&c. Perpetuo ergo binæ Applicatæ ſimul imaginariæ eſſe incipiunt, atque prius quam imaginariæ evadunt, inter ſe fiunt æquales. Hinc ex tranſitione ab imaginariis ad reales plures naſcuntur varietates, quæ autem cum his, quas modo explicavimus, vel conveniunt vel ex iis ipſis ſunt compoſitæ. Quod ſi autem pro plurimis Abſciſſis tam affirmativis quam negativis quærantur omnes Applicatæ valores, tum per hæc puncta inventa Curva facile delineabitur, ejuſque figura cognoſcetur. CAP. XII.

284. Illuſtremus hæc exemplo, quod, quamvis ortum ſit ex æquatione altioris gradus, tamen Applicata y per ſolas radices quadratas exprimatur. Sit nimirum

$$2y = \pm\sqrt{(6x - xx)} \pm \sqrt{(6x + xx)} \pm \sqrt{(36 - xx)}$$

ex qua æquatione cuivis Abſciſſæ octuplex Applicata reſpondet. Perſpicuum autem eſt, ſi Abſciſſa x ſtatuatur negativa, tum Applicatam fore imaginariam; quod idem evenit ſi Abſciſſa x ſumatur major quam 6: ex quo tota Curva intra limites $x = 0$, & $x = 6$ continebitur. Ponantur ergo pro x ſucceſſive valores, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, eritque

ſi	$x=0$	$x=1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$	$x=5$	$x=6$
$\sqrt{(6x-xx)}$	0,000	2,235	2,828	3,000	2,828	2,235	0,000
$\sqrt{(6x+xx)}$	0,000	2,645	4,000	5,196	6,324	7,416	8 484
$\sqrt{(36-xx)}$	6,000	5.916	5,656	5,196	4.470	3.316	0 000
ſumma	6 000	10,796	12,484	13,392	13 622	12,967	8 484
hinc y ſi							
$+ + +$	3,000	5,398	6,242	6,696	6,811	6,483	4,242
$- + +$	3,000	3,163	3,414	3,696	3,983	4,248	4 242
$+ - +$	3,000	2,753	2,242	1,500	0,487	0,933	-4 242
$+ + -$	-3,000	-0,518	0,586	1,500	2,341	3,167	4,242

Reliquæ quatuor ſignorum permutationes ab his tantum ratione ſignorum differunt. Hinc cuilibet Abſciſſæ octuplex Applicata reſpondet, quæ ſi in figura exhibeantur, prodibit Linea curva duplici TAB. XIV. *Fig.* 54.

LIB. II. duplici plexu $AFBEcagbcDA$, & $afbECAGBCDa$ constans, duas habens Cuspides in A & a, & puncta duplicia seu ramorum intersectiones quatuor in D, E, C & c.

CAPUT XIII.

De Affectionibus Linearum Curvarum.

285. QUemadmodum supra ramorum in infinitum extensorum indolem ita descripsimus, ut Lineam rectam, vel Curvam simpliciorem, assignaverimus, quæ cum illa Curva in infinito confunderetur; ita in hoc Capite constituimus quamvis Curvæ portionem in spatio finito existentem examini subjicere, atque rectam vel Curvam simpliciorem investigare, quæ cum illa Curvæ portione saltem per minimum spatium congruat. Ac primo quidem patet omnem Lineam rectam, quæ Curvam tangit, in eo loco ubi tangit, cum tractu Lineæ curvæ congruere, seu cum Linea curva duo ad minimum puncta communia habere. Tum vero etiam aliæ Lineæ curvæ exhiberi possunt, quæ cum data Curvæ portione accuratius congruant, eamque quasi osculentur. His autem cognitis, status Lineæ curvæ in quovis loco, ejusque affectiones clarissime erunt perspectæ.

TAB. XV. Fig. 55. 286. Sit igitur proposita æquatio quæcunque inter Coordinatas x & y pro Curva quapiam. Tribuatur Abscissæ x valor quispiam $AP = p$, & quærantur valores Applicatæ y huic Abscissæ respondentes, qui si plures fuerint, sumatur pro lubitu unus $PM = q$, eritque M punctum in Curva, seu punctum per quod Curva transibit. Tum vero, si in æquatione inter x & y proposita, loco x scribatur p, & q loco y, omnes æquationis termini se mutuo tollent, ita ut nihil remaneat. Jam ad naturam illius Curvæ portionis, quæ per punctum M transit, indagandam, ex M ducatur recta Mq

Axi

Axi AP parallela, quæ nunc pro Axe accipiatur, & vocetur hic nova Abſciſſa $Mq = t$, Applicata $qm = u$. Quia igitur punctum m pariter in Curva eſt poſitum, ſi mq uſque ad priorem Axem in p producatur, atque $Ap = p + t$ in locum ipſius x, & $pm = q + u$ in locum ipſius y ſubſtituatur, æquatio pariter identica prodire debet. CAP. XIII.

287. Facta autem hac ſubſtitutione in æquatione inter x & y propoſita, omnes termini, in quibus neque t nec u ineſt, ſe mutuo ſponte deſtruent, illique termini, qui novas Coordinatas t & u continent, ſoli ſupererunt. Hinc ergo ejuſmodi prodibit æquatio

$$0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Euu + Ft^3 + Gt^2u + Htuu + \&c.;$$

ubi A, B, C, D, &c. ſunt quantitates conſtantes ex conſtantibus primæ æquationis & ipſis p & q, quas nunc pro conſtantibus habemus, compoſitæ. Iſta igitur nova æquatione natura ejuſdem Curvæ exprimitur, verum ad Axem Mq refertur, & in quo ipſum Curvæ punctum M pro initio Abſciſſarum aſſumitur.

288. Ac primo quidem patet, ſi ponatur $Mq = t = 0$, tum quoque fore $qm = u = 0$, quia punctum m in M incidit. Deinde, quia tantum minimam Curvæ portionem circa M verſantem indagare volumus, hoc impetrabimus, ſi pro t valores quam minimos aſſumamus; quo caſu quoque $qm = u$ valorem habebit minimum; naturam enim Arcus Mm quaſi evaneſcentis tantum deſideramus. Quod ſi vero pro t & u ſumantur valores quam minimi, termini tt, tu, & uu multo adhuc erunt minores, atque ſequentes t^3, t^2u, tuu, u^3, &c., multo quoque erunt minores quam illi, & ita porro: quam ob cauſam, cum termini minimi præ aliis quaſi infinite majoribus omitti queant, remanebit iſta æquatio $0 = At + Bu$, quæ eſt æquatio pro Linea recta $M\mu$ per punctum M tranſeunte, atque indicat hanc rectam, ſi punctum m ad M proxime accedat, cum Curva congruere.

V 3 289. Erit

LIB. II. 289. Erit ergo hæc recta $M\mu$ Tangens Curvæ in loco M, ideoque hinc ad quodvis punctum Curvæ M Tangens μMT duci poteſt. Scilicet, cum ex æquatione $At + Bu = 0$, ſit $\frac{u}{t} = \frac{-A}{B} = \frac{q\mu}{Mq}$, erit $q\mu : Mq = MP : PT = -A : B$. Ergo, cum ſit $PM = q$, fiet $PT = \frac{-Bq}{A}$: vocari autem hæc Axis portio PT ſolet SUBTANGENS. Ex his ergo hæc deducitur

REGULA

Pro invenienda Subtangente.

In æquatione pro Curva, poſtquam Abſciſſæ $x = p$ inventa fuerit ſatisfacere Applicata $y = q$, ponatur $x = p + t$, & $y = q + u$; ex terminis autem, qui per ſubſtitutionem oriuntur, ii tantum retineantur, in quibus t & u unicam dimenſionem tenent, reliquis omnibus neglectis. Sicque ad duos tantum terminos $At + Bu = 0$ pervenietur: unde, cognitis A & B, erit Subtangens $PT = \frac{-Bq}{A}$.

EXEMPLUM I.

Sit propoſita Curva Parabola, *cujus natura hac exprimitur æquatione* $yy = 2ax$, *exiſtente* AP *Axe principali &* A *Vertice.*

Sumatur $AP = p$; &, ſi vocetur $PM = q$, erit $qq = 2ap$, ſeu $q = \sqrt{2ap}$. Jam ponatur $x = p + t$ & $y = q + u$, eritque $qq + 2qu + uu = 2ap + 2at$: unde, per regulam, hi tantum termini $2qu = 2at$ retineantur, qui dant $at - qu = 0$, $\frac{u}{t} = \frac{a}{q} = \frac{-A}{B}$, erit ergo Subtangens $PT = \frac{qq}{a} = 2p$, ob $qq = 2ap$. Hinc Subtangens PT erit dupla Abſciſſæ AP.

EXEM-

EXEMPLUM II.

Sit Curva Ellipsis *Centro* A *descripta, cujus æquatio est* $yy = \frac{bb}{aa}(aa - xx)$, *seu* $aayy + bbxx = aabb$.

Sumta ergo $AP = p$. &, posita $PM = q$, erit $aaqq + bbpp = aabb$. Jam ponatur $x = p + t$ & $y = q + u$; &, quoniam ii tantum termini retineri debent, in quibus t & u unicam habent dimensionem, reliqui statim omitti possunt; fietque $2aaqu + 2bbpt = 0$, unde $\frac{u}{t} = \frac{-bbp}{aaq} = \frac{-A}{B}$. Erit ergo Subtangens $PT = \frac{-B}{A}q = \frac{-aaqq}{bbp} = \frac{-aa+pp}{p}$: quæ expressio, cum sit negativa, indicat punctum T in partem contrariam cadere. Ceterum hæc expressio egregie convenit cum determinatione Tangentium Ellipsis supra tradita.

EXEMPLUM III.

Sit proposita Linea tertii ordinis *Speciei septimæ* $yyx = axx + bx + c$.

Sumta ergo $AP = p$, & posita $PM = q$, erit $pqq = app + bp + c$. Jam statuatur $x = p + t$ & $y = q + u$, eritque $(p+t)(qq + 2qu + uu) = a(pp + 2pt + tt) + b(p+t) + c$. Rejectis omnibus terminis superfluis, erit $2pqu + qqt = 2apt + bt$, unde fit $\frac{u}{t} = \frac{2ap + b - qq}{2pq} = -\frac{A}{B}$; ideoque Subtangens $PT = \frac{-B}{A}q = \frac{2pqq}{2ap + b - qq} = \frac{2app + 2bp + 2c}{2ap + b - qq} = \frac{2ap^3 + 2bpp + 2cp}{app - c}$, vel $PT = \frac{2ppqq}{app - c}$.

290. Cognita ergo hoc modo Tangente Curvæ, simul cognoscitur directio, quam Curva sequitur in puncto M. Linea enim Curva aptissime considerari potest tanquam via, quam describit punctum continuo promotum cum variata continuo

motus