Append. guli i nihilo æqualis fieri poterit. Hoc igitur modo æquatio generalis pro Superficiebus ſecundi ordinis ad hanc formam perducetur

$$App + Bqq + Crr + Gp + Hq + Ir + K = 0.$$

115. Nunc præterea Coordinatæ p, q, r datis quantitatibus ita augeri diminuive poterunt, ut coëfficientes G, H & I evaneſcant; quod fiet mutato tantum puncto illo, unde omnes Coordinatæ initium habent. Atque hoc modo omnes Superficies ſecundi ordinis in hac æquatione continebuntur

$$App + Bqq + Crr + K = 0,$$

ex qua intelligitur unumquodque trium planorum principalium per initium Coordinatarum ductorum Superficiem in duas partes ſimiles & æquales biſecare. Omnis ergo Superficies ſecundi ordinis non ſolum unum habet planum diametrale, ſed adeo tria, quæ ſe mutuo in eodem puncto normaliter interſecent; quod punctum propterea Centrum Superficiei conſtituet, etiamſi in nonnullis caſibus hoc Centrum in infinitum diſtet. Simili ſcilicet modo, quo omnes Sectiones conicæ Centro dicuntur præditæ, etiamſi in Parabola Centrum a Vertice infinite removeatur.

116. Perducta ergo æquatione, qua omnes Superficies ſecundi ordinis continentur, ad formam ſimpliciſſimam, primum harum Superficierum genus exhibebit iſta æquatio

$$App + Bqq + Crr = aa,$$

ſi quidem omnes tres coëfficientes A, B, & C valores obtineant affirmativos. Superficies igitur ad hoc primum genus pertinentes non ſolum totæ in finito ſpatio includentur, ſed omnes quoque Centrum habebunt, in quo tria plana diametralia ſe mutuo ad angulos rectos decuſſant. Sit C Centrum hujus figuræ, & CA, CB, CD Axes illi principales inter ſe normales,

Tab. XXXVIII. Fig. 143.

males, quibus Coordinatæ p, q, r sunt parallelæ, erunt tria plana diametralia $ABab$; ADa; & BDb, quibus hoc Corpus in binas portiones similes æquales secabitur. CAP. V.

117. Ponatur $r = 0$; & æquatio $App + Bqq = aa$ exprimet naturam sectionis principalis $ABab$; quæ idcirco erit Ellipsis Centrum habens in C, cujus semiaxes erunt $CA = Ca = \frac{a}{\sqrt{A}}$; & $CB = Cb = \frac{a}{\sqrt{B}}$. Si ponatur $q = 0$, æquatio $App + Crr = aa$, erit pro sectione principali ADa, quæ pariter erit Ellipsis Centrum habens in C, cujus semiaxes erunt $CA = Ca = \frac{a}{\sqrt{A}}$, & $CD = \frac{a}{\sqrt{C}}$. Posito autem $p = 0$, prodibit pro tertia sectione principali BDb æquatio $Bqq + Crr = aa$, quæ etiam erit Ellipsis Centrum habens in C & semiaxes $CB = Cb = \frac{a}{\sqrt{B}}$, & $CD = \frac{a}{\sqrt{C}}$. Cognitis autem his tribus sectionibus principalibus, seu tantum earum semiaxibus $CA = \frac{a}{\sqrt{A}}$; $CB = \frac{a}{\sqrt{B}}$ & $CD = \frac{a}{\sqrt{C}}$, natura hujus Corporis determinatur & cognoscitur. Hinc primum istud Superficierum secundi ordinis genus *Elliptoides* appellari conveniet, quia tres ejus sectiones principales sunt Ellipses.

118. Sub hoc genere continentur tres species præ primis notatu dignæ. Prima est, si omnes tres Axes principales CA, CB, & CD inter se fuerint æquales, quo casu tres sectiones principales abibunt in Circulos, ipsumque Corpus in Globum, cujus æquatio, uti supra vidimus, erit

$$pp + qq + rr = aa.$$

Secunda species eos complectitur casus, quibus duo tantum Axes principales sunt inter se æquales. Sit nimirum $CD = CB$, seu $C = B$, atque sectio BDb fiet Circulus, ex æquatione autem $App + B(qq + rr) = aa$ intelligitur omnes sectiones huic parallelas pariter fore Circulos; unde hoc Corpus erit Sphæroides sive oblongum, si AC major sit quam

 BC;

Append. *BC*; ſive compreſſum ſi *AC* ſit minor quam *BC*. Tertia denique ſpecies ea complectitur Corpora, in quibus coëfficientes A, B, C ſunt inæquales, quæ ideo nomen generale *Elliptoidis* retinebunt.

119. Sequentia genera Superficierum ſecundi ordinis hac continebuntur æquatione

$$\mathrm{A}pp + \mathrm{B}qq + \mathrm{C}rr = aa,$$

Ac primo quidem ſi nullus coëfficientium A, B, C prorſus deſit; eorum autem, vel unus vel duo, valores habeant negativos. Sit unus tantum negativus, atque conſideremus hanc æquationem

$$\mathrm{A}pp + \mathrm{B}qq - \mathrm{C}rr = aa,$$

Tab. XXXVIII. Fig. 144. in qua jam A, B, C numeros affirmativos denotare ponimus. Quod ad Centrum hujus Corporis & plana diametralia attinet, omnia eodem modo ſunt comparata, ut ante. Patet igitur hujus Corporis ſectionem principalem primam *ABab* eſſe Ellipſin, cujus ſemiaxis $AC = \frac{a}{\sqrt{\mathrm{A}}}$, alterque $BC = \frac{a}{\sqrt{\mathrm{B}}}$. Binæ reliquæ ſectiones principales *Aq*, *BS* erunt Hyperbolæ Centrum in *C* & ſemiaxem conjugatum $= \frac{a}{\sqrt{\mathrm{C}}}$ habentes.

120. Repræſentabit ergo hæc Superficies ſpeciem infundibuli, ſurſum & deorſum ſecundum Hyperbolas divergens. Unde iſta Superficies Aſymtoton habebit Conum æquatione $\mathrm{A}pp + \mathrm{B}qq - \mathrm{C}rr = 0$ expreſſum, Verticem in Centro *C* habentem, & cujus latera ſunt Aſymtota Hyperbolarum. Stabit autem iſte Conus Aſymtotos intra Superficiem, eritque Conus rectus ſi fuerit $\mathrm{A} = \mathrm{B}$; ſcalenus vero ſi A non ipſi B æquabitur. Axis autem Coni erit recta *CD* normalis ad planum

planum ABa. Ceterum omnes ſectiones Axi CD normales erunt Ellipſes ſimiles Ellipſi $ABab$, ſectiones vero plano $ABab$ normales omnes erunt Hyperbolæ: unde iſtas Superficies *elliptice hyperbolicas* vocari conveniet, Aſymtoto ſuo conico circumſcriptas. Hujus igitur Superficies nobis conſtituent genus ſecundum. CAP. V.

121. Species in hoc genere iterum tres notari poterunt: quarum prima erit, ſi $a = o$, quo caſu Ellipſis $ABab$ in punctum evaneſcit, & Hyperbolæ in lineas rectas abibunt: Superficies vero ipſa cum Aſymtota ſua penitus confundetur, ex quo hæc prima ſpecies complectetur omnes Conos, ſive rectos ſive ſcalenos; unde nova ſubdiviſio fieri poſſet. Altera ſpecies erit ſi fiat $A = B$; quo caſu Ellipſis $ABab$ in Circulum mutatur, & ipſa Superficies fiet rotunda ſeu tornata. Orietur ſcilicet hæc Superficies, ſi Hyperbola quæcunque circa Axem conjugatum convertatur. Tertia ſpecies ab ipſo genere non diſcrepabit.

122. Tertium genus definiamus, ſi duo coëfficientes terminorum pp, qq, & rr fiant negativi, cujus ergo æquatio ſit

$$App - Bqq - Crr = aa.$$

Poſito ergo $r = o$, erit prima ſectio principalis Hyperbola $EAFeaf$ Centrum habens in C, cujus ſemiaxis tranſverſus erit $= \frac{a}{\sqrt{A}}$, & ſemiaxis conjugatus $= \frac{a}{\sqrt{B}}$. Altera ſectio principalis, poſito $q = o$, pariter erit Hyperbola AQ, aq, eodem ſemiaxe tranſverſo prædita, ſed cujus Axis ſemiconjugatus erit $= \frac{a}{\sqrt{C}}$: tertia ſectio principalis fit imaginaria. Tota denique hæc Superficies intra Superficiem conicam Aſymtotam erit ſita: unde hoc genus vocari poteſt *hyperbolico-hyperbolicum* Cono Aſymtoto inſcriptum. Si fiat $B = C$, Superficies erit rotunda, orta ex converſione Hyperbolæ circa ſuum Axem tranſverſum, quo caſu ſpecies peculiaris conſtitui poſſet. Sin TAB. XXXIX. Fig. 145.

autem

APPEND. autem ponatur $a = 0$, oritur Superficies conica, quam jam, tanquam ſpeciem generis præcedentis, ſumus contemplati.

123. Ad ſequentia genera cognoſcenda ponamus unum coëfficientium A, B, C evaneſcere. Sit igitur $C = 0$, atque æquatio generalis §. 114. inventa erit

$$App + Bqq + Gp + Hq + Ir + K = 0,$$

in qua, augendo ſeu diminuendo Ordinatas p & q, termini Gp & Hq, non vero Ir tolli poterit. Relinquetur ergo terminus Ir in æquatione: ejus vero ope tolli poterit terminus ultimus K, unde ejuſmodi æquationem habebimus

$$App + Bqq = ar,$$

cujus duo caſus ſunt perpendendi. Prior ſi uterque coëfficiens A & B fuerit affirmativus: poſterior ſi alter ſit negativus. Utroque autem caſu Centrum Superficiei in Axe CD erit ſitum ſed ad diſtantiam infinitam remotum.

124. Sint primo ambo coëfficientes A & B affirmativi: quo caſu conſtituatur genus quartum, æquatione hac contentum

$$App + Bqq = ar.$$

TAB. XXXIX. Fig. 146. Prima ergo ſectio principalis oriunda ſi ponatur $r = 0$, in punctum evaneſcet; altera poſito $q = 0$; & tertia poſito $p = 0$, utraque erit Parabola. Nempe MAm & NAn. Cum igitur hujus Superficiei omnes ſectiones ad Axem AD normales ſint Ellipſes; ſectiones vero per hunc ipſum Axem factæ Parabolæ, hujus generis Corpora *elliptico-parabolica* appellabimus. Cujus ſpecies ſunt notandæ duæ: altera ſi $A = B$, quo caſu oritur Corpus rotundum, *conoides parabolicum* vocatum: altera vero ſi $a = 0$, fitque $App + Bqq = bb$, quæ dat Cylindros, tam rectos ſi $A = B$, quam ſcalenos ſi A & B fuerint inæquales.

125. Quintum