LIB. II. $yyx(y+nx)+ayxx+bx^3+cyy+dyx+exx+fy+gx+h=0.$

Hinc primo, ratione Factorum æqualium, omnia oriuntur Genera, quæ in *casu III.* & unumquodque cum tot varietatibus occurrit, quot Factores inæquales ſuggerunt, hoc eſt quot caſus ſecundus continet Genera. Omnino ergo ſexies ſeptem hoc eſt quadraginta duo Genera ex hoc caſu naſcuntur. Duo autem hinc prodeunt Genera impoſſibilia, nempe ſi ambæ Aſymtotæ parallelæ fuerint ſpeciei $u=\frac{A}{tt}$, & reliquarum una $u=\frac{A}{t}$, altera exiſtente vel $u=\frac{A}{tt}$, vel $u=\frac{A}{t^3}$. Quare, hic caſus quadraginta Genera præbet, quæ cum antecedentibus numerum Generum *ſexaginta-quatuor* conficiunt, quæ ſingula hic deſcribere nimis foret longum. Neque etiam, quia ſingula hæc Genera evolvere non vacavit, firmiter affirmare licet, omnia eſſe realia. Qui autem ſecundum præcepta data hoc negotium in ſe ſuſcipere voluerit, numerum Generum, ſi opus fuerit, reſtringet atque emendabit.

CASUS VI.

266. Hic caſus, quo duo Factorum æqualium paria adſunt, iſta æquatione continebitur

$$yyxx+ay^3+bx^3+cyy+dyx+exx+fy+gx+h=0.$$

Utrumque autem Factorum æqualium par in ſe ſpectatum varietates dat ſeptem, unde ambo paria præbebunt Genera quadraginta novem. Quia vero h ſimul affirmativum & negativum eſſe nequit, duo Genera fiunt impoſſibilia, ideoque ex hoc caſu omnino naſcuntur Genera quadraginta ſeptem, qui numerus etiam major eſt quam ut ſingula hic recenſeri queant. Hactenus ergo nacti ſumus Genera *centum & undecim*.

CASUS

CASUS VII.

267. Si tres Factores inter se fuerint æquales, æquatio erit ejusmodi

$$y^3x + ayxx + bx^3 + cyy + dyx + exx + fy + gx + h = 0.$$

Hic Factor x præbet Asymtotam speciei $u = \frac{A}{t}$, si non fuerit $c = 0$; at, si $c = 0$, nec vero $f = 0$, Asymtotam dat speciei $u = \frac{A}{tt}$; at, si $c = 0$, & $f = 0$, Asymtotam dat speciei $u = \frac{A}{t^3}$. Deinde Factor y^3, nisi fuerit $b = 0$, dat Asymtotam parabolicam speciei $u^3 = Att$; sin autem $b = 0$, posito x infinito, fit $y^3 + ayx + dy + ex + g + \frac{cyy + fy + h}{x} = 0$. Hic, si non sit $e = 0$, erit $y^3 + ayx + ex = 0$; unde, si nec $a = 0$, erit & $y^2 + ax = 0$ & $ay + e = 0$: simul ergo locum habet Asymtota parabolica speciei $uu = At$, & hyperbolica hac æquatione expressa $(ay + e)x - \frac{e^3}{a^3} - \frac{de}{a} - g + \frac{cee - afe + aah}{aax}$. Nisi ergo sit $e^3 + aade + a^3g = 0$, hæc Asymtota est speciei $u = \frac{A}{t}$; contra vero speciei $u = \frac{A}{tt}$. At, si $a = 0$, non existente $e = 0$, erit $y^3 + ex = 0$: quæ dat Asymtotam parabolicam speciei $u^3 = At$. Sin autem sit $e = 0$, & $a = 0$, fiet $y^3 + dy + g = 0$, quæ æquatio vel unicam præbet Asymtotam speciei $u = \frac{A}{t}$, vel tres ejusdem speciei, vel unam speciei $u = \frac{A}{t}$, & unam speciei $uu = \frac{A}{t}$; vel unam speciei $u^3 = \frac{A}{t}$. Omnino ergo octo varietates occurrunt, quæ, per tres ex Factore x ortas multiplicatæ, dabunt Genera viginti-quatuor. Ergo omnes casus hactenus tractati dant Genera *centum triginta quinque.*

LIB. II.

CASUS VIII.

268. Si omnes Factores ſint inter ſe æquales, hæc æquatio locum habebit

$$y^4 + ay^2x + byxx + kx^3 + cyy + dyx + exx + fy + gx + h = 0.$$

Hic, ſi non fuerit $k = 0$, prodit

GENUS CXXXVI.

Unicam habens Aſymtotam parabolicam ſpeciei $u^4 = At^3$.

Sit $k = 0$, non vero $b = 0$, erit $y^4 + byxx + exx = 0$, hincque $y^3 + bxx = 0$, & $by + e = 0$; unde, pro Aſymtota recta $by + e = 0$, erit $(by + e)\,xx + \frac{e^4}{b^4} + \frac{ae^2x}{bb} + \frac{cee}{bb} - \frac{dex}{b} - \frac{ef}{b} + gx + h = 0$; ergo, niſi ſit $aee - bde + bbg = 0$, Aſymtota erit ſpeciei $u = \frac{A}{t}$; contra vero ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$; unde prodeunt

GENUS CXXXVII.

Unam habens Aſymtotam parabolicam ſpeciei $u^3 = Att$, & unam hyperbolicam ſpeciei $u = \frac{A}{t}$, &

GENUS CXXXVIII.

Unam habens Aſymtotam parabolicam ſpeciei $u^3 = Att$ & unam hyperbolicam ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$.

269. Sit jam $k = 0$, & $b = 0$, ut ſit

$$y^4 + ay^2x + cyy + dyx + exx + fy + gx + h = 0,$$

ſi non ſit $e = 0$, erit $y^4 + ayyx + exx = 0$, quæ æquatio ſi fuerit aa minor quam $4e$, eſt impoſſibilis, ſin aa major quam

$4e$,

$4e$, duas præbet Aſymtotas parabolicas ad eundem Axem relatas, ſpeciei $uu = At$; ſin $aa = 4e$, hæ duæ Parabolæ in unam coeunt, quibus Genera CXXXIX. CXL. & CXLI. conſtituuntur. Cap. XI.

At, ſi $e = 0$, ut habeatur hæc æquatio

$$y^4 + ayyx + cyy + dyx + fy + gx + h = 0,$$

ſi non ſit $a = 0$, erit $y^4 + ayyx + cyy + dyx + gx = 0$, ergo & $yy + ax = 0$, & $y =$ conſtanti, erit $ayy + dy + g = 0$, unde y vel duos habet valores diverſos, vel æquales, vel nullum realem. Caſu primo Curva, præter unam Aſymtotam parabolicam, habebit duas Aſymtotas parallelas ſpeciei $u = \frac{A}{t}$; ſecundo unam ſpeciei $uu = \frac{A}{t}$; tertio nullam: unde iterum tria Genera conſtituuntur nempe CXLII. CXLIII. & CXLIV.

270. Sit nunc etiam $a = 0$, ut ſit

$$y^4 + cyy + dyx + fy + gx + h = 0.$$

Hic, ſi non ſit $d = 0$, Curva habebit Aſymtotam parabolicam ſpeciei $u^3 = At$, & unam rectam æquatione $dy + g = 0$, contentam, ſpeciei $u = \frac{A}{t}$. Denique ſi & $d = 0$, Curva unam habebit Aſymtotam parabolicam ſpeciei $u^4 = At$: ſicque omnino Linearum quarti ordinis conſtituta ſunt Genera *centum quadraginta-ſex*; quæ autem ſingula plerumque plures Species notabiliter differentes ſub ſe complectuntur.

271. Ex his jam clare perſpicitur quantopere Generum numerus in Lineis quinti, altioriſve ordinis, multiplicetur, ut recenſio, qualem pro ordine tertio fecimus, inſtitui prorſus nequeat, niſi quis integrum volumen huic operi deſtinare velit. Quod autem ad primarias proprietates Linearum quarti altioriſve ordinis attinet, eæ ex æquatione generali ſimili modo derivabuntur, quo ſupra in Lineis tertii ordinis ſumus uſi, neque idcirco earum explicationi immorabimur.

LIB. II.

CAPUT XII.

De inveſtigatione figuræ Linearum Curvarum.

272. QUæ in his Capitibus ſunt expoſita, inſerviunt figuræ Linearum curvarum in infinitum extenſarum cognoſcendæ. Cujuſmodi vero figuram habeat quæpiam Linea curva in ſpatio finita, ſæpenumero difficillimum eſt ex æquatione cognoſcere. Oportet enim ad hoc pro quavis Abſciſſa finita valores Applicatæ reſpondentes ſingulos ex æquatione eruere, atque reales ab imaginariis diſcernere: quod negotium, ſi æquatio ſit altioris gradus, plerumque vires Analyſeos cognitæ ſuperat. Quod ſi enim Abſciſſæ valor quicunque cognitus tribuatur, Applicata in æquatione incognitæ vicem ſuſtinebit. Hincque a numero dimenſionum, quem Applicata obtinet, pendebit æquationis reſolutio. Negotium autem hoc per reductionem æquationis ad formam ſimpliciorem, dum & Axis commodiſſimus, & inclinatio Coordinatarum aptiſſima aſſumitur, valde ſublevari poteſt: tum etiam, quia perinde eſt, utra Coordinatarum pro Abſciſſa accipiatur, labor maxime diminuetur, ſi ea Coordinatarum, cujus pauciſſimæ dimenſiones in æquatione occurrunt, pro Applicata aſſumatur.

273. Sic, ſi figuras Linearum tertii ordinis, quæ ad Speciem primam pertinent, inveſtigare velimus, aſſumemus æquationem pro hac Specie ſimpliciſſimam, §. 258. exhibitam, & ex Coordinatis t & u priorem t pro Applicata, alteram vero u pro Abſciſſa, quia t duas tantum dimenſiones habet. Hujuſmodi ergo æquationis formam habebimus,

$$yy = \frac{2by + axx + cx + d - nnx^3}{x}$$

quæ reſoluta dat

$y =$