

L1B. II. 421. His expeditis quæstionibus, consideremus altiores potestates binorum ipsius z valorum ex æquatione $zz - Pz +$

$Q = 0$, existente $P = \frac{Mz}{L}$ & $Q = \frac{Nzz}{L}$: ubi L Functio-
nem homogeneam $n+2$; M , $n+1$ & N , n dimensionum
ipsarum x & y significat; estque $x =$ Abscissæ CP & $y =$
Applicatæ PM . Proposita igitur sit quæstio, qua binæ in-
tersectiones M & N ejus indolis requiruntur, ut sit $CM^3 +$
 $CN^3 = a^3$. Cum ergo sit, ex æquationis $zz - Pz + Q = 0$,
natura, $CM^3 + CN^3 = P^3 - 3PQ$ debeat esse $P^3 -$
 $3PQ = a^3$: quæ æquatio, cum P^3 & PQ sint quantitates
irrationales, locum habere nequit. Huic ergo quæstioni in
stricto sensu prorsus satisfieri non potest: sin autem numerus
intersectionum non spectetur etiam si duabus plures prodant,
tum quidem infinitis modis Curvæ satisfaciens inveniri pos-
sunt, ponendo $Q = \frac{P^3 - a^3}{3P}$, & pro P capiendo Functio-
nem quamcunque sinus & cosinus anguli $ACM = \phi$.

422. Sin autem ejusmodi Curvæ requirantur, in quibus sit
 $CM^4 + CN^4 = a^4$, tum poni debeat $P^4 - 4P^2Q + 2QQ = a^4$;
quæ æquatio, cum nulla insit irrationalitas, nullam
involvit contradictionem. Debeat ergo esse $Q = PP +$
 $\sqrt{(\frac{1}{2} P^4 + \frac{1}{2} a^4)}$, quæ Functio, non obstante signo
radicali, tanquam uniformis spectari potest, quia si $\sqrt{(\frac{1}{2} P^4 +$
 $\frac{1}{2} a^4)}$ sumeretur negative, pro z valores imaginarii resultarent.
Erit ergo $\frac{Nzz}{L} = \frac{MMzz}{LL} + \sqrt{(\frac{M^4z^4}{2L^4} + \frac{1}{2} a^4)}$; & cum
pro Curva sit $L - M + N = 0$, seu $zz - \frac{Mzz}{L} + \frac{Nzz}{L}$
 $= 0$, erit $zz - \frac{Mzz}{L} + \frac{MMzz}{LL} + \sqrt{(\frac{M^4z^4}{2L^4} + \frac{1}{2} a^4)}$
 $= 0$. Consequenter, sublata irrationalitate, erit

$$\frac{z^4}{L^4}$$

$$\frac{z^4}{L^4} (LL - LM + MM)^2 = \frac{M^4 z^4}{2L^4} + \frac{1}{2} a^4, \quad \text{CAP. XVII.}$$

feu

$$(xx + yy)^2 (2(LL - LM + MM)^2 - M^4) = a^4 L^4,$$

quæ omnes Curvas satisfaciens in se complectitur.

423. Alio faciliore modo, uti supra §. 372, hæc & similes quæstiones resolvi poterunt. Cum enim fit $CM \cdot CN = Q$, si altera ipsarum CM & CN dicatur $= z$, erit altera $= \frac{Q}{z} = \frac{Nz}{L}$, ob $Q = \frac{Nz}{L}$. Quare, si debeat esse

$$CM^n + CN^n = a^n; \text{ fiet } z^n + \frac{N^n z^n}{L^n} = a^n; \text{ ideoque}$$

$$z^n = \frac{a^n L^n}{L^n + N^n}; \text{ quæ æquatio, si fuerit } n \text{ numerus par, jam}$$

est rationalis quæsitoeque satisfaciens. At, si sit n numerus impar, ad irrationalitatem tollendam quadrata sumi debent; quo fit, ut numerus intersectionum duplicetur, sicque Curva oriatur non eo sensu satisfaciens uti desideratur. Sic, si debeat

$$\text{esse } CM^2 + CN^2 = a^2, \text{ fiet } zz = xx + yy = \frac{aaLL}{LL + NN}; \text{ quæ}$$

$$\text{convenit cum supra inventa } xx + yy = \frac{aaLL}{(L - M)^2 + L^2} (410),$$

ob $L - M + N = 0$. Generaliter ergo, si debeat esse $CM^n + CN^n = a^n$ fueritque n numerus par, obtinebitur

$$\text{ista æquatio } z^n = (xx + yy)^{\frac{n}{2}} = \frac{a^n L^n}{L^n + N^n} = \frac{a^n L^n}{L^n + (L - M)^n},$$

existentibus L Functione $m + 2$ dimensionum, M Functione $m + 1$ dimensionum, & N Functione m dimensionum ipsarum x & y .

424. Hæc eadem solutio etiam ex consideratione summæ $CM + CN = P$, eruitur. Si enim altera ipsarum CM &

LIB. II.

CN ponatur $= z$, erit altera $= P - z$. Hinc, si $CM^n + CN^n$ debeat esse constans, erit $z^n + (P - z)^n = a^n$. Vidimus autem esse debere $P = \frac{Mz}{L}$, & $Q = \frac{Nz}{L}$; ita ut sit $L - M + N = 0$; ex quo erit $z^n + \frac{z^n(M - L)^n}{L^n} = a^n$; seu $z^n = \frac{a^n L^n}{L^n + (M - L)^n}$, vel $z^n = \frac{a^n L^n}{L^n + N^n}$: vel, eliminando L , erit $z^n = \frac{a^n (M - N)^n}{(M - N)^n + N^n}$. Hæ æquationes, si fue-

rit n numerus par, conditionem propositam adæquate adimplent. At, si n sit numerus impar, dabuntur quidem duæ intersecções M & N , ut sit $CM^n + CN^n = a^n$; at præter has habebuntur duæ aliæ intersecções eadem proprietate gaudentes, ita ut quælibet recta per C ducta bis proprietatem propositam involvat.

425. His expositis, facile erit quæstiones alias maxime difficiles resolvere: debeat enim Curva inveniri quæ ab omnibus rectis per C ductis ita in duobus punctis M & N secetur, ut sit

$$CM^n + CN^n + \alpha CM \cdot CN (CM^{n-2} + CN^{n-2}) + \beta \cdot CM^2 \cdot CN^2 (CM^{n-4} + CN^{n-4}) \text{ \&c. } \text{quantitas constans} = a^n.$$

Ponatur alter valor $CM = z$, erit alter $CN = \frac{Q}{z} = \frac{Nz}{L}$; quibus valoribus substitutis orietur ista æquatio, qua natura Curvæ exprimitur, $z^n (L^n + N^n + \alpha LN (L^{n-2} + N^{n-2}) + \beta L^2 N^2 (L^{n-4} + N^{n-4}) + \text{\&c.})$

$= a^n$

$= a^n L^n$. Est autem $L - M + N = 0$, atque L, M , & N sunt Functiones homogeneæ ipsarum x & y dimensionum $n+2, n+1$ & n , uti supra descripsimus: unde erit, vel $L = M - N$, vel $N = M - L$ sicque infinitæ solutiones hinc deducuntur.

426. Pergamus jam ad Curvas investigandas, quæ a singulis rectis per punctum fixum C ductis in tribus punctis secantur. Hujusmodi ergo Curvarum natura exprimitur hac æquatione generali

$$z^3 - Pz^2 + Qz - R = 0:$$

ubi z denotat distantiam cujusque Curvæ puncti a C ; & P, Q, R sunt Functiones anguli $ACM = \phi$, ejusve sinus & cosinus. Per easdem autem rationes quas supra allegavimus apparet, ne plures quam tres intersectiones prodeant, P & R esse debere Functiones impares ipsius $\sin. \phi$ & $\cos. \phi$; verum Q statui debere Functionem parem. Quod si ergo ponantur Coordinatæ orthogonales $CP = x, PM = y$, ut sit $xx + yy = zz$, atque denotent K, L, M & N Functiones homogeneas $(n+3), (n+2), (n+1)$ & n dimensionum ipsarum x & y , fore $P = \frac{Lz}{K}, Q = \frac{Mz^2}{K},$ & $R = \frac{Nz^3}{K}$: ideoque inter Coordinatas orthogonales x & y habebitur pro hujusmodi Curvis ista æquatio generalis

$$K - L + M - N = 0;$$

ex qua patet punctum C fore Curvæ punctum totuplex quot index n contineat unitates.

427. Primum ergo, huc pertinent omnes Lineæ tertii ordinis, ubicunque punctum C extra Curvam capiatur. Deinde, in hac æquatione continentur omnes Lineæ quarti ordinis, dummodo punctum C in ipsa Curva accipiat. Tertio, omnes Lineæ quinti ordinis, in quibus datur punctum duplex huc referuntur, si modo punctum C in earum puncto duplici constituitur.

LIB. II. stituitur. Similique modo Lineæ altiorum ordinum hanc conditionem implebunt, si habeantur puncta multiplicia tanti exponentis, quot n contineat unitates, si $n+3$ exponat ordinem, ad quem æquatio pertineat.

428. Sint p, q, r tres illi valores ipsius z , quos obtinet ex æquatione $z^3 - Pz^2 + Qz - R = 0$, pro quovis valore anguli $CAM = \phi$; eritque, ex natura æquationum $P = p + q + r$; $Q = pq + pr + qr$ & $R = pqr$. Cum jam P & R per x & y rationaliter exprimi nequeant, manifestum est ejusmodi Curvas exhiberi non posse, in quibus sit vel $p + q + r$ vel pqr quantitas constans; neque adeo ulla Functio impar ipsarum p, q , & r constanti æqualis poni poterit. Pares autem Functiones sine ulla difficultate constantem valorem obtinere poterunt. Sic, si requiratur ut sit $pq + pr + qr = aa$, erit $Q = \frac{Mz^2}{K} = aa$; ideoque $M(xx + yy) = aaK$; qui valor in æquatione $K - L + M - N = 0$, substitutus, dabit æquationem generalem omnes Curvas hac proprietate præditas in se complectentem:

$$M(xx + yy) - aaL + aaM - aaN = 0;$$

vel, eliminando M , hanc

$$(xx + yy)K - (xx + yy)L + aaK - (xx + yy)N = 0.$$

429. Pari modo, aliæ similes quæstiones facile resolventur. Uti, quærat Curva, quæ a rectis per C ductis ita in tribus punctis secetur, ut sit $p^2 + q^2 + r^2 = a^2$. Cum enim sit $p^2 + q^2 + r^2 = P^2 - 2Q$, & $P = \frac{Lz}{K}$ atque $Q = \frac{Mz^2}{K}$, fiet $\frac{L^2z^2}{K^2} - \frac{2Mz^2}{K} = aa$, seu $(xx + yy)L^2 - 2(xx + yy)KM = aaKK$. At, pro Curvis tres interfectiones admittentibus habetur hæc æquatio generalis $K - L + M - N = 0$, cujus natura in hoc consistit ut maximus ipsarum x & y dimensionum numerus