

Denique per operationes omnino analogas eruitur

$$(2, 10) = \frac{1}{2}(4, 10) - \frac{1}{2}\sqrt{(4 + (4, 3) - 2(4, 1))}$$

$$= -1,7004342715$$

$$(2, 11) = \frac{1}{2}(4, 10) + \frac{1}{2}\sqrt{(4 + (4, 3) - 2(4, 1))}$$

$$= -1,2052692728$$

Superest vt ad radices  $\Omega$  ipsas descendamus. Aequatio (D) cuius radices sunt [1] et [16] pro-  
dit  $xx - (2, 1)x + 1 = 0$ , vnde radices  
 $\frac{1}{2}(2, 1) \pm \frac{1}{2}\sqrt{((2, 1)^2 - 4)}$  aut potius  $\frac{1}{2}\sqrt{(2, 1)}$   
 $\pm i\sqrt{(4 - (2, 1)^2)}$  siue  $\frac{1}{2}(2, 1) \pm \frac{1}{2}i\sqrt{(2 -$   
 $(2, 15))$ ; signum superius pro [1], inferius pro  
[16] adoptamus. Quatuordecim reliquae radices  
vel per potestates ipsius [1] habebuntur; vel per  
resolutionem septem aequationum quadratica-  
rum, quae singulae binas exhibent, vbi incerti-  
tudo de signis quantitatum radicalium per idem  
artificium tolli poterit vt in praecedentibus. Ita  
[4] et [13] sunt radices aequationis  $xx - (2,$   
 $13)x + 1 = 0$ , adeoque  $\frac{1}{2}(2, 13) \pm \frac{1}{2}i\sqrt{(2$   
 $- (2, 9))$ ; per euolutionem producti ex [1] —  
[16] in [4] — [13] autem prodit  $(2, 5) - (2, 3)$ ,  
adeoque quantitas realis negatiua, quare quum [1]  
— [16] sit  $+ i\sqrt{(2 - (2, 15))}$ , i. e. productum  
ex imaginaria  $i$  in realem *positiuam*, etiam [4]  
— [13] esse debet productum ex  $i$  in realem  
*positiuam* propter  $ii = -1$ ; hinc colligitur,  
pro [4] signum superius, pro [13] inferius acci-  
piendum esse. Simili modo pro radicibus [8] et  
[9] inuenitur  $\frac{1}{2}(2, 9) \pm \frac{1}{2}i\sqrt{(2 - (2, 1))}$ , vbi,  
quoniam productum ex [1] — [16] in [8] —  
[9] fit  $(2, 9) - (2, 10)$  adeoque negatiuum,

pro [8] signum superius, pro [9] inferius accipere oportet. Computando perinde radices reliquas, sequentes valores numericos obtinemus, vbi radicibus prioribus signa superiora, posterioribus inferiora respondere subintelligendum est:

[1], [16] ...	0,9324722294	±	0,3612516662i
[2], [15] ...	0,7390089172	±	0,6736956436i
[3], [14] ...	0,4457383558	±	0,8951632914i
[4], [13] ...	0,0922683595	±	0,9957341763i
[5], [12] ...	— 0,2736629901	±	0,9618256432i
[6], [11] ...	— 0,6026346364	±	0,7980172273i
[7], [10] ...	— 0,8502171357	±	0,5264321629i
[8], [ 9] ...	— 0,9829730997	±	0,1837495178i

\*

\*

\*

Possent quidem ea quae in praec. sunt tradita ad solutionem aequationis  $x^n - 1 = 0$  adeoque etiam ad inuentionem functionum trigonometricarum arcubus cum peripheria commensurabilibus respondentium sufficere: attamen, propter rei grauitatem, finem huic disquisitioni imponere non possumus, quin antea ex magna copia quum observationum hoc argumentum illustrantium tum positionum ei affinium vel independentium quaedam hic annectamus. Inter quae talia potissimum eligemus, quae sine magno aliarum disquisitionum apparatu absolueri licet, aliterque ea considerari nolumus quam vt *specimina* huius amplissimae doctrinae, in posterum copiose pertractandae.



355. Quum  $n$  semper supponatur impar, erit 2 inter factores ipsius  $n - 1$ , complexusque  $\Omega$  ex  $\frac{1}{2}(n - 1)$  periodis duorum terminorum formatus. Talis periodus, ut  $(2, \lambda)$ , e radicibus  $[\lambda]$  et  $[\lambda g^{\frac{1}{2}(n-1)}]$  constabit, denotante  $g$  ut supra radicem primitivam quamcunque pro modulo  $n$ . Sed fit  $g^{\frac{1}{2}(n-1)} \equiv -1 \pmod{n}$  adeoque  $\lambda g^{\frac{1}{2}(n-1)} \equiv -\lambda \pmod{n}$  (V. art. 62), unde  $[\lambda g^{\frac{1}{2}(n-1)}] \equiv [-\lambda]$ . Quare supponendo  $[\lambda] = \cos \frac{kP}{n} + i \sin \frac{kP}{n}$ , et proin  $[-\lambda] = \cos \frac{kP}{n} - i \sin \frac{kP}{n}$ , fit aggregatum  $(2, \lambda) = 2 \cos \frac{kP}{n}$ . Vnde hoc loco hanc tantummodo conclusionem deducimus, valorem cuiusvis aggregati duorum terminorum esse quantitatem realem. Quum quaevis periodus, cuius terminorum multitudo par  $= 2a$ , in  $a$  periodos binorum terminorum discerpi possit, patet generalius, valorem cuiusvis aggregati cuius terminorum multitudo par semper esse quantitatem realem. Quodsi itaque in art. 352 inter factores  $\alpha, \epsilon, \gamma$  etc. binarius ad ultimum locum reservatur, omnes operationes vsquedum ad aggregata duorum terminorum perueniatur per quantitates reales absolventur, imaginariaeque tunc demum introducentur, quando ab his aggregatis ad radices ipsas progredieris.

356. Summam attentionem merentur aequationes auxiliares, per quas pro quolibet valore ipsius  $n$  aggregata complexum  $\Omega$  constituentia determinantur, quae mirum in modum cum proprietatibus maxime reconditis numeri  $n$