Porro notetur propositio haec: *Si classes K, L oppositae sunt classibus K', et L' resp.: classis ex K, et L composita classi ex K' et L' compositae erit opposita.* Sint formae f, g, f', g' resp. e classibus K, L, K', L'; forma F composita ex f, g, atque F' composita ex f', g'. Quum f' ipsi f, atque g' ipsi g improprie aequiualeant, F autem composita sit ex vtraque f, g directe: F etiam ex f', g' composita erit, sed ex vtraque inuerse. Quare forma quaecunque, quae ipsi F improprie aequiualet, composita erit ex f', g' directe adeoque ipsi F' proprie aequiualebit (artt. 238, 239), vnde F, G improprie aequiualebunt, classesque ad quas pertinent oppositae erunt.

Hinc sequitur, si classis anceps K cum classe ancipite L componatur, semper prodire classem ancipitem. Nam opposita erit classi, quae composita est e classibus ipsis K, L oppositis, adeoque sibi ipsi, quoniam hae classes sibi ipsae sunt oppositae.

Denique obseruamus, si propositae sint classes duae quaecunque K, L eiusdem determinantis, quarum prior sit proprie primitiua, semper inueniri posse classem M eiusdem determinantis, ex qua atque K composita sit L. Manifesto hoc obtinetur, accipiendo pro M classem quae composita est ex L atque classe ipsi K opposita; simul perspicietur facillime, hanc classem esse vnicam quae hac proprietate sit praedita, siue classes diuersas eiusdem det. cum eadem classe pr. prim. compositas producere classes diuersas.

Classium compositio commode per signum additionis, $+$, denotari potest, sicuti classium identitas per signum aequalitatis. In his signis propositio modo tradita exhiberi potest ita: Si K' est classis opposita ipsi K, erit $K + K'$ classis principalis eiusdem determinantis, vnde $K + K' + L = L$; posita itaque $K' + L = M$, erit $K + M = L$, vti desiderabatur; si vero praeter M alia M' daretur, eadem proprietate praedita, siue $K + M' = L$, foret $K + K' + M' = L + K' = M$, vnde $M' = M$. — Si plures classes identicae componuntur, hoc (ad instar multiplicationis) denotari potest praefigendo ipsarum numerum, ita vt $2K$ idem designet vt $K + K$, $3K$ idem vt $K + K + K$ etc. Eadem signa etiam ad formas transferri possent, ita vt $(a + b + c) + (a' + b' + c')$ designaret formam ex $(a + b + c)$, $(a' + b' + c')$ compositam: sed ne vel species ambiguitatis oriri possit, hac abbreuiatione abstinere malumus, praesertim quod tali signo $\sqrt{M}(a, b, c)$ significationem peculiarem iam tribuimus. — Classem $2K$ ex *duplicatione* classis K oriri dicemus, classem $3K$ ex *triplicatione* etc.

250. Si D est numerus per mm diuisibilis (vbi ipsum m positiuum supponimus): dabitur ordo formarum determinantis D ex ordine proprie primitiuo determinantis $\frac{D}{mm}$ deriuatus (siue *duo*, quando D est negatiuus, nempe positiuus et negatiuus); manifesto forma $(m, 0, -\frac{D}{m})$ ad illum ordinem pertinebit (scilicet ad positiuum) meritoque tamquam *forma simplicissima* in eo considerari potest (sicuti $(-m, 0, \frac{D}{m})$ erit simplicissima in ordine negatiuo quando D neg.).

Si insuper est $\frac{D}{mm} \equiv 1$ (mod. 4), dabitur etiam ordo formarum det. D ex impropriе primitiuo det. $\frac{D}{mm}$ deriuatus, ad quem manifesto forma $(2m, m, \frac{mm - D}{2m})$ pertinebit et pro simplicissima in eodem habebitur. (Quando D est neg., rursus duo ordines dabuntur et in negatiuo forma $(-2m, -m, \frac{D - mm}{2m})$ pro simplicissima habebitur). Ita e. g., si etiam eum casum vbi $m = 1$ huc referre lubet, in quatuor ordinibus formarum det. 45 sequentes erunt simplicissimae $(1, 0, -45)$; $(2, 1, -22)$, $(3, 0, -15)$, $(6, 3, -6)$. Quibus ita intellectis, offert se

Problema. *Proposita forma quacunque F ex ordine O, inuenire formam proprie primitiuam (positiuam) eiusdem determinantis, ex cuius compositione cum forma in O simplicissima oriatur F.*

Sol. Sit forma $F = (ma, mb, mc)$ deriuata e primitiua $f = (a, b, c)$ cuius determinans $= d$, supponamusque *primo*, f esse proprie primitiuam. Primo obseruamus, si forte a ad $2dm$ non sit primus, certo dari alias formas ipsi (a, b, c) proprie aequiualentes, quarum termini primi hac proprietate sint praediti. Nam per art. 228 dantur numeri ad $2dm$ primi per formam illam repraesentabiles; sit talis numerus $a' = a\alpha\alpha + 2b\alpha\gamma + c\gamma\gamma$, supponamusque, (quod licet), α, γ esse inter se primos; tum, acceptis β, δ ita vt fiat $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, transeat f per substitutionem $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in formam (a', b', c'), quae illi pro-