B, C), in qua B sit positiuus et $< \sqrt{D}$; *A vero si est positiuus, vel* $-A$, *si A negatiuus, inter* $\sqrt{D}$ *et* $\sqrt{D}-B$ *situs.*

Sol. Supponimus in forma proposita vtramque conditionem nondum locum habere; alioquin enim aliam formam quaerere opus non esset. Porro obseruamus, in forma determinantis *non-quadrati* terminum primum vel vltimum $= 0$ esse non posse (art. 171 ann.). Sit $b' \equiv -b$ (mod. a') atque intra limites $\sqrt{D}$ et $\sqrt{D} \mp a$ situs (accepto signo superiori, quando a' positiuus, inferiori, quando est negatiuus) quod fieri posse simili ratione vt art. 3, facile demonstratur, ponaturque $\frac{b'b'-D}{a'} = a''$, qui erit integer, quia $b'b'-D \equiv bb-D \equiv aa' \equiv 0$ (mod. a'). Iam si $a'' < a'$, fiat denuo $b'' \equiv -b'$ (mod. a'') et inter $\sqrt{D}$ et $\sqrt{D} \mp a''$ situs (prout a'' positiuus vel negatiuus) et $\frac{b''b''-D}{a''} = a'''$. Si hic iterum $a''' < a''$, sit rursus $b''' \equiv -b''$ (mod. a'''), et inter $\sqrt{D}$ et $\sqrt{D} \mp a'''$ situs atque $\frac{b'''b'''-D}{a'''} = a^{\text{IV}}$. Haec operatio continuetur, donec in progressione $a', a'', a''', a^{\text{IV}}$ etc. ad terminum a^{m+1} perueniatur, praecedente a^m non minorem, quod tandem euenire debet, quia alioquin progressio infinita numerorum integrorum continuo decrescentium haberetur. Tum positis $a^m = A$, $b^m = B$, $a^{m+1} = C$, forma (A, B, C) omnibus conditionibus satisfaciet.

Dem. I. Quoniam in progressione formarum (a, b, a'), (a', b', a''), (a'', b'', a''') etc. quaeuis praecedenti est contigua: vltima (A, B, C) primae (a, b, a') proprie aequiualens erit.

II. Quia B inter $\sqrt{D}$ et $\sqrt{D} \mp A$ situs est (accipiendo semper signum superius quando A est positiuus, inferius quando A est negatiuus): patet, si ponatur $\sqrt{D} - B = p$, $B - (\sqrt{D} \mp A) = q$, hos p, q fore positiuos. Iam facile confirmatur, fore $qq + 2pq + 2p\sqrt{D} = D + AA - BB$; quare $D + AA - BB$ erit numerus positiuus, quem ponemus $= r$. Hinc propter $D = BB - AC$, fit $r = AA - AC$, adeoque $AA - AC$ numerus positiius: quia vero per hyp. A non est maior quam C, manifesto illud aliter fieri nequit, quam si AC est negatiuus, adeoque signa ipsorum A, C opposita. Hinc $BB = D + AC < D$ adeoque $B < \sqrt{D}$.

III. Porro quia $-AC = D - BB$, erit $AC < D$, et hinc (quia A non $< C$), $A < \sqrt{D}$. Quare $\sqrt{D} \mp A$ erit positiuus, adeoque etiam B, qui inter limites $\sqrt{D}$ et $\sqrt{D} \mp A$, est situs.

IV. Hinc a potiori $\sqrt{D} + B \mp A$ positiuus, et quia $\sqrt{D} - B \pm A = -q$, est negatiuus, $\pm A$ situs erit inter $\sqrt{D} + B$ et $\sqrt{D} - B$. Q. E. D.

Ex. Proposita sit forma $(67, 97, 140)$, cuius determinans $= 29$. Hic inuenitur progressio formarum $(67, 97, 140)$, $(140, -97, 67)$ $(67, -37, 20)$ $(20, -3, -1)$, $(-1, 5, 4)$. Vltima erit quaesita.

Tales formas (A, B, C) determinantis positiui non-quadrati D, in quibus A positiue acceptus iacet inter $\sqrt{D} + B$ et $\sqrt{D} - B$, B vero positiuus est atque $< \sqrt{D}$, *formas reductas* vocabimus. Formae itaque reductae determinantis positiui non-quadrati aliquantum differunt a formis reductis determinantis negatiui; sed propter magnam analogiam inter has et illas, denominationes diuersas introducere noluimus.

184. Si aequiualentia duarum formarum *reductarum* determinantis positiui aeque facile dignosci posset, vt in formis determinantis negatiui (art. 172), aequiualentiam duarum formarum *quarumcunque* eiusdem determinantis positiui nullo negotio diiudicare possemus. Sed hic res longe aliter se habet, fierique potest vt permultae formae reductae inter se aequiualentes sint. Antequam itaque problema hoc aggrediamur, profundius in naturam formarum reductarum (determinantis positiui non-quadrati, quod semper hic subintelligendum) inquirere necesse erit.

1) Si (a, b, c) est forma reducta, a et c signa opposita habebunt. Nam posito determinante formae $= D$, erit $ac = bb - D$, adeoque, propter $b < \sqrt{D}$, negatiuus.