Ex solutione hac nullo negotio sequitur solutio problematis: *Si formae F, f improprie sunt aequiualentes, inuenire transformationem impropriam formae F in f.* Sit enim $f = att + 2btu + a'uu$ eritque forma opposita $app - 2bpq + a'qq$ formae F proprie aequiualens. Quaeratur transformatio propria formae F in illam, $x = \alpha p + \beta q$, $y = \gamma p + \delta q$, patetque F transire in f positis $x = \alpha t - \beta q$, $y = \gamma t - \delta q$, hancque transformationem fore impropriam.

Quodsi igitur formae F, f tam proprie quam improprie sunt aequiualentes: inueniri poterit tam transformatio propria aliqua quam impropria.

179. Problema. *Si forma F, f sunt aequiualentes: inuenire omnes transformationes formae F in f.*

Sol. Si formae F, f vnico tantum modo sunt aequiualentes i. e. proprie tantum vel improprie tantum: quaeratur per art. praec. transformatio vna formae F in f, patetque alias quam quae huic sint similes dari non posse. Si vero formae F, f tam proprie quam improprie aequiualent, quaerantur duae transformationes, altera propria, altera impropria. Iam sit forma $F = (A, B, C)$, $BB - AC = - D$, numerorumque A, $2B$, C diuisor communis maximus $= m$. Tum ex art. 162 patet, in priori casu omnes transformationes formae F in f ex vna transformatione, in posteriori omnes proprias ex propria omnesque improprias ex impropria deduci posse, si modo omnes solutiones aequationis $tt + Duu = mm$ habeantur. His igitur inuentis problema erit solutum.

Habetur autem $D = AC - BB$, $4D = 4AC - 4BB$, quare $\frac{4D}{mm} = 4\frac{A}{m}\frac{C}{m} - (\frac{2B}{m})^2$ erit integer. Iam si

1) $\frac{4D}{mm} > 4$, erit $D > mm$: quare in $tt + Duu = mm$, u necessario debebit esse $= 0$, adeoque t alios valores quam $+ m$, et $- m$ habere nequit. Hinc si F, f vnico tantum modo aequiualentes sunt et transformatio aliqua $x = \alpha x' + \beta y'$, $y = \gamma x' + \delta y'$: praeter hanc ipsam quae prodit ex $t = m$ (art. 162), et hanc $x = \alpha x' - \beta y'$, $y = - \gamma x' - \delta y'$ aliae locum habere non possunt. Si vero F, f tum proprie tum improprie aequiualent, atque propria aliqua transformatio habetur $x = \alpha x' + \beta y'$, $= \gamma x' + \delta y'$, impropriaque $x = \alpha' x' + \beta y'$, $y = \gamma' x' + \delta' y'$, praeter illam (ex $t = m$) et hancce $x = - \alpha' x' - \beta' y'$, $y = - \gamma' x' - \delta y'$ (ex $t = - m$) alia propria non dabitur; similiterque nulla impropria praeter $x = \alpha' x' + \delta' y'$, $y = \gamma' x' + \delta' y'$ et $x = - \alpha' x' - \beta' y'$, $y' = - \gamma x' - \delta' y'$.

2) Si $\frac{4D}{mm} = 4$, siue $D = mm$, aequatio $tt + Duu = mm$ quatuor solutiones admittet $t, u = m, 0; - m, 0; 0, 1; 0, - 1$. Hinc si F, f vnico tantum modo sunt aequiualentes et transformatio aliqua $x = \alpha x' + \beta y'$, $y = \gamma x' + \delta y'$: *quatuor* omnino transformationes dabuntur, $x = \pm \alpha x' + \beta y'$, $y = \pm \gamma x' \pm \delta y'$; $x = \mp \frac{\alpha B + \gamma C}{m} x' \mp \frac{\beta B + \delta C}{m} y'$, $y = \pm \frac{\alpha A + \gamma B}{m} x' \pm \frac{\beta A + \delta B}{m} y'$. Sive-

ro F, f duobus modis aequiualent, siue praeter transformationem illam datam alia ipsi dissimilis habetur: haec quoque suppeditabit quatuor illis dissimiles, ita vt *octo* transformationes habeantur. — Ceterum facile demonstrari potest in hoc casu F, f semper reuera duobus modis aequiualere. Nam quum $D = mm = AC - BB$, m etiam ipsum B metietur. Formae $(\frac{A}{m}, \frac{B}{m}, \frac{C}{m})$ determinans erit $= -1$, quare formae $(1, 0, 1)$ vel huic $(-1, 0, -1)$ erit aequiualens. Facile vero perspicitur, per eandem transformationem per quam $(\frac{A}{m}, \frac{B}{m}, \frac{C}{m})$ transeat in $(\pm 1, 0, \pm 1)$ formam (A, B, C) transire in $(\pm m, 0, \pm m)$, ancipitem. Quare forma (A, B, C), ancipiti aequiualens, cuiuis formae, cui aequiualet, tum proprie tum improprie aequiualebit.

3) Si $\frac{4D}{mm} = 3$, siue $4D = 3mm$. Tum m erit par omnesque solutiones aequationis $tt + Duu = mm$ erunt sex, $t, u = m, 0; -m, 0; \frac{1}{2}m, 1; -\frac{1}{2}m, -1; \frac{1}{2}m, -1; -\frac{1}{2}m, 1$, Si itaque duae transformationes dissimiles formae F in f habentur, $x = \alpha x' + \beta y'$, $y = \gamma x' + \delta y'$; $x = \alpha' x' + \beta' y'$, $y = \gamma' x' + \delta' y'$: habebuntur duodecim transformationes, scilicet sex priori similes

$$x = \pm \alpha x' \pm \beta y', \; y = \pm \gamma x' \pm \delta y';$$

$$x = \pm (\tfrac{1}{2}\alpha - \frac{\alpha B + \gamma C}{m}) x' \pm (\tfrac{1}{2}\beta - \frac{\beta B + \delta C}{m}) y',$$

$$y = \pm (\tfrac{1}{2}\gamma + \frac{\alpha A + \gamma B}{m}) x' \pm (\tfrac{1}{2}\delta + \frac{\beta A + \delta B}{m}) y';$$

$$x = \pm (\tfrac{1}{2}\alpha + \frac{\alpha B + \gamma C}{m}) x' \pm (\tfrac{1}{2}\beta + \frac{\beta B + \delta C}{m}) y'$$

$$y = \pm (\tfrac{1}{2}\gamma - \frac{\alpha A + \gamma B}{m}) x' \pm (\tfrac{1}{2}\delta - \frac{\beta A + \delta B}{m}) y'$$