LIB. II. reperietur æquatio pro eadem Curva inter Coordinatas orthogonales AP & PM. Sit enim ϕ angulus, quem Applicatæ MQ cum Abſciſſis AQ conſtituunt, cujus Sinus $= \mu$ & Coſinus $= \nu$. dataque ſit æquatio inter $AQ = t$ & $QM = u$. Ex M ducatur ad Axem Applicata normalis MP, &, poſita Abſciſſa $AP = x$ & Applicata $MP = y$, quia eſt $u = \frac{y}{\mu}$ & $t = \frac{\nu y}{\mu} + x$, ſi hi valores in æquatione inter t & u propoſita ſubſtituantur, prodibit æquatio inter x & y, quæ quærebatur.

TAB. IV. Fig. 15. 45. Data nunc æquatione inter Coordinatas orthogonales $AP = x$, & $PM = y$ pro Curva LM, hoc modo æquatio generaliſſima pro eadem linea curva inveniri poterit. Sumatur recta quæcunque rs pro Axe, & in eo punctum D pro Abſciſſarum initio; Applicatæ vero MT ad hunc Axem ductæ faciant angulum $DTM = \phi$, cujus Sinus ſit $= \mu$ & Coſinus $= \nu$; erit ergo nova Abſciſſa DT & Applicata TM, inter quas æquatio quæritur. Ex D in Axem priorem RS ducatur perpendicularis DG, & ſit $AG = f$; $DG = g$, ductaque DO Axi RS parallela ſit anguli ODs Sinus $= m$, Coſinus $= n$. Ducatur, ut ante fecimus, ex M ad Axem novum rs normalis MQ, & ponatur $DQ = t$; $QM = u$; Coordinatæ autem obliquangulæ ſint $DT = r$; $TM = s$; Erit ergo primo $t = r - \nu s$ & $u = \mu s$ (43); deinde vero eſt $x = mu + nt - f$ & $y = nu - mt - g$ (36). Hinc fiet $x = nr - (n\nu - m\mu)s - f$ & $y = -mr + (\mu n + \nu m)s - g$, ubi eſt $n\nu - m\mu$ Coſinus anguli AVM, quem novæ Applicatæ cum Axe priori RS conſtituunt, & $\mu n + \nu m$ eſt Sinus hujus anguli AVM. Quod ſi ergo in æquatione inter x & y loco x & y illi valores inventi ſubſtituantur, prodibit æquatio inter Coordinatas obliquangulas r & s, quæ erit æquatio generaliſſima pro Curva LM.

46. Quoniam in valoribus, qui loco x & y ſubſtituuntur, novarum variabilium r & s unica ineſt dimenſio, manifeſtum eſt æquationem generaliſſimam ejuſdem eſſe ordinis, cujus erat

æquatio

æquatio propoſita inter x & y. Quomodocunque ergo æquatio ad eandem Curvam transformetur, mutatis utcunque tam Axe, & Abſciſſarum initio, quam inclinatione mutua Coordinatarum, tamen perpetuo æquatio ejuſdem erit ordinis. Quanquam ergo æquatio inter Coordinatas, ſive orthogonales ſive obliquangulas, infinitis modis variari poteſt, ut ad eandem Curvam pertineat, tamen neque ad ordinem altiorem evehi, neque ad inferiorem deprimi poterit. Atque hanc ob cauſam æquationes diverſi ordinis, utcunque alias fuerint affines, tamen ſemper Curvas diverſas exhibebunt.

CAPUT III.

De Linearum curvarum algebraïcarum in ordines diviſione.

47. CUm Linearum curvarum pariter ac Functionum varietas ſit infinita, earum cognitio nullo modo acquiri poterit, niſi infinita multitudo in certas claſſes digeratur, hocque modo mens in earum ſcrutatione dirigatur atque adjuvetur. Diviſimus jam quidem Lineas curvas in *algebraïcas* & *tranſcendentes*, verum utraque claſſis, ob infinitam Curvarum varietatem, ulteriori ſubdiviſione opus habet. Hic autem tantum Curvas *algebraïcas* ſpectamus, quas quemadmodum commodiſſime in claſſes diſtribui conveniat, diſpiciamus. Characteres igitur primum definiendi ſunt, quibus claſſium varietates determinentur, ita ut quæ Curvæ eodem charactere ſint præditæ, eæ ad eandem; quæ contra, ad diverſas claſſes referantur.

48. Characteres ergo iſti varias claſſes diſtinguentes aliunde, niſi ex Functionibus ſeu æquationibus, quibus Linearum curvarum natura continetur, peti nequeunt; cum, quia alia via ad Curvarum cognitionem perveniendi adhuc non patet; tum, quia nulla alia, quæ quidem datur, omnes Curvas algebraïcas

ſub

LIB. II. ſub ſe complectitur. Functiones vero & æquationes inter binas Coordinatas pluribus modis in diverſa genera diſtribui poſſunt, uti fecimus in libro ſuperiori. Ac primo quidem Functionum multiformitas ſe offert, quæ ad Linearum curvarum in varias claſſes diſtributionem præ aliis apta videtur; unde hujuſmodi diviſio oriretur, ut eæ Lineæ curvæ, quæ ex Functionibus uniformibus oriuntur, ad genus primum, quæ ex biformibus ad ſecundum, quæ ex triformibus ad tertium referantur & ita porro.

49. Quamvis autem hæc diviſio videatur naturalis, tamen, ſi diligentius perpendatur, naturæ Linearum curvarum, earumque indoli minime conformis deprehendetur. Multiformitas enim Functionum ab Axis poſitione, quæ eſt arbitraria, potiſſimum pendet, ita ut, ſi pro uno Axe Applicata fuerit Functio uniformis Abſciſſæ, eadem, alio aſſumto Axe, Functio multiformis eſſe queat; hoc ergo modo eadem Linea curva in diverſis generibus occurreret, quod eſt contra inſtitutum. Sic enim Linea curva hac æquatione $a^3 y = aaxx - x^4$ expreſſa pertineret ad genus primum, quia Applicata y eſt Functio uniformis ipſius x; permutatis vero Coordinatis, ſeu Axe ſumto ad priorem normali, eadem Curva exprimitur æquatione $y^4 - aayy + a^3 x = 0$, ſicque ad genus quartum pertineret. Hanc igitur ob cauſam multiformitas Functionum ad characterem, quo Lineæ curvæ in claſſes diſtribuantur, conſtituendum admitti nequit.

50. Æque parum ſimplicitas æquationum naturam Linearum curvarum exprimentium, ratione numeri terminorum characterem diſtinctionis conſtituere poterit. Si enim eæ Curvæ ad genus primum referantur quarum æquatio conſtet duobus terminis, ut $y^m = \alpha x^n$, ad ſecundum quarum æquatio contineat tres terminos ut $\alpha y^m + \beta y^p \cdot x^q + \gamma x^n = 0$, & ita porro, manifeſtum eſt eandem Lineam curvam in pluribus generibus occurrere. Per exemplum enim §. 36. ſubjunctum Linea curva æquatione

æquatione $yy - ax = 0$ contenta ſimul ad genus primum & quartum referri deberet, quia, mutato Axe, etiam hac æquatione CAP. III.

$$16uu - 24tu + 9tt - 55au + 10at = 0,$$

exprimitur. Deberet vero etiam, aliter aſſumto Axe & Abſciſſarum initio, ſimul ad genus ſecundum, tertium, & quintum pertinere; ex quo iſta diviſio adhiberi omnino non poteſt.

51. Hæc incommoda evitabuntur ſi æquationum, quibus relatio inter Coordinatas exprimitur, ordines ad Curvarum claſſes conſtituendas adhibeantur. Cum enim pro eadem Linea curva, utcunque tam Axis & principium Abſciſſarum quam inclinatio Coordinatarum varietur, æquatio ejuſdem ſemper ordinis maneat; eadem Linea curva non ad diverſas claſſes referetur. Charactere ergo in numero dimenſionum, quas Coordinatæ, ſive orthogonales ſive obliquangulæ, in æquatione complent, conſtituto, neque Axis neque principii Abſciſſarum mutatio, neque inclinationis Coordinatarum variatio, claſſium conſtitutionem perturbabit. Atque eadem Curva, ſive æquatio inter Coordinatas ſpecialis quæque ſive generalis ſive etiam generaliſſima ſpectetur, ad eandem ſemper claſſem annumerabitur. Quam ob rem character diſtinctionis Linearum curvarum convenientiſſime ab ordine æquationum petitur.

52. Quoniam igitur hæc diverſa æquationum genera, quæ ex dimenſionum numero conſtituuntur, ordines vocavimus, diverſa quoque Linearum curvarum genera, quæ hinc oriuntur, ordinum nomine appellabimus. Cum ergo æquatio primi ordinis generalis ſit

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma y$$

omnes Lineas curvas, quæ ſumtis x & y pro Coordinatis, ſive orthogonalibus ſive obliquangulis, ex hac æquatione proficiſcuntur, ad ordinem primum referemus. Supra autem vidimus in hac æquatione tantum Lineam rectam contineri, & hanc ob

 rem

LIB. II. rem primus ordo ſolam Lineam rectam in ſe complectitur, quæ utique inter omnes Lineas eſt ſimpliciſſima. Cum igitur nomen Curvæ huic primo ordini non conveniat, hos ordines non *Linearum curvarum*, ſed vocabulo latiori ſimpliciter *Linearum* vocabimus. Ordo ergo Linearum primus nullam Lineam curvam continet, ſed a ſola Linea recta exhauritur.

53. Perinde autem eſt ſive Coordinatæ ſtatuantur rectangulæ ſive obliquangulæ; quod ſi enim Applicatæ cum Axe faciant angulum ϕ, cujus Sinus ſit μ & Coſinus ν, æquatio ad Coordinatas orthogonales reducetur, ponendo $y = \frac{u}{\mu}$ & $x = \frac{\nu u}{\mu} + t$ (44), unde iſta inter Coordinatas orthogonales t & u, æquatio naſcitur

$$o = \alpha + \beta t + \left(\frac{\beta\nu}{\mu} + \frac{\gamma}{\mu}\right) u,$$

quæ cum non minus late pateat quam prior, utraque enim eſt generalis, manifeſtum eſt ſignificationem æquationis non reſtringi, etiamſi angulus, quem Applicatæ cum Axe faciant, rectus ſtatuatur. Hoc idem eveniet in æquationibus ſequentium ordinum generalibus, quæ non minus late patebunt, etſi Coordinatæ orthogonales ſtatuantur. Cum igitur æquatio generalis cujuſque ordinis per determinationem inclinationis Applicatarum ad Axem nihil de vi ſua perdat, ejus ſignificatum non reſtringemus, ſi Coordinatas orthogonales ſtatuamus. Quæcunque enim Linea curva in æquatione generali cujuſque ordinis continetur, ſumtis Coordinatis obliquangulis, eadem Linea curva in eadem æquatione continebitur, ſi Coordinatæ rectangulæ ſtatuantur.

54 Lineæ porro ſecundi ordinis omnes continebuntur in hac æquatione generali ordinis ſecundi.

$$o = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon x y + \zeta y^2$$

Omnes