LIB. II. poterit vel per Circulum & Parabolam, uti ſupra jam vidimus, vel per duas Parabolas, vel per Parabolam & Ellipſin, Hyperbolamve, vel per duas Ellipſes, vel per duas Hyperbolas, vel per Ellipſin cum Hyperbola. Multo magis autem varietas conſtructionum multiplicabitur, ſi etiam Curvæ altiorum ordinum in hunc finem adhiberi velint.

503. Simili modo conſtrui poterunt æquationes altiorum graduum, aſſumendo pro altera Curva Lineam parabolici generis æquatione $y = P$ contentam. Sic, ſi propoſita ſit æquatio conſtruenda

$$x^{12} - f^{10}x^2 + f^9 g x - g^{12} = 0,$$

ſumatur æquatio Parabolica ordinis quarti $x^4 = a^3 y$; &, cum ſit $x^{12} = a^9 y^3$, hoc termino ſubſtituto emerget æquatio pro Linea tertii ordinis

$$a^9 y^3 - f^{10} x^2 + f^9 g x - g^{12} = 0;$$

ex qua, ſi ad eam addatur multiplum quodcunque prioris æquationis $x^4 - a^3 y = 0$, innumerabiles formabuntur Lineæ quarti ordinis, quarum binæ quævis conjunctæ æquationem propoſitam conſtruent.

504. Quod ſi eveniat, ut ex æquatione conſtruenda propoſita non ſatis idonea conſtructio præcedente methodo derivari queat; tum æquatio propoſita multiplicetur per x, vel x^2, vel x^3, vel altiorem quampiam poteſtatem ipſius x; ita ut ad ejus radices aliquot inſuper radices evaneſcentes addantur, quæ per interſectiones in ipſo Abſciſſarum initio factas indicabuntur, ideoque a reliquis radicibus veris æquationis propoſitæ facile diſcernentur. Sic igitur æquatio propoſita altioris ſit gradus, hoc tamen non obſtante ſæpenumero commodior conſtructio obtinebitur. Ita, ſi exempli gratia propoſita fuerit æquatio cubica

$$x^3 + Axx + Bx + C = 0;$$

quæ, poſito $xx = ay$, ita ut altera Curva conſtruens futura

ſit

sit Parabola, altera erit semper Hyperbola; prodibit enim, loco xx substituto ay, hæc æquatio

$$axy + Aay + Bx + C = 0;$$

vel, addita æquatione priore $cxx - acy = 0$, nascetur hæc latius patens

$$axy + cxx + a(A - c)y + Bx + C = 0,$$

quæ quoque perpetuo est pro Hyperbola. Quod si ergo Circulum vel Ellipsin vel Parabolam adhibere commodius videatur, tum æquatio proposita multiplicetur per x, ut habeatur hæc æquatio

$$x^4 + Ax^3 + Bxx + Cx = 0,$$

quæ, si cum æquatione biquadratica supra constructa comparetur, erit $D = 0$, hæcque æquatio semper per Circulum & Parabolam construi poterit.

505. Quoniam ergo omnis æquatio cujusque gradus per intersectiones duarum Curvarum algebraïcarum construi potest, idque infinitis modis, Lineam quamcunque in locum alterius Curvæ substituere licebit: hincque enata est quæstio, quemadmodum data æquatio ope datæ Curvæ construi queat. Hic autem primum notandum est datam Curvam ex eo genere esse debere, ut ejus Applicata exprimatur per Functionem uniformem ipsius x, ne intersectiones imaginariæ constructionem perturbent. Neque enim sufficeret, ut Curva, vel tantum portio Curvæ proposita, habeat Abscissas uni radici æquationis æquales; quæ conditio, si quidem una tantum radix æquationis propositæ desideretur, adjici est solita; fieri enim posset, ut iste arcus Curvæ nullam patiatur intersectionem, etiamsi Abscissa cuipiam ipsius puncto respondens sit vera radix; quoniam hæc radix vel per intersectionem imaginariam, vel per alius rami eidem Abscissæ respondentis intersectionem

 indicari

Lib. II. indicari posset. Quam ob causam huic quæstioni, curiosæ magis quam utili, non immoror, cum vera fundamenta omnium hujusmodi constructionum satis fuse ostenderim.

CAPUT XXI.

De Lineis curvis transcendentibus.

506. HActenus de Lineis curvis algebraïcis egimus, quæ ita sunt comparatæ, ut, sumtis Abscissis in Axe quocunque, Applicatæ respondentes exprimantur per Functiones algebraïcas Abscissarum; seu, quod eodem redit, in quibus relatio inter Abscissas & Applicatas exprimi possit per æquationem algebraïcam. Hinc itaque sponte sequitur, si valor Applicatæ per Functionem algebraïcam Abscissæ explicari nequeat, Lineam curvam algebraïcis annumerari non posse. Hujusmodi autem Lineæ curvæ, quæ algebraïcæ non sunt, *transcendentes* vocari solent. Linea igitur transcendens ita definitur, ut ejusmodi Curva esse dicatur, in qua relatio inter Abscissas & Applicatas æquatione algebraïca exprimi nequeat. Quoties ergo Applicata y Functioni transcendenti ipsius Abscissæ x æquatur, toties Linea curva ad genus transcendentium erit referenda.

507. In superiori Sectione duas potissimum species quantitatum transcendentium evolvimus, quarum altera Logarithmos, altera Arcus circulares seu angulos, complectebatur. Quod si ergo Applicata y sit æqualis vel Logarithmo ipsius Abscissæ x, vel Arcui Circuli, cujus sinus, seu cosinus, seu tangens per Abscissam x exprimitur, ita ut sit $y = lx$, vel $y = A.\mathit{sin}.x$, vel $y = A.\mathit{cos}.x$, vel $y = A.\mathit{tang}.x$, vel, si hujusmodi valores tantum in æquationem inter x & y ingrediantur, tum Curva erit transcendens. Sunt autem hæ Curvæ tantum species transcendentium: præter istas enim dantur innumerabiles aliæ expressiones

preſſiones tranſcendentes, quarum origo in Analyſi infinitorum fuſius exponetur, ita ut numerus Curvarum tranſcendentium longe ſuperet numerum Curvarum algebraïcarum. CAP. XXI.

508. Quæcunque Functio non eſt algebraïca, ea eſt tranſcendens: ideoque Curvam, in cujus æquationem ingreditur, reddit tranſcendentem. Æquatio autem algebraïca, vel eſt rationalis, nulloſque exponentes præter numeros integros continet, vel eſt irrationalis, atque exponentes fractos complectitur; hoc autem poſteriori caſu ſemper ad rationalitatem revocari poteſt. Cujus igitur Curvæ æquatio relationem inter Coordinatas x & y exprimens ita eſt comparata, ut neque ſit rationalis, neque ad rationalitatem perduci poſſit, ea ſemper eſt tranſcendens. Quod ſi ergo in æquatione ejuſmodi poteſtates occurrant, quarum exponentes neque ſint numeri integri neque fracti, ad rationalitatem nullo modo perduci poterit; ideoque Curvæ talibus æquationibus contentæ erunt tranſcendentes. Hinc naſcitur prima ſpecies & quaſi ſimpliciſſima Curvarum tranſcendentium, in quarum æquationibus inſunt exponentes irrationales; quæ quia neque Logarithmos neque Arcus circulares involvunt, ſed ex ſola numerorum irrationalium notione naſcuntur, magis quodammodo ad Geometriam communem pertinere videntur, & hanc ob rem ab LEIBNITIO *interſcendentes* ſunt appellatæ, quaſi medium tenerent inter algebraïcas & tranſcendentes.

509. Hujuſmodi ergo Curva interſcendens erit, quæ continetur æquatione $y = x^{\sqrt{2}}$; quomodocunque enim hæc æquatio poteſtatibus ſumendis evehatur, nunquam ad rationalitatem perducetur. Talis æquatio autem nulla via geometrica conſtrui poteſt. Geometrice enim nullæ aliæ poteſtates exhiberi poſſunt, niſi quarum exponentes ſint numeri rationales, hancque ob cauſam iſtiuſmodi Curvæ ab algebraïcis maxime diſcrepant. Si enim exponentem $\sqrt{2}$ tantum vero proxime exhibere velimus, ejus loco ponendo aliquam ex his fractio-

LIB II. nibus $\frac{3}{2}$; $\frac{7}{5}$; $\frac{17}{12}$; $\frac{41}{29}$; $\frac{99}{70}$, quæ valorem $\sqrt{2}$ proxime exprimunt, Curvæ quidem algebraïcæ prodibunt ad quæſitam proxime accedentes, at ordinis erunt vel tertii, vel ſeptimi, vel decimi ſeptimi, vel quadrageſimi primi, &c. Quare, cum $\sqrt{2}$ rationaliter exprimi nequeat niſi per fractionem, cujus numerator & denominator ſint numeri infinite magni, hæc Curva ordini Linearum infiniteſimo erit accenſenda, ideoque pro algebraïca haberi non poterit. Huc accedit, quod $\sqrt{2}$ duplicem involvat valorem, alterum affirmativum alterum negativum, ex quo y duplicem perpetuo ſortietur valorem, ſicque gemina Curva reſultabit.

510. Deinde vero ſi hanc Curvam exacte conſtruere velimus, id ſine Logarithmorum beneficio præſtare non poſſumus. Cum enim ſit $y = x^{\sqrt{2}}$, erit, Logarithmis ſumendis, $ly = \sqrt{2}\,.\,lx$, cujusvis ergo Abſciſſæ Logarithmus per $\sqrt{2}$ multiplicatus dabit Logarithmum Applicatæ; unde ad quamvis Abſciſſam x reſpondens Applicata ex canone Logarithmorum aſſignabitur. Sic, ſi fuerit $x = 0$, erit $y = 0$: ſi $x = 1$, erit $y = 1$; qui valores ex æquatione facillime fluunt: at, ſi $x = 2$, erit $ly = \sqrt{2}.l2 = \sqrt{2}.0,3010300$: &, ob $\sqrt{2} = 1,4142356$, erit $ly = 0,4257274$, ideoque proxime $y = 2,665186$: & ſi $x = 10$, erit $ly = 1,4142356$, hincque $y = 25,955870$. Hoc igitur modo ad ſingulas Abſciſſas Applicatæ ſupputari, atque adeo Curva conſtrui poterit, ſi quidem Abſciſſæ x valores affirmativi tribuantur. Sin autem Abſciſſa x valores obtineat negativos, tum difficile eſt dictu utrum valores ipſius y, futuri ſint reales an imaginarii: ſit enim $x = -1$, & quid ſit $(-1)^{\sqrt{2}}$ definiri non poterit, quoniam approximationes ad valorem $\sqrt{2}$ nihil adjumenti afferunt.

511. Multo minus erit dubitandum, quin æquationes, in quibus adeo exponentes imaginarii reperiuntur, ad genus tranſcendentium referri debeant. Fieri autem omnino poteſt, ut expreſſio