mutetur ſive loco s ponatur $-s$ ſive $\frac{2}{4}\pi - s$. Talis autem Functio eſt $cos.4s$. Quare, ſi Z fuerit Functio ipſarum z & $cos.4s$; ſeu, quod eodem redit, ipſarum $xx+yy$ & $x^4 - 6xxyy + y^4$, tum æquatio $Z=0$, dabit Curvam quatuor Diametris præditam. Erit ergo Z Functio ipſarum t & u, poſitis $t = xx+yy$ & $u = x^4 - 6xxyy + y^4$; Ponatur autem $v = tt - u$, eritque Z Functio ipſarum t & v, hoc eſt ipſarum $xx+yy$ & $xxyy$. Vel etiam Z ita definiri poteſt ut ſit Functio harum duarum quantitatum $xx+yy$ & x^4+y^4.

353. Ut Curva æquatione $Z=0$, expreſſa habeat quinque Diametros, oportet ut Z ſit Functio ipſarum z & $cos.5s$. Quare, ſumtis Coordinatis orthogonalibus x & y, ob $cos.5s = \frac{x^5 - 10x^3yy + 5xy^4}{z^5}$, debebit eſſe Z Functio rationalis harum expreſſionum $xx+yy$ & $x^5 - 10x^3yy + 5xy^4$. Curva igitur ſimpliciſſima, quæ, præter Circulum, quinque habeat Diametros, eſt Linea quinti ordinis, atque hac æquatione exprimetur $x^5 - 10x^3yy + 5xy^4 = a(xx+yy)^2 + b(xx+yy) + c$. Hæc ergo Curva, propter omnes Factores ſupremi membri reales, habebit quinque Aſymtotas ſuis interſectionibus pentagonum regulare, in cujus medio ſit Centrum C, formantes.

354. Ex his jam generaliter patet, Curvam æquatione $Z=0$, expreſſam, habituram eſſe n Diametros, quarum binæ proxime angulum $= \frac{\varpi}{n}$ comprehendant, ſi fuerit Z Functio ipſarum z & $cos.ns$, ſeu inter Coordinatas orthogonales, Functio quæcunque rationalis harum expreſſionum $xx+yy$ & $x^n - \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}x^{n-4}y^4 -$ &c. Seu æquatio hæc

$$0 = \alpha + \beta t + \gamma u + \delta tt + \varepsilon tu + \zeta uu + \eta t^3 + \theta ttu + \&c.$$

præbebit Curvam n Diametris præditam, ſi ponatur $t = xx+yy$

LIB. II. $\& u = x^n - \frac{n(n-1)}{1.\ 2} x^{n-2} y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} x^{n-4} y^4 - \&c.$

Hinc ergo Curvæ inveniri poſſunt, quæ tot, quot lubuerit, habeant Diametros ſe mutuo in angulis æqualibus in eodem puncto C interſecantes. Simul vero hæ æquationes in ſe complectuntur omnes omnino Curvas algebraïcas, quæ dato Diametrorum numero ſint præditæ.

TAB. XVII. Fig. 70. 355. Hujuſmodi Curvæ pluribus Diametris præditæ duplo plures habent partes inter ſe ſimiles & æquales. Sic Curva duabus Diametris prædita quatuor habet partes ſimiles & æquales, AE, BE, AF & BF. TAB. XVII. Fig. 71. Curva autem tribus Diametris prædita habet ſex partes ſimiles & æquales AE, GE, GB, FB, FH & AH. TAB. XVIII. Fig. 72. Atque Curva quatuor Diametris prædita octo habet partes ſimiles & æquales AE, AK, GE, GI, BI, BF, HF, & HK; ſimilique modo numerus partium æqualium ſemper duplo major eſt quam numerus Diametrorum. Quemadmodum autem ſupra vidimus dari Curvas, duas partes ſimiles habentes, quæ tamen Diametro careant, ita dabuntur quoque Curvæ plures partes ſimiles & æquales habentes, quæ tamen Diametris deſtituantur.

TAB. XVIII. Fig. 73. 356. Incipiamus a duabus partibus æqualibus ſibi e regione oppoſitis AME, BKF, quem quidem caſum ſupra jam tractavimus. Quod ſi enim Curva duas tantum habere debeat partes æquales, neceſſario ſibi oppoſitæ eſſe debent, quod clarius patebit, quando plures partes æquales contemplabimur. Ponamus ergo, ut ante, $CM = z$, & angulum $ACM = s$, ac manifeſtum eſt angulis s & $\pi + s$ eundem valorem ipſius z convenire oportere; ſumto enim angulo $ACM = \pi + s$, fiet $z = CK$: at eſſe debet $CK = CM$; quærenda ergo eſt expreſſio communis angulis s & $\pi + s$, cujuſmodi eſt $tang.\, s$; eſt enim $tang.\, s = tang.\,(\pi + s)$. Æquatio igitur $Z = 0$, erit pro tali Curva, qualem quærimus, ſi fuerit Z Functio ipſarum z & $tang.\, s$, ſeu Functio ipſarum $xx + yy$ & $\frac{x}{y}$. Ponamus $\frac{x}{y} = t$, eritque $xx + yy = yy(1 + tt)$.

Quare

Quare Z debebit esse Functio ipsarum t & $yy(1+tt)$, hoc est ipsarum t & yy: unde eædem æquationes resultant, quas supra invenimus. CAP. XV.

357. Quo autem fractiones, quibus tangentes laborant, evitemus, idem negotium per sinus & cosinus expedire poterimus. Cum enim sit & $\sin. 2s = \sin. 2(\pi + s)$ & $\cos. 2s = \cos. 2(\pi + s)$, quæsitum obtinebitur si Z capiatur Functio quæcunque rationalis trium harum formularum z, $\sin. 2s$ & $\cos. 2s$, seu ipsarum $xx+yy$, $2xy$, & $xx-yy$. Ubi notandum est, si expressionum $\sin. 2s$ & $\cos. 2s$ altera omittatur, Curvam insuper Diametrum esse habituram. Solutio ergo huc redibit ut Z capiatur Functio ipsarum xx, yy, & xy, rationalis; unde hujusmodi orietur æquatio

$$0 = \alpha + \beta xx + \gamma xy + \delta yy + \epsilon x^4 + \zeta x^3 y + \eta x^2 y^2 + \theta xy^3 + \iota y^4 + \&c.$$

Atque, si termini, in quibus non inest x, evanescant, tota æquatio dividi poterit per x & prodibit

$$0 = \beta x + \gamma y + \epsilon x^3 + \zeta xxy + \eta xy^2 + \theta y^3 + \kappa x^5 + \&c.$$

quæ sunt ambæ illæ æquationes quas supra invenimus.

358. Quæratur nunc Curva, quæ tres tantum habeat partes similes & æquales AM, BN, & DL. Hæc ergo ita erit comparata, ut eductis ex puncto medio C tribus rectis CM, CN, & CL in angulis æqualibus, eæ semper inter se futuræ sint æquales. Positis ergo angulo $ACM = s$, & recta $CM = z$; recta z per s ita definietur, ut his tribus angulis s, $\frac{2}{3}\pi + s$, & $\frac{4}{3}\pi + s$ idem valor ipsius z conveniat; est enim $MCN = NCL = \frac{2}{3}\pi$. Horum autem trium angulorum communes sunt hæ expressiones $\sin. 3s$ & $\cos. 3s$. Quare, si Z fuerit Functio rationalis harum trium quantitatum $xx+yy$; $3xxy - y^3$; & $x^3 - 3xyy$, æquatio $Z = 0$, dabit Curvas quæsitas omnes. Hujusmodi ergo orietur æquatio generalis TAB. XVIII. *Fig.* 74.

$0 =$

LIB. II.
$$0 = \alpha + \beta(xx+yy) + \gamma(3xxy - y^3) + \delta(x^3 - 3xyy) + \varepsilon(xx+yy)^2 + \zeta(xx+yy)(3xxy - y^3) + \eta(xx+yy)(x^3 - 3xyy) + \&c.$$

Lineæ igitur tertii ordinis hac proprietate præditæ continentur in hac æquatione

$$0 = \alpha + \beta xx + \beta yy + \delta x^3 + 3\gamma xxy - 3\delta xyy - \gamma y^3$$

TAB. XVIII. Fig. 73. 359. Si Curva quatuor habere debeat partes æquales AM, EN, BK, & FL, ita ut ex puncto medio C eductis quatuor rectis quibus vis CM, CN, CK & CL, ſub angulis æqualibus, eæ futuræ ſint æquales; ponatur angulus $ACM = s$ & recta $CM = z$; atque, ob angulos $MCN = NCK = KCL = 90° = \frac{1}{2}\pi$, recta z per angulum s ita debet exprimi, ut his angulis s, $\frac{1}{2}\pi + s$, $\varpi + s$; $\frac{3}{2}\pi + s$ idem reſpondeat valor. Hanc vero proprietatem habent expreſſiones $\mathit{ſin}.4s$ & $\mathit{coſ}.4s$: quare æquatio $Z = 0$, dabit Curvam quatuor ejuſmodi partibus æqualibus præditam, ſi fuerit Z Functio quæcunque rationalis harum trium quantitatum $xx + yy$; $4x^3y - 4xy^3$ & $x^4 - 6xxyy + y^4$. Hinc æquatio generalis pro iſtiuſmodi Curvis erit

$$0 = \alpha + \beta xx + \beta yy + \gamma x^4 + \delta x^3y + \varepsilon xxyy - \delta xy^3 + \gamma y^4 + \&c.$$

360. Simili modo apparet, ſi quæri debeat Curva Diametris deſtituta, quæ tamen quinque habeat partes æquales & ſimiles, in æquatione $Z = 0$, eſſe debere Z Functionem rationalem harum trium quantitatum

$$xx + yy;\ 5x^4y - 10x^2y^3 + y^5\ \&\ x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4;$$

atque, ſi numerus partium æqualium eſſe debeat $= n$, tum Z eſſe debet Functio rationalis harum trium $xx + yy$,

nx

$$n x^{n-1} y - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} x^{n-3} y^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5} x^{n-5} y^5 - \&c.,$$ CAP. XV.

&

$$x^n - \frac{n(n-1)}{1.\ 2} x^{n-2} y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} x^{n-4} y^4 - \&c..$$

Quod ſi alterutra poſteriorum expreſſionum non ingrediatur in æquationem, Curva habebit tot Diametros, quot numerus n continet unitates.

361. In duplici hac enumeratione Curvarum aliquot partes æquales habentium, quæ vel Diametris ſint præditæ vel iis careant, continentur omnino omnes Curvæ algebraïcæ, quæ quidem duas pluresve habeant partes ſimiles & æquales. Quod ut oſtendatur, habeat Curva continua duas partes OAa, OBb inter ſe ſimiles & æquales. Jungatur AB, ſuperque ea tanquam baſi conſtituatur triangulum iſoſcele ACB, cujus angulus C æqualis ſit angulo O. Jam, quia anguli OAC & OBC ſunt æquales, erunt quoque Curvæ partes CAa & CBb ſimiles & æquales: atque, ob legem continuitatis, ſi capiantur anguli BCD, DCE, &c., æquales ſinguli angulo ACB, & $CD = CE = CA = CB$, habebit Curva præterea ad has ſingulas rectas partes Dd, Ee, &c., ſimiles & æquales partibus Aa, Bb. Niſi ergo ratio anguli ACB ad $360°$ fuerit irrationalis, partium æqualium numerus erit finitus, contra autem infinitus, neque adeo in Lineas algebraïcas cadens. Semper ergo Curva iſta continetur in iis, quas ante inveſtigavimus, Diametris carentes. TAB. XVIII. Fig. 75.

362. Sin autem duæ partes ſimiles & æquales in plagas oppoſitas rectarum AO & BO cadant, ita ut ſit pars AOa ſimilis & æqualis parti OBb; tum utrinque ducantur rectæ AR, & BS, ut ſit $OAR = OBS, = \frac{1}{2}\ AOB$; eruntque rectæ AR & BS inter ſe parallelæ. Jungatur AB, & per punctum medium C agatur ipſis AR & BS parallela CV, erunt partes aA, bB reſpectu rectæ CV ſimiles & æquales. Niſi igitur ſit $ba = 0$, quia Arcui bB, a b ad a progrediendo, reſpondet ex altera parte Arcus ſimilis & æqualis aA; ita TAB. XIX. Fig. 76.