congruum habebit in altera. Hinc sponte sequitur, radices $[1]$, $[g]$, $[gg] \ldots [g^{n-2}]$ cum $\Omega$ coincidere; et prorsus simili modo generalius $[\lambda]$, $[\lambda g]$, $[\lambda gg] \ldots [\lambda g^{n-2}]$ cum $\Omega$ coincident, designante $\lambda$ integrum quemcunque per $n$ non diuisibilem. Porro quum sit $g^{n-1} \equiv 1$ (mod. $n$), nullo negotio perspicietur, duas radices $[\lambda g^{\mu}]$, $[\lambda g^{\nu}]$ identicas vel diuersas esse, prout $\mu$, $\nu$ secundum $n - 1$ congrui sint vel incongrui.

Si itaque $G$ est alia radix primitiua, radices $[1]$, $[g] \ldots [g^{n-2}]$ etiam cum his $[1]$, $[G] \ldots [G^{n-2}]$ conuenient, si ad ordinem non respicitur. Sed praeterea facile probatur, si $e$ sit diuisor ipsius $n - 1$, atque ponatur $n - 1 = ef$, $g^e = h$, $G^e = H$, etiam $f$ numeros $1, h, hh \ldots h^{f-1}$ his $1, H, H^2 \ldots H^{f-1}$ secundum $n$ congruos esse (sine respectu ordinis). Supponamus enim $G \equiv g^{\omega}$ (mod. $n$) sitque $\mu$ numerus arbitrarius positiuus et $< f$ atque $\nu$ residuum minimum ipsius $\mu\omega$ (mod. $f$). Tunc erit $\nu e \equiv \mu\omega e$ (mod. $n - 1$), hinc $g^{\nu e} \equiv g^{\mu\omega e} \equiv G^{\mu e}$ (mod. $n$), siue $H^{\mu} \equiv h^{\nu}$, i. e. quiuis numerus posterioris seriei $1, H, H^2$ etc. congruum habebit in serie $1, h, hh \ldots$, et perinde vice versa. — Hinc manifestum est, $f$ radices $[1]$, $[h]$, $[hh] \ldots [h^{f-1}]$ identicas esse cum his $[1]$, $[H]$, $[H^2] \ldots [H^{f-1}]$, generaliusque eodem modo facile perspicietur, $[\lambda]$, $[\lambda h]$, $[\lambda hh] \ldots [\lambda h^{f-1}]$ cum $[\lambda]$, $[\lambda H]$, $[\lambda H^2] \ldots [\lambda H^{f-1}]$ conuenire. *Aggregatum* talium $f$ radicum $[\lambda] + [\lambda h] +$ etc. $+ [\lambda h^{f-1}]$, quod, quum non mutetur accipiendo pro $g$ aliam radicem primitiuam, tamquam independens a $g$ considerandum est, per $(f, \lambda)$ designabimus; earundem radicum *complexum* vocabimus *periodum* $(f, \lambda)$, vbi ad radicum ordinem non respicitur *). — In exhibenda tali periodo e re erit, singulas radices e quibus constat ad expressionem simplicissimam reducere, puta pro numeris $\lambda$, $\lambda h$, $\lambda hh$ etc. residua minima sec. mod. $n$ substituere, secundum quorum magnitudinem, si placet, etiam periodi partes ordinari poterunt.

E. g. Pro $n = 19$, vbi 2 est radix primitiua, periodus $(6, 1)$ constat e radicibus [1], [8], [64], [512], [4096], [32768], siue [1], [7], [8], [11], [12], [18]. Similiter periodus $(6, 2)$ constat ex [2], [3], [5], [14], [16], [17]. Periodus $(6, 3)$ cum praec. identica inuenitur. Periodus $(6, 4)$ continet [4], [6], [9], [10], [13], [15].

344. Circa huiusmodi periodos statim se offerunt obseruationes sequentes:

I. Quum sit $\lambda h^f \equiv \lambda$, $\lambda h^{f+1} \equiv \lambda h$ etc. (mod. $n$), manifestum est, ex iisdem radicibus, e quibus constet $(f, \lambda)$, etiam constare $(f, \lambda h)$, $(f, \lambda hh)$ etc.; generaliter itaque designante $[\lambda']$ radicem quamcunque ex $(f, \lambda)$, haec periodus cum $(f, \lambda')$ omnino identica erit. Si itaque duae periodi ex aeque multis radicibus constantes (quales *similes* dicemus) vllam radicem communem habent, manifesto identicae erunt. Quare fieri nequit, vt duae radices in aliqua periodo simul contineantur, in alia simili vero vna earum tantum reperiatur; porro patet, si duae radices

*) Aggregatum in sequentibus etiam periodi valorem numericum vocare liceat, aut simpliciter periodum, vbi ambiguitas non metuenda.

$[\lambda]$, $[\lambda']$ ad eandem periodum $f$ terminorum pertineant, valorem expr. $\frac{\lambda'}{\lambda}$ (mod. $n$) alicui potestati ipsius $h$ congruum esse, siue supponi posse $\lambda' \equiv \lambda g^{re}$ (mod. $n$).

II. Si $f = n - 1$, $e = 1$, periodus $(f, 1)$ manifesto cum $\Omega$ coincidit; in reliquis vero casibus $\Omega$ ex $e$ periodis $(f, 1)$, $(f, g)$, $(f, gg)$ ... $(f, g^{e-1})$ compositus erit. Hae periodi itaque omnino inter se diuersae erunt, patetque quamuis aliam similem periodum $(f, \lambda)$ cum harum aliqua coincidere, siquidem $[\lambda]$ ad $\Omega$ pertineat, i. e. si $\lambda$ per $n$ non diuisibilis sit. Periodus $(f, 0)$ autem aut $(f, kn)$ manifesto ex $f$ vnitatibus est composita. Aeque facile perspicitur, si $\lambda$ sit numerus quicunque per $n$ non diuisibilis, etiam complexum $e$ periodorum $(f, \lambda)$, $(f, \lambda g)$, $(f, \lambda gg)$ ... $(f, \lambda g^{e-1})$ cum $\Omega$ conuenire. — Ita e. g. pro $n = 19$, $f = 6$, $\Omega$ constat e tribus periodis $(6, 1)$, $(6, 2)$, $(6, 4)$, ad quarum aliquam quaeuis alia similis, praeter $(6, 0)$, reducitur.

III. Si $n - 1$ est productum e tribus numeris positiuis $a$, $b$, $c$, manifestum est, quamuis periodum $bc$ terminorum ex $b$ periodis $c$ terminorum compositam esse, puta $(bc, \lambda)$ ex $(c, \lambda)$, $(c, \lambda g^a)$, $(c, \lambda g^{2a})$, ... $(c, \lambda g^{ab-a})$, vnde hae sub illa contentae dicentur. Ita pro $n = 19$ periodus $(6, 1)$ constat e tribus $(2, 1)$, $(2, 8)$, $(2, 7)$, quarum prima continet radices $r$, $r^{18}$; secunda $r^8$, $r^{11}$; tertia $r^7$, $r^{12}$.

345. Theorema. *Sint $(f, \lambda)$, $(f, \mu)$ duae periodi similes, identicae aut diuersae, constetque $(f, \lambda)$ e radicibus $[\lambda]$, $[\lambda']$, $[\lambda'']$ etc.*