

numerus ternario superet minimum. Quo igitur hujusmodi ^{C A P.} obtineatur æquatio, simulque sit $(xx + yy)L^2 - 2(xx + yy)$ ^{XVII.}
 $KM = aaKK$, multiplicetur illa æquatio per $2(xx + yy)K$,
 ut eliminari possit M , atque prodibit hæc æquatio generalis
 casui proposito satisfaciens

$$2(xx + yy)KK - 2(xx + yy)KL + (xx + yy)L^2 - aaKK - 2(xx + yy)KN = 0.$$

Membrum enim, in quo plurimæ insunt dimensiones, est
 $2(xx + yy)KK$, continetque $2n + 8$ dimensiones ipsarum x &
 y ; atque membrum infimum est $2(xx + yy)KN$, & continet
 $2n + 5$ dimensiones, uti natura rei postulat.

430. Quoniam ergo neque summum neque imum mem-
 brum evanescere potest, ponamus, ad Curvam simplicissimam
 inveniendam, $n = 0$; fitque $N = b^3$, $K = x(xx + yy)$, &
 $L = 0$, atque prodibit hæc æquatio

$$2(xx + yy)^3 x^2 - aaxx(xx + yy)^2 - 2b^3 x(xx + yy)^2 = 0,$$

quæ per $2x(xx + yy)^2$ divisâ præbet hanc

$$x(xx + yy) - \frac{1}{2} aax - b^3 = 0,$$

quæ pertinet ad ordinem tertium. Sin autem non sit $L = 0$,
 sed $L = 2c(xx + yy)$, prodibit æquatio ordinis quarti

$$xx(xx + yy) - 2cx(xx + yy) + 2cc(xx + yy) - \frac{1}{2} aaxx - b^3 x = 0,$$

seu

$$xx(xx + yy) + (2c - x)^2(xx + yy) = aaxx + 2b^3 x.$$

Simili autem modo ex altioribus ordinibus plurimæ aliæ
 Curvæ quæstioni satisfaciens eruentur.

431. Deinde, etiam Curvæ inveniri poterunt ex in quibus
 sit $p^4 + q^4 + r^4$ quantitas constans. Cum enim sit $p^4 + q^4 + r^4$
 $= P^4 - 4P^2Q + 2QQ + 4PR$, poni debebit $P^4 -$
 $4P^2Q + 2QQ + 4PR = c^4$.

Erit ergo

$$2^4 (L^4 - 4KL^2M + 2K^2M^2 + 4K^2LN) = c^4 K^4:$$

ideoque

$$4K^2LNz^4 = c^4 K^4 - 2^4 (L^4 - 4KL^2M + 2K^2M^2),$$

Euleri *Introduct, in Anal, infin. Tom. II.*

G g

unde

LIB. II. unde valor ipsius N in æquatione $K - L + M - N = 0$,
 substitutus dabit æquationem generalem pro Curvis huic condi-
 tioni satisfaciendis.

432. Poterit autem simul & huic conditioni $p^4 + q^4 + r^4 = c^4$, & præcedenti $p^2 + q^2 + r^2 = a^2$ satisfieri. Per hanc enim esse debet $3zL^2 - 2zzKM = aaKK$; unde fit $2z^2KM = zL^2 - aaKK$.

Deinde, cum fit

$$4K^2LNz^4 = c^4K^4 - L^4z^4 + 4KL^2Mz^4 - 2K^2M^2z^4$$

erit

$$4K^2LNz^4 = c^4K^4 + L^4z^4 - 2aaK^2L^2z^2 - 2K^2M^2z^4$$

&

$$4K^2LMz^4 = 2KL^3z^4 - 2aaK^3Lz^2.$$

Substituantur hi valores loco M & N in æquatione $K - L + M - N = 0$, seu $4K^3Lz^4 - 4K^2L^2z^4 + 4K^2LMz^4 - 4K^2LNz^4 = 0$, atque prodibit hæc æquatio pro Curva

$$4K^3Lz^4 - 4K^2L^2z^4 + 2KL^3z^4 - 2a^2K^3Lz^2 - c^4K^4 - L^4z^4 + 2a^2K^2L^2z^2 + 2K^2M^2z^4 = 0.$$

At, ob

$$KMzz = \frac{1}{2}L^2zz - \frac{1}{2}aaKK$$

erit

$$2K^2M^2z^4 = \frac{1}{2}L^4z^4 - aaK^2L^2zz + \frac{1}{2}a^4K^4,$$

ideoque pro Curvis quæsitis habebitur hæc æquatio generalis

$$8K^3Lz^4 - 8K^2L^2z^4 + 4KL^3z^4 - 4a^2K^3Lz^2 - 2c^4K^4 - L^4z^4 + 2a^2K^2L^2z^2 + a^4K^4 = 0.$$

433. Quia K debet esse Functio homogenea ipsarum x & y una dimensione altior quam L , Curva simplicissima in qua tres intersectiones exhibeant simul $p^2 + q^2 + r^2 = a^2$, & $p^4 + q^4 + r^4 = c^4$ prodibit, si ponatur $K = zz$, & $L = bx$; erit ergo

$$8bxz^6 - 8bbxxz^4 + 4b^3x^3z^2 - 4a^2bxz^4 - 2c^4z^4 - b^4x^4 + 2a^2b^2x^2z^2 + a^4z^4 = 0,$$

quæ, ob $zz = xx + yy$, est rationalis, præbetque Lineam ordinis septimi, cujus C est punctum quadruplex. Alia autem Linea septimi ordinis satisfaciens obtinebitur, si ponatur $K = x$, & $L = b$; erit enim

$$8bx^3z^4 - 8bbxxz^4 + 4b^3xz^4 - 4aabbx^3zz - 2c^4x^4 - b^4z^4 + 2aabbxxzz + a^4x^4 = 0,$$

seu

$$z^4 = \frac{4aabbx^3zz - 2aabbxxzz + 2c^4x^4 - a^4x^4}{8bx^3 - 8bbxx + 4b^3x - b^4}.$$

Unde fit

$$zz = \frac{2aabbx^3 - aabbxx + xx\sqrt{(2bx - bb)(2c^4(bb - 2bx + 4xx) - 2a^4(bb - 2bx + 2xx))}}{b(2x - b)(4xx - 2bx + bb)}.$$

434. Jam ulterius progredi liceret ad Curvas, quæ a rectis per punctum C ductis in quatuor punctis interfecentur; atque ex iis illæ inveniri possent, quæ datis proprietatibus sint præditæ. Verum, si ad præcepta in præcedentibus tradita attendamus, nulla prorsus supererit difficultas, omniaque, quæ in hoc genere desiderari poterunt, sine ullo fere labore vel expeditur, vel, nisi quæstio solutionem genuinam admittat, hoc ipsum statim cognoscetur. Quam ob rem huic materiæ amplius non immorabor, ad aliud argumentum ad cognitionem Linearum curvarum pertinens progressurus.

LIB. II.

CAPUT XVIII.

De Similitudine & Affinitate Linearum curvarum.

435. **I**N omni æquatione pro Linea curva, præter Coordinatas orthogonales x & y , inesse debent quantitates constantes, vel una vel plures, uti a, b, c , &c.; quibus Lineæ constantes designantur, & quæ cum variabilibus x & y ubique eundem Linearum dimensionum numerum constituunt: Si enim in uno termino extet productum ex n Lineis in se invicem multiplicatis, necesse est ut in singulis reliquis terminis totidem Lineæ in se invicem multiplicentur, quoniam alias quantitates heterogeneæ inter se comparari deberent, quod fieri non potest. Quocirca in omni æquatione pro Linea curva Lineæ constantes a, b, c , &c., cum variabilibus x & y ubique eundem dimensionum numerum constituent, nisi forte Linea quæpiam constans unitate vel alio numero absoluto exprimatur. Hoc igitur notato, si nullæ Lineæ constantes in æquatione inessent, tum variables x & y solæ ubique eundem dimensionum numerum adimplerent, ideoque Functionem homogeneam constituerent. Supra autem jam vidimus hujusmodi æquationem ad Lineam curvam non pertinere, sed aliquot rectas se invicem in eodem puncto interfecantes exhibere.

436. Contemplemur igitur æquationem in qua, præter binas variables x & y , unica insit Linea constans a ; ita ut tres Lineæ a, x , & y ubique in æquatione eundem dimensionum numerum constituent. Hujusmodi ergo æquatio, prout Lineæ constanti a alii atque alii valores tribuantur, infinitas producet Lineas curvas, quæ tantum quantitate a se invicem discrepant, ceterum vero omnino similes inter se sint futuræ. Omnes ergo Lineæ curvæ, quæ hoc modo in eadem æquatione comprehenduntur, merito ad idem genus referuntur atque inter se
similes

similes esse censentur, neque aliud in illis deprehenditur dif-
crimen, nisi quod in Circulis diversæ magnitudinis inesse in-
telligitur. CAP. XVIII

437. Quo hæc similitudo melius percipiatur, consideremus æquationem determinatam, præter variables x & y , unicam Lineam constantem a , quam *Parametrum* vocare liceat, continentem, hanc

$$y^3 - 2x^3 + ayy - aax + 2aay = 0.$$

Sit AC valor Parametri a ; atque, existente $AC = a$, sit $TAB.$
 AMB Linea curva hac æquatione contenta, sumta recta AB XXI.
pro Axe, vocatisque Coordinatis $AP = x$ & $PM = y$. Fig. 88.

Tribuatur jam Parametro a quicunque alius valor $ac = a$,
sitque amb Linea curva, quam nunc illa æquatio præbet;
eruntque hæ Lineæ curvæ AMB & amb inter se similes. TAB.
Quod si enim maneat $AC = a$, $AP = x$, $PM = y$, at- XXI.
que sit $ac = \frac{1}{n} AC = \frac{a}{n}$; tum vero capiatur $ap =$ Fig. 89.

$\frac{1}{n} AP = \frac{x}{n}$, erit $pm = \frac{1}{n} PM = \frac{y}{n}$; namque si
in illa æquatione, loco a , x , & y , scribantur respective
 $\frac{a}{n}$, $\frac{x}{n}$, & $\frac{y}{n}$, ob omnes terminos per n^3 divisos, eadem
ipsa resultabit æquatio.

438. Curvæ ergo similes hanc habebunt proprietatem, ex
qua similitudinis natura eo luculentius apparebit, ut sumtis
Abscissis AP , ap in ratione Parametrorum AC & ac Appli-
catæ PM & pm simul eandem habituræ sint rationem: scili-
cet, si sumatur $AP : ap = AC : ac$, tum quoque erit
 $PM : pm = AC : ac$. Cum ergo sit $AP : PM = ap : pm$,
hæ Curvæ in sensu geometrico inter se erunt similes, atque,
quantitate excepta, iisdem prorsus affectionibus gaudebunt.
Sumtis nimirum Abscissis AP , ap homologis seu Parametris
 AC & ac proportionalibus, non solum Applicatæ PM &