in totidem *classes* distribui posse, hasque iisdem proprietatibus praeditas fore quas supra (artt. 175, 195) pro classibus formarum determinantis negatiui, et positiui non quadrati attigimus. Ita omnes formae determinantis 25 in decem classes distribuentur, quae per formas reductas in singulis contentas distingui poterunt. Hae formae reductae sunt: (0, 5, 0), (1, 5, 0), (2, 5, 0), (5, 5, 0), (8, 5, 0), (9, 5, 0), quae sibi ipsae simul improprie aequiualent; (3, 5, 0) cui improprie aequiualet (7, 5, 0); (4, 5, 0) cui improprie aequiualet (6, 5, 0).

212. Problema. *Inuenire omnes repraesentationes numeri dati M per formam datam* $axx + 2bxy + cyy$ *determinantis hh.*

Solutio huius problematis ex principiis art. 165 prorsus eodem modo peti potest, vt supra (artt. 180, 181, 205) pro formis determinantis negatiui et positiui non quadrati ostendimus; quod, quum nulli difficultati sit obnoxium, hic repetere superfluum esset. Contra haud abs re erit, solutionem ex alio principio quod casui praesenti proprium est deducere.

Positis vt artt. 206, 208, $h - b : a = c : -(h + b) = \mathfrak{C} : \mathfrak{d}$; $\frac{h-b}{\mathfrak{C}} = \frac{a}{\mathfrak{d}} = f$; $\frac{c}{\mathfrak{C}} = \frac{-h-b}{\mathfrak{d}} = g$, nullo negotio probatur, formam propositam esse productum ex factoribus $\mathfrak{d}x - \mathfrak{C}y$ et $fx - gy$. Vnde manifestum est, quamuis repraesentationem numeri M per formam propositam praebere resolutionem numeri M in binos factores. Si itaque omnes diuisores numeri M sunt d, d', d'' etc. (inclusis etiam 1, et M, et singulis *bis* sumtis puta tum positiue tum negatiue), patet omnes repraesentationes numeri M obtineri, si successiue ponatur $\delta x - \beta y = d$, $fx - gy = \frac{M}{d}$; $\delta x - \beta y = d'$, $fx - gy = \frac{M}{d'}$ etc., valores ipsorum x, y hinc euoluantur, eaeque repraesentationes eiiciantur vbi x aut y valores fractos obtinent. Manifesto vero ex duabus primis aequationibus sequitur $x = \frac{\beta M - \delta dd}{(\beta f - \delta g)d}$, et $y = \frac{\delta M - \beta dd}{(\beta f - \delta g)d}$, quos valores semper *determinatos* fore inde manifestum quod $\beta f - \delta g = 2h$, adeoque numerator certo non $= 0$. — Ceterum ex eodem principio, puta resolubilitate cuiusuis formae determinantis quadrati in binos factores, etiam reliqua problemata solui potuissent: sed methodo ei quam supra pro formis determinantis non quadrati tradidimus analoga etiam hic vti maluimus.

Ex. Quaeruntur omnes repraesentationes numeri 12 per formam $3xx + 4xy - 7yy$. Haec resoluitur in factores $x - y$ et $3x + 7y$. Omnes diuisores numeri 12 sunt $\pm 1, 2, 3, 4, 6, 12$. Positis $x - y = 1$, $3x + 7y = 12$ fit $x = \frac{19}{10}$, $y = \frac{9}{10}$, qui valores tamquam fracti sunt reiiciendi. Eodem modo ex diuisoribus -1, ± 3, ± 4, ± 6, ± 12 valores inutiles obtinentur; ex diuisore $+2$ vero obtinentur valores $x = 2$, $y = 0$, et ex diuisore -2 hi $x = -2$, $y = 0$; praeter has duas repraesentationes igitur aliae non dantur.

Methodus haec adhiberi nequit, si $M = 0$. In hoc casu manifestum est omnes valores ipsorum x, y aut aequationi $\delta x - \beta y = 0$, aut huic $fx - gy = 0$ satisfacere debere. Omnes autem solutiones aequationis prioris continentur in formula $x = \beta z$, $y = \delta z$, designante z indefinite numerum integrum quemcunque (siquidem vti supponitur β, δ inter se primi sunt); similiterque ponendo diuisorem communem maximum numerorum f, g, $= m$, omnes solutiones aequationis posterioris exhibebuntur per formulam $x = \frac{gz}{m}$, $y = \frac{hz}{m}$. Quare hae duae formulae generales omnes repraesentationes numeri M in hoc casu complectentur.

* * *

In praecedentibus omnia quae ad cognoscendam aequiualentiam et ad inueniendas omnes transformationes formarum nec non ad repraesentationes omnes numerorum datorum per formas datas indagandas pertinent, ita sunt explicata, vt nihil amplius desiderari posse videatur. Superest itaque tantummodo, vt propositis duabus formis quae propter *determinantium inaequalitatem* aequiualentes esse nequeunt, diiudicare doceamus, annon altera sub altera contenta sit, et in hoc casu omnes transformationes illius in hanc inuenire.

213. Supra artt. 157, 158 ostendimus, si forma f determinantis D formam F determinantis E implicet atque in ipsam transeat per substitutionem α, β, γ, δ, fore $E = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 D$; si fue-