Substitutionem $x = \alpha x' + \beta y'$, $y = \gamma x' + \delta y'$, vocabimus *transformationem propriam*, si $\alpha\delta - \beta\gamma$ est numerus positiuus, *impropriam*, si $\alpha\delta - \beta\gamma$ est negatiuus; formam F' *proprie* aut *improprie* sub forma F contentam esse dicemus, si F per transformationem propriam aut impropriam in formam F' transmutari potest. Si itaque formae F, F' sunt aequiualentes, erit $(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = 1$, adeoque si transformatio est propria, $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$, si est impropria, $= -1$. — Si plures transformationes simul sunt propriae, aut simul impropriae, *similes* eas dicemus; propriam contra et impropriam *dissimiles*.

158. *Si formarum F, F' determinantes sunt aequales atque F' sub F contenta: etiam F sub F' contenta erit et quidem proprie vel improprie prout F' sub F proprie vel improprie continetur.* Transeat F in F' ponendo $x = \alpha x' + \beta y'$, $y = \gamma x' + \delta y'$ transibitque F' in F ponendo $x' = \delta x - \beta y$, $y' = -\gamma x + \alpha y$. Patet enim per hanc substitutionem ex F' fieri idem, quod fiat ex F ponendo $x = \alpha(\delta x - \beta y) + \beta(-\gamma x + \alpha y)$; $y = \gamma(\delta x - \beta y) + \delta(-\gamma x + \alpha y)$ siue $x = (\alpha\delta - \beta\gamma)x$, $y = (\alpha\delta - \beta\gamma)y$. Hinc vero manifesto ex F fit $(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 F$ *i. e.* rursus F (art. praec.). Perspicuum autem est, transformationem posteriorem esse propriam vel impropriam, prout prior sit propria vel impropria.

Si tum F' sub F, tum F sub F' *proprie* continetur, formas *proprie aequiualentes*, si illae sub inuicem improprie, vocabimus *improprie ae-*

quiualentes. — Ceterum vsus harum distinctionum mox innotescet.

Exempl. Forma $2xx - 8xy + 3yy$ per substitutiones $x = 2x' + y'$, $y = 3x + 2y'$ transit in formam $- 13xx \quad 12xy - 2yy$, haec vero in illam factis $x' = 2x - y$, $y' = - 3x + 2y$. Quare formae $(2, -4, 3)$, $(-13, -6, -2)$ erunt *proprie aequiualentes.*

Problemata quae tractare iam aggrediemur sunt haec: I. Propositis duabus formis quibuscunque eundem determinantem habentibus inuestigare vtrum sint aequiualentes necne, vtrum proprie aut improprie aut vtroque modo, nam etiam hoc fieri potest. Quando vero determinantes inaequales habent, annon saltem altera alteram implicet, proprie vel improprie vel vtroque modo. Denique inuenire omnes transformationes alterius in alteriam, tam proprias quam improprias. II. Proposita forma quacunque, inuenire vtrum numerus datus per eam repraesentari possit omnesque repraesentationes assignare. Sed quoniam formae determinantis negatiui hic aliam methodum requirunt quam formae determinantis positiui, primo trademus ea quae vtrisque sunt communia, tum vero formas cuiusuis generis seorsim considerabimus.

159. *Si forma F formam F' implicat, haec vero formam F'', forma F etiam formam F'' implicabit.*

Sint indeterminatae formarum F, F', F'' respectiue x, y; x', y'; x'', y'' transeatque F in F' ponendo $x = \alpha x' + \beta y'$, $y = \gamma x' + \delta y'$; F' in F'' ponendo $x' = \alpha' x'' + \beta' y''$, $= \gamma' x'' + \delta' y''$ patetque, F in F'' transmutatum iri ponendo $x = \alpha(\alpha' x'' + \beta' y'') + \beta(\gamma' x'' + \delta' y'')$, $y = \gamma(\alpha' x'' + \beta' y'') + \delta(\gamma' x'' + \delta' y'')$, siue $x = (\alpha\alpha' + \beta\gamma')\, x'' + (\alpha\beta' + \beta\delta')\, y''$, $y = (\gamma\alpha' + \delta\gamma')\, x'' + (\gamma\beta' + \delta\delta')\, y''$. Quare F ipsam F'' implicabit.

Quia $(\alpha\alpha' + \beta\gamma')(\gamma\beta' + \delta\delta') - (\alpha\beta' + \beta\delta')(\gamma\alpha' + \delta\gamma') = (\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha'\delta' - \beta'\gamma')$, adeoque positiuus, si tum $\alpha\delta - \beta\gamma$ tum $\alpha'\delta' - \beta'\gamma'$ positiuus aut vterque negatiuus, negatiuus vero si alter horum numerorum positiuus alter negatiuus: forma F formam F'' *proprie* implicabit, si F ipsam F' et F' ipsam F'' eodem modo implicant, *improprie* si diuerso.

Hinc sequitur, si quotcunque formae habeantur F, F', F'', F''' etc., quarum quaeuis sequentem implicet, primam implicaturam esse vltimam, et quidem *proprie*, si multitudo formarum, quae sequentem suam improprie implicant, fuerit par, improprie si multitudo haec impar.

Si forma F formae F' est aequiualens, formaque F' formae F'': forma F formae F'' aequiualens erit, et quidem proprie, si forma F formae F' eodem modo aequiualet vt forma F' formae F'', improprie, si diuerso.

Quia enim formae F, F', his F', F'', respectiue, sunt aequiualentes, tum illae has resp.