203. Problema. *Si formae Φ, φ sunt aequiualentes, omnes transformationes alterius in alteram exhibere.*

Sol. Quando formae hae vnico tantum modo aequiualentes sunt (i. e. aut proprie tantum aut improprie tantum) quaeratur per art. 196 transformatio vna formae φ, in Φ, quae sit α, β, γ, δ, patetque alias quam quae huic sint similes, dari non posse. Quando vero φ, Φ tum proprie tum improprie aequiualent, quaerantur duae transformationes dissimiles, i. e. altera propria altera impropria, puta α, β, γ, δ et α', β', γ', δ', eritque quaeuis alia transformatio aut huic aut illi similis. Si itaque forma φ est (a, b, c) ipsius determinans $= D$, diuisor communis maximus numerorum a, $2b$, c (vti semper in praec.) m, atque t, u indefinite omnes numeri aequationi $tt - Duu = mm$ satisfacientes: in casu priori omnes transformationes formae φ in Φ contentae erunt sub prima formularum sequentium I, in posteriori vel sub prima I vel sub secunda II.

$$\text{I}\ldots\quad \frac{1}{m}(\alpha t-(\alpha b+\gamma c)u),\ \frac{1}{m}(\beta t-(\beta b+\delta c)u),$$
$$\frac{1}{m}(\gamma t+(\alpha a+\gamma b)u),\ \frac{1}{m}(\delta t+(\beta a+\delta b)u)$$

$$\text{II}\ldots\quad \frac{1}{m}(\alpha' t-(\alpha' b+\gamma' c)u),\ \frac{1}{m}(\beta' t-(\beta' b+\delta' c)u),$$
$$\frac{1}{m}(\gamma' t+(\alpha' a+\gamma' b)u),\ \frac{1}{m}(\delta' t+(\beta' a+\delta' b)u).$$

Ex. Desiderantur omnes transformationes formae (129, 92, 65) in formam (42, 59, 81). Has improprie tantum aequiualentes esse in art. 195 inuenimus et in art. seq. transformationem impropriam illius in hanc eruimus — 47, — 56, 73, 87. Quamobrem omnes transformationes formae (129, 92, 65) in (42, 59, 81) exhibebuntur per formulam — $(47\,t + 421\,u)$, — $(56\,t + 503\,u)$, $73\,t + 653\,u$, $87\,t + 780\,u$, vbi t, u sunt indefinite omnes numeri aequationi $tt - 79\,uu = 1$ satisfacientes; hi vero exhibentur per formulas

$$\pm t = \frac{1}{2}((80 + 9\sqrt{79})^e + (80 - 9\sqrt{79})^e),$$

$$\pm u = \frac{1}{2\sqrt{79}}((80 + 9\sqrt{79})^e - (80 - 9\sqrt{79})^e)$$

vbi pro e omnes numeri integri non negatiui sunt accipiendi.

204. Perspicuum est, formulam generalem omnes transformationes exhibentem eo *simpliciorem* euadere, quo simplicior fuerit transformatio initialis ex qua formula est deducta. Iam quum arbitrarium sit, a qua transformatione proficiscamur, saepenumero formula generalis simplicior reddi potest, si ex formula primo inuenta transformatio simplicior deducitur tribuendo ipsis t, u valores determinatos, et tunc ex hac alia formula componitur. Ita *e. g.* positis in formula in ex. art. praec. inuenta, $t = 80$, $u = -9$, prodit transformatio simplicior quam ea a qua profecti eramus, scilicet 29, 47, — 37, — 60 vnde deducitur formula generalis $29\,t - 263\,u$, $47\,t - 424\,u$, — $37\,t + 337\,u$, — $60\,t + 543\,u$. Quando itaque per praecepta praecedentia formula generalis eruta

est, tentari poterit, annon, tribuendo ipsis t, u valores determinatos $\pm t'$, $\pm u'$; $\pm t''$, $\pm u''$ etc. transformatio obtineatur simplicior quam ea ex qua formula deducta fuit, in quo casu ex illa transformatione formula simplicior deriuari poterit. — Ceterum in diiudicanda simplicitate aliquid arbitrarii remanet, quod si operae pretium esset ad normam fixam reuocare, nec non in progressione t', u'; t'', u'' etc. *limites* assignare possemus, vltra quos transformationes continuo minus simplices prodeant, ita vt vltra progredi opus non sit sed intra illos tentamen instituisse sufficiat: attamen quum plerumque per methodos a nobis praescriptas transformatio simplicissima vel statim vel adhibitis pro t, u valoribus $\pm t'$, $\pm u'$ prodire soleat, hanc disquisitionem breuitatis gratia supprimimus.

205. Problema. *Inuenire omnes repraesentationes numeri dati M per formulam datam $axx + 2bxy + cyy$, cuius determinans positiuus non-quadratus $= D$.*

Sol. Primo obseruamus, inuestigationem repraesentationum per valores ipsorum x, y inter se non primos, hic prorsus eodem modo, vt supra (art. 181) pro formis determinantis negatiui, ad eum casum reduci posse, vbi repraesentationes per valores indeterminatarum inter se primos quaeruntur, quod igitur hic repetere superfluum foret. Ad possibilitatem repraesentationum per valores ipsorum x, y inter se primos autem requiritur, vt D sit residuum quadraticum ipsius M, et si omnes valores expressionis $\sqrt{D}$ (mod. M) sunt N,