$\frac{g}{6}$ numerus integer (art. 19), quem statuemus $= h$. Tunc aequatio proposita hanc induit formam: $(m\alpha x + m6y + h)^2 - hh + f = 0$, manifestoque adeo rationaliter solui nequit, nisi $hh - f$ fuerit numerus quadratus. Sit $hh - f = kk$, patetque aequationi propositae sequentes duas aequiualere: $m\alpha x + m6y + h + k = 0$, et $m\alpha x + m6y + h - k = 0$, *i. e.* quamlibet solutionem aequationis propositae etiam alterutri harum aequationum satisfacere, et vice versa. Aequatio prior manifesto in integris solui nequit, nisi $h + k$ per m fuerit diuisibilis, similiterque posterior solutionem in integris non admittet, nisi $h - k$ per m fuerit diuisibilis. Hae vero conditiones ad resolubilitatem vtriusque aequationis sufficiunt (quia α, 6 inter se primi esse supponuntur), omnesque solutiones secundum regulas notas exhiberi poterunt.

221. Casum in art. 217 consideratum (quia omnium difficillimus est) exemplo illustramus. Proposita sit aequatio $xx + 8xy + yy + 2x - 4y + 1 = 0$. Ex hac primo per introductionem aliarum incognitarum $p = 15x - 9$, $q = 15y + 6$ deriuatur aequatio $pp + 8pq + qq = -540$. Huius autem solutiones omnes in integris, contineri inueniuntur sub quatuor formulis sequentibus:

$$p = 6t,\ q = -24t - 90u$$
$$p = 6t,\ q = -24t + 90u$$
$$p = -6t,\ q = 24t - 90u$$
$$p = -6t,\ q = 24t + 90u$$

denotantibus t, u indefinite omnes numeros integros positiuos aequationi $tt - 15uu = 1$ satisfacientes, quos complectitur formula $t = \frac{1}{2}((4+\sqrt{15})^n + (4-\sqrt{15})^n)$, $u = \frac{1}{2\sqrt{15}}((4+\sqrt{15})^n - (4-\sqrt{15})^n)$, si n indefinite omnes numeros integros positiuos (inclusa etiam cifra) designat. Quamobrem omnes valores ipsorum x, y contenti erunt sub formulis his:

$$x = \tfrac{1}{5}(2t+3),\quad y = -\tfrac{1}{5}(8t+30u+2)$$
$$x = \tfrac{1}{5}(2t+3),\quad y = -\tfrac{1}{5}(8t-30u+2)$$
$$x = \tfrac{1}{5}(-2t+3),\quad y = \tfrac{1}{5}(8t-30u-2)$$
$$x = \tfrac{1}{5}(-2t+3),\quad y = \tfrac{1}{5}(8t+30u-2).$$

Praeceptis autem nostris rite applicatis, reperietur, vt valores *integri* prodeant, in formula prima et secunda eos valores ipsorum t, u accipi debere, qui proueniant ex indice *n pari*; in tertia quartaque vero eos, qui ex *impari n* obtineantur. — Solutiones simplicissimae habentur hae: $x = 1, -1, -1$; $y = -2, 0, 12$ resp.

Ceterum obseruare conuenit, solutionem problematis in artt. praecc. explicati plerumque per multifaria artificia abbreuiari posse, praesertim quantum ad exclusionem solutionum inutilium i. e. fractiones implicantium pertinet; sed haec ne nimis longi fiamus hoc loco praeterire coacti sumus.

222. Quoniam complura ex iis quae hucusque pertractauimus etiam ab aliis geometris considerata sunt, horum merita silentio praeterire non possumus. De *formarum aequiualentia* disquisitiones generales instituit ill. La Grange, *Nouv. Mem. de l'Ac. de Berlin*, 1773 *p.* 263 *et* 1775 *p.* 323. *sqq.*, vbi imprimis docuit, pro quo-

uis determinante dato multitudinem finitam formarum dari ita comparatarum, vt quaeuis forma illius determinantis alicui ex ipsis aequiualens sit, adeoque omnes formas determinantis dati in classes distribui posse. Postea clar. Le Gendre plures proprietates elegantes huius classificationis, ad maximam partem per inductionem detexit, quas infra trademus demonstrationibusque muniemus. Ceterum distinctionem aequiualentiae propriae et impropriae, cuius vsus maxime in disquisitionibus subtilioribus conspicuus est, nemo hucusque attigerat.

Problema famosum in art. 216 sqq. explicatum ill. La Grange primus complete resoluit, *Hist. de l'Ac. de Berlin* 1767, *p.* 165, *et* 1768 *p.* 181 *sqq.* Exstat solutio (sed minus completa) etiam in *Suppl. ad Euleri Algebram* iam saepius laudatis. Iam antea ill. Euler idem argumentum aggressus fuerat, *Comm. Petr. T. VI p.* 175; *Comm. Nou. T. IX p.* 3; *Ibid. T. XVIII p.* 185 *sqq.*, sed inuestigationem suam eo semper restrinxit, vt ex aliqua solutione, quam iam cognitam esse supponit, aliae deriuentur; praetereaque ipsius methodi in paucis tantummodo casibus *omnes* solutiones suppeditare valent (vid. La Grange *Hist. de l'Ac. de Berlin* 1767, *p.* 237). Quum vltima harum trium commentt. recentioris dati sit quam solutio La Grangiana, quae problema omni generalitate amplectitur nihilque hoc respectu desiderandum relinquit: Euler tunc temporis (Tomus XVIII Commentariorum pertinet ad annum 1773, et a. 1774 est publicatus) illam solutionem nondum nouisse videtur. Ceterum solutio nostra (perinde vt omnia reliqua