enim perspicietur, si $(f; \mu)$ cum alia periodo ex p'', p''' etc. conueniat, ratiocinia sequentibus prorsus analoga adhiberi posse. Quum multitudo aequationum I, II, III etc. sit $e - 1$, quantitates p'', p''' etc., quarum multitudo $= e - 2$, per methodos notas inde eliminari possunt, ita vt prodeat aequatio talis (Z) ab ipsis libera $0 = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}p + \mathfrak{C}pp$ etc. $+ \mathfrak{M}p^{e-1} + \mathfrak{N}p'$, quod ita fieri poterit, vt omnes coëfficientes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \ldots \mathfrak{N}$ sint integri atque certe non omnes $= 0$. Iam si hic non est $\mathfrak{N} = 0$, protinus liquet, p' inde ita vt in theoremate enunciatum est determinari. Superest itaque, vt demonstremus, $\mathfrak{N} = 0$ fieri non posse.

Supponendo esse $\mathfrak{N} = 0$, aequatio Z fit $\mathfrak{M}p^{e-1} +$ etc. $+ \mathfrak{B}p + \mathfrak{A} = 0$, cui, quum vltra gradum $e - 1^{\text{tum}}$ certo non ascendat, plures quam $e - 1$ valores diuersi ipsius p satisfacere nequeunt. At quum aequationes, e quibus Z deducta fuit, a λ sint independentes, liquet, etiam Z a λ non pendere, siue locum habere, quicunque integer per n non diuisibilis pro λ accipiatur. Quare aequ. Z satisfiet, cuicunque ex e aggregatis $(f, 1)$, (f, g), $(f, gg) \ldots (f, g^{e-1})$ aequalis statuatur p, vnde sponte sequitur, haec aggregata omnia inaequalia esse non posse, sed ad minimum duo inter se aequalia esse debere. Contineat vnum e duobus talibus aggregatis aequalibus radices $[\zeta]$, $[\zeta']$, $[\zeta'']$ etc., alterum has $[\eta]$, $[\eta']$, $[\eta'']$ etc., supponamusque (quod licet), omnes numeros ζ, ζ', ζ'' etc., η, η', η'' etc. esse positiuos et $< n$; manifesto omnes etiam diuersi erunt, nullusque $= 0$. Designetur functio $x^{\zeta} +$

$x^{\zeta'} + x^{\zeta''} +$ etc. $- x^{\eta} - x^{\eta'} - x^{\eta''} -$ etc., cuius terminus summus non vltra x^{n-1} ascendet, per Y, patetque fieri $Y = 0$ si statuatur $x = [1]$; hinc Y implicabit factorem $x - [1]$, quem cum functione in praec. per X denotata *communem* habebit; hoc vero absurdum esse facile monstrari poterit. Si enim Y cum X vllum factorem communem haberet, diuisor communis *maximus* functionum X, Y (quem certo vsque ad $n - 1$ dimensiones ascendere non posse iam inde patet, quod Y per x est diuisibilis), omnes coëfficientes suos rationales haberet, vt e natura operationum, diuisorem communem maximum duarum talium functionum inuestigandi quarum coëfficientes omnes sunt rationales, sponte sequitur. Sed in art. 341 ostendimus, X implicare non posse factorem pauciorum quam $n - 1$ dimensionum, cuius coëfficientes omnes sint rationales: quamobrem suppositio, esse $\mathfrak{N} = 0$, consistere nequit.

Ex. Pro $n = 19$, $f = 6$, fit $pp = 6 + 2p + p' + 2p''$, vnde et ex $0 = 1 + p + p' + p''$ deducitur $p' = 4 - pp$, $p'' = -5 - p + pp$. Quare $(6, 2) = 4 - (6, 1)^2$, $(6, 4) = -5 - (6, 1) + (6, 1)^2$; $(6, 4) = 4 - (6, 2)^2$, $(6, 1) = -5 - (6, 2) + (6, 2)^2$; $(6, 1) = 4 - (6, 4)^2$, $(6, 2) = -5 - (6, 4) + (6, 4)^2$.

347. Theorema. *Si $F = \varphi(t, u, v \ldots)$ est functio* inuariabilis **) algebraica rationalis integra*

*) Functiones inuariabiles eas vocari constat, quibus omnes indeterminatae eodem modo insunt, siue clarius, quae non

f indeterminatarum t, u, v etc., atque substituendo pro his f radices in periodo (f, λ) contentas valor ipsius F per praecepta art. 340 ad formam $A + A'[1] + A''[2] +$ etc. $= W$ reducitur: radices quae in hac expressione ad eandem periodum quamcunque f terminorum pertinent coëfficientes aequales habebunt.

Dem. Sint $[p]$, $[q]$ duae radices ad vnam eandemque periodum pertinentes, supponanturque p, q positiui et minores quam n, ita vt demonstrare oporteat, $[p]$ et $[q]$ in W eundem coëfficientem habere. Sit $q \equiv pg^{\nu e}$ (mod. n); sint porro radices in (f, λ) contentae $[\lambda]$, $[\lambda']$, $[\lambda'']$ etc., vbi numeros λ, λ', λ'' etc. positiuos et minores quam n supponimus; denique sint residua minima positiua numerorum $\lambda g^{\nu e}$, $\lambda' g^{\nu e}$, $\lambda'' g^{\nu e}$ etc., secundum modulum n, haec μ, μ', μ'' etc., quae manifesto cum numeris λ, λ', λ'' etc. identici erunt, etsi ordine transposito. Iam ex art. 340 patet, $\phi(\lambda g^{\nu e}, \lambda' g^{\nu e}, \lambda'' g^{\nu e} \ldots) = (\mathrm{I})$ reduci ad $A + A'[g^{\nu e}] + A''[2g^{\nu e}] +$ etc. aut ad $A + A'[\theta] + A''[\theta'] +$ etc. $= (W')$, designando per θ, θ' etc. residua minima numerorum $g^{\nu e}$, $2g^{\nu e}$ etc. secundum modulum n, vnde manifestum est, $[q]$ habere eundem coëfficientem in (W'), quem $[p]$ habeat in (W). Sed nullo negotio perspicitur, ex euolutione expressionis (I) idem prouenire atque ex euolutione huius $\phi(\mu, \mu', \mu''$ etc.$)$ quoniam $\mu \equiv \lambda g^{\nu e}$, $\mu' \equiv \lambda' g^{\nu e}$ etc. (mod. n); haec vero expressio idem producit ac haec $\phi(\lambda, \lambda', \lambda''$

mutantur, quomodocunque indeterminatae inter se permutentur; cuiusmodi sunt e. g. summa omnium, productum ex omnibus, summa productorum e binis etc.