

numerus ternario superet minimum. Quo igitur hujusmodi C A P. obtineatur æquatio, simulque sit $(xx+yy)L^2 - 2(xx+yy)KM = aaKK$, multiplicantur illa æquatio per $2(xx+yy)K$, ut eliminari possit M , atque prodibit hæc æquatio generalis casui proposito satisfaciens

$$2(xx+yy)KK - 2(xx+yy)KL + (xx+yy)L^2 - aaKK - 2(xx+yy)KN = 0.$$

Membrum enim, in quo plurimæ insunt dimensiones, est $2(xx+yy)KK$, continetque $2n+8$ dimensiones ipsarum x & y ; atque membrum infimum est $2(xx+yy)KN$, & continet $2n+5$ dimensiones, uti natura rei postulat.

430. Quoniam ergo neque summum neque imum membrum evanescere potest, ponamus, ad Curvam simplicissimam inveniendam, $n=0$; sitque $N=b^3$, $K=x(xx+yy)$, & $L=0$, atque prodibit hæc æquatio

$$2(xx+yy)^3x^2 - aaxx(xx+yy)^2 - 2b^3x(xx+yy)^2 = 0,$$

quæ per $2x(xx+yy)^2$ divisa præbet hanc

$$x(xx+yy) - \frac{1}{2}aax - b^3 = 0,$$

quæ pertinet ad ordinem tertium. Sin autem non sit $L=0$, sed $L=2c(xx+yy)$, prodibit æquatio ordinis quarti

$$xx(xx+yy) - 2cx(xx+yy) + 2cc(xx+yy) - \frac{1}{2}aaxx - b^3x = 0,$$

feu

$$xx(xx+yy) + (2c - x)^2(xx+yy) = aaxx + 2b^3x.$$

Simili autem modo ex altioribus ordinibus plurimæ aliæ Curvæ quæstioni satisfacientes eruentur.

431. Deinde, etiam Curvæ inveniri poterunt ex in quibus sit $p^4 + q^4 + r^4$ quantitas constans. Cum enim sit $p^4 + q^4 + r^4 = P^4 - 4P^2Q + 2QQ + 4PR$, poni debet $P^4 - 4P^2Q + 2QQ + 4PR = c^4$.

Erit ergo

$$z^4(L^4 - 4KL^2M + 2K^2M^2 + 4K^2LN) = c^4K^4:$$

ideoque

$$4K^2LNz^4 = c^4K^4 - z^4(L^4 - 4KL^2M + 2K^2M^2),$$

Euleri *Introduct. in Anal. infin. Tom. II.* G g unde

LIB. II. unde valor ipsius N in æquatione $K - L + M - N = 0$, substitutus dabit æquationem generalem pro Curvis huic conditioni satisfacientibus.

432. Poterit autem simul & huic conditioni $p^4 + q^4 + r^4 = c^4$, & præcedenti $p^2 + q^2 + r^2 = a^2$ satisfieri. Per hanc enim esse debet $zzL^2 - zzzKM = aaKK$; unde fit $zzzKM = zzL^2 - aaKK$.

Deinde, cum sit

$$\begin{aligned} 4K^2LNz^4 &= c^4K^4 - L^4z^4 + 4KL^2Mz^4 - 2K^2M^2z^4 \\ &\quad \text{erit} \\ 4K^2LNz^4 &= c^4K^4 + L^4z^4 - 2aaK^2L^2z^2 - 2K^2M^2z^4 \\ &\quad \text{et} \\ 4K^2LMz^4 &= 2KL^3z^4 - 2aaK^3Lzz. \end{aligned}$$

Substituantur hi valores loco M & N in æquatione $K - L + M - N = 0$, seu $4K^2Lz^4 - 4K^2L^2z^4 + 4K^2LMz^4 - 4K^2LNz^4 = 0$, atque prodibit hæc æquatio pro Curva

$$\begin{aligned} 4K^3Lz^4 - 4K^2L^2z^4 + 2KL^3z^4 - 2a^2K^3Lzz - c^4K^4 - \\ L^4z^4 + 2a^2K^2L^2zz + 2K^2M^2z^4 &= 0. \end{aligned}$$

At, ob

$$\begin{aligned} KMzz &= \frac{1}{2}L^2zz - \frac{1}{2}aaKK \\ &\quad \text{erit} \end{aligned}$$

$$2K^2M^2z^4 = \frac{1}{2}L^4z^4 - aaK^2L^2zz + \frac{1}{2}a^4K^4,$$

ideoque pro Curvis quæsitis habebitur hæc æquatio generalis

$$\begin{aligned} 8K^3Lz^4 - 8K^2L^2z^4 + 4KL^3z^4 - 4a^2K^3Lzz - 2c^4K^4 - \\ L^4z^4 + 2a^2K^2L^2zz + a^4K^4 &= 0. \end{aligned}$$

433. Quia K debet esse Functio homogenea ipsarum x & y una dimensione altior quam L , Curva simplicissima in qua tres intersectiones exhibeant simul $p^2 + q^2 + r^2 = a^2$, & $p^4 + q^4 + r^4 = c^4$ prodibit, si ponatur $K = zz$, & $L = bx$; erit ergo

$$8bxz^6 - 8bbxxz^4 + 4b^3x^3z^2 - 4a^2bxz^4 - 2c^4z^4 - b^4x^4 + \frac{C A P.}{XVII.} \\ 2a^2b^2x^2z^2 + a^4z^4 = 0,$$

quæ, ob $zz = xx + yy$, est rationalis, præbetque Lineam ordinis septimi, cuius C est punctum quadruplex. Alia autem Linea septimi ordinis satisfaciens obtinebitur, si ponatur $K = x$, & $L = b$; erit enim

$$8bx^3z^4 - 8bbxxz^4 + 4b^3xz^4 - 4aabx^3zz - 2c^4x^4 - b^4z^4 + \\ 2aabbbxxzz + a^4x^4 = 0,$$

seu

$$z^4 = \frac{4aabx^3zz - 2aabbbxxzz + 2c^4x^4 - a^4x^4}{8bx^3 - 8bbxx + 4b^3x - b^4}.$$

Unde fit

$$zz = \frac{2aabx^3 - aabbxx + xx\sqrt{(2bx-bb)(2c^4(bb-2bx+4xx)-2a^4(bb-2bx+2xx))}}{b(2x-b)(4xx-2bx+bb)}.$$

434. Jam ulterius progreedi liceret ad Curvas, quæ a rectis per punctum C ductis in quatuor punctis intersecantur; atque ex iis illæ inveniri possent, quæ datis proprietatibus sint prædictæ. Verum, si ad præcepta in præcedentibus tradita attendamus, nulla prorsus supererit difficultas, omniaque, quæ in hoc genere desiderari poterunt, sine ullo fere labore vel expedientur, vel, nisi quæstio solutionem genuinam admittat, hoc ipsum statim cognoscetur. Quam ob rem huic materia amplius non immorabor, ad aliud argumentum ad cognitionem Linearum curvarum pertinens progressurus.

LIB. II.

C A P U T X V I I I .

De Similitudine & Affinitate Linearum curvarum.

435. IN omni æquatione pro Linea curva, præter Coordinatas orthogonales x & y , inesse debent quantitates constantes, vel una vel plures, uti a , b , c , &c.; quibus Lineæ constantes designantur, & quæ cum variabilibus x & y ubique eundem Linearum dimensionum numerum constituent: Si enim in uno termino extet productum ex n Lineis in se invicem multiplicatis, necesse est ut in singulis reliquis terminis totidein Lineæ in se invicem multiplicentur, quoniam alias quantitates heterogeneæ inter se comparari deberent, quod fieri non potest. Quocirca in omni æquatione pro Linea curva Lineæ constantes a , b , c , &c., cum variabilibus x & y ubique eundem dimensionum numerum constituent, nisi forte Linea quæpiam constans unitate vel alio numero absoluto exprimatur. Hoc igitur notato, si nullæ Lineæ constantes in æquatione inessent, tum variabiles x & y solæ ubique eundem dimensionum numerum adimplerent, idcoque Functionem homogeneam constituerent. Supra autem jam vidimus hujusmodi æquationem ad Lineam curvam non pertinere, sed aliquot rectas se invicem in eodem puncto intersecantes exhibere.

436. Contemplemus igitur æquationem in qua, præter binas variabiles x & y , unica insit Linea constans a ; ita ut tres Lineæ a , x , & y ubique in æquatione eundem dimensionum numerum constituant. Hujusmodi ergo æquatio, prout Lineæ constanti a alii atque alii valores tribuantur, infinitas producit Lineas curvas, quæ tantum quantitate a se invicem discrepant, ceterum vero omnino similes inter se sint futuræ. Omnes ergo Lineæ curvæ, quæ hoc modo in eadem æquatione comprehenduntur, merito ad idem genus referuntur atque inter se similes

similes esse censentur, neque aliud in illis deprehendetur dif- C A P.
crimen, nisi quod in Circulis diversæ magnitudinis inesse in- XVIII
telligitur.

437. Quo hæc similitudo melius percipiatur, consideremus æquationem determinatam, præter variables x & y , unicam Lineam constantem a , quam *Parametrum* vocare liceat, continentem, hanc

$$y^3 - 2x^3 + ayy - aax + 2ay = 0.$$

Sit AC valor Parametri a ; atque, existente $AC = a$, sit T A B.
 AMB Linea curva hac æquatione contenta, sumta recta AB X X I.
pro Axe, vocatisque Coordinatis $AP = x$ & $PM = y$. Fig. 88.
Tribuatur jam Parametro a quicunque alias valor $ac = a$,
sitque amb Linea curva, quam nunc illa æquatio præbet;
eruntque hæc Lineæ curvæ AMB & amb inter se similes. T A B.
Quod si enim maneat $AC = a$, $AP = x$, $PM = y$, at- X X I.
que sit $ac = \frac{1}{n} AC = \frac{a}{n}$; tum vero capiatur $ap =$ Fig. 89.

$\frac{1}{n} AP = \frac{x}{n}$, erit $pm = \frac{1}{n} PM = \frac{y}{n}$; namque si
in illa æquatione, loco a , x , & y , scribantur respective
 $\frac{a}{n}$, $\frac{x}{n}$, & $\frac{y}{n}$, ob omnes terminos per n^3 divisos, eadem
ipsa resultabit æquatio.

438. Curvæ ergo similes hanc habebunt proprietatem, ex
qua similitudinis natura eo luculentius apparebit, ut sumitis
Abscissis AP , ap in ratione Parametrorum AC & ac Applicatae PM & pm simul eandem habiture sint rationem: scilicet, si sumatur $AP: ap = AC: ac$, tum quoque erit
 $PM: pm = AC: ac$. Cum ergo sit $AP: PM = ap: pm$,
hæc Curvæ in sensu geometrico inter se erunt similes, atque,
quantitate excepta, iisdem prorsus affectionibus gaudebunt.
Sumitis nimirum Abscissis AP , ap homologis seu Parametris
 AC & ac proportionalibus, non solum Applicatae PM &