C, omnis recta per id ducta Curvam vel nusquam vel in duobus punctis secabit.

403. Lineæ tertii ordinis ista proprietate gaudentes, posito $n = 1$, continebuntur in hac æquatione

$$\alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma x y^2 + \delta y^3 - \varepsilon x^2 - \zeta x y - \eta y^2 + \theta x + \iota y = 0,$$

quæ quidem in se complectitur omnes Lineas tertii ordinis, quæ ergo omnes huc pertinent, dummodo punctum C in ipsa Curva capiatur. Facto enim $x = 0$, simul y valorem obtinet evanescentem. Simili modo pro Curvis quarti ordinis quæsito satisfacientibus punctum C non solum in Curva sed simul ejus punctum duplex esse debet; omnis ergo Linea quarti ordinis puncto duplici prædita quæsito satisfaciet, dummodo punctum C in puncto duplici statuatur. Sin autem C fuerit adeo Curvæ punctum triplex, tum omnis recta per id ducta Curvam in unico puncto intersecabit, pertinebitque ad casum primo considératum. Pari modo Lineæ quinti ordinis satisfacient, si punctum C in earum puncto triplici statuatur, atque ita porro. Perpetuo autem notandum est, si recta per C ducta parallela fiat alicui Asymtotæ rectæ, seu Axi Asymtotæ parabolicæ, tum semper unicam dari intersectionem, altera in infinitum abeunte.

404. Egregie hæc conveniunt cum natura Linearum cujusque ordinis: quia enim Linea cujusque ordinis a Linea recta in tot punctis intersecari potest, quot exponens ordinis continet unitates, (atque revera in totidem punctis intersecatur, nisi aliquot intersectiones vel fiant imaginariæ vel in infinitum abeunt:) & quia hic omnes intersectiones, sive reales sive in infinito factas sive imaginarias, æque computamus, easque tantum excludimus quæ in ipso puncto C fiunt; manifestum est, cum Linea ordinis n in n punctis a quaque Linea recta secetur, punctum C in puncto totuplici, quot numerus $n - 2$ continet unitates, collocari debere, ut intersectio duplex prodeat.

405. His

405. His notatis facile erit problemata, quæ circa relationem inter quosque binos ipsius z valores CM & CN proponi solent, vel resolvere, vel solutionis inconvenientiam ostendere. Cum enim duo ipsius z valores CM & CN sint radices hujus æquationis $zz - Pz + Q = 0$, erit ipsorum summa $= P$, & rectangulum eorum $CM \cdot CN = Q$. Quare, si primum requirantur ejusmodi Curvæ, in quibus ubique sit summa $CM + CN$ constans,. Functionem P quantitatem constantem esse oporteret. Cum autem ex quæstionis natura unaquæque recta per C ducta Curvæ in duobus tantum punctis occurrere debeat, necesse est ut sit $P = \frac{Mz}{L} = \frac{M\sqrt{(xx+yy)}}{L}$ (§. 399.), quæ quantitas irrationalitatem involvens nunquam constans esse potest. Atque idcirco nulla datur Curva huic quæstioni proprie satisfaciens.

Cap. XVII.

406. Quod si autem ista conditio, qua duæ tantum cujusque rectæ per C ductæ intersectiones cum Curva postulantur, omittatur atque ejusmodi quærantur Curvæ, quæ quidem plures duabus intersectiones exhibeant, inter eas autem duæ M & N ejusmodi adsint, ut sit $CM + CN$ quantitas constans, tales Curvæ innumerabiles exhiberi poterunt, ponendo $P =$ quantitati illi constanti $CM + CN = a$. Erit enim $zz - az + Q = 0$, denotante Q Functionem $\frac{Nzz}{L}$; & quia hæc æquatio adhuc irrationalitate laborat, ea sublata, erit $a^2z^2 = (zz + Q)^2$, seu $a^2 = zz(1 + \frac{N}{L})^2$, seu $a^2L^2 = (xx + yy)(L^2 + 2LN + NN)$, in qua erit L Functio homogenea $n + 2$, at N Functio homogenea n dimensionum ipsarum x & y. Simplicissima ergo Curva hoc sensu quæstionem resolvens habebitur si ponatur $L = xx + yy$ & $N = \pm bb$, eritque $aa(xx + yy) = (xx + yy \pm bb)^2$, quæ est pro Linea quarti ordinis complexa; complectitur enim duos Circulos in C concentricos. Curvæ autem continuæ simplicissimæ quæsito satisfacientes erunt sexti ordinis, ponendo $L = \alpha xx + \beta xy +$

 γy^2,

LIB. II. γy^2, & $N = \pm bb$, pro quibus æquatio erit $aa(\alpha xx + \beta xy + \gamma yy)^2 = (xx + yy)(\alpha xx + \beta xy + \gamma yy \pm bb)^2$. Sit $\alpha = 1$, $\beta = 0$; & $\gamma = 0$, erit $yy + xx = \frac{aax^4}{x^4 \pm 2bbxx + b^4}$,

seu $y = \frac{x\sqrt{(aaxx - x^4 \mp 2bbxx - b^4)}}{xx \pm bb}$.

407. Sin autem hujusmodi solutiones, quibus rectæ per C ductæ Curvam in pluribus quam duobus punctis intersecant, excludantur, quam conditionem natura quæstionis requirere videtur, nullæ prorsus Curvæ quæstioni satisfacere sunt dicendæ; ac propterea nulla dabitur Linea continua, quæ a rectis per C ductis ita in duobus tantum punctis M & N intersecetur, ut summa $CM + CN$ sit constans. At vero si istæ intersectiones hujus indolis postulentur, ut rectangulum $CM \times CN$ debeat esse constans, quæ proprietas in Circulum ita competit ut is satisfaciat ubicunque punctum C capiatur, infinitæ aliæ Lineæ curvæ inveniri poterunt, quæ idem præstent. Debebit enim Q esse quantitas constans, æqualis scilicet illi rectangulo $CM.CN$, quod sit $= aa$; quæ positio, cum sit $Q = \frac{Nzz}{L}$, ac proptera Functio rationalis ipsarum x & y, non pugnat.

408. Sit igitur $\frac{Nzz}{L} = aa$, seu $L = \frac{Nzz}{aa} = \frac{N(xx+yy)}{aa}$, atque Curvæ quæsito satisfacientes omnes continebuntur in hac æquatione $\frac{N(xx+yy)}{aa} - M + N = 0$, seu $Maa = N(xx + yy + aa)$, ubi M denotat Functionem quamcunque homogeneam $n+1$ dimensionum, N vero Functionem homogeneam n dimensionum ipsarum x & y, ita ut sit $\frac{M}{N} = \frac{xx+yy+aa}{aa}$ Functio unius dimensionis ipsarum x & y. Hæc ergo æquatio omnes complectitur Curvas, quæ a rectis per C ductis in duobus tantum punctis M & N ita secantur, ut rectangulum $CM.CN$ sit ubique constans $= aa$.

409. Cum

409. Cum igitur $\frac{M}{N}$ ſit Functio homogenea unius dimenſionis ipſarum x & y, caſus ſimpliciſſimus prodibit ſi ponatur $\frac{M}{N} = \frac{\alpha x + \beta y}{a}$, ex quo orietur hæc æquatio $xx + yy - a(\alpha x + \beta y) + aa = 0$, quæ ſemper eſt pro Circulo: &, cum ſit æquatio pro Circulo generalis inter Coordinatas orthogonales, manifeſtum eſt Circulum quæſito ſatisfacere, ubicunque punctum C accipiatur, omnino uti ex Elementis conſtat. Præter Circulum ergo ex Sectionibus conicis nulla alia Curva huic quæſtioni ſatisfacit. Verum ex ſingulis ordinibus Linearum ſequentibus infinita Linearum ſatisfacientium copia exhiberi poteſt: & quidem omnes, quæ ex quolibet ordine ſatisfaciunt. Sic Lineæ tertii ordinis, quæ iſthac proprietate gaudent, continebuntur in hac æquatione CAP. XVII.

$$\frac{\alpha xx + \beta xy + \gamma yy}{a(\delta x + \varepsilon y)} = \frac{xx + yy + aa}{aa}$$

ſeu

$$(\delta x + \varepsilon y)(xx + yy) - a(\alpha xx + \beta xy + \gamma yy) + aa(\delta x + \varepsilon y) = 0.$$

Atque ſimili modo ex omnibus ſequentibus Linearum ordinibus eæ, quæ ſatisfaciunt, exhibebuntur.

410. Propoſita jam ſit hæc quæſtio, ut inter omnes Lineas curvas, quæ a rectis per punctum C ductis in duobus punctis ſecantur, eæ definiantur, in quibus ſit ſumma quadratorum $CM^2 + CN^2$ quantitas conſtans, puta $= aa$. Cum igitur ſit $CM + CN = P$, & $CM \cdot CN = Q$, erit $CM^2 + CN^2 = PP - 2Q$; debebit ergo eſſe $PP - 2Q = 2aa$, ſeu $Q = \frac{PP - 2aa}{2}$. Quare, ob $P = \frac{Mz}{L}$, & $Q = \frac{Nzz}{L}$, erit $\frac{2Nzz}{L} = \frac{MMzz}{LL} - 2aa$; ideoque $N = \frac{MM}{2L} - \frac{aaL}{zz}$; quæ æquatio, cum ſit L Functio $n+2$ dimenſionum, M Functio $n+1$ dimenſionum, & N Functio n dimenſionum ipſarum x &

LIB. II. y, nullam implicat difficultatem. Sumtis ergo pro L & M ejusmodi Functionibus, erit $N = \frac{MM}{2L} - \frac{aaL}{zz}$: unde pro Curvis quæsito satisfacientibus ista resultat æquatio generalis

$$L - M + \frac{MM}{2L} - \frac{aaL}{zz} = 0,$$

seu

$$2LL(xx+yy) - 2LM(xx+yy) + MM(xx+yy) - 2aaLL = 0:$$

quæ, si sit $M = 0$, præbet Circulum cujus Centrum in C, quem quæsito satisfacere per se est perspicuum.

411. Ponamus $n + 1 = 0$, ut sit M quantitas constans $= 2b$, & $L = \alpha x + \beta y$, atque orietur Linea quarti ordinis hac æquatione contenta

$$(\alpha x+\beta y)^2(xx+yy-aa) - 2b(\alpha x+\beta y)(xx+yy)+2bb(xx+yy) = 0.$$

Alia æquatio quarti ordinis reperitur, si ponatur $L = xx+yy$ & $M = 2(\alpha x + \beta y)a$, tum enim æquatio per $2xx + 2yy$ divisa dabit

$$(xx+yy)^2 - 2a(\alpha x+\beta y)(xx+yy)+2aa(\alpha x+\beta y)^2 - aa(xx+yy) = 0.$$

Nisi autem divisio per $xx + yy$ succedat, æquatio inventa (ponendo $2M$ loco M), quæ est

$$LL(xx+yy) - 2LM(xx+yy) + 2MM(xx+yy) - aaLL = 0,$$

semper erit ordinis $2n + 6$, ideoque ex quolibet ordine pari obtinetur æquatio pro Curva satisfaciente. Præterea vero, si L per $xx + yy$ fuerit divisibilis; scilicet, si, denotante N Functionem quamcunque homogeneam n dimensionum ipsarum x & y, fuerit $L = (xx+yy)N$, orietur alia æquatio generalis hæc

$$NN(xx+yy)^2 - 2MN(xx+yy) + 2MM - aaNN(xx+yy) = 0,$$

quæ est ordinis $2n + 4$, ita ut ex singulis ordinibus paribus duplex nascatur æquatio pro Curvis proposita proprietate gaudentibus.