ parallelo & per
punctum R ducto, quam exhibebit æquatio inter x & y , ita
ut sit $RV = x$, & $VM = y$. Quod si ergo hæc sectio una
 TS, Mm fuerit descripta, concipiatur circa ejus Perimetrum
circumduci Linea recta infinita perpetuo per punctum A tran-
siens; atque hæc recta motu suo describet Superficiem in æ-
quatione proposita contentam. Perspicuum vero est, si figura
 TS, Mm fuerit Circulus Centrum in R habens, tum prodire
Conum rectum; sin R non sit Centrum, Conum scalenum:
at, si illa figura fuerit rectilinea, orientur cujusque generis Py-
ramides. Quam ob rem Superficies, quæ in hoc æquatio-
num generum continentur, hic *conicas* seu *pyramidales* vocabi-
mus.

36. Ex his manifestum est, si æquatio inter tres variabi-
les x, y & z fuerit homogenea, atque adeo Superficies conica
seu pyramidalis; tum non solum omnes sectiones uni plano
principali APQ parallelas inter se esse figuras similes, quarum
Parametri sint distantii sectionum a vertice A proportionales;
sed, ob eandem rationem, intelligitur quoque, omnes sectio-
nes, quæ sint vel plano APR vel plano AQR parallelæ,
eadem illa proprietate esse præditas, ut sint figuræ inter se si-
miles, quarum latera homologa teneant distantiarum ab A ra-
tionem. Infra vero ostendetur, omnes omnino sectiones hu-
jusmodi Corporum, quæ sunt inter se parallelæ, seu quæ sunt
parallelæ plano cuicumque per Verticem A ducto, inter se quo-
que fore similes, earumque Parametros distantii a vertice A
esse proportionales.

T A B.
X X X I.
Fig. 123.

APPEND.

37. Latus patet genus Superficiarum, ad quod nunc sum progressurus. Sit Z Functio quæcunque ipsius z ; ac proponatur æquatio quæcunque homogenea inter tres variabiles x , y , & Z . Fiat $Z = H$, posita $z = b$: & cum hoc casu prodeat æquatio homogenea inter x , y & H , erunt omnes sectiones, plano APQ parallelæ, figuræ inter se similes; quarum Parametri autem non distantiis b , sed earum Functionibus H erunt proportionales. Ex quo Lineæ per harum sectionum puncta homologa ductæ non erunt Lineæ rectæ, sed Curvæ a Functionis Z ratione pendentes. Tum vero etiam hinc non sequitur, sectiones, quæ alio cuiuspiam plano sint parallelæ, fore inter se similes.

38. In hoc genere ambo præcedentia continentur. Si enim fuerit $Z = z$, seu $Z = az$, ob æquationem inter x , y & z homogeneam, orientur Superficies conicæ. Idem evenit, si fuerit $Z = \alpha + \beta z$; hoc tantum discrimine, quod Vertex Coni non in ipsius punctum A cadat; scilicet, si fuerit $Z = \frac{b-z}{b}$, Vertex Coni ab A distabit intervallo b . Quod si jam statuatur $b = \infty$, figura conica abibit in cylindricam, fietque $Z = 1$. Hinc æquatio pro Superficiebus cylindricis ita erit comparata, ut in ea variabiles x & y una cum constanti 1 ubique eundem dimensionum numerum adimpleant. Quomodo-
cunque autem æquatio inter x & y fuerit comparata, si tertia variabilis z in eam non ingrediatur, semper per unitatem homogeneitas impleri potest: unde, uti supra jam ostendimus; omnis æquatio una variabili carens exprimit Superficiem cylindricam.

39. Inter hæc Corpora, in quibus omnes sectiones, uni plano principali APQ parallelæ, sunt figuræ similes, maxime notatu sunt digna ea, quorum istæ sectiones sunt Circuli Centra in eadem recta AR ad planum APQ normali habentes. Huiusmodi Corpora torno efformantur, indeque *tornata* appellantur. Pro huiusmodi ergo Corporibus æquatio generalis erit $ZZ = xx + yy$: quicunque enim valor variabili z tribuat-

tur,

tur, ut fiat $Z = H$, prodibit pro sectione plano APQ parallela æquatio $HH = xx + yy$, quæ est pro Circulo radi-
um $= H$ & Centrum in recta AR habente. Si fuerit $ZZ = zz$, habebitur Conus rectus: sin $ZZ = aa$, Cylin-
drus; &, si $ZZ = aa - zz$ prodibit Globus, quæ sunt spe-
cies præcipuæ Corporum tornatorum.

40. Contemplemur ejusmodi Corpora, quorum omnes se-
ctiones PTV normales ad Axem AP sint Triangula, horum-
que Apices T in Linea recta DT Axi AP parallela sitæ.
Sit AVB Basis hujus Corporis, seu ejus sectio in plano APQ
facta, quæ sit Curva quæcunque. Sit distantia rectæ DT ab
Axe AB , nempe AD , $= c$: positisque, ut hætenus, tribus
variabilibus $AP = x$, $PQ = y$, $QM = z$; erit PV Fun-
ctio quæpiam ipsius x : sit ea $PV = P$: erit, ob triangula
 VQM , VPT similia, $P : c = P - y : z$; seu $z = c -$
 $\frac{cy}{P}$. Pro hujusmodi ergo Corporibus æquabitur $\frac{c - z}{y}$ Fun-
ctioni cuiuspiam ipsius x . Differunt igitur hæc Corpora a co-
nicis, quod desinant in aciem rectam DT , cum conica de-
sinant in cuspidem. Si Basis AVB ponatur Circulus, Cor-
pus resultans a WALLISIO fufius est pertractatum, atque *Co-*
no-cuneus appellatum.

41. Sint, ut modo, omnes sectiones Axi AB normales
 PTV triangula ad P rectangula, quorum Vertice autem T
constituant Curvam quæcunque AT : Basis autem sit figura
 AVB . Positis tribus variabilibus $AP = x$, $PQ = y$, &
 $QM = z$; erit in Curva AVB , recta PV Functio quædam
ipsius x quæ sit $= P$: tum vero erit PT quoque Functio ip-
sius x , quæ sit $= Q$; quibus positis erit

$$P : Q = P - y : z;$$

ideoque $z = Q - \frac{Qy}{P}$, seu $Pz + Qy = PQ$, vel $\frac{z}{Q} +$

$\frac{y}{P} = 1$, vel constanti. Quod si ergo in æquatione ambæ

variabi-

APPEND. variabiles y & z una plures dimensiones nusquam conſtituant, tum Corpus ad hoc genus pertinebit, quod hic deſcripſimus.

T A B.
X X X I I.
Fig. 126.

42. Quoniam jam ſumus contemplati ea Corpora, quorum omnes ſectiões, uni plano principali parallelæ, ſunt inter ſe ſimiles: nunc ea conſideremus, in quibus omnes iſtiusmodi ſectiões ſint figuræ inter ſe ſaltem affines; ſeu, quæ, ſumtis Abſciſſis homologis, habeant Applicatas inter ſe proportionales. Sint igitur huiusmodi Corporis tres ſectiões principales ABC , ACD , & ABD , quarum iſti ACD omnes ſectiões parallelæ debeant eſſe figuræ affines. Quare in ea ponatur Baſis $AC = a$, & altitudo $AD = b$; ſumtisque Coordinatis $Aq = p$, & $qm = q$, ſit q Functio quæcunque ipſius p . Conſcipiatur nunc ſectio quæcunque parallelæ PTV , poſito intervallo $AP = x$; eritque Baſis $PV =$ Functiōi ipſius x , quæ ſit $= P$, & altitudo $PT =$ Functiōi ipſius x , quæ ſit $= Q$. Vocetur jam $PQ = y$ & $QM = z$; atque, ex affinitatis natura, erit $a : p = P : y$ & $b : q = Q : z$; ſeu $y = \frac{Pp}{a}$, & $z = \frac{Qq}{b}$.

43. Quod ſi ergo datæ fuerint omnes tres ſectiões principales Corporis, ABC , ACD , & ABD ; hinc natura ipſius Corporis determinabitur, quod habeat omnes ſectiões, ipſi ACD parallelas, ſimul eidem affines. Primum enim dantur P & Q Functiões ipſius x ; tum vero eſt q Functio ipſius p ; unde, ex binis variabilibus x & p , deſiniuntur ambæ variabiles y & z . Verum, ſi æquationem inter tres Coordinatas x , y & z deſideremus; quoniam q eſt Functio ipſius p ; ſeu, quia datur æquatio inter p & q , in hac æquatione ſubſtituatur $p = \frac{ay}{P}$, & $q = \frac{bz}{Q}$; ſicque, ob P & Q Functiões ipſius x , orietur æquatio inter tres Coordinatas x , y & z , qua natura Corporum ad hoc genus pertinentium exprimitur. Patet autem, poſito $x = 0$, fieri oportere $P = a$ & $Q = b$.