

286. PROBLEMA. *Proposita forma binaria $F = (A, B, C)$ determinantis D ad genus principale pertinente: inuenire formam binariam f , e cuius duplicatione illa oriatur.*

Sol. I. Quaeratur repraesentatio propria formae ipsi F oppositae $F' = ATT - 2BTU + CUU$ per formam ternariam $xx - 2yz$, quae sit $x = \alpha T + \epsilon U$, $y = \alpha' T + \epsilon' U$, $z = \alpha'' T + \epsilon'' U$, quod fieri posse e theoria praec. formarum ternariarum facile colligitur. Quum enim F per hyp. sit e genere principali, dabitur valor expr. $\sqrt{(A, B, C)} \pmod{D}$, vnde inueniri poterit forma ternaria ϕ determinantis 1, in quam $(A, -B, C)$ tamquam pars ingrediatur, cuius formae coëfficientes omnes fore integros nullo negotio perspicietur. Aequè facile intelligitur, ϕ fore formam indefinitam (quoniam per hyp. F certo non est forma negatiua); vnde necessario formae $xx - 2yz$ aequiualens erit. Assignari poterit itaque transformatio huius in illam, quae repraesentationem propriam formae F' per $xx - 2yz$ suppeditabit. — Tunc igitur erit $A = \alpha\alpha - 2\alpha'\alpha''$, $-B = \alpha\epsilon - \alpha'\epsilon'' - \alpha''\epsilon'$, $C = \epsilon\epsilon - 2\epsilon'\epsilon''$; porro designatis numeris $\alpha\epsilon' - \alpha'\epsilon$, $\alpha'\epsilon'' - \alpha''\epsilon'$, $\alpha''\epsilon - \alpha\epsilon''$ per a, b, c resp., hi diuisorem communem non habebunt, eritque $D = bb - 2ac$.

II. Hinc adiumento obseruationis vltimae art. 235 facile concluditur, F transire per substitutionem $2\epsilon', \epsilon, \epsilon, \epsilon''$; $2\alpha', \alpha, \alpha, \alpha''$ in productum formae $(2a, -b, c)$ in se ipsam, nec non per substitutionem $\epsilon', \epsilon, \epsilon, 2\epsilon''$; $\alpha', \alpha, \alpha, 2\alpha''$ in productum formae

$(a, -b, 2c)$ in se ipsam. Iam diuisor communis maximus numerorum $2a, 2b, 2c$ est 2; si itaque c est impar, $2a, 2b, c$ diuisorem communem non habebunt, siue $(2a, -b, c)$ erit forma proprie primitiua; similiter, si a est impar, $(a, -b, 2c)$ forma proprie primitiua erit; in casu priori F oritur ex duplicatione formae $(2a, -b, c)$, in posteriori ex duplicatione formae $(a, -b, 2c)$, (V. concl. 4, art. 235); vnus vero horum casuum certo semper locum habebit. Si enim vterque a, c esset par, b necessario foret impar; iam facile confirmatur, esse $\epsilon''a + \epsilon b + \epsilon'c = 0$, $\alpha''a + \alpha b + \alpha'c = 0$, vnde sequeretur, $\epsilon b, \alpha b$, adeoque etiam α et ϵ esse pares. Hinc autem A et C forent pares, quod esset contra hypothesin, secundum quam F est forma e genere principali adeoque ex ordine proprie primitiuo. — Ceterum fieri etiam potest, vt tum a tum c pares sint, in quo itaque casu duae statim formae habebuntur, e quarum duplicatione F oritur.

Ex. Proposita sit forma $F = (5, 2, 31)$, det. — 151. Valor expressionis $\sqrt{(5, 2, 31)}$ hic inuenitur $(55, 22)$; hinc forma ternaria $\phi =$

$\begin{pmatrix} 5, 31, -4 \\ 11, 0, -2 \end{pmatrix}$; huic per praecepta art. 272 aequiualeus inuenitur forma $\begin{pmatrix} 1, 1, -1 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$, quae in ϕ transit per substitutionem

$$\begin{array}{rcl} 2, & 2, & -1 \\ 1, & -6, & -2 \\ 0, & 3, & 1 \end{array}$$

Hinc adiumento transformationum in art. 277 traditarum inuenitur, $\begin{pmatrix} 1, 0, 0 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}$ transire in ϕ per substitutionem

$$3, -7, -2$$

$$2, -1, 0$$

$$1, -9, -3$$

Fit itaque $a = 11$, $b = -17$, $c = 20$; quare quum a sit impar, F oritur ex duplicatione formae $(11, -17, 40)$ transitque in productum huius formae in se ipsam per substitutionem $-1, -7, -7, -9; 2, 3, 3, 1$.

287. Circa problema in art. praec. solutum sequentes adhuc annotationes adiciamus.

I. Si forma F per substitutionem p, p', p'', p''' ; q, q', q'', q''' in productum e duabus formis (h, i, k) , (h', i', k') transformatur, (vtraque vti semper supponimus proprie accepta), habebuntur aequationes, ex concl. 3 art. 235 facile deducendae: $p''hn' - p'h'n - p(in' - i'n) = 0$, $(p'' - p')(in' + i'n) - p(kn' - k'n) + p'''(hn' - h'n) = 0$, $p'kn' - p''k'n - p'''(in' - i'n) = 0$, tresque aliae ex his per commutationem numerorum p, p', p'', p''' cum q, q', q'', q''' oriundae; n, n' sunt radices quadratae positivae e quotientibus prodeuntibus, si determinantes formarum (h, i, k) , (h', i', k') per det. formae F diuiduntur. Si itaque hae formae sunt identicae, siue $n = n'$, $h = h'$, $i = i'$, $k = k'$, illae aequationes trans-eunt in has: $(p'' - p')hn = 0$, $(p'' - p)in$