

$$\begin{aligned}
 m &= \alpha\alpha\alpha + 2b''\alpha\alpha' + \alpha'\alpha'\alpha' \\
 m' &= \alpha\epsilon\epsilon + 2b''\epsilon\epsilon' + \alpha'\epsilon'\epsilon' \\
 m'' &= \alpha''; n = b\epsilon' + b'\epsilon; n' = b\alpha' + b'\alpha \\
 n'' &= \alpha\epsilon\epsilon + b''(\alpha\epsilon' + \epsilon\alpha') + \alpha'\alpha'\epsilon
 \end{aligned}$$

Praeterea esse debet $\alpha\epsilon' - \epsilon\alpha' = +1$ vel
 $= -1$. Hinc manifestum est, formam binariam (α, b'', α') , cuius determinans est A'' , transmutari per substitutionem $\alpha, \epsilon, \alpha', \epsilon'$ in formam binariam (m, n'', m') determinantis M'' , et proin ipsi aequiuallere propter $\alpha\epsilon' - \epsilon\alpha' = \pm 1$, vnde erit $M'' = A''$, quod etiam directe facile confirmatur. Nisi itaque (α, b'', α') iam est forma simplicissima in classe sua, ipsos $\alpha, \epsilon, \alpha', \epsilon'$ ita determinare licebit, vt (m, n'', m') sit forma simplicior; et quidem e theoria aequiuallentiae formarum biniarum facile concluditur, hoc ita fieri posse, vt m non sit maior quam $\sqrt{-\frac{4}{3}A''}$, si A'' fuerit negatiuus, vel non maior quam $\sqrt{A''}$, si A'' fuerit positiuus, vel $m = 0$ si $A'' = 0$, ita vt in omnibus casibus valor (absolutus) ipsius m certe vel saltem usque ad $\sqrt{\pm \frac{4}{3}A''}$ deprimi possit. Hoc itaque modo forma f ad aliam reducitur coëfficientem primum, si fieri potest, minorem habentem, et cuius forma adiuncta coëfficientem tertium eundem habet vt forma F ipsi f adiuncta. In hoc consistit *reductio prima*.

II. Si vero fit $\alpha = 1, \epsilon = 0, \gamma = 0, \alpha' = 0, \epsilon'' = 0$, erit $k = \epsilon'\gamma'' - \epsilon''\gamma' = +1$; substitutio itaque ipsi S adiuncta erit

$$\begin{array}{ccc} \pm & 1, & 0, \\ & 0, & \gamma'', -\epsilon'' \\ & 0, & -\gamma', \quad \epsilon' \end{array}$$

per quam F transibit in G . Habebitur itaque

$$\begin{aligned} m &= a, \quad n' = b'\gamma'' + b''\gamma', \quad n'' = b'\epsilon'' + b''\epsilon' \\ m' &= a'\epsilon'\epsilon' + 2b\epsilon'\epsilon'' + a''\epsilon''\epsilon'' \\ m'' &= a'\gamma'\gamma' + 2b\gamma'\gamma'' + a''\gamma''\gamma'' \\ n &= a'\epsilon'\gamma' + b(\epsilon'\gamma'' + \gamma'\epsilon'') + a''\epsilon''\gamma'' \\ M' &= A'\gamma''\gamma'' - 2B\gamma'\gamma'' + A''\gamma'\gamma' \\ N &= -A'\epsilon''\gamma'' + B(\epsilon'\gamma'' + \gamma'\epsilon'') - A''\epsilon''\gamma' \\ M'' &= A'\epsilon'\epsilon'' - 2B\epsilon'\epsilon'' + A''\epsilon''\epsilon' \end{aligned}$$

Hinc patet, formam binariam (A'' , B , A'), cuius determinans est Da , transire per substitutionem $\epsilon', -\gamma', -\epsilon'', \gamma''$ in formam (M'' , N , M') determinantis Dm , adeoque (propter $\epsilon'\gamma'' - \gamma'\epsilon'' = \pm 1$, vel propter $Da = Dm$) ipsi aequivalere. Nisi itaque (A'' , B , A') iam est forma simplicissima classis sua, coëfficientes $\epsilon', \gamma', \epsilon'', \gamma''$ ita determinari poterunt, vt (M'' , N , M') sit simplicior, et quidem hoc semper poterit fieri ita, vt M'' sine respectu signi non sit maior quam $\sqrt{\pm \frac{1}{3}} Da$. Hoc itaque modo forma f reducitur ad aliam coëfficientem primum eundem habentem, sed cuius forma adiuncta coëfficientem tertium si fieri potest minorem habeat quam forma F ipsi f adiuncta. In hoc consistit *reductio secunda*.

III. Si itaque f est forma ternaria, ad quam neque reductio prima neque secunda est applica-

bilis, i. e. quae per neutram in formam simpli-
ciorem transmutari potest: necessario erit tum
 $aa < \text{vel} = \frac{4}{3}A$, tum $AA < \text{vel} = \frac{4}{3}aD$ sine respe-
tu signi. Hinc a^4 erit $< \text{vel} = \frac{16}{9}AA$, adeo-
que $a^4 < \text{vel} = \frac{64}{27}aD$, $a^3 < \text{vel} = \frac{64}{27}D$, et a
 $< \text{vel} = \frac{4^3}{3}\sqrt{D}$; hinc rursus $AA < \text{vel} = \frac{16^3}{9}\sqrt{D^4}$
atque $A < \text{vel} = \frac{4^3}{3}\sqrt{D^2}$. Quamobrem quamdiu
 a vel A hos limites adhuc superant, necessario
vna aut altera reductionum praecedentium ad
formam f applicari poterit. — Ceterum haec
conclusio non est conuertenda, quum vtique sae-
pius accidat, vt forma ternaria, cuius coëfficiens
primus, atque coëfficiens tertius formae adiunctae
iam sunt infra illos limites, nihilominus per
vnam alteramue reductionem adhuc simplicior
reddi possit.

IV. Quodsi vero ad formam ternariam
quamcunque datam determinantis D alternis vi-
cibus reductio prima et secunda applicantur, i. e.
ad ipsam prima vel secunda, ad eam quae hinc
resultat secunda vel prima, ad eam quae hinc
prouenit iterum prima vel secunda etc., manife-
stum est, tandem necessario ad formam peruen-
tum iri, ad quam neutra amplius applicari pos-
sit. Quum enim magnitudo absoluta tum coëffi-
cientium primorum formarum hoc modo pro-
deuntium, tum coëfficientium tertiorum formarum
illis adiunctarum continuo alternis vicibus eadem
maneat atque decrescat, hic progressus necessa-
rio tandem alicubi finietur, quia alioquin duae
series infinitae numerorum continuo decrescen-
tium haberentur. Hinc iam nacti sumus egre-
gium theorema: *Quaevis forma ternaria deter-*