connexae sunt. Hoc vero loco disquisitionem ad duos casus sequentes restringemus: *primo* de aequatione quadratica cuius radices sunt aggregata $\frac{1}{2}(n-1)$ terminorum, *secundo*, pro eo casu vbi $n-1$ factorem 3 implicat, de cubica cuius radices sunt aggregata $\frac{1}{3}(n-1)$ terminorum agemus.

Scribendo breuitatis caussa m pro $\frac{1}{2}(n-1)$ et designando per g radicem primitiuam quamcunque pro modulo n, complexus Ω e duabus periodis $(m, 1)$ et (m, g) constabit, continebitque prior radices $[1]$, $[gg]$, $[g^4] \ldots [g^{n-3}]$, posterior has $[g]$, $[g^3]$, $[g^5] \ldots [g^{n-2}]$. Supponendo residua minima positiua numerorum gg, $g^4 \ldots g^{n-3}$ secundum modulum n esse, ordine arbitrario, R, R', R'' etc.; nec non residua horum g, g^3, $g^5 \ldots g^{n-2}$ haec N, N', N'' etc., radices e quibus $(m, 1)$ constat conuenient cum his $[1]$, $[R]$, $[R']$, $[R'']$ etc., radicesque periodi (m, g) cum his $[N]$, $[N']$, $[N'']$ etc. Iam patet, omnes numeros $1, R, R', R''$ etc. esse *residua quadratica* numeri n, et quum omnes diuersi ipsoque n minores sint ipsorumque multitudo $= \frac{1}{2}(n-1)$ adeoque multitudini cunctorum residuorum positiuorum ipsius n infra n aequalis, haec residua cum illis numeris omnino conuenient. Hinc sponte sequitur, omnes numeros N, N', N'' etc., qui tum inter se tum ab ipsis $1, R, R'$ etc. diuersi sunt, et cum his simul sumti omnes numeros $1, 2, 3 \ldots n-1$ exhauriunt, cum omnibus non residuis quadraticis positiuis ipsius n infra n conuenire debere. Quodsi iam supponitur, aequationem cuius radices sunt aggregata $(m, 1)$, (m, g) esse $xx - Ax + B = 0$, fit $A = (m + 1) + (m, g) = -1$, $B = (m, 1) \times (m, g)$. Productum ex $(m, 1)$, in (m, g) per art. 345 fit $= (m, N + 1) + (m, N' + 1) + (m, N'' + 1) +$ etc. $= W$, atque hinc reducetur sub formam talem $\alpha(m, 0) + \beta(m, 1) + \gamma(m, g)$. Ad determinationem coëfficientium α, β, γ obseruamus, *primo*, fieri $\alpha + \beta + \gamma = m$ (scilicet quoniam multitudo aggregatorum in W est $= m$); *secundo*, esse $\beta = \gamma$ (hoc sequitur ex art. 350 quum productum $(m, 1) \times (m, g)$ sit functio inuariabilis aggregatorum $(m, 1)$, (m, g), e quibus aggregatum maius $(n - 1, 1)$ compositum est); *tertio*, quum omnes numeri $N + 1$, $N' + 1$, $N'' + 1$ etc. infra limites 2 et $n + 1$ excl. contineantur, manifestum est, *vel* nullum aggregatum in W ad $(n, 0)$ reduci adeoque esse $\alpha = 0$, quando inter numeros N, N', N'' etc. non occurrat $n - 1$, *vel* vnum puta (m, n), et proin haberi $\alpha = 1$, quando $n - 1$ inter numeros N, N', N'' etc. reperiatur. Hinc colligitur, in casu priori fieri $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = \frac{1}{2}m$, in posteriori $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = \frac{1}{2}(m - 1)$, simul hinc sequitur, quum numeri β et γ necessario fiant integri, casum priorem locum habere, siue $n - 1$ (aut quod idem est -1) inter non residua ipsius n non reperiri, quando m sit par siue n formae $4k + 1$; casum posteriorem vero adesse, siue $n - 1$ aut -1 inter non residua ipsius n reperiri, quoties m sit impar siue n formae $4k + 3$ *). Hinc productum

*) Hoc modo nacti sumus demonstrationem nouam theorematis, -1 esse residuum omnium numerorum primorum

quaesitum fit, propter $(m, 0) = m$, $(m, 1) + (m, g) = -1$, in casu priori $= -\frac{1}{2}m$, in posteriori $= \frac{1}{2}(m + 1)$, adeoque aequatio quaesita in illo casu $xx + x - \frac{1}{4}(n - 1) = 0$, cuius radices sunt $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{n}$, in hoc vero $xx + x + \frac{1}{4}(n + 1) = 0$, cuius radices $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i\sqrt{n}$.

Quaecunque itaque radix ex Ω pro $[1]$ adoptata est, differentia inter summas $\Sigma[\mathfrak{R}]$ et $\Sigma[\mathfrak{N}]$, vbi pro $\mathfrak{R}$ omnia residua pro $\mathfrak{N}$ omnia non residua quadratica positiua ipsius n infra n substituenda sunt, erit $= \pm\sqrt{n}$, pro $n \equiv 1$, et $= \pm i\sqrt{n}$, pro $n \equiv 3 \pmod{4}$. Nec non hinc facile sequitur, denotante k integrum quemcunque per n non diuisibilem, fieri $\Sigma \cos \frac{k\mathfrak{R}P}{n} - \Sigma \cos \frac{k\mathfrak{N}P}{n} = \pm\sqrt{n}$ et $\Sigma \sin \frac{k\mathfrak{R}P}{n} - \Sigma \sin \frac{k\mathfrak{N}P}{n} = 0$ pro $n \equiv 1 \pmod{4}$; contra pro $n \equiv 3 \pmod{4}$ differentiam illam $= 0$, hanc $= \pm\sqrt{n}$, quae theoremata propter elegantiam suam valde sunt memorabilia. Ceterum obseruamus, signa superiora semper valere quando pro k accipiatur vnitas aut generalius residuum quadraticum ipsius n, inferiora quando pro k non residuum assumatur, nec non haecce theoremata salua vel potius aucta elegantia sua

formae $4k + 1$, non residuum omnium formae $4k + 3$, quod supra (art. 108, 109, 262) iam pluribus modis diuersis comprobatum fuit. Si magis arridet, hoc theorema supponere, non necessarium erit ad distinctionem duorum casuum diuersorum eius conditionis rationem habere, quod $\mathfrak{G}$, γ iam per se fiunt integri.