LIB. II. quæ Curvæ Parabolæ ſint affines, eaſdem ſimul Parabolæ eſſe ſimiles; ita ut hoc caſu ſimilitudo æque late pateat atque affinitas. Idem quoque evenit in omnibus Curvis, quarum natura exprimitur æquatione duobus tantum terminis conſtante, cujuſmodi ſunt $y^3 = ccx$; $y^3 = cxx$; $y^2x = c^3$; &c.; his nimirum Curvis, cum parabolicis tum hyperbolicis, quæ aliæ Curvæ ſunt affines eædem quoque ſunt ſimiles; quæ convenientia in Curvis alius generis non locum habet, uti jam de Circulo & Ellipſi notavimus.

447. Quemadmodum ex data æquatione inter x & y, quam quotcunque quantitates conſtantes a, b, c, &c. ingrediantur, ſi ſingulis conſtantibus determinati valores tribuantur, unica Linea curva determinata oritur; ita, ſi una conſtantium, puta a, mutabilis aſſumatur, eique ſucceſſive alii atque alii valores tribuantur, quia ex unoquoque valore peculiaris Curva naſcitur, omnino infinitæ Curvæ orientur, quæ erunt ſimiles ſi, præter a, nullæ aliæ Lineæ conſtantes æquationem ingrediantur; contra vero diſſimiles. Sin autem, præter a, alia quoque conſtans b mutabilis ſtatuatur; tum, ob mutabilitatem ipſius b, ex unoquoque ipſius a valore emergent Lineæ curvæ infinitæ, ſicque omnino ex mutabilitate duarum conſtantium a & b infinities infinitæ provenient Lineæ curvæ differentes. Si inſuper tertia conſtans c mutabilis aſſumatur, tum adhuc infinities plures reſultabunt Lineæ curvæ; ſicque quo major fuerit conſtantium, quæ mutabiles ſtatuuntur, numerus, eo majore infiniti poteſtate numerus Curvarum reſultantium exprimetur.

448. Conſideremus autem aliquanto diligentius eas Lineas curvas infinitas, quæ ex una æquatione prodeunt, dum tantum una Linearum conſtantium mutabilis aſſumitur. Hujuſmodi autem æquatio, ſi idem Axis idemque Abſciſſarum initium retineatur, non ſolum Lineas illas curvas infinitas exhibet, ſed etiam earum poſitionem indicat, ita ut his Curvis infinitis ſpatium quodpiam impleatur, in quo nullum aſſignari queat punctum, quin per id aliqua infinitarum Curvarum tranſeat.

eat. Prout ergo æquatio fuerit comparata, Curvæ illæ infinitæ vel erunt diſſimiles vel ſimiles, uti ex præcedentibus judicare licet; quin etiam evenire poteſt, ut omnes Curvæ ſint inter ſe non ſolum ſimiles ſed etiam æquales, ratione ſitus tantum differentes. Sic iſta æquatio $y = a + \sqrt{(2cx - xx)}$, poſita a mutabili, exhibebit infinitos Circulos æquales radii $= c$, quorum centra ſunt in recta ad Axem normali ſita. CAP. XVIII.

449. Hinc etiam viciſſim, ſi una eademque Curva ſuper plano in infinitis diverſis ſitibus ſecundum certam legem deſcribatur, æquatio præberi poterit, qua per unius conſtantis mutabilitatem omnes hæ infinitæ Curvæ inter ſe æquales ſimul exhibeantur. Sit Curva infinitis variis ſitibus exhibita Circulus cujus radius $= c$, qui ita infinities deſcribatur, ut vertices A, a, datam Curvam $A a L$, quæ *Directrix* vocetur, conſtituant; Diametri autem ab perpetuo Axi AB maneant parallelæ. Ad æquationem ergo pro his infinitis Circulis inveniendam, ſumatur quodvis Directricis punctum a, unde in Axem principalem demittatur perpendiculum, aK. Ponatur $AK = a$; &, ob Directricem datam, dabitur Ka per a: ſit ergo $Ka =$ A, eritque A Functio quæpiam ipſius a data. Tum ex a Axi principali ducatur parallela ab, quæ erit Diameter Circuli Verticem in Directricis puncto a habentis, ex cujus puncto quovis m ducatur Applicata $mP = y$, reſpondens Abſciſſæ $AP = x$; erit ergo $ap = x - a$, & $pm = y -$ A. Poſitis autem $ap = t$, & $pm = u$; erit, ex natura Circuli, $uu = 2ct - tt$; jam, ob $t = x - a$, & $u = y -$ A, habebitur $(y - \mathrm{A})^2 = 2c(x - a) - (x - a)^2$, quæ erit æquatio generalis omnes Circulos ſecundum Directricem $A a L$ modo deſcripto diſpoſitos complectens. Omnes ſcilicet iſti Circuli ex æquatione inventa prodibunt, ſi Linea a, a qua ſimul A pendet, mutabilis aſſumatur. TAB. XXII. *Fig.* 90.

450. Simili modo ſi, loco Circuli, alia quæcunque Linea Curva $a m b$ ita promoveatur ſecundum ductum Directricis $A a L$, ut ejus Vertex ſeu Abſciſſarum initium a in Directrice, atque Axis ab ſibi perpetuo parallelus maneat, eadem Linea

Hh 2 curva

LIB. II. curva infinities descripta habebitur, atque æquatio inveniri poterit, qua omnium harum Linearum curvarum natura simul comprehendatur. Data sit natura hujus Curvæ promotæ per æquationem inter Coordinatas $ap = t$ & $pm = u$; ac, pro Axe principali, ad quem omnes Curvæ junctim consideratæ referantur, sumatur recta AB Axibus ab parallela, quæ simul sit Axis Directricis AaL. Posito jam, ut ante $AK = a$, & $Ka = \mathrm{A}$, ita ut A sit Functio quædam ipsius a, vocetur Abscissa $AP = x$, & Applicata $Pm = y$, erit $t = x - a$, & $u = y - \mathrm{A}$. Quod si ergo hi valores loco t & u in æquatione inter t & u data substituantur, obtinebitur æquatio generalis omnes Curvas amb conjunctim complectens. Quicunque enim valor determinatus ipsi a tribuatur, prodibit una quædam Curva amb ex infinitis quæ per hunc motum sunt descriptæ. Sic, si Curva amb fuerit Parabola æquatione $uu = ct$ expressa, tum infinitæ Parabolæ æquales, quarum Vertices per Directricem AaL sunt dispositi, Axesque rectæ AB paralleli, continebuntur in hac æquatione $(y - \mathrm{A})^2 = c(x - a)$.

451. Quemadmodum hic Verticem Curvæ A in data Curva Directrice ita promoveri posuimus, ut ejus Axis sibi semper maneret parallelus; ita etiam, dum Vertex per datam Curvam transfertur, positio Axis Curvæ ab utcunque variari poterit; sicque multo generalior obtinebitur æquatio pro eadem Curva in dato plano secundum quamcunque legem infinities descripta. Quod quo clarius expediamus, ponamus primum Verticem Curvæ A per circumferentiam Aa ita progredi, ut Axis Curvæ ab perpetuo ad Centrum Circuli O dirigatur. Motus igitur rotatorius Curvæ AMB cum Axe BAO circa punctum O factus exhibebit omnes istos infinitos ejusdem Curvæ AMB situs diversos quos omnes in una æquatione, quam constans quæpiam mutabilis posita ingrediatur, complecti oportet.

TAB. XXII. Fig 91.

452. Statuatur radius invariabilis $AO = aO = c$; sitque angulus $AOa = \alpha$, qui mutabilis assumitur: ex Curvæ in situ

quocunque

quocunque amb descriptæ puncto quovis m ad rectam OAB pro Axe principali assumtam demittatur Applicata mP, sitque $OP = x$, & $Pm = y$. Tum ex m in proprium Curvæ amb Axem ab demittatur quoque perpendicularis mp: vocatisque $ap = t$, & $pm = u$, dabitur æquatio invariabilis inter t & u, qua natura Curvæ amb exprimitur. Ex P ducatur Ps ipsi Ob parallela, cui Applicata mp producta occurrat in s; eritque $ps = x.\sin.\alpha$; $Op - Ps = x.\cos.\alpha$; tum vero, ob angulum $Pms = AOa = \alpha$, erit $Ps = y.\sin.\alpha$ & $ms = y.\cos.\alpha$. Hinc erit $Op = c + t = x.\cos.\alpha + y.\sin.\alpha$ & $mp = u = y.\cos.\alpha - x.\sin.\alpha$ In æquatione ergo inter t & u data substituantur $t = x.\cos.\alpha + y.\sin.\alpha - c$ & $u = y.\cos.\alpha - x.\sin.\alpha$; prodibitque æquatio generalis inter Coordinatas x & y, quæ, angulo α mutabili assumto, omnes Curvas amb in se complectetur. CAP. XVIII.

453. Promoveatur nunc autem Vertex Curvæ AMB secundum Directricem quamcunque AaL, interea vero positio Axis ab continuo ita mutetur, ut angulus AOa quomodocunque pendeat a puncto a. Scilicet, Vertice in a versante, sit $AK = a$, & $Ka = \mathrm{A}$, atque angulus $AOa = \alpha$; ubi, ob Directricem datam, erit A Functio quædam cognita ipsius a: anguli α autem sinus cosinusve sit pariter Functio quæpiam ipsius a. His positis, erit $KO = \frac{\mathrm{A}}{tang.\,\alpha}$, & $Oa = \frac{\mathrm{A}}{\sin.\,\alpha}$. Ex Curvæ amb puncto quocunque m primum ad Axem principalem AO demittatur perpendiculum mP, tum vero etiam in proprium Axem mp, sitque $AP = x$, $Pm = y$; & $ap = t$, $pm = u$, dabiturque æquatio invariabilis inter Coordinatas t & u, ex qua æquatio variabilis inter x & y omnes Curvas amb complectens definiri debet. TAB. XXII. Fig. 92.

454. Ad hoc præstandum ex P in mp productam ducatur normalis Ps, quæ erit Axi Curvæ abO parallela: atque, ob angulum $Pms = AOa = \alpha$, erit $Ps = y.\sin.\alpha$ & $ms =$

 $y.\cos.\alpha$.