

LIB. II. 421. His expeditis quæstionibus, consideremus altiores potestates binorum ipsius z valorum ex æquatione $zz - Pz + Q = 0$

$Q = 0$, existente $P = \frac{Mz}{L}$ & $Q = \frac{Nzz}{L}$: ubi L Functionem homogeneam $n+2$; M , $n+1$ & N , n dimensionum ipsarum x & y significat; estque $x =$ Abscisæ CP & $y =$ Applicatae PM . Proposita igitur sit quæstio, qua binæ intersectiones M & N ejus indolis requiruntur, ut sit $CM^3 + CN^3 = a^3$. Cum ergo sit, ex æquationis $zz - Pz + Q = 0$, natura, $CM^3 + CN^3 = P^3 - 3PQ$ debet esse $P^3 - 3PQ = a^3$: quæ æquatio, cum P^3 & PQ sint quantitates irrationales, locum habere nequit. Huic ergo quæstioni in stricto sensu prorsus satisfieri non potest: sin autem numerus intersectionum non spectetur etiam si duabus plures prodant, tum quidem infinitis modis Curvæ satisfacientes inveniri possunt, ponendo $Q = \frac{P^3 - a^3}{3P}$, & pro P capiendo Functionem quamcunque sinus & cosinus anguli $ACM = \phi$.

422. Sin autem ejusmodi Curvæ requirantur, in quibus sit $CM^4 + CN^4 = a^4$, tum poni debet $P^4 - 4P^2Q + 2QQ = a^4$; quæ æquatio, cum nulla insit irrationalitas, nullam involvit contradictionem. Debet ergo esse $Q = PP + \sqrt{\left(\frac{1}{2}P^4 + \frac{1}{2}a^4\right)}$, quæ Function, non obstante signo radicali, tanquam uniformis spectari potest, quia si $\sqrt{\left(\frac{1}{2}P^4 + \frac{1}{2}a^4\right)}$ sumeretur negative, pro z valores imaginarii resultarent.

Erit ergo $\frac{Nzz}{L} = \frac{MMzz}{LL} + \sqrt{\left(\frac{M^4z^4}{2L^4} + \frac{1}{2}a^4\right)}$; & cum pro Curva sit $L - M + N = 0$, seu $zz - \frac{Mzz}{L} + \frac{Nzz}{L} = 0$, erit $zz - \frac{Mzz}{L} + \frac{MMzz}{LL} + \sqrt{\left(\frac{M^4z^4}{2L^4} + \frac{1}{2}a^4\right)} = 0$. Consequenter, sublata irrationalitate, erit

$$\frac{z^4}{L^4}$$

$$\frac{z^4}{L^4} (LL - LM + MM)^2 = \frac{M^4 z^4}{2L^4} + \frac{1}{2} a^4,$$

seu

$$(xx+yy)^2 (z(LL - LM + MM)^2 - M^4) = a^4 L^4,$$

quæ omnes Curvas satisfacientes in se complectitur.

423. Alio facilitiori modo, uti supra §. 372, hæc & similes quæstiones resolvi poterunt. Cum enim sit $CM \cdot CN = Q$, si altera ipsarum CM & CN dicatur $= z$, erit altera $= \frac{Q}{z} = \frac{Nz}{L}$, ob $Q = \frac{Nzz}{L}$. Quare, si debeat esse

$$CM^n + CN^n = a^n; \text{ fiet } z^n + \frac{N^n z^n}{L^n} = a^n; \text{ ideoque}$$

$$z^n = \frac{a^n L^n}{L^n + N^n}; \text{ quæ æquatio, si fuerit } n \text{ numerus par, jam}$$

est rationalis quæsitoque satisfaciens. At, si sit n numerus impar, ad irrationalitatem tollendam quadrata sumi debent; quo fit, ut numerus intersectionum dupliceretur, sive Curva oritur non eo sensu satisfaciens uti desideratur. Sic, si debeat esse

$$CM^2 + CN^2 = a^2, \text{ fiet } zz = xx + yy = \frac{a a LL}{LL + NN}; \text{ quæ}$$

$$\text{convenit cum supra inventa } xx + yy = \frac{a a LL}{(L-M)^2 + L^2} (410),$$

ob $L - M + N = 0$. Generaliter ergo, si debeat esse $CM^n + CN^n = a^n$ fueritque n numerus par, obtinebitur

$$\text{ista æquatio } z^n = (xx+yy)^{\frac{n}{2}} = \frac{a^n L^n}{L^n + N^n} = \frac{a^n L^n}{L^n + (L-M)^n},$$

existentibus L Functione $m+2$ dimensionum, M Functione $m+1$ dimensionum, & N Functione m dimensionum ipsarum x & y .

424. Hæc eadem solutio etiam ex consideratione summæ $CM + CN = P$, eruitur. Si enim altera ipsarum CM &

LIB. II. CN ponatur $= z$, erit altera $= P - z$. Hinc, si $CM^n + CN^n$ debeat esse constans, erit $z^n + (P - z)^n = a^n$. Videlicet autem esse debere $P = \frac{Mz}{L}$, & $Q = \frac{Nzz}{L}$; ita ut sit $L - M + N = 0$; ex quo erit $z^n + \frac{z^n(M-L)}{L^n} = a^n$; seu $z^n = \frac{a^n L^n}{L^n + (M-L)^n}$, vel $z^n = \frac{a^n L^n}{L^n + N^n}$; vel, eliminando L , erit $z^n = \frac{a^n (M-N)}{(M-N)^n + N^n}$. Haec æquationes, si fuerint n numerus par, conditionem propositam adæquate adimplent. At, si n sit numerus impar, dabuntur quidem duæ intersectiones M & N , ut sit $CM^n + CN^n = a^n$; at præter has habebuntur duæ aliaæ intersectiones eadem proprietate gaudentes, ita ut quælibet recta per C ducta bis proprietatem propositam involvat.

425. His expositis, facile erit quæstiones alias maxime difficiles resolvere: debeat enim Curva inveniri quæ ab omnibus rectis per C ductis ita in duobus punctis M & N seceretur, ut sit $CM^n + CN^n + \alpha CM \cdot CN (CM^{n-2} + CN^{n-2}) + \beta \cdot CM^2 \cdot CN^2 (CM^{n-4} + CN^{n-4}) + \dots$ &c. quantitas constans $= a^n$. Ponatur alter valor $CM = z$, erit alter $CN = \frac{Q}{z} = \frac{Nz}{L}$; quibus valoribus substitutis orietur ista æquatio, qua natura Curvæ exprimitur, $z^n (L^n + N^n + \alpha LN (L^{n-2} + N^{n-2}) + \beta L^2 N^2 (L^{n-4} + N^{n-4}) + \dots)$

$= a^n L^n$. Est autem $L - M + N = 0$, atque $L, M, & N$ dimensionum CAP.
XVII.

N sunt Functiones homogeneæ ipsarum x & y dimensionum $m+2, m+1$ & m , ut supra descripsimus: unde erit, vel $L = M - N$, vel $N = M - L$ sive infinitæ solutiones hinc deducentur.

426. Pergamus jam ad Curvas investigandas, quæ a singulis rectis per punctum fixum C ductis in tribus punctis secantur. Hujusmodi ergo Curvarum natura exprimetur hac æquatione generali

$$z^3 - Pz^2 + Qz - R = 0:$$

ubi z denotat distantiam cuiusque Curvæ puncti a C ; & P, Q, R sunt Functiones anguli $ACM = \phi$, ejusve sinus & cosinus. Per easdem autem rationes quas supra allegavimus apparet, ne plures quam tres intersectiones prodeant, P & R esse debere Functiones impares ipsius $\sin. \phi$ & $\cos. \phi$; verum Q statui debere Functionem parem. Quod si ergo ponantur Coordinatae orthogonales $CP = x, PM = y$, ut sit $xx + yy = zz$, atque denotent K, L, M & N Functiones homogeneas $(n+3), (n+2), (n+1)$ & n dimensionum ipsarum x & y , fore $P = \frac{Lz}{K}, Q = \frac{Mzz}{K}$, & $R = \frac{Nz^3}{K}$: ideoque inter Coordinatas orthogonales x & y habebitur pro hujusmodi Curvis ista æquatio generalis

$$K - L + M - N = 0;$$

ex qua patet punctum C fore Curvæ punctum totuplex quo index n contineat unitates.

427. Primum ergo, huc pertinent omnes Lineæ tertii ordinis, ubicunque punctum C extra Curvam capiatur. Deinde, in hac æquatione continentur omnes Lineæ quarti ordinis, dummodo punctum C in ipsa Curva accipiatur. Tertio, omnes Lineæ quinti ordinis, in quibus datur punctum duplex huc referuntur, si modo punctum C in earum punto duplici constituantur,

L I B . II. stituatur. Similique modo Linceæ altiorum ordinum hanc conditionem implebunt, si habeantur puncta multiplicia tanti exponentis, quot n contineat unitates, si $n+3$ exponat ordinem, ad quem æquatio pertineat.

428. Sint p, q, r tres illi valores ipsius z , quos obtinet ex æquatione $z^3 - Pz^2 + Qz - R = 0$, pro quovis valore anguli $CAM = \phi$; eritque, ex natura æquationum $P = p + q + r$; $Q = pq + pr + qr$ & $R = pqr$. Cum jam P & R per x & y rationaliter exprimi nequeant, manifestum est ejusmodi Curvas exhiberi non posse, in quibus sit vel $p + q + r$ vel pqr quantitas constans; neque adeo ulla Functione impar ipsarum $p, q, & r$ constanti æqualis ponи poterit. Pares autem Functiones sine ulla difficultate constantem valorem obtinere poterunt. Sic, si requiratur ut sit $pq + pr + qr = aa$, erit $Q = \frac{Mzz}{K} = aa$: ideoque $M(xx+yy) = aaK$; qui valor in æquatione $K - L + M - N = 0$, substitutus, dabit æquationem generalem omnes Curvas hac proprietate prædictas in se complectentem:

$$M(xx+yy) - aaL + aaM - aaN = 0;$$

vel, eliminando M , hanc

$$(xx+yy)K - (xx+yy)L + aaK - (xx+yy)N = 0.$$

429. Pari modo, aliæ similes quæstiones facile resolventur. Uti, queratur Curva, quæ a rectis per C ductis ita in tribus punctis secetur, ut sit $p^2 + q^2 + r^2 = a^2$. Cum enim sit $p^2 + q^2 + r^2 = P^2 - 2Q$, & $P = \frac{Lz}{K}$ atque $Q = \frac{Mzz}{K}$, fieri $\frac{L^2z^2}{K^2} - \frac{2Mzz}{K} = aa$, seu $(xx+yy)L^2 - 2(xx+yy)KM = aaKK$. At, pro Curvis tres intersectiones admittentibus habetur hæc æquatio generalis $K - L + M - N = 0$, cuius natura in hoc consistit ut maximus ipsarum x & y dimensionum numerus