LIB. II. infinitarum dimenſionum, mirum non eſt ſi x habeat radices infinitas. Quanquam autem ſic poſterius paradoxon reſolvimus, tamen prius ſuam vim retinet, qua ad Logarithmicam infra Axem innumerabilia puncta diſcreta pertinere oſtendimus.

517. Multo evidentius autem hujuſmodi infinitorum punctorum diſcretorum exiſtentia monſtrari poteſt, per hanc æquationem $y = (-1)^x$: quoties enim x eſt numerus, vel integer par vel fractus habens numeratorem parem, erit $y = 1$: ſin autem x ſit numerus vel integer impar vel fractus, cujus tam numerator quam denominator ſint numeri impares, erit $y = -1$, reliquis caſibus omnibus, quibus vel x eſt fractio denominatorem parem habens, vel adeo numerus irrationalis, valor ipſius y erit imaginarius. Æquatio ergo $y = (-1)^x$ exhibebit innumerabilia puncta diſcreta ad utramque Axis partem intervallo $= 1$ poſita, quorum ne bina quidem ſunt contigua, hoc tamen non obſtante, quæque bina ad eandem Axis partem ſita, ſibi tam erunt propinqua, ut intervallum ſit data quavis quantitate aſſignabili minus. Inter duos enim Abſciſſæ valores quantumvis propinquos, non ſolum una ſed infinitæ fractiones exhiberi poſſunt, quarum denominatores ſint impares, ex his autem ſingulis naſcuntur puncta ad æquationem propoſitam pertinentia: mentientur ergo hæc puncta duas Lineas rectas Axi parallelas ab eo utrinque intervallo $= 1$ diſſitas, in his enim Lineis nullum intervallum exhiberi poteſt in quo non unum, imo infinita puncta, æquatione $y = (-1)^x$ contenta, aſſignari queant. Hæc eadem anomalia uſuvenit in æquatione $y = (-a)^x$, aliiſque huic ſimilibus, ubi quantitas negativa ad exponentem indeterminatum elevatur. Hujuſmodi ergo paradoxa, quæ in Curvis tantum tranſcendentibus locum habere poſſunt, hic expoſuiſſe neceſſe erat.

518. Ad

518. Ad hoc ergo genus Curvarum a Logarithmis pendentium pertinent omnes æquationes, in quibus non solum Logarithmi occurrunt, sed etiam exponentes variabiles, quippe qui a Logarithmis ad numeros progrediendo oriuntur, unde istæ Curvæ etiam *exponentiales* vocari solent. Hujusmodi ergo Curva erit, quæ in hac æquatione $y = x^x$, seu $ly = xlx$ continetur. Posito ergo $x = 0$, erit $y = 1$; si $x = 1$ erit $y = 1$; si $x = 2$, erit $y = 4$; si $x = 3$, erit $y = 27$, &c. Unde *BDM* exprimet formam hujus Curvæ ad Axem *AP* relatæ, ita ut, sumta $AC = 1$, sit $AB = CD = 1$. Intra *A* & *C* autem Applicatæ erunt unitate minores; si enim sit $x = \frac{1}{2}$, erit $y = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071068$: minima vero erit Applicata si capiatur Abscissa $x = \frac{1}{e} = 0,36787944$, fietque tum Applicata $y = 0,6922005$, uti in sequentibus docebitur. Quemadmodum autem hæc Curva ultra *B* sit comparata ut videamus, Abscissa x facienda est negativa, eritque $y = \frac{1}{(-x)^x}$, unde ista pars ex meris punctis discretis constabit, ad Axem tanquam Asymtotam convergentibus. Cadent autem hæc puncta ad utramque Axis partem, prout x fuerit numerus vel par vel impar. Quin etiam infra Axem *AP* infinita hujusmodi puncta cadent, si pro x sumatur fractio denominatorem habens parem; posito enim $x = \frac{1}{2}$, erit & $y = +\frac{1}{\sqrt{2}}$ & $y = \frac{-1}{\sqrt{2}}$. Curva ergo continua *MDB* in *B* subito terminatur, contra indolem Linearum algebraïcarum: loco continuationis autem habebit puncta illa discreta; unde realitas istorum punctorum quasi conjugatorum eo luculentius perspicitur. Nisi enim hæc adesse concedantur, statui deberet, totam Curvam in puncto *B* subito cessare, id quod esset legi continuitatis contrarium, ideoque absurdum.

CAP. XXI.

TAB. XXIV. Fig. 102.

519. Inter infinitas alias hujus generis Curvas, quarum con-

LIB. II. ſtructio per Logarithmos effici poteſt, dantur ejuſmodi, quarum conſtructio non tam facile patet, quæ tamen ope idoneæ ſubſtitutionis abſolvi queat. Talis eſt Curva æquatione $x^y = y^x$ contenta; ex qua quidem ſtatim perſpicitur, Applicatam y perpetuo æqualem eſſe Abſciſſæ x, ita ut recta ad Axem ſub angulo ſemirecto inclinata æquationi ſatisfaciat. Interim tamen manifeſtum eſt hanc æquationem latius patere, quam æquationem pro recta $y = x$; neque igitur hanc vim æquationis $x^y = y^x$ exhaurire: ſatisfieri enim huic æquationi poteſt, etiamſi non ſit $x = y$; quoniam, ſi $x = 2$, etiam eſſe poteſt
TAB. XXV. Fig. 103. $y = 4$. Præter rectam ergo EAF, æquatio propoſita alias complectetur partes; ad quas inveniendas, ideoque ad totam Lineam æquatione contentam exhibendam, ponamus $y = tx$, ut ſit $x^{tx} = t^x x^x$: unde, radice poteſtatis x extrahenda, erit $x^t = tx$ & $x^{t-1} = t$; ideoque habebitur $x = t^{\frac{1}{t-1}}$ & $y = t^{\frac{t}{t-1}}$. Vel, poſito $t - 1 = \frac{1}{u}$, erit $x = \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u$ & $y = \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{u+1}$. Hinc Curva, præter rectam EAF, habebit ramum RS ad rectas AG & AH, tanquam Aſymtotas, convergentem, cujus recta AF erit Diameter. Secabit autem Curva rectam AF in puncto C ita ut ſit $AB = BC = e$, denotante e numerum cujus Logarithmus eſt unitas. Inſuper autem æquatio ſuppeditat innumerabilia puncta diſcreta, quæ cum recta EF, & Curva RCS æquationem exhauriunt. Hinc ergo innumerabilia binorum numerorum x & y paria exhiberi poſſunt ut ſit $x^y = y^x$, tales enim numeri in rationalibus erunt

$x = 2$

$$\begin{array}{ll}
x = 2 & y = 4 \\
x = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4} & y = \frac{3^3}{2^3} = \frac{27}{8} \\
x = \frac{4^3}{3^3} = \frac{64}{27} & y = \frac{4^4}{3^4} = \frac{256}{81} \\
x = \frac{5^4}{4^4} = \frac{625}{256} & y = \frac{5^5}{4^5} = \frac{3125}{1024} \\
\&c. & \&c.
\end{array}$$

horum ſcilicet binorum numerorum alter ad alterum elevatus eandem quantitatem producit: ſic erit

$$2^4 = 4^2 = 16$$
$$\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{27}{8}} = \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{9}{4}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{27}{4}}$$
$$\left(\frac{64}{27}\right)^{\frac{256}{81}} = \left(\frac{256}{81}\right)^{\frac{64}{27}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{256}{27}}$$
&c.

520. Quanquam in his ſimilibuſque aliis Curvis infinita puncta algebraïce poſſunt determinari, minime tamen Curvis algebraïcis annumerari poſſunt, quoniam innumerabilia alia extant puncta, quæ algebraïce nullo modo exhiberi poſſunt. Tranſeamus ergo ad alterum Curvarum tranſcendentium genus, quod Arcus circulares requirit: hic autem perpetuo radium Circuli, cujus Arcus conſtructionem ingrediuntur, unitate exprimo, ne pluribus characteribus calculus perturbetur. Curvas autem ad hoc genus pertinentes non eſſe algebraïcas facile oſtendi poteſt, etiamſi impoſſibilitas quadraturæ Circuli nondum ſit evicta. Conſideremus enim ſimpliciſſimam tantum hujus generis æquationem hanc $\frac{y}{a} = A.\,fin.\,\frac{x}{c}$; ita ut Applicata y ſit proportionalis Arcui Circuli, cujus Sinus eſt $\frac{x}{c}$. Quoniam enim eidem Sinui $\frac{x}{c}$ innumerabiles Arcus conveniunt,

LIB. II. niunt, Applicata y erit Functio infinitinomia; ideoque tam ipsa quam aliæ rectæ Curvam in infinitis punctis secabunt, quæ proprietas istam Curvam ab algebraïcis clarissime distinguit. Sit s minimus Arcus sinui $\frac{x}{c}$ conveniens, & denotet π semicircumferentiam Circuli, erunt valores ipsius $\frac{y}{a}$ sequentes

$$s;\ \pi - s;\quad 2\varpi + s;\quad 3\pi - s;\quad 4\pi + s;\quad 5\pi - s;\ \&c.$$
$$-\pi - s;\ -2\varpi + s;\ -3\pi - s;\ -4\pi + s;\ -5\pi - s;\ \&c.$$

TAB. XXV. Fig. 104. Sumta ergo recta CAB pro Axe, & A pro Abscissarum principio; erunt primo, posito $x = 0$, Applicatæ $AA^1 = \pi a$, $AA^2 = 2\pi a$, $AA^3 = 3\pi a$; &c. Itemque ex altera parte $AA^{-1} = \pi a$, $AA^{-2} = 2\pi a$, $AA^{-3} = 3\pi a$, &c.: atque per singula hæc puncta Curva transibit. Sumta vero Abscissa $AP = x$, Applicata Curvam in infinitis punctis M secabit, eritque $PM^1 = as$, $PM^2 = a(\varpi - s)$, $PM^3 = a(2\varpi + s)$, &c. Curva ergo tota ex infinitis portionibus AE^1A^1; $A^1F^1A^2$; $A^2E^2A^3$; $A^3F^2A^4$; &c., similibus erit composita; ita ut singulæ rectæ Axi BC parallelæ, quæ per puncta E & F ducuntur, futuræ sint Curvæ diametri. Erit vero $AC = AB = c$, & intervalla E^1E^2, E^2E^3, E^1E^{-1}, $E^{-1}E^{-2}$, itemque F^1F^2, F^1F^{-1}, $F^{-1}F^{-2}$, erunt singula æqualia $2a\varpi$. Curva hæc a LEIBNITIO est vocata *Linea Sinuum*, quoniam ejus ope cujusque Arcus sinus facile invenitur. Cum enim sit $\frac{y}{a} = A.\,\mathit{sin}.\ \frac{x}{c}$, erit vicissim $\frac{x}{c} = \mathit{sin}.\,A.\,\frac{y}{a}$. Si ponatur $\frac{y}{a} = \frac{1}{2}\pi - \frac{z}{a}$, fiet $\frac{x}{c} = \mathit{cos}.\,A.\,\frac{z}{a}$; sicque simul habetur *Linea Cosinuum*.

521. Simili modo ex hac consideratione oritur *Linea Tangentium*, cujus æquatio erit $y = A.\mathit{tang}.\,x$, positis brevitatis ergo $a = 1$ & $c = 1$; hinc ergo convertendo fit $x = \mathit{tang}.A.\,y = \frac{\mathit{sin}.\,y}{\mathit{cos}.\,y}$, cujus Curvæ figura facile ex natura Tangentium colligitur.