LIB. II. gens ipsi QR parallela, quia ea intra Asymtotas in puncto contactus bisecabitur, & si tangentis semissis vocetur $= q$, erit semper $QM.QN = QM.MR = RN.RM = RN \times NQ = qq$, quæ est insignis proprietas Hyperbolarum intra Asymtotas descriptarum.

164. Quoniam Hyperbola ex duabus partibus diametraliter oppositis IAi & KBk constat, istæ proprietates non solum ad eas rectas intra Asymtotas ductas pertinent, quæ eandem Curvæ partem in duabus punctis intersecant. Sed etiam ad eas, quæ ad partes oppositas pertingunt. Ducatur nempe per punctum M recta $Mqrn$ ad partem oppositam, cui parallela agatur Gh, ac vocetur $Cq = t$ & $qM = u$; erit, ob triangula CGh & PMq similia, $PM = y = \frac{CG}{Gh}u$, & $qP = x - t = \frac{Ch}{Gh}u$; unde fit $x = t + \frac{Ch}{Gh}u$. Cum autem sit $xy = hh$, fiet $\frac{CG}{Gh}tu + \frac{CG.Ch}{Gh^2}uu = hh$, seu $uu + \frac{Gh}{Ch}tu - \frac{Gh^2}{CG.Ch}hh = 0$.

165. Applicata ergo u habebit duplicem valorem, nempe qM & $-qn$, hoc qn existente negativo quia ad alteram partem Asymtotæ CP pro Axe assumtæ vergit. Harum ergo binarum radicum summa $qM, -qn$ erit $= -\frac{Gh}{Ch}t = -qr$, ideoque $qn - qM = qr$, unde fit $qM = rn$, & $qn = rM$. Deinde autem ex æquatione inventa intelligitur fore radicum productum $-qM.qn = -\frac{Gh^2}{CG.Ch}hh$, seu $qM.qn = qM.rM = rn.qn = rn.rM = \frac{Gh^2}{CG.Ch}hh$. Hæc ergo rectangula, quotcunque rectæ Mn ipsi Gh parallelæ ducantur, perpetuo ejusdem erunt magnitudinis. Hæ autem sunt præcipuæ singularum specierum Linearum secundi ordinis proprietates, quæ, si cum proprietatibus generalibus conferantur, infinita fere insignium proprietatum multitudo conficitur.

CAPUT

CAPUT VII.

De ramorum in infinitum excurrentium investigatione.

166. SI curva Linea quæcunque habeat ramum ſeu partem in infinitum excurrentem, atque ex ejus puncto infinite diſſito ad Axem quemcunque demittatur Applicata normalis; tum, vel Abſciſſa x vel Applicata y vel utraque Coordinata, erit infinita. Niſi enim vel alterutra vel utraque eſſet infinita, tum diſtantia puncti in Curva aſſumti ab initio Abſciſſarum foret finita nempe $= \surd(xx + yy)$, contra hypotheſin. Quam ob rem, ſi Curva habeat ramum in infinitum excurrentem, vel Abſciſſæ cuipiam finitæ conveniet Applicata realis infinita, vel Abſciſſæ infinite magnæ reſpondebit Applicata realis, ſive finita ſive infinite magna. Ex hoc igitur fonte Curvarum rami in infinitum excurrentes inveſtigari poterunt.

167. Sit propoſita æquatio algebraïca inter Coordinatas x & y cujuſvis ordinis, puta n; atque ſeorſim conſiderentur termini, in quibus variabiles x & y obtinent n dimenſiones, qui erunt $\alpha y^n + \beta y^{n-1} x + \gamma y^{n-2} x^2 + \delta y^{n-3} x^3 + \ldots\ldots + \xi x^n$, quæ expreſſio reſolubilis erit in Factores ſimplices formæ $Ay + Bx$, ſive reales ſive imaginarios. Atque, ſi habeat Factores imaginarios, eorum numerus erit par, binique conjuncti dabunt Factorem duplicem realem formæ $A^2y^2 - 2ABxy \times cof. \Phi + B^2x^2$. Hujuſmodi autem Factor, (ſive x ſive y ſive utraque, ponatur infinita $= \infty$,) ſemper valorem induet infinitum $= \infty^2$, quia terminus $2ABy x. cof. \Phi$ ſemper minor eſt quam duo reliqui $A^2y^2 + B^2x^2$, neque enim A nec B poteſt eſſe $= 0$. Hujuſmodi ergo Factor $A^2y^2 - 2ABxy. cof. \Phi + B^2x^2$,

LIB. II. B^2x^2, si vel x vel y vel utraque ponatur infinita, neque nihilo neque quantitati finitæ, neque etiam quantitati infinitæ ∞ potest esse æqualis, cum ipsa fiat $= \infty^2$, quæ infinities major est quam ∞.

168. Quod si ergo æquationis pars summa $\alpha y^n + \beta y^{n-1}x + \gamma y^{n-2}x^2 + \ldots\ldots + \xi x^n$ nullum habeat Factorem simplicem realem, quod quidem evenire non potest, nisi n sit numerus par, tum ex meris Factoribus duplicibus hujus formæ $A^2y^2 - 2ABxy.cos.\Phi + B^2x^2$ constabit. Quare, si vel x vel y vel utraque ponatur infinita, ipsa illa expressio valorem induet infinitum $= \infty^n$: neque igitur quantitati finitæ, neque ulli quantitati infinitæ ∞^m, cujus exponens m minor sit quam n, æqualis esse potest. Reliqua igitur æquationis membra, in quibus variabiles x & y pauciores habent dimensiones, quoniam infinita præbent minoris exponentis quam n, illud supremum infinitum adæquare non possunt; ideoque æquatio consistere non potest, si vel x vel y vel utraque statuatur infinita.

169. Hinc ergo linea Curva, quæ exprimitur æquatione inter Coordinatas x & y, cujus supremum membrum nullos habet Factores simplices reales, nullos habebit ramos in infinitum excurrentes, ideoque tota Curva continebitur in spatio finito, instar Ellipsis seu Circuli. Quam ob rem, si in æquatione generali secundi Ordinis $\alpha y^2 + \beta xy + \gamma xx + \delta y + \epsilon x + \zeta = 0$, membrum supremum, $\alpha yy + \beta xy + \gamma xx$, in quo variabiles x & y duas obtinent dimensiones, non habeat Factores simplices reales, quod evenit si $\beta\beta$ sit major quam $4\alpha\gamma$, tum Curva nullum habebit ramum in infinitum excurrentem, eritque adeo Ellipsis.

170. Quo hæc distinctius evolvere liceat, omnem æquationem inter Coordinatas x & y propositam, ita in membra distin-

distinguamus, ut ad supremum seu primum referamus omnes æquationis terminos, in quibus variabiles x & y eandem summam dimensionem, cujus exponens sit n, teneant. Ad secundum vero membrum refero omnes terminos, in quibus variabiles ambæ $n - 1$ dimensiones constituunt. Tertium membrum continebit eos terminos, in quibus ipsorum x & y numerus dimensionum est $n - 2$, & ita porro, donec perveniatur ad membrum ultimum, in quo nulla inest dimensio ipsarum x & y, & quod propterea sola quantitate constante constabit. Sit autem P membrum primum seu supremum, Q membrum secundum, R membrum tertium, S quartum & ita porro. Cap. VII.

171. Quoniam igitur, si membrum supremum P nullum habet Factorem simplicem realem, Linea curva, æquatione $P + Q + R + S +$ &c. $= 0$ indicata, nullum habet ramum in infinitum excurrentem; ponamus jam membrum supremum P unicum habere Factorem simplicem realem, $ay - bx$, ita ut sit $P = (ay - bx)M$, existente M Functione ipsarum x & y, dimensionum $n - 1$, quæ nullos habeat Factores simplices reales. Posita ergo vel x vel y vel utraque infinita, fiet $M = \infty^{n-1}$; Q vero simile poterit esse infinitum, at R, S, &c., fient infinita minorum graduum. Consequenter æquatio $P + Q + R +$ &c. $= 0$ poterit subsistere, si fuerit $ay - bx =$ quantitati finitæ, vel nihilo, ideoque Curva in infinitum porrigetur.

172. Sit ergo $ay - bx = p$, existente p quantitate finita, quæ ita debet esse comparata ut, Curva in infinitum abeunte, fiat $pM + Q + R + S +$ &c. $= 0$ seu $p = \frac{-Q - R - S \text{ \&c.}}{M}$. At, cum M sit quantitas infinita superioris ordinis quam R & S &c., erunt fractiones $\frac{R}{M}$, $\frac{S}{M}$, &c. $= 0$, ideoque $p = \frac{-Q}{M}$. Hanc ob rem fractio $\frac{-Q}{M}$ dabit valorem ipsius p, si variabiles

biles x & y fiant infinitæ. Cum autem sit $ay - bx = p$, erit $y = \frac{bx + p}{a}$ & $\frac{y}{x} = \frac{b}{a} + \frac{p}{ax} = \frac{b}{a}$ ob $\frac{p}{ax} = 0$ si $x = \infty$. Curva ergo in infinitum abeunte fit $y = \frac{bx}{a}$.

173. Cum igitur Q & M sint Functiones homogeneæ $n - 1$ dimensionum, erit $\frac{-Q}{M}$ Functio nullius dimensionis, ideoque si ponatur $y = \frac{bx}{a}$, præbebit valorem constantem pro p. Vel, quia Functio $\frac{-Q}{M}$ determinatur, si tantum ratio inter y & x determinetur, quæ est $b : a$, valor ipsius p obtinebitur si in expressione $\frac{-Q}{M}$, ubique b loco y & a loco x scribatur. Invento ergo hoc modo p erit $ay - bx = p$, quæ æquatio in ipsa æquatione proposita $P + Q + R + S +$ &c. $= 0$ continetur, si Curva abeat in infinitum.

174. Portio itaque Curvæ in infinitum extensa ipsa exprimetur per hanc æquationem $ay - bx = p$; quæ cum sit pro Linea recta, hæc Linea recta in infinitum producta tandem cum Linea curva confundetur. Erit ergo Linea recta hæc Curvæ asymtota, quoniam Linea curva in infinitum porrecta cum recta congruet, ideoque continuo propius ad eam accedet. Atque cum æquatio proposita $P + Q + R + S +$ &c. $= 0$, posito x vel $y = \infty$, abeat in æquationem $ay - bx = p$, simul intelligitur hanc Lineam rectam utrinque in infinitum productam tandem cum Curva congruere. Quam ob rem Linea curva duos habebit ramos in infinitum excurrentes inter se oppositos, quorum alter cum ista Linea recta antrorsum, alter cum eadem retrorsum infinite producta conveniet.

175. Cum igitur Curva, si æquationis $P + Q + R + S +$ &c. $= 0$, membrum supremum P unicum habeat Factorem simplicem realem, prædita sit duobus ramis in infinitum extensis, atque ad eandem Lineam rectam utrinque convergentibus, quæ Linea recta ejus Asymtota vocatur; nunc ponamus supre-