$$x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} + C x^{m-3} \ldots\ldots + N \ldots\ldots (P)$$
$$x^\mu + a x^{\mu-1} + b x^{\mu-2} + c x^{\mu-3} \ldots\ldots + n \ldots\ldots (Q)$$
omnes sunt rationales, neque vero omnes integri, productumque ex (P) *et* (Q) $=$
$$x^{m+\mu} + \mathfrak{A} x^{m+\mu-1} + \mathfrak{B} x^{m+\mu-2} + \text{etc.} + \mathfrak{Z}:$$
omnes coefficientes $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \ldots \mathfrak{Z}$ *integri esse nequeunt.*

Demonstr. Exprimantur omnes fractiones in coefficientibus A, B etc. a, b etc. per numeros quam minimos, eligaturque ad libitum numerus primus p, qui aliquem aut plures ex denominatoribus harum fractionum metiatur. Ponamus, id quod licet, p metiri denominatorem alicuius coefficientis fracti in (P), patetque si (Q) per p diuidatur, etiam in $\frac{(Q)}{p}$ dari ad minimum vnum coefficientem fractum cuius denominator implicet factorem p (puta coefficientem primum $\frac{1}{p}$). Iam facile perspicitur, in (P) datum iri terminum vnum, fractum, cuius denominator inuoluat *plures* dimensiones ipsius p quam denominatores omnium similium praecedentium, et *non pauciores* quam denominatores omnium sequentium; sit hic terminus $= G x^g$, et multitudo dimensionum ipsius p in denominatore ipsius G, $= t$. Similis terminus dabitur in $\frac{(Q)}{p}$, qui sit $= \Gamma x^\gamma$ et multitudo dimensionum ipsius p in denominatore ipsius Γ, $= \tau$. Manifesto hic erit $t + \tau$ ad minimum $= 2$. His ita praeparatis, terminus $x^{g+\gamma}$ producti ex (P) et (Q) coefficientem habebit fractum, cuius denominator $t + \tau - 1$ dimensiones ipsius p inuoluet, id quod ita demonstratur.

Sint termini qui in (P) terminum Gx^g praecedunt, $'G x^{g+1}$, $''G x^{g+2}$, etc. sequentes vero $G' x^{g-1}$, $G'' x^{g-2}$ etc.; similiterque in $(\frac{Q}{p})$

praecedant terminum Γx^{γ} termini $'\Gamma x^{\gamma+1}$, $''\Gamma x^{\gamma+2}$ etc. sequantur autem termini $\Gamma' x^{\gamma-1}$, $\Gamma'' x^{\gamma-2}$ etc. Tum constat in producto ex (P), $\frac{(Q)}{p}$ coefficientem termini $x^{g+\gamma}$ fore $= G\Gamma$

$$+ 'G\Gamma' + ''G\Gamma'' + \text{etc.}$$
$$+ '\Gamma G' + ''\Gamma G'' + \text{etc.}$$

Pars $G\Gamma$ erit fractio quae si per numeros quam minimos exprimitur in denominatore $t + \tau$ dimensiones ipsius p inuoluit, reliquae autem partes si sunt fractae, in dominatore pauciores dimensiones numeri p implicabunt, quoniam omnes sunt producta e binis factoribus quorum alter non plures quam t, alter vero pauciores quam τ dimensiones ipsius p implicat; vel alter non plures quam τ, alterque pauciores quam t. Hinc $G\Gamma$ erit formae $\frac{e}{fp^{t+\tau}}$, reliquarum vero summa formae $\frac{e'}{f'p^{t+\tau-\delta}}$, vbi δ positiuus et e, f, f' a factore p liberi: quare omnium summa erit $= \frac{ef' + e'fp^{\delta}}{ff'p^{t+\tau}}$, cuius numerator per p non diuisibilis, adeoque denominator per nullam reductionem pauciores dimensiones quam $t + \tau$ obtinere potest. Hinc coefficiens termini $x^{g+\gamma}$ in producto ex (P), (Q) erit $= \frac{ef' + e'fp^{\delta}}{ff'p^{t+\tau-1}}$, i. e *fractio* cuius denominator $t + \tau - 1$ dimensiones ipsius p implicat. *Q. E. D.*

43. *Congruentia* m^{ti} *gradus*, $Ax^{m} + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} +$ *etc.* $+ Mx + N \equiv 0$, *cuius modulus est numerus primus* p, *ipsum* A *non metiens, pluribus quam* m *modis diuersis solui non potest, siue plures quam* m *radices secundum* p *incongruos non habet* (Vid. artt. 25, 26)

Si quis neget, ponamus dari congruentias diuersorum graduum m, n, etc. quae plures quam m, n etc. radices habeant, sitque minimus gradus, m, ita vt omnes similes congruentiae inferiorum graduum theorematí nostro sint consentaneae. Quod quum de primo grado iam supra sit demonstratum (art. 26), manifestum est, m fore aut $= 2$ aut maiorem. Admittet itaque congruentia $Ax^m + Bx^{m-1} + \text{etc.} + Mx + N \equiv 0$ saltem $m+1$ radices, quae sint $x \equiv \alpha$, $x \equiv \beta$, $x \equiv \gamma$ etc., ponamusque id quod licet omnes numeros α, β, γ etc. esse positiuos et minores quam p, omniumque minimum α. Iam in congruentia proposita substituatur pro x, $y + \alpha$, transeatque inde in hanc
$A'y^m + B'y^{m-1} + C'y^{m-2} \ldots . + M'y + N' \equiv 0.$
Tum manifestum est, huic congruentiae satisfieri deberi, si ponatur $y \equiv 0$, aut $\equiv \beta - \alpha$, aut $\equiv \gamma - \alpha$ etc., quae radices omnes erunt diuersae, numerusque earum $= m+1$. At ex eo quod $y \equiv 0$ est radix, sequitur, N' per p diuisibilem fore. Quare etiam haec expressio, $y(A'y^{m-1} + B'y^{m-2} + \text{etc.} + M')$ fiet $\equiv 0$ (mod. p), si ipsi y vnus ex m valoribus, $\beta - \alpha$, $\gamma - \alpha$, etc. tribuitur, qui omnes sunt > 0 et $< p$, adeoque in omnibus hisce casibus etiam $A'y^{m-1} + B'y^{m-2} + \text{etc.} + M'$ fiet $\equiv 0$ art. 22; i. e. congruentia $A'y^{m-1} + B'y^{m-2} + \text{etc.} + M' \equiv 0$, quae est gradus $m-1^{\text{ti}}$, m radices habet et proin theorematí nostro aduersatur (patet enim facile, A' fore $= A$, adeoque per p non diuisibilem, vti requiritur) licet supposuerimus, omnes congruentias inferioris gradus quam m^{ti}, theoremati consentire. *Q. E. A.*