quentium problematum: I. Inuenire omnes repraesentationes numeri dati per formam ternariam datam. II. Inuenire omnes repraesentationes formae binariae datae per ternariam datam. III. Diiudicare, vtrum duae formae ternariae datae eiusdem determinantis aequiualentes sint, necne, et in casu priori omnes transformationes alterius in alteram inuenire. IV. Diiudicare, vtrum forma ternaria data aliam datam determinantis maioris implicet, necne, et in casu priori omnes transformationes illius in hanc assignare. De quibus problematibus longe difficilioribus quam analoga in formis binariis alio loco pluribus agemus: hic disquisitionem nostram restringimus ad ostendendum, quomodo problema primum ad secundum secundumque ad tertium reduci possit; tertium vero pro casibus quibusdam simplicissimis formarumque binariarum theoriam imprimis illustrantibus soluere docebimus; quartum hic omnino excludemus.

279. LEMMA. *Propositis tribus numeris integris quibuscunque* a, a', a'' (*qui tamen non omnes simul* $= 0$): *inuenire sex alios* B, B', B'', C, C', C'' *ita comparatos vt fiat* $B'C'' - B''C' = a$, $B''C - BC'' = a'$, $BC' - B'C = a''$.

Sol. Sit α diu. comm. max. ipsorum a, a', a'', accipianturque integri A, A', A'' ita vt fiat $Aa + A'a' + A''a'' = \alpha$. Porro accipiantur tres integri $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}''$ ad lubitum ea sola conditione, vt tres numeri $\mathfrak{C}'A'' - \mathfrak{C}''A'$, $\mathfrak{C}''A - \mathfrak{C}A''$, $\mathfrak{C}A' - \mathfrak{C}'A$, quos resp. per b, b', b'' ipsorumque diuisorem communem maximum per $\mathfrak{C}$

designabimus, non fiant simul $= 0$. Tunc ponatur $a'b'' - a''b' = \alpha\mathfrak{C}C$, $a''b - ab'' = \alpha\mathfrak{C}C'$, $ab' - a'b = \alpha\mathfrak{C}C''$, patetque ipsos C, C', C'' fore integros. Denique accipiendo integros $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}''$ ita vt fiat $\mathfrak{B}b + \mathfrak{B}'b' + \mathfrak{B}''b'' = \mathfrak{C}$, ponendo $\mathfrak{B}a + \mathfrak{B}'a' + \mathfrak{B}''a'' = \alpha h$, et statuendo $B = \alpha\mathfrak{B} - hA$, $B' = \alpha\mathfrak{B}' - hA'$, $B'' = \alpha\mathfrak{B}'' - hA''$, hi valores ipsorum B, B', B'', C, C', C'' aequationibus praescriptis satisfacient.

Inuenitur enim $aB + a'B' + a''B'' = 0$, $bA + b'A' + b''A'' = 0$, vnde $bB + b'B' + b''B'' = \alpha\mathfrak{C}$. Iam ex valoribus ipsorum C', C'' fit $\alpha\mathfrak{C}(B'C'' - B''C') = ab'B' - a'bB' - a''bB'' + ab''B'' = a(bB + b'B' + b''B'') - b(aB + a'B' + a''B'') = \alpha\mathfrak{C}a$, adeoque $B'C'' - B''C' = a$; similique modo inuenitur $B''C - BC'' = a'$, $BC' - B'C = a''$. Q. E. F. — Ceterum analysis per quam haec solutio inuenta est, nec non methodus ex vna solutione omnes inueniendi, hic sunt supprimendae.

280. Supponamus, formam binariam $att + 2btu + cuu \ldots \Phi$, cuius determinans $= D$, repraesentari per formam ternariam f cuius indeterminatae x, x', x'', ponendo $x = mt + nu$, $x' = m't + n'u$, $x'' = m''t + n''u$, ipsique f adiunctam esse formam F, cuius indeterminatae X, X', X''. Tunc per calculum facile confirmatur (designando coëfficientes formarum f, F per literas peculiares) siue etiam ex art. 268. II. protinus deducitur, numerum D repraesentari per F ponendo $X = m'n'' - m''n'$, $X' = m''n - mn''$, $X'' = mn' - m'n$, quae repraesentatio numeri

D repraesentationi formae φ per f *adiuncta* commode dici potest. Si valores ipsarum X, X', X'' diuisorem communem non habent, breuitatis caussa hanc repraesentationem ipsius D *propriam* vocabimus, sin secus *impropriam*, easdem denominationes etiam repraesentationi formae φ per f, cui illa repraes. ipsius D adiuncta est, tribuemus. Iam inuentio omnium repraesentationum propriarum numeri D per formam F sequentibus momentis innititur:

I. Nulla repraesentatio ipsius D per F datur, quae non ex aliqua repraesentatione alicuius formae determinantis D per formam f deduci possit, i. e. tali repraesentationi adiuncta sit.

Sit enim repraesentatio quaecunque ipsius D per F haec: $X = L$, $X' = L'$, $X'' = L''$; accipiantur per lemma art. praec. m, m', m'', n, n', n'' ita vt fiat $m'n'' - m''n' = L$, $m''n - mn'' = L'$, $mn' - m'n = L''$, transeatque f per substitutionem $x = mt + nu$, $x' = m't + n'u$, $x'' = m''t + n''u$ in formam binariam $\varphi = att + 2btu + cuu$. Tunc facile perspicietur, D fore determinantem formae φ ipsiusque repraesentationi per f repraesentationem propositam ipsius D per F adiunctam.

Ex. Sit $f = xx + x'x' + x''x''$, adeoque $F = - XX - X'X' - X''X''$; $D = - 209$, ipsiusque repraesentatio per F haec $X = 1$, $X' = 8$, $X'' = 12$; hinc inueniuntur valores ipsorum m, m', m'', n, n', n'' hi $- 20$, 1, 1, $- 12$, 0, 1 resp., atque $\varphi = 402\,tt + 482\,tu + 145\,uu$.