ximus, qui ſit $\frac{K}{t^k}$, ac reperietur $u + \frac{B}{gA} + \frac{gK}{At^{k+2}} = 0$, Cap. VII.
quæ eſt æquatio pro Curva, cujus pars reſpondens Abſciſſæ $t = \infty$ cum Curva quæſita confundetur.

195. Sit nunc Q diviſibile per $(ay - bx)^2$ at non per $(ay - bx)^3$, videndum eſt utrum R ſit diviſibile per $ay - bx$ an ſecus. Priori caſu prodibit $u^4 + \frac{Atu^2}{g} + \frac{Btu}{gg} + \frac{Ct}{g^3} = 0$; poſteriori vero $u^4 + \frac{Atu^2}{g} + \frac{Btt}{gg} + \frac{Ct}{g^3} = 0$. Prior caſus duplicem dat æquationem, prout u eſt finitum aut infinitum, ideoque reſolvitur in has duas æquationes $uu + \frac{Bu}{gA} + \frac{C}{ggA} = 0$, & $u^2 + \frac{At}{g} = 0$; quarum illa, ſi radices habet ambas reales & inæquales, præbet duas rectas parallelas, ſin autem radices ſint imaginariæ, nullum oſtendit ramum in infinitum excurrentem: hæc vero $u^2 + \frac{At}{g} = 0$, dat Parabolam Aſymtotam. Poſterior æquatio $u^4 + \frac{Atu^2}{g} + \frac{Btt}{gg} = 0$, (ob evaneſcentem $\frac{Ct}{g^3}$ præ $\frac{Btt}{gg}$, facto $t = \infty$,) duas continet æquationes formæ $uu + \alpha t = 0$, ideoque duæ prodeunt Parabolæ Aſymtotæ, ſi fuerit A^2 major quam $4B$, quæ in unam coeunt ſi $A^2 = 4B$, at penitus imaginariæ evadunt ſi A^2 minor quam $4B$, quo caſu nullus Curvæ ramus in infinitum excurrens deſignatur.

196. Sit jam Q diviſibile per $(ay - bx)^3$; atque, prout R & S fuerint diviſibilia vel non per $ay - bx$, obtinebuntur ſequentes æquationes.

$$u^4 + \frac{Au^3}{g} + \frac{Bu^2}{g^2} + \frac{Cu}{g^3} + \frac{D}{g^4} = 0$$
$$u^4 + \frac{Au^3}{g} + \frac{Bu^2}{g^2} + \frac{Ct}{g^3} = 0$$
$$u^4 + \frac{Au^3}{g} + \frac{But}{g^2} + \frac{Ct}{g^3} = 0$$
$$u^4 + \frac{Au^3}{g} + \frac{Btt}{gg} = 0$$

Harum æquationum prima eſt pro quatuor rectis inter ſe parallelis, ſi quidem omnes radices fuerint reales & inæquales, radices autem æquales duas pluresve in unam colligent. At vero radices imaginariæ penitus vel duas vel omnes e medio tollunt. In æquatione ſecunda, ob $t = \infty$, Applicata u non poteſt non eſſe infinita, eritque ergo $u^4 + \frac{Ct}{g^3} = 0$, Aſymtota Curva quarti ordinis. Ex æquatione tertia finitum valorem habere poteſt $u + \frac{C}{gB} = 0$, præterea vero habet hanc $u^3 + \frac{Bt}{gg} = 0$, Lineam tertii ordinis pro Aſymtota. Denique æquatio quarta, ob u infinitum ſi $t = \infty$, abit in $u^4 + \frac{Btt}{gg} = 0$, quæ æquatio, ſi B eſt quantitas affirmativa, eſt impoſſibilis, ſin negativa, deſignat duas Parabolas ad Verticem oppoſitas, quæ in infinitum productæ cum Curva confunduntur.

197. Ex his igitur jam via patet, qua ulterius progredi licet, ſi plures Factores ſimplices ſupremi membri P inter ſe fuerint æquales. Quod enim ad Factores inæquales attinet, eorum quiſque ſeorſim conſiderari atque Linea recta Aſymtota ex eo nata definiri poteſt. Sin autem duo Factores fuerint æquales, tum per ea, quæ §. §. 178. *& ſequentibus* ſunt tradita, indoles Curvæ definiri poteſt; Similique modo pro tribus Factoribus æqualibus negotium conficient §. §. 185. *& ſequentes*; atque caſum, quo quatuor Factores ſunt æquales, modo evolvi-

evolvimus, ex quo ſimul plurium Factorum æqualitas tractari poteſt. Ceterum, hinc perſpicitur quanta multiplicitas ac varietas in Lineis curvis tantum ratione ramorum in infinitum excurrentium locum habere queat; varietatem enim, quæ in ſpatio finito ineſſe poteſt, nondum attigimus. CAP. VIII.

CAPUT VIII.

De Lineis Aſymtotis.

198. IN Capite præcedente vidimus plures dari Aſymtotarum ſpecies; præter Lineam rectam enim invenimus plures Lineas curvas Aſymtotas hac æquatione $u^{\mu} = C t^{\nu}$ expreſſas. Atque ipſa Linea recta ſuppeditavit alias Aſymtotas Curvilineas, cum quibus Linea curva magis convergat, quam cum Linea recta. Quoties autem Linea recta reperitur eſſe Aſymtota cujuſpiam Curvæ, toties Linea curva eandem rectam pro Aſymtota habens aſſignari poterit, quæ etiam ſit Aſymtota Curvæ propoſitæ. Hujuſmodi autem Aſymtota Curvilinea multo accuratius exprimit indolem Curvæ, cujus eſt Aſymtota; oſtendit enim ſimul ramorum numerum cum recta convergentium, atque plagam, utrum ſupra an infra, an antrorſum retrorſumve ad rectam appropinquent.

199. Hæc igitur infinita Aſymtotarum varietas commodiſſime in ordinem digeretur, ſi ipſum fontem, unde eas ſumus adepti, ſequamur. Alias ſcilicet Aſymtotas præbent ſinguli membri ſupremi Factores inter ſe inæquales, alias bini Factores æquales, alias terni æquales, alias quaterni, & ita porro. Sit itaque propoſita æquatio cujuſque ordinis n inter Coordinatas x & y, quæ ſit $P + Q + R + S +$ &c. $= 0$, ubi P ſit membrum ſupremum continens omnes terminos n dimenſionum, Q ſit membrum ſecundum continens terminos $n - 1$

N 2 dimen-

LIB. II. dimensionum, similique modo R tertium, S quartum, & ita porro.

TAB. X. Fig. 35. 200. Sit jam $ay - bx$ Factor simplex ipsius P, cui alius similis non adsit; ac ponatur $P = (ay - bx)M$, eritque M Functio homogenea $n - 1$ dimensionum non divisibilis per $ay - bx$. Sit nimirum AZ Axis, in quo sit Abscissa $AP = x$ & Applicata $PM = y$. Quo Factor $ay - bx$ succinctius exprimatur, sumatur alia recta AX pro Axe secans priorem in ipso Abscissarum initio A & faciens angulum XAZ, cujus tangens $= \frac{b}{a}$, ideoque sinus $= \frac{b}{\sqrt{(aa+bb)}}$ & cosinus $= \frac{a}{\sqrt{(aa+bb)}}$. In hoc Axe ponatur Abscissa $AQ = t$, & Applicata $QM = u$; erit, ductis Pg, Pf novis Coordinatis u & t parallelis, $Pg = Qf = \frac{bx}{\sqrt{(aa+bb)}}$; $Ag = \frac{ax}{\sqrt{(aa+bb)}}$; $Mf = \frac{ay}{\sqrt{(aa+bb)}}$; $Pf = Qg = \frac{by}{\sqrt{(aa+bb)}}$; ideoque $t = Ag + Qg = \frac{ax+by}{\sqrt{(aa+bb)}}$; & $u = Mf - Qf = \frac{ay-bx}{\sqrt{(aa+bb)}}$. Erit ergo nunc Applicata u Factor supremi membri P.

201. Ex his erit vicissim $y = \frac{au+bt}{\sqrt{(aa+bb)}}$ & $x = \frac{at-bu}{\sqrt{(aa+bb)}}$; qui valores si in æquatione $P + Q + R +$ &c. $= 0$, substituantur, prodibit æquatio pro Curva eadem ad Axem AX relata, inter t & u. Ut autem coëfficientium multitudinem evitemus, sustineant α, β, γ, δ, &c. loca omnium coëfficientium; ac, facta substitutione, singulæ litteræ sequentes valores induent.

$M =$

$$M = \alpha t^{n-1} + \alpha t^{n-2} u + \alpha t^{n-3} u^2 + \&c.$$
$$Q = \beta t^{n-1} + \beta t^{n-2} u + \beta t^{n-3} u^2 + \&c.$$
$$R = \gamma t^{n-2} + \gamma t^{n-3} u + \gamma t^{n-4} u^2 + \&c.$$
$$S = \delta t^{n-3} + \delta t^{n-4} u + \delta t^{n-5} u^2 + \&c.$$
$$T = \varepsilon t^{n-4} + \varepsilon t^{n-5} u + \varepsilon t^{n-6} u^2 + \&c.$$
&c.

CAP. VIII.

Quia autem, ad Aſymptotam inveniendam, Abſciſſam t infinitam ſtatui oportet, in quovis membro omnes termini præ primo evaneſcent. Quare, ſi cujuſvis terminus primus adſit, ſequentes negligi poſſunt; ſin primus deſit, capiatur ſecundus; ſin primus & ſecundus deſint, a tertio erit incipiendum.

202. Quia u non dividit Functionem M, ejus primus terminus deeſſe non poteſt: fiet ergo $\alpha t^{n-1} u + \beta t^{n-1} = 0$, unde pro u oritur valor finitus, qui ſit $= c$: hoc eſt recta Axi AX parallela ab eoque intervallo c diſtans erit Aſymtota. Jam, ad Aſymtotam curvilineam magis ad ipſam Curvam accedentem inveniendam, ponatur ubique, præterquam in primo termino, $u = c$, ac reperietur hæc æquatio $\alpha t^{n-1} u + \beta t^{n-1} + t^{n-2}(\alpha c^2 + \beta c + \gamma) + t^{n-3}(\alpha c^3 + \beta c^2 + \gamma c + \delta) + \&c. = 0$; vel, ob $\alpha u + \beta = u - c$, erit $(u - c)t^{n-1} + t^{n-2}(\alpha c^2 + \beta c + \gamma) + t^{n-3}(\alpha c^3 + \beta c^2 + \gamma c + \delta) + \&c. = 0$. Niſi jam terminus ſecundus deſit, omnes ſequentes negligi poſſunt, fietque $(u - c) + \frac{A}{t} = 0$; ſi ſecundus deſit, tertius ſumatur, eritque $(u - c) + \frac{A}{tt} = 0$. Tertio vero etiam deficiente, fiet $(u - c) + \frac{A}{t^3} = 0$, & ita porro. Si omnes, præter ultimum conſtantem, deficiant, erit

 $(u - c)$