$2v$; & $p+q+r = a - 3v\sqrt[3]{a} + 3\sqrt[3]{R} = P$. Deinde, Cap. XVI.
$\sqrt[3]{p^2q^2} + \sqrt[3]{p^2r^2} + \sqrt[3]{q^2r^2} = v^2 - 2\sqrt[3]{aR}$, & $pq+pr+qr = Q = v^3 - 3v\sqrt[3]{aR} + 3\sqrt[3]{RR}$. Inventis jam pro P & Q idoneis valoribus, ſumendo pro v Functionem quamcunque ipſius x, pro Curvis quæſitis obtinebitur hæc æquatio

$$y^3 - (a - 3v\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{R})y^2 + (v^3 - 3v\sqrt[3]{aR} + 3\sqrt[3]{R^2})y - R = 0.$$

378. His tamen difficultatibus non obſtantibus ſolutio generalis concinnari poterit. Cum enim ex æquatione $y^3 - Py^2 + Qy - R = 0$, y denotet has tres Applicatas p q, & r, ponatur $p = y$, erit $P = y+q+r$, & $Q = qy + ry + qr$, ſeu $q+r = P - y$, & $qr = Q - y(q+r) = Q - Py + yy$. Hinc prodit $q - r = \sqrt{(P^2 + 2Py - 3yy - 4Q)}$: ideoque

$$q = \frac{1}{2}(P - y) + \frac{1}{2}\sqrt{(P^2 + 2Py - 3yy - 4Q)},$$

&

$$r = \frac{1}{2}(P - y) - \frac{1}{2}\sqrt{(P^2 + 2Py - 3yy - 4Q)}.$$

Quando ergo quæritur Curva in qua ſit $p^n + q^n + r^n = a^n$, ſatisfaciet hæc æquatio

$$y^n + \left(\frac{1}{2}(P - y) \dot{+} \frac{1}{2}\sqrt{(P^2 + 2Py - 3yy - 4Q)}\right)^n + \left(\frac{1}{2}(P - y) - \frac{1}{2}\sqrt{(P^2 + 2Py - 3yy - 4Q)}\right)^n = a^n$$

quæ æque quæſtionem ſolvit, ſive n fuerit numerus integer ſive fractus.

379. Innumerabiles aliæ quæſtiones circa conditionem harum trium Applicatarum eadem methodo reſolvi poſſunt: velut, ſi pro a^n Functio quæcunque ipſius x aſſumatur; tum vero etiam, præter ſummam quarumcunque poteſtatum, aliæ Functiones ipſarum p, q, & r proponi poſſunt, dummodo hæ quantitates ita æqualiter inſint, ut earum permutatione nulla variatio

 oriatur.

LIB. II. oriatur. Sic, istæ tres Applicatæ p, q, & r eidem Abscissæ x respondentes ita definiri poterunt, ut triangulum, quod ex iis formatur, constantem habeat aream. Hujus enim trianguli area erit $= \frac{1}{4}\surd(2ppqq + 2pprr + 2qqrr - p^4 - q^4 - r^4)$ quæ ponatur $= aa$. Cum igitur sit $p^4 + q^4 + r^4 = P^4 - 4P^2Q + 4PR + 2QQ$, & $p^2q^2 + p^2r^2 + q^2r^2 = Q^2 - 2PR$, fiet $16a^4 = 4P^2Q - 8PR - P^4$, & $R = \frac{1}{2}PQ - \frac{1}{8}P^3 - \frac{2a^4}{P}$; ideoque habebitur ista æquatio $y^3 - Pyy + Qy - \frac{1}{2}PQ + \frac{1}{8}P^3 + \frac{2a^4}{P} = 0$. Si P capiatur constans $= 2b$, fiet insuper perimeter omnium horum triangulorum constans. Quare, si sumatur $Q = mxx + nbx + kaa$, prodibit Linea tertii ordinis hac æquatione expressa

$$y^3 + mxxy - 2byy + nbxy - mbxx + kaay - nbbx + \frac{a^4}{b} - kaab + b^3 = 0,$$

cujus hæc erit proprietas, ut trium Applicatarum p, q, & r singulis Abscissis respondentium primum summa sit constans, $= 2b$, tum vero Area trianguli ex lateribus p, q, & r formati sit ubique eadem $= aa$.

380. Similes quæstiones ejusdem methodi ope resolvi possunt circa quatuor pluresve Applicatas eidem Abscissæ respondentes; in quo negotio cum nulla amplius occurrat difficultas, ad alias progrediamur quæstiones, in quibus Applicatæ non eidem Abscissæ, sed diversis respondentes inter se comparentur. Proposita scilicet relatio quædam inter Applicatas PM & QN, quarum altera Abscissæ $AP = +x$, altera Abscissæ $AQ = -x$ respondeat. Sit $y = X$, æquatio pro hac Curva, existente X Functione quacunque ipsius x, atque hæc Functio X dabit Applicatam PM: quod si vero loco $+x$ ubique ponatur $-x$, eadem Functio X dabit alteram Applicatam QN. Si ergo X esset Functio par ipsius x, puta $= P$, foret $QN = PM$, sin autem sit X Functio impar ipsius

TAB. XIX. Fig. 80.

ipsius x, puta $= Q$, erit $QN = -PM$. Atque si P & R denotent Functiones pares, at Q & S Functiones impares ipsius x, fueritque æquatio pro Curva $y = \frac{P+Q}{R+S}$, erit $PM = \frac{P+Q}{R+S}$ & $QN = \frac{P-Q}{R-S}$. CAP. XVI.

381. Quærenda sit Curva hujus indolis, ut sit $PM + QN$ quantitas constans, nempe $= 2AB = 2a$. Atque manifestum est huic quæstioni satisfacere æquationem $y = a + Q$, existente Q Functione impare ipsius x; erit enim $PM = a + Q$ & $QN = a - Q$ ideoque $PM + QN = 2a$, uti requiritur. Quod si ergo ponatur $y - a = u$, erit $u = Q$, quæ erit æquatio pro eadem Curva, sumta recta Bp pro Axe & puncto B pro Abscissarum x initio, ita ut sit $Bp = x$ & $pM = u$. Æquatio autem $u = Q$ indicat Curvam partibus æqualibus utrinque circa Centrum B alternatim dispositis præditam. Descripta ergo hujusmodi Curva quacunque MBN sumtaque recta quacunque PQ pro Axe, quæstioni ita satisfiet, ut demisso in hunc Axem ex Centro B perpendiculo BA, sumtisque utrinque Abscissis æqualibus $AP = AQ$, semper futura sit summa $PM + QN$ constans $= 2AB$.

382. Pro Curvis autem, quæ duas habent partes æquales circa Centrum B alternatim dispositas, duas invenimus supra æquationes, quæ inter Coordinatas x & u sunt

I.

$$0 = \alpha x + \beta u + \gamma x^3 + \delta x^2 u + \epsilon x u u + \zeta u^3 + \eta x^5 + \theta x^4 u + \&c.$$

II.

$$0 = \alpha + \beta x^2 + \gamma x u + \delta u^2 + \epsilon x^4 + \zeta x^3 u + \eta x^2 u^2 + \theta x u^3 + \&c.$$

Quare, si in utraque harum æquationum, ponatur $u = y - a$, habebuntur duæ æquationes generales inter Coordinatas x & y pro Curvis algebraicis quæstioni propositæ satisfacientibus. Satisfacit ergo primo omnis Linea recta per punctum B ducta, deinde quoque omnis Sectio conica Centrum habens in puncto B quæstionem solvet. Quia vero hoc posteriori casu utri-

LIB. II. que Abſciſſæ AP, & AQ gemina Applicata reſpondet, (niſi Curva exiſtente Hyperbola, Applicatæ alteri Aſymtotæ parallelæ capiantur ;) bina habebuntur Applicatarum paria eandem ſummam conſtituentia.

383. Si quæratur Curva MBN, in qua non ſumma binarum Applicatarum PM & QN, ſed ſumma quarumcunque poteſtatum earum ſit conſtans, ſolutio ſimili modo abſolvetur. Oporteat enim eſſe $PM^n + QN^n = 2a^n$: atque perſpicuum eſt huic conditioni ſatisfieri hac æquatione $y^n = a^n + Q$, exiſtente Q Functione quacunque impari ipſius x : erit enim $PM^n = a^n + Q$, & $QN^n = a^n - Q$: ideoque $PM^n + QN^n = 2a^n$. Ponatur $y^n - a^n = u$, atque æquatio $u = Q$ exprimet naturam Curvæ duabus partibus æqualibus alternis circa Centrum B diſpoſitis præditam inter Coordinatas x & u. Quam ob rem ſi in æquationibus §. præcedenti datis ubique loco u ſcribatur $y^n - a^n$, prodibunt æquationes generales pro Curvis quæſito ſatisfacientibus.

384. Cum igitur hujuſmodi quæſtiones nihil habeant difficultatis, propoſita ſit hæc quæſtio, qua quæritur Curva MBN, ita ut in Axe a puncto fixo A, ſi ſumantur utrinque Abſciſſæ AP, AQ æquales, rectangulum Applicatarum $PM.QN$ futurum ſit magnitudinis conſtantis, puta $= aa$. Hujus quæſtionis plures dari poſſunt ſolutiones particulares, quarum præcipuas, antequam in generalem inquiramus, hic evolvamus. Sit P Functio par, & Q Functio impar ipſius Abſciſſæ $AP = x$, ac ponatur Applicata $PM = y = P + Q$; ex qua, ſumta x negativa, fiet $QN = P - Q$. Oportet ergo eſſe $PM \times QN = PP - QQ = aa$, ſeu $P = \surd(aa + QQ)$: quæ expreſſio $\surd(aa + QQ)$, quia QQ eſt Functio par ipſius x, ac propterea quoque ipſa Functionem parem exhibet, convenientem

nientem valorem pro P præbet. Hinc pro Curva quæſita habebitur iſta æquatio $y = Q + \sqrt{(aa + QQ)}$, ſumendo pro Q Functionem quamcunque imparem ipſius x. CAP. XVI.

385. Cum autem ſignum radicale per ſe ambiguitatem involvat, unicuique Abſciſſæ x gemina reſpondebit Applicata, altera affirmativa altera negativa; ſic, Abſciſſæ AP reſpondebunt Applicatæ $Q + \sqrt{(aa + QQ)}$ & $Q - \sqrt{(aa + QQ)}$; at Abſciſſæ AQ convenient Applicatæ $-Q + \sqrt{(aa + QQ)}$ & $-Q - \sqrt{(aa + QQ)}$: unde Curva partes habebit æquales circa punctum A, tanquam Centrum, alternatim poſitas. Neque vero hanc ambiguitatem a ſigno ortam tollere licet, ſumendo pro Q ejuſmodi Functionem imparem, uti $\frac{aa}{4x} - x$, qua fiat $aa + QQ$ quadratum; fieret enim $\sqrt{(aa + QQ)} = \frac{aa}{4x} + x$ ideoque Functio impar, quæ in locum ipſius P ſubſtitui non poſſet. Quocirca pro Q ejuſmodi Functio impar ipſius x ſumi debet, ut $aa + QQ$ non fiat quadratum.

386. Simili modo, ſi ponatur $y = (P + Q)^n$, fiet $QN = (P - Q)^n$: ideoque eſſe debebit $(P^2 - Q^2)^n = aa$. Hinc fiet $P^2 = a^{\frac{2}{n}} + Q^n$, & $P = \sqrt{(a^{\frac{2}{n}} + Q^n)}$, quæ quantitas, dummodo fuerit irrationalis, pro P aſſumi poterit. Quare pro Curva quæſtioni ſatisfaciente obtinebitur hæc æquatio $y = (Q + \sqrt{(a^{\frac{2}{n}} + Q^2)})^n$. Constructio autem harum Curvarum erit facilis: deſcribatur Curva quæcunque duas partes ſimiles & æquales habens alternatim circa Centrum A poſitas, hujuſque Curvæ Applicata Abſciſſæ $AP = x$ reſpondens ponatur $= z$; erit z Functio impar ipſius x; ideoque in locum ipſius Q ſubſtitui poterit. At, ex æquatione inventa oritur $y^{\frac{1}{n}} - Q = \sqrt{(a^{\frac{2}{n}} + Q^2)}$: ideoque $Q =$

$z =$