

est $= 2^{k+2}h$, quum in numero 3 duae exceptiones sese compensent.

292. Discriptiones numerorum (vt formarum binariarum supra) in tria quadrata a representationibus per formam $xx + yy + zz$ ita distinguimus, vt in illis ad solam quadratorum magnitudinem, in his vero insuper ad ipsorum ordinem radicumque signa respiciamus, adeoque representationes $x = a$, $y = b$, $z = c$, et $x = a'$, $y = b'$, $z = c'$ pro diuersis habeamus nisi simul $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$; discriptiones autem in $aa + bb + cc$ et in $a'a' + b'b' + c'c'$ pro vna, si nullo ordinis respectu habitu haec quadrata illis aequalia sunt. Hinc patet,

I. Discriptionem numeri M in quadrata $aa + bb + cc$ aequipollere 48 representationibus, si nullum sit $= 0$ omniaque inaequalia; 24 autem, si *vel* vnum $= 0$ reliqua inaequalia, *vel* nullum $= 0$ atque duo inter se aequalia. Si vero in discriptione numeri dati in tria quadrata duo ex his sunt $= 0$, aut vnum $= 0$ reliqua aequalia, aut omnia aequalia, representationibus 6, aut 8, aut 12 aequivalens erit; sed haec evenire nequeunt nisi in casibus singularibus vbi $M = 1$ aut 2 aut 3 resp., siquidem representationes esse debent propriae. His exclusis supponamus, multitudinem omnium discriptionum numeri M in terna quadrata (diuisoris communis expertia) esse E , atque inter has reperiri e in quibus vnum quadratum 0, et e' in quibus duo quadrata aequalia; illae etiam tamquam discriptiones in bina quadrata, hae tamquam discriptiones

nes in quadratum et quadratum duplum spectari possunt. Tunc multitudo omnium repraesentationum propriarum numeri M per $xx + yy + zz$ erit $= 24(e + e') + 48(E - e - e') = 48E - 24(e + e')$. At e theoria formarum binariarum facile deducitur, e fore vel $= 0$ vel $= 2^{k-1}$, prout $- 1$ sit non-residuum vel residuum quadraticum ipsius M , nec non $e' = 0$ vel $= 2^{k-1}$, prout $- 2$ non-residuum vel residuum ipsius M , denotante μ multitudinem factorum primorum (impairum) ipsius M (v. art. 182; expositionem vberi-rem hic supprimimus). Hinc facile colligitur, fore $E = 2^{k-2}k$, si tum $- 1$ tum $- 2$ sit N.R. ipsius M ; $E = 2^{k-2}(k+2)$, si uterque numerus sit residuum; denique $E = 2^{k-2}(k+1)$, si alter residuum sit alter non-residuum. In casibus exclusis $M = 1$ et $M = 2$, haec formula praaberet $E = \frac{3}{4}$, quum esse debeat $E = 1$; pro $M = 3$ autem recte prouenit $E = 1$, exceptionibus se mutuo compensantibus.

Si itaque M est numerus primus, fit $\mu = 1$, adeoque $E = \frac{1}{2}(k+2)$ quando $M \equiv 1 \pmod{8}$; $E = \frac{1}{2}(k+1)$ quando $M \equiv 3$ aut $\equiv 5$. Haecce theorematia specialia ab ill. Le Gendre per inductionem dedecta et in commentatione egregia iam saepius laudata *Hist. de l'Ac. de Paris* 1785 p. 530 *sqq.* prolatata fuerunt, etsi sub forma aliquantum diuersa, cuius rei ratio impri-mis in eo est sita, quod aequivalentiam propriam ab impropria non distinxit, et proin classes op-positas commiscuit.

II. Ad inuentionem omnium discriptionum numeri M in terna quadrata (sine diu. comm.)

non opus est, omnes repraesentationes proprias omnium formarum ϕ , ϕ' , ϕ'' eruere. Primo enim facile confirmatur, omnes (48) repraesentationes formae ϕ ad eundem valorem expr. \checkmark — (p , $-q$, r) pertinentes (statuendo $\phi = (p, q, r)$) discriptionem eandem numeri M praebere, adeoque sufficere, si vna ex illis habeatur, siue quod eodem redit, si tantummodo omnes diuersae discriptiones *) formae ϕ in terna quadrata conscriptae sint, et perinde de reliquis ϕ' , ϕ'' etc. Dein si ϕ est e classe non ancipite, eam formam quae e classe opposita electa est omnino praeterire licebit, siue e binis classibus oppositis unicam considerare sufficit. Quum enim prorsus arbitrarium sit, quaenam forma e singulis classibus eligatur, supponamus e classe opposita ei in qua est ϕ eligi formam ipsi ϕ oppositam, quae sit $= \phi'$. Tunc nullo negotio perspicitur, si discriptiones propriae formae ϕ indefinite exhibentur per $(gt + hu)^2 + (g't + h'u)^2 + (g''t + h''u)^2$, omnes discriptiones formae ϕ' expressum iri per $(gt - hu)^2 + (g't - h'u)^2 + (g''t - h''u)^2$, nec non ex his easdem discriptiones numeri M deriuari vt ex illis. Denique pro eo casu vbi ϕ est forma e classe ancipite, attamen neque e classe principali neque formae $(2, 0, \frac{1}{2}M)$ aut $(2, 1, \frac{1}{2}(M + 1))$ aequivalens (prout M par aut impar), e valoribus expr. \checkmark — (p , $-q$, r) semissem omittere licet; sed breuitatis caussa hocce compendium fusius hic non explicamus. — Ceterum iisdem compendiis etiam vti possumus,

*) Semper subintelligendum propriae, si hanc expressionem a repraesentationibus ad discriptiones transferre lubet.