tenent dimenſiones adeſſe; quæcunque enim fuerit Superficies, in ejus æquatione generaliſſima ſemper omnes inerunt termini ſummarum dimenſionum, neque idcirco hypotheſis, qua omnes terminos duarum dimenſionum adeſſe ponimus, univerſalitati ſolutionis ullam vim infert. Quando autem termini yz & xz adſunt, præ iis termini θy & ιx evaneſcunt; relinqueturque hæc æquatio

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx = 0,$$

ex qua elicitur

$$z = \frac{-\beta y - \gamma x \pm \sqrt{((\beta\beta - 4\alpha\delta)yy + (2\beta\gamma - 4\alpha\varepsilon)xy + (\gamma\gamma - 4\alpha\zeta)xx)}}{\alpha}.$$

Hac igitur æquatione natura portionis in infinitum extenſæ exprimitur.

106. Si quam igitur Superficies habeat portionem in infinitum extenſam, ea congruet cum portione infinita Superficiei, quæ exprimitur hac æquatione

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx = 0,$$

ita ut hæc Superficies ſit quaſi Aſymtota illius Superficiei æquatione generali expreſſæ. Quia vero in hac æquatione tres variabiles ubique duas habent dimenſiones, erit ea pro Superficie conica, Verticem in initio Coordinatarum, ubi omnes ſimul evaneſcunt, habente: ſemper ergo exhiberi poteſt Superficies conica, quæ erit Aſymtota Superficiei propoſitæ, ſi quidem in infinitum extenditur; ſeu cujus portio infinita cum Superficie propoſita vel penitus congruit, vel intervallo tantum finito ab eo eſt remota. Uti ergo ramos Curvarum in infinitum abeuntes per Lineas rectas Aſymtotas diſtinximus, ita Superficierum partes in infinitum extenſas per Superficies conicas Aſymtotas diſtinguere licebit.

107. Quoties ergo Superficies Aſymtota conica erit realis, toties Superficies ipſa in infinitum extenditur; atque ita quidem

APPEND. dem ut utriusque partes infinitæ congruant; sicque ex natura Superficiei Asymtotæ natura ipsius Superficies propositæ colligi poterit. Quod si autem Superficies Asymtota fiat imaginaria, ipsa Superficies nullam habebit partem in infinitum extensam, sed tota spatio finito includetur. Ad Superficies ergo secundi ordinis, quæ in spatio finito contineantur, indagandas, tantum opus est, ut videamus quibus in casibus æquatio pro Superficie Asymtota fiat imaginaria; quod fit, si tota Superficies hæc in punctum unicum evanescit. Namque si ullam extensionem haberet, vel punctum extra Verticem situm, necessario in infinitum expandi deberet, propterea quod supra ostendimus, totam rectam quæ per verticem & unum Superficiei punctum ducitur, in ipsa Superficie esse positum.

108. Quando ergo Superficies conica Asymtota, hac æquatione expressa

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx = 0,$$

in unicum punctum abit, omnes ejus sectiones per Verticem factæ pariter in idem punctum evanescere debent. Primum ergo, facto $z = 0$, æquatio $\delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx = 0$, debet esse impossibilis, nisi sit $x = 0$ & $y = 0$, quod evenit si fuerit $4\delta\zeta$ major quam $\varepsilon\varepsilon$. Deinde idem evenire debet posito vel $x = 0$ vel $y = 0$: erit ergo $4\alpha\delta$ major quam $\beta\beta$, & $4\alpha\zeta$ major quam $\gamma\gamma$. Nisi ergo in æquatione pro Superficie secundi ordinis

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx + \eta z + \theta y + \iota x + \varkappa = 0,$$

fuerit $4\delta\zeta$ major quam $\varepsilon\varepsilon$; $4\alpha\delta$ major quam $\beta\beta$; $4\alpha\zeta$ major quam $\gamma\gamma$, Superficies certo habebit partes in infinitum extensas.

109. Neque vero hæ tres conditiones sufficiunt ad Superficiem in spatium finitum includendam: requiritur insuper ut valor ipsius z ex æquatione Asymtotica supra erutus fiat imaginarius; quod fit si ista expressio

($\beta\beta$—

$$(\beta\beta - 4\alpha\delta)yy + 2(\beta\gamma - 2\alpha\varepsilon)xy + (\gamma\gamma - 4\alpha\zeta)xx$$ CAP. V.

perpetuo obtineat valorem negativum, si quidem pro utraque variabili x & y valores quicunque præter o substituantur. Quod, cum $\beta\beta - 4\alpha\delta$ & $\gamma\gamma - 4\alpha\zeta$ sint quantitates negativæ, fiet si $(\beta\gamma - 2\alpha\varepsilon)^2$ minor quam $(\beta\beta - 4\alpha\delta)(\gamma\gamma - 4\alpha\zeta)$; hoc est, si fuerit $\alpha\varepsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2$ minor quam $\beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta$; si quidem α habuerit valorem affirmativum, quoniam illam æquationem per α divisimus. Quod si vero α habeat valorem affirmativum, ob superiores æquationes $4\alpha\zeta$ major quam $\gamma\gamma$; $4\alpha\delta$ major quam $\beta\beta$; & $4\delta\zeta$ major quam $\varepsilon\varepsilon$; coëfficientes δ & ζ erunt affirmativi.

110. Superficies ergo secundi ordinis in spatio finito continebitur, si in ejus æquatione quatuor sequentes conditiones locum habeant; nempe si sit

$4\alpha\zeta$ major quam $\gamma\gamma$; $4\alpha\delta$ major quam $\beta\beta$; $4\delta\zeta$ major quam $\varepsilon\varepsilon$
&
$\alpha\varepsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2$ minor quam $\beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta$.

Hincque genus primum Superficierum secundi ordinis definimus, ad quod eæ species omnes pertinent, quæ non in infinitum excurrunt, sed in spatio finito includuntur. Ad hoc ergo genus pertinet Globus, cujus æquatio est

$$zz + yy + xx = aa,$$

cum enim hic sit $\alpha = 1$, $\delta = 1$, $\zeta = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\varepsilon = 0$, quatuor inventis conditionibus omnibus satisfit. Generalius vero hic pertinebit æquatio ista

$$\alpha zz + \delta yy + \zeta xx = aa$$

quæ si α, δ, ζ, fuerint quantitates affirmativæ, semper est pro Superficie clausa, nisi unus duove coëfficientes evanescant.

111. Perspectis his quatuor conditionibus, quibus Superficies

APPEND. in ſpatium finitum redigitur; ſi proponatur æquatio ſecundi ordinis quæcunque determinata, ſtatim dijudicari poterit utrum Superficies ea æquatione expreſſa habeat partes in infinitum extenſas, an nullas. Quod ſi enim unica illarum quatuor conditionum deſit, Superficies certo in infinitum extenditur. Hoc autem caſu nonnullæ ſubdiviſiones ſunt faciendæ, quibus ſingularis varietas partibus in infinitum extenſis inducitur. Prima ſubdiviſio ergo conſtituatur, ſi fuerit

$$\alpha\varepsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2 \text{ major quam } \beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta$$

quo caſu Superficies in infinitum extendetur, atque Superficiem conicam pro Aſymtota habebit, uti jam ante oſtendimus. Hicque caſus e Diametro eſt oppoſitus præcedenti, quo tota Superficies in ſpatio finito continetur.

112. Præterea autem dantur caſus quidam intermedii, quibus, etſi Superficies in infinitum abit, ſimili tamen modo inter duos præcedentes locum tenet quo Parabola inter Ellipſin & Hyperbolam continetur. Caſus iſte oritur ſi fuerit

$$\alpha\varepsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2 = \beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta,$$

eritque propterea

$$\alpha z = -\beta y - \gamma x + y\surd(\beta\beta - 4\alpha\delta) + x\surd(\gamma\gamma - 4\alpha\zeta).$$

Habebit ergo æquatio Aſymtotica

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx = 0,$$

duos Factores ſimplices, qui erunt vel reales, vel imaginarii, vel inter ſe æquales. Triplex iſta diverſitas ergo tria genera Superficierum in infinitum extenſarum præbet, ſicque omnino quinque genera Superficierum ſecundi ordinis ſumus adepti, quæ nunc diligentius proſequemur.

113. Quia, mutando poſitionem ternorum Axium, quibus Coordinatæ ſunt parallelæ, æquatio generalis ad formam ſimpliciorem

pliciorem reduci poteſt, iſta reductione ita utamur, ut æquationem generalem pro Superficiebus ſecundi ordinis ad formam ſimpliciſſimam redigamus, quæ tamen omnes ſpecies æque ac generalis in ſe complectatur. Cum igitur æquatio generalis pro Superficiebus ſecundi ordinis ſit C A P.V.

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx + \eta z + \theta y + \iota x + \varkappa = 0,$$

quæramus æquationem inter alias ternas Coordinatas p, q & r, quæ quidem ſe mutuo in eodem puncto, quo ternæ priores ſe decuſſent. Ad hoc ex §. 92. ſtatuatur

$$x = p(\mathit{cof.}k.\mathit{cof.}m - \mathit{fin.}k.\mathit{fin.}m.\mathit{cof.}n) + q(\mathit{cof.}k.\mathit{fin.}m + \mathit{fin.}k.\mathit{cof.}m.\mathit{cof.}n) - r.\mathit{fin.}k.\mathit{fin.}n$$

&

$$y = -p(\mathit{fin.}k.\mathit{cof.}m + \mathit{cof.}k.\mathit{fin.}m.\mathit{cof.}n) - q(\mathit{fin.}k.\mathit{fin.}m - \mathit{cof.}k.\mathit{cof.}m.\mathit{cof.}n) - r.\mathit{cof.}k.\mathit{fin.}n$$

atque

$$z = -p.\mathit{fin.}m.\mathit{fin.}n + q.\mathit{cof.}m.\mathit{fin.}n + r.\mathit{cof.}n,$$

unde reſultet iſta æquatio

$$App + Bqq + Crr + Dpq + Epr + Fqr + Gp + Hq + Ir + K = 0.$$

114. Jam anguli illi arbitrarii k, m, & n ita definiri poterunt, ut tres coëfficientes D, E, & F evaneſcant. Quanquam enim calculus nimis ſit prolixus, quam ut angulorum illorum determinatio actu oſtendi poſſit; tamen ſi quis forte dubitet, an ſemper iſta eliminatio ad valores reales angulorum illorum perducat, is certe concedere debebit, duos ſaltem coëfficientes D & E nihilo æquales reddi poſſe. Hoc autem ſi fuerit effectum, poſitio tertii Axis, cui Ordinatæ r ſunt parallelæ in plano ad Ordinatas p normali, facile ita mutari poteſt, ut etiam coëfficiens F evaneſcat. Statuatur enim $q = t\,\mathit{fin.}i + u\,\mathit{cof.}i$ & $r = t.\mathit{cof.}i - u.\mathit{fin.}i$, ita ut, loco termini qr, novus terminus tu ingrediatur, cujus coëfficiens ope anguli