$= 2a - 2b$, forma vero $(2a - 2b, a - b, a)$ est anceps; quare (a, b, c) oppositae suae etiam proprie aequiualebit.

Aeque facile iam diiudicari potest quando duae formae reductae (a, b, c), (a', b', c') non oppositae improprie aequiualentes esse possint. Erunt enim impr. aequiualentes, si (a, b, c) $(a', -b', c')$, quae non identicae erunt, proprie sunt aequiualentes, et contra. Hinc patet, conditionem, sub qua *illae* improprie sint aequiualentes, esse, vt sint identicae, insuperque aut ancipites aut $a = c$. — Formae vero reductae quae neque identicae sunt neque oppositae, neque proprie neque improprie aequiualentes esse possunt.

173. PROBLEMA. *Propositis duabus formis eiusdem determinantis negatiui, F et F', inuestigare vtrum sint aequalentes.*

Solutio. Quaerantur duae formae reductae f, f' formis F, F' resp., proprie aequiualentes: si formae f, f' sunt proprie, vel improprie vel vtroque modo aequiualentes, etiam F, F' erunt; si vero f, f' nullo modo aequiualentes sunt, etiam F, F' non erunt.

Ex art. praec. dari possunt quatuor casus:

1) Si f, f' neque identicae neque oppositae, F, F' nullo modo aequiualentes erunt.

2) Si f, f' sunt *primo* vel identicae vel oppositae, et *secundo* vel ancipites, vel terminos

suos extremos aequales habent: F, F' tum proprie, tum improprie aequiualentes erunt.

3) Si f, f' sunt identicae, neque vero ancipites neque terminos extremos aequales habent: F, F' proprie tantum aequiualebunt.

4) Si f, f' sunt oppositae, neque vero ancipites, neque terminos extremos aequales habent: F, F' proprie tantum aequiualentes erunt.

Ex. Formis (41, 35, 30), (7, 18, 47) quarum determinans $= -5$, reductae (1, 0, 5), (2, 1, 3) aequiualentes inueniuntur, quare illae nullo modo aequiualentes erunt. — Formis vero (23, 38, 63), (15, 20, 27) aequiualet eadem reducta (2, 1, 3), quae: quum simul sit anceps, formae (23, 38, 63), (15, 20, 27) tum proprie tum improprie aequiualebunt. — Formis (37, 53, 78), (53, 73, 102), aequiualent reductae (9, 2, 9), (9, $-$ 2, 9) quae quum sint oppositae, ipsarumque termini extremi aequales: formae propositae tam proprie quam improprie erunt aequiualentes.

174. Multitudo omnium formarum reductarum, determinantem datum $-D$ habentium, semper est finita, et, respectu numeri D, satis modica: formae hae ipsae vero duplici modo inueniri possunt. Designemus formas reductas determinantis $-D$ indefinite per (a, b, c), vbi

itaque omnes valores ipsorum a, b, c determinari debent.

Methodus prima. Accipiantur pro a omnes numeri, tum positiui tum negatiui non maiores quam $\sqrt{\frac{4}{3}D}$, quorum residuum quadraticum $-D$, et pro singulis a, fiat b successiue aequalis omnibus valoribus expr. $\sqrt{-D}$ (mod. a), non maioribus quam $\frac{1}{2}a$, tum positiue tum negatiue acceptis; c vero pro singulis valoribus determinatis ipsorum a, b, ponatur $= \frac{D+bb}{a}$. Si quae formae hoc modo oriuntur in quibus $c < a$, hae erunt reiiciendae, reliquae autem manifesto erunt reductae.

Methodus secunda. Accipiantur pro b omnes numeri, tum positiui tum negatiui, non maiores quam $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{3}D}$, siue $\sqrt{\frac{1}{3}D}$; pro singulis b resoluatur $bb + D$ omnibus quibus fieri potest modis in binos factores (etiam signorum diuersitatis ratione habita) ambos ipso $2b$ non minores ponaturque alter factor, et quidem, quando factores sunt inaequales, minor, $= a$, alter $= c$. Si quae formae hoc modo prodeunt, in quibus $a > \sqrt{\frac{4}{3}D}$, erunt reiiciendae, reliquae vero omnes manifesto erunt reductae. — Denique patet, nullam formam reductam dari posse quae non per vtramque methodum inueniatur.

Ex. Sit $D = 85$. Hic limes valorum ipsius a est $\sqrt{\frac{340}{3}}$ qui iacet inter 10 et 11. Numeri vero inter 1 et 10 (incl.) quorum residuum -85, sunt 1, 2, 5, 10. Vnde habentur formae duodecim: (1, 0, 85), (2, 1, 43), (2, −1, 43), (5, 0, 17), (10, 5, 11); (10 − 5, 11); (—