

$\alpha\delta - \epsilon\gamma = \pm 1$, formam f non modo implicare formam F sed ipsi aequiualentem esse et proin si f ipsam F implicet neque vero eidem aequiualeat, quotientem $\frac{E}{D}$ esse integrum maiorem quam 1. Problema itaque hic soluendum erit, *diiudicare an forma data f determinantis D formam datam F determinantis Dee implicet*, vbi e supponitur esse numerus posituius maior quam 1. Hoc negotium ita absoluemus, vt multitudinem finitam formarum sub f contentarum assignare doceamus quae ita sint comparatae, vt F si sub f contenta est necessario alicui ex illis aequiualeat.

I. Ponamus omnes diuisores (positiuos) numeri e (inclusis etiam 1 et e) esse m, m', m'' etc., atque $e = mn = m'n' = m''n''$ etc. Designemus breuitatis gratia formam in quam f transit per substitutionem propriam $m, 0, 0, n$ ita $(m; 0)$, formam in quam f transit per substitutionem propriam $m, 1, 0, n$ per $(m; 1)$ etc. generaliterque formam in quam f per subst. propriam, $m, k, 0, n$ transmutatur per $(m; k)$. Simili modo transeat f per subst. propriam $m', 0, 0, n'$ in $(m'; 0)$; per hanc $m', 1, 0, n'$ in $(m'; 1)$; etc., per $m'', 0, 0, n''$ in $(m''; 0)$ etc. etc. Omnes hae formae sub f proprie contentae erunt, et cuiusuis determinans = Dee . Complexum omnium formarum $(m; 0), (m; 1), (m; 2) \dots (m; m-1)$ $(m'; 0), (m'; 1) \dots (m'; m'-1)$; $(m''; 0)$ etc. quarum multitudo erit $m + m' + m'' +$ etc. et quas omnes inter se diuersas fore facile perspiciatur, designemus per Ω .

T

Si e. g. forma f est haec $(2, 5, 7)$ atque $e = 5$, Ω comprehendet sequentes sex formas $(1; 0); (5; 0); (5; 1); (5; 2); (5; 3); (5; 4)$ quae si euoluuntur sunt $(2, 25, 175), (50, 25, 7), (50, 35, 19), (50, 45, 35), (50, 55, 55), (50, 65, 79)$

II. Iam dico, si forma F determinantis Dee sub f proprie contenta sit, necessario eandem alicui formarum Ω proprie aequiualem fore. Ponamus formam f transformari in F per substitutionem propriam $\alpha, \epsilon, \gamma, \delta$, eritque $\alpha\delta - \epsilon\gamma = e$. Sit numerorum γ, δ (qui ambo simul 0 esse nequeunt) diuisor communis maximus positue acceptus $= n$, atque $\frac{e}{n} = m$, qui manifestò erit integer. Accipiantur g, h ita ut sit $\gamma g + \delta h = n$, denique sit k residuum minimum posituum numeri $\alpha g + \epsilon h$ secundum modulum m . Tum forma $(m; k)$ quae manifestò erit inter formas Ω , formae F proprie aequiualebit, et quidem in ipsam transformabitur per substitutionem propriam $\frac{\gamma}{n} \cdot \frac{\alpha g + \epsilon h - k}{m} + h, \frac{\delta}{n} \cdot \frac{\alpha g + \epsilon h - k}{m} - g, \frac{\gamma}{n}, \frac{\delta}{n}$. Nam primo perspicuum est hos quatuor numeros esse integros; secundo facile confirmatur substitutionem esse propriam; tertio patet, formam in quam $(m; k)$ per substitutionem illam transeat eandem esse in quam $f^*)$ transeat per substitutionem $m \left(\frac{\gamma}{n} \cdot \frac{\alpha g + \epsilon h - k}{m} + h \right) +$

*) Quippe quae per substitutionem $m, k, 0, n$, in $(m; k)$ transit V. art. 159.

$\frac{k\gamma}{n}, m \left(\frac{\delta}{n} \cdot \frac{ag + \epsilon h - k}{m} - g \right) + \frac{k\delta}{n}, \gamma, \delta$ siue
 quoniam $mn = e = a\delta - \epsilon\gamma$ adeoque $\epsilon\gamma + mn$
 $= a\delta, a\delta - mn = \epsilon\gamma$, per hanc $\frac{1}{n} (a\gamma g +$
 $a\delta h), \frac{1}{n} (\epsilon\gamma g + \epsilon\delta h), \gamma, \delta$, siue denique quo-
 niam $\gamma g + \delta h = n$, per hanc $a, \epsilon, \gamma, \delta$ i. e. per
 hyp., in F . Quare $(m; k)$ et F proprie aequi-
 ualentes erunt. Q. E. D.

Ex his igitur semper diiudicari potest, an for-
 ma aliqua data f determinantis D formam F determi-
 nantis Dee proprie implicet. Si vero quaeritur an
 f ipsam F improprie implicet, inuestigari tan-
 tummodo debet an forma ipsi F opposita sub
 f proprie contenta sit, art. 159.

214. PROBLEMA. *Propositis duabus formis,*
 f , determinantis D , et F determinantis Dee , quarum
prior posteriorem proprie implicat: exhibere omnes
transformationes proprias formae f in F .

Sol. Designante Ω eundem formarum com-
 plexum vt in art. praec., excerpantur ex hoc com-
 plexu omnes formae quibus F proprie aequiua-
 let, quae sint Φ, Φ', Φ'' etc. Quaeuis harum for-
 marum sequenti modo suppeditabit transformatio-
 nes proprias formae f in F , et quidem aliae alias
 (i. e. singulae diuersas), cunctae vero cunctas
 (i. e. nulla transformatio propria formae f in F
 erit quam non vna ex formis Φ, Φ' etc. praebeat).
 Quoniam methodus pro omnibus formis Φ, Φ' etc.
 eadem est, de vna tantum loquemur.