

$$m = a\alpha\alpha + 2b''\alpha\alpha' + a'a'a'$$

$$m' = a\epsilon\epsilon + 2b''\epsilon\epsilon' + a'\epsilon'\epsilon'$$

$$m'' = a''; n = b\epsilon' + b'\epsilon; n' = b\alpha' + b'\alpha$$

$$n'' = a\alpha\epsilon + b''(a\epsilon' + \epsilon\alpha') + a'\alpha'\epsilon'$$

Praeterea esse debet $\alpha\epsilon' - \epsilon\alpha' = +1$ vel $= -1$. Hinc manifestum est, formam binariam (a, b'', a') , cuius determinans est A'' , transmutari per substitutionem $\alpha, \epsilon, \alpha', \epsilon'$ in formam binariam (m, n'', m') determinantis M'' , et proin ipsi aequivalere propter $\alpha\epsilon' - \epsilon\alpha' = \pm 1$, unde erit $M'' = A''$, quod etiam directe facile confirmatur. Nisi itaque (a, b'', a') iam est forma simplicissima in classe sua, ipsos $\alpha, \epsilon, \alpha', \epsilon'$ ita determinare licebit, ut (m, n'', m') sit forma simplicior; et quidem e theoria aequivalentiae formarum binariarum facile concluditur, hoc ita fieri posse, ut m non sit maior quam $\sqrt{-\frac{4}{3}A''}$, si A'' fuerit negativus, vel non maior quam $\sqrt{A''}$, si A'' fuerit positivus, vel $m = 0$ si $A'' = 0$, ita ut in omnibus casibus valor (absolutus) ipsius m certe vel saltem usque ad $\sqrt{\pm \frac{4}{3}A''}$ deprimi possit. Hoc itaque modo forma f ad aliam reducitur coefficientem primum, si fieri potest, minorem habentem, et cuius forma adiuncta coefficientem tertium eundem habet ut forma F ipsi f adiuncta. In hoc consistit *reductio prima*.

II. Si vero fit $\alpha = 1, \epsilon = 0, \gamma = 0, \alpha' = 0, \alpha'' = 0$, erit $k = \epsilon'\gamma'' - \epsilon''\gamma' = +1$; substitutio itaque ipsi S adiuncta erit

$$\begin{array}{ccc} \pm 1, & 0, & 0 \\ 0, & \gamma'', & -\epsilon'' \\ 0, & -\gamma', & \epsilon' \end{array}$$

per quam F transibit in G . Habebitur itaque

$$m = a, \quad n' = b'\gamma'' + b''\gamma', \quad n'' = b'\epsilon'' + b''\epsilon'$$

$$m' = a'\epsilon'\epsilon' + 2b'\epsilon'\epsilon'' + a''\epsilon''\epsilon''$$

$$m'' = a'\gamma'\gamma' + 2b'\gamma'\gamma'' + a''\gamma''\gamma''$$

$$n = a'\epsilon'\gamma' + b(\epsilon'\gamma'' + \gamma'\epsilon'') + a''\epsilon''\gamma''$$

$$M' = A'\gamma''\gamma'' - 2B\gamma'\gamma'' + A''\gamma'\gamma'$$

$$N = -A'\epsilon''\gamma'' + B(\epsilon'\gamma'' + \gamma'\epsilon'') - A''\epsilon'\gamma'$$

$$M'' = A'\epsilon''\epsilon'' - 2B\epsilon'\epsilon'' + A''\epsilon'\epsilon'$$

Hinc patet, formam binariam (A'', B, A') , cuius determinans est Da , transire per substitutionem $\epsilon', -\gamma', -\epsilon'', \gamma''$ in formam (M'', N, M') determinantis Dm , adeoque (propter $\epsilon'\gamma'' - \gamma'\epsilon'' = \pm 1$, vel propter $Da = Dm$) ipsi aequivalere. Nisi itaque (A'', B, A') iam est forma simplicissima classis suae, coëfficientes $\epsilon', \gamma', \epsilon'', \gamma''$ ita determinari poterunt, vt (M'', N, M') sit simplicior, et quidem hoc semper poterit fieri ita, vt M'' sine respectu signi non sit maior quam $\sqrt{\pm \frac{4}{3}} Da$. Hoc itaque modo forma f reducitur ad aliam coëfficientem primum eundem habentem, sed cuius forma adiuncta coëfficientem tertium si fieri potest minorem habeat quam forma F ipsi f adiuncta. In hoc consistit *reductio secunda*.

III. Si itaque f est forma ternaria, ad quam neque reductio prima neque secunda est applica-

bilis, i. e. quae per neutram in formam simpliciore transmutari potest: necessario erit tum $aa < \text{vel} = \frac{4}{3}A$, tum $AA < \text{vel} = \frac{4}{3}aD$ sine respectu signi. Hinc $a^4 < \text{vel} = \frac{16}{9}AA$, adeoque $a^4 < \text{vel} = \frac{64}{27}aD$, $a^3 < \text{vel} = \frac{64}{27}D$, et $a < \text{vel} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{D}$; hinc rursus $AA < \text{vel} = \frac{16}{9}\sqrt[3]{D^4}$ atque $A < \text{vel} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{D^2}$. Quamobrem quamdiu a vel A hos limites adhuc superant, necessario vna aut altera reductionum praecedentium ad formam f applicari poterit. — Ceterum haec conclusio non est conuertenda, quum utique saepius accadat, ut forma ternaria, cuius coëfficiens primus, atque coëfficiens tertius formae adiunctae iam sunt infra illos limites, nihilominus per vnam alteramue reductionem adhuc simplicior reddi possit.

IV. Quodsi vero ad formam ternariam quamcunque datam determinantis D alternis vicibus reductio prima et secunda applicantur, i. e. ad ipsam prima vel secunda, ad eam quae hinc resultat secunda vel prima, ad eam quae hinc prouenit iterum prima vel secunda etc., manifestum est, tandem necessario ad formam peruentum iri, ad quam neutra amplius applicari possit. Quum enim magnitudo absoluta tum coëfficientium primorum formarum hoc modo prodeuntium, tum coëfficientium tertiorum formarum illis adiunctarum continuo alternis vicibus eadem maneat atque decrescat, hic progressus necessario tandem alicubi finietur, quia alioquin duae series infinitae numerorum continuo decrescentium haberentur. Hinc iam nacti sumus egregium theorema: *Quaevis forma ternaria deter-*