

L I B. II. esse debebunt. Crura enim hyperbolica speciei $u = \frac{A}{t^3}$, $u = \frac{A}{t^4}$ &c., infinites magis ad suas Asyntotas convergunt, quam species $u = \frac{A}{tt}$. Hinc igitur in enumeratione Specierum, quæ in ordine quopiam superiori continentur, casus impossibilis facile excludi, hocque insignes calculi molestia evitari poterunt.

253. Ponamus autem Lineam tertii ordinis a recta quapiam in duobus tantum punctis secari; atque ab omnibus aliis rectis huic parallelis vel in duobus etiam punctis vel nusquam secabitur. Si igitur in Axe quocunque statuantur Applicatae y huic rectæ parallelæ, æquatio ita erit comparata

$$yy + \frac{(\gamma xx + \zeta x + \theta)y}{\epsilon x + \epsilon} + \frac{\delta x^3 + \gamma xx + \iota x + \kappa}{\epsilon x + \epsilon} = 0.$$

Scilicet, si Abscissa AP dicatur $= x$, duæ habebuntur Applicatae y , nempe PM & $-PN$; erit autem, ex natura æquationum, $PM - PN = \frac{-\gamma xx - \zeta x - \theta}{\epsilon x + \epsilon}$. Biseetur

Ordinata MN in puncto O , erit $PO = \frac{\gamma xx + \zeta x + \theta}{\epsilon x + \epsilon}$; hinc, si ponatur $PO = z$, erit $z(\epsilon x + \epsilon) = \gamma xx + \zeta x + \theta$: unde patet omnia puncta O Ordinatas parallelas MN bisecantia sita esse in Hyperbola, nisi fuerit $\gamma xx + \zeta x + \theta$ divisibile per $\epsilon x + \epsilon$, quo casu punctum O positum erit in Linea recta.

254. Quod si ergo $\gamma xx + \zeta x + \theta$ divisibile fuerit per $\epsilon x + \epsilon$, tum Curva prædita erit Diametro, seu recta omnes Ordinatas parallelas MN bisecantem; quæ proprietas in omnes Lineas secundi ordinis competit. Verum, si $\gamma xx + \zeta x + \theta$ divisibile sit per $\epsilon x + \epsilon$, evanescere debet si ponatur $x = \frac{-\epsilon}{\zeta}$; quare, si fuerit $\gamma\epsilon\epsilon - \epsilon\zeta + \epsilon\epsilon\theta = 0$, tum Linea tertii ordinis Diametro erit prædita.

255. Hinc

255. Hinc igitur generalissime omnes casus determinare possumus, quibus Lineæ tertii ordinis Diametris sunt præditæ. CAP. X.
Sit enim proposita æquatio generalis

$$\alpha y^3 + \beta y^2 x + \gamma y x x + \delta x^3 + \epsilon y y + \zeta y x + \eta x x + \theta y + \iota x + \kappa = 0,$$

cujus Applicatæ y , quia triplicem valorem vel unicum habent, Diametri proprietatem recipere nequeunt. Ducantur ergo sub alio quoconque angulo ad eundem Axem aliæ Applicatæ u , ita ut sit $y = n u$, & $x = t - m u$, ac fiat substitutio

$$\left. \begin{aligned} &+ \alpha n^3 u^3 + \beta n^2 u^2 t + \gamma n u t^2 + \delta t^3 + \epsilon n^2 u^2 + \zeta n u t + \eta t + \iota u \\ &- \zeta n n^2 u^3 - 2 \gamma n n u^2 t - 3 \delta n u t^2 - \zeta n n u^2 - 2 \eta n u t - \iota n u \\ &+ \gamma m^2 n u^3 + 3 \delta m^2 u^2 t + \eta m^2 u^2 \end{aligned} \right\} = 0$$

Primum ergo, quo hæc novæ Applicatæ ad Diametrum recipiendam aptæ reddantur, necesse est ut duplice tantum valorem induere possint, eritque idcirco

$$\alpha n^3 - \zeta n n^2 + \gamma m^2 n - \delta m^3 = 0.$$

256. Præterea vero requiritur ut quantitas, per quam u est multiplicata, nempe $(\gamma n - 3 \delta m) t t + (\zeta n - 2 \eta m) t + \theta n - \iota m$, divisibilis sit per eam, quæ u multiplicat, quæ est $(\zeta n n - 2 \gamma n m + 3 \delta n m) t + \epsilon n n - \zeta n m + \eta m m$; sive illa nihilo fieri debet æqualis, si ponatur $t = \frac{\epsilon n n + \zeta n n - \eta m m}{\zeta n n - 2 \gamma n m + 3 \delta n m}$.

Hinc ergo fiet

$$\begin{aligned} &= \frac{\theta n}{m} - \frac{(\zeta n - 2 \eta m)(\epsilon n n - \zeta n m + \eta m m)}{(\zeta n n - 2 \gamma n m + 3 \delta n m)m} + \\ &\quad \frac{(\gamma n - 3 \delta m)(\epsilon n n - \zeta n m + \eta m m)^2}{(\zeta n n - 2 \gamma n m + 3 \delta n m)m^3}. \end{aligned}$$

257. Si hæc ad Species supra enumeratas applicemus, apparet in Specie prima nullam prorsus Diametrum locum habere posse. In Specie autem secunda Ordinatæ Axi, in quo Abscissæ

LIB. II. cissæ x capiuntur parallelæ Diametro, bisecabuntur. Species tertia nullam prorsus Diametrum admittit. Species quarta semper unam habet Diametrum Ordinatas uni Asymtote parallelas bisecantem. Quinta vero Species tres habebit Diametros, quæ Ordinatas singulis Asymtotis parallelas bisecabunt. Species sexta nullam prorsus habere potest Diametrum. Septima unam Diametrum semper habet pro Ordinatis Asymtota ex Factore $x - my$ ortæ parallelis. Octava unam Diametrum habet pro Ordinatis Axi parallelis. Nona Species duas habet Diametros; alteram pro Ordinatis Axi parallelis, alteram pro Ordinatis alteri Asymtota parallelis. Decima uti octava, & undecima uti nona est comparata. Duodecima ratione Diametrorum par est octavæ, & decima-tertia nonæ. Decima-quarta unam habet Diametrum pro Ordinatis Axi parallelis. Species decima-quinta & sexta omnino Ordinatas, quæ in duobus punctis Curvam secent, non admittunt; ideoque Diametro gaudere nequeunt. Hæ autem Diametrorum proprietates a NEWTONO probe sunt notatae, quam ob causam earum commemorationem hic data opera attulisse juvabit.

258. Quanquam in æquationibus, quas supra pro singulis Speciebus Linearum tertii ordinis dedimus, Coordinatas x & y inter se normales posuimus, tamen Speciei natura non mutatur, etiamsi eæ quomodocunque ad se invicem sint inclinatae. Quot enim æquatio, positis Coordinatis orthogonalibus, præbet crura in infinitum extensa, totidem quoque præbebit eadem æquatio, si Applicatae ad Axem utcunque inclinentur. Neque vero etiam natura crurum in infinitum excurrentium mutatur, mutata Coordinatarum inclinatione; quæ enim crura sunt parabolica, eadem manebunt parabolica, & que sunt hyperbolica eandem naturam retinebunt. Quin etiam Species crurum tam parabolicorum quam hyperabolicorum non alterabitur. Quare omnis Curva, quam æquatio pro prima Specie exhibita præbet, sive Coordinatae statuantur rectangularæ sive obliquangulæ, semper ad eandem Speciem primam erit referenda,

referenda, similiq[ue] modo reliquarum Specierum omnium ratio est comparata.

259. Admissa ergo Coordinatarum obliquitate quacunque, æquationes supra datæ non restringentur, si loco y ponatur uu , & $t - uu$ loco x , existente $uu + vv = 1$. Sumto autem angulo obliquitatis pro lubitu, æquationes supra datæ simpliciores reddi poterunt. Hinc pro singulis Speciebus sequentes simplicissimæ æquationes inter Coordinatas obliquangulas t & u formabuntur.

SPECIES PRIMA.

$$u(tt + nnuu) + auu + bt + cu + d = 0,$$

existente nec $n = 0$ nec $b = 0$

SPECIES SECUNDA.

$$u(tt + nnuu) + auu + cu + d = 0,$$

non existente $n = 0$.

SPECIES TERTIA.

$$u(tt - nnuu) + auu + bt + cu + d = 0,$$

existente nec $n = 0$, nec $b = 0$, nec $\pm nb + c + \frac{aa}{4m} = 0$.

SPECIES QUARTA.

$$u(tt - nnuu) + auu + cu + d = 0,$$

existente nec $n = 0$, nec $c + \frac{aa}{4m} = 0$.

SPECIES QUINTA.

$$u(tt - nnuu) + auu - \frac{auu}{4m} + d = 0,$$

non existente $n = 0$.

L I B . II.

SPECIES SEXTA.

$$tuu + att + bt + cu + d = o,$$

existente nec $a = o$, nec $c = o$.

SPECIES SEPTIMA.

$$tuu + att + bt + d = o,$$

non existente $a = o$.

SPECIES OCTAVA.

$$tuu + bbt + cu + d = o,$$

existente nec $b = o$, nec $c = o$.

SPECIES NONA.

$$tuu + bbt + d = o,$$

non existente $b = o$.

SPECIES DECIMA.

$$tuu - bbt + cu + d = o,$$

existente nec $b = o$, nec $c = o$.

SPECIES UNDECIMA.

$$tuu - bbt + d = o,$$

non existente $b = o$.

SPECIES DUODECIMA.

$$tuu + cu + d = o,$$

non existente $c = o$.

SPECIES DECIMA-TERTIA.

$$tuu + d = o.$$

SPECIES

SPECIES DECIMA - QUARTA.

CAP. X.

$$u^3 + att + cu + d = 0.$$

SPECIES DECIMA - QUINTA.

$$u^3 + atu + bt + d = 0,$$

non existente $a = 0$.

SPECIES DECIMA - SEXTA.

$$u^3 + at = 0.$$

C A P U T X I.

De Lineis quarti Ordinis.

260. **A** Quatio generalis pro Lineis quarti Ordinis est

$$\alpha y^4 + \beta y^3 x + \gamma y^2 x^2 + \delta yx^3 + \epsilon x^4 + \zeta y^3 + \eta y^2 x + \nu yx + \mu x^3 + \kappa yx + \lambda yx + \rho xx + \sigma y + \xi x + o = 0;$$

quæ autem, (variatis tum Coordinatarum inclinatione, tum Axis positione, tum Abscissarum initio,) multis modis pro diversis casibus ad simpliciorē formam reduci potest. Quo igitur, secundum methodum traditam, omnes Species vel potius Genera Linearum, quæ in hoc ordine continentur enumerentur, ad membrum supremum respici oportet, unde sequentes casus nascuntur diversi.

I.

Si supremi membra omnes quatuor Factores simplices sunt imaginarii.

II.

Si duo Factores tantum sunt reales & inæquales inter se.

S 2

III. Si