prie primitiuae pro tali det. non dentur, nullae omnino formae prim. neg. in hoc casu dantur, quae sint residua ipsius M.

II. Quando $M \equiv 3$ (mod. 4), prorsus eadem ratiocinia valent ea sola exceptione vt in hoc casu ordo *improprie* primitiuus negatiuus exstet, in quo characteres P vel possibiles erunt, vel impossibiles, prout $M \equiv 3$ vel $\equiv 7$ (mod. 8), V. art. 264, III. In casu igitur priori in hoc ordine genus dabitur, cuius character sit Ω, vnde 1 erit numerus characteristicus omnium formarum in ipso contentarum; in casu posteriori nullae omnino formae negatiuae hac proprietate praeditae dari poterunt.

III. Quando $M \equiv 1$ (mod. 4), Ω nondum est character completus, sed insuper accedere debet relatio ad numerum 4; patet autem, Ω necessario in characterem formae cuius num. char. sit 1 ingredi debere, et vice versa, formam quamuis, cuius character sit vel Ω; 1, 4, vel Ω; 3, 4, habere numerum char. 1. Iam Ω; 1, 4 manifesto est character generis principalis, qui ad P pertinet adeoque in ordine pr. prim. negatiuo impossibilis est; ex eadem ratione Ω; 3, 4 ad Q pertinebit (art. 263), vnde ipsi in ordine pr. prim. negatiuo genus respondebit, cuius formae omnes habebunt num. char. 1. Ordo improprie primitiuus in hoc casu, vt in sequente, non datur.

IV. Quando $M \equiv 2$ (mod. 4), ad Ω accedere debet relatio ad 8, quo fiat character completus, puta vel 1 *et* 3, 8, vel 5 *et* 7, 8, quando $M \equiv 2$ (mod. 8); et vel 1 *et* 7, 8, vel 3 *et*

5, 8, quando $M \equiv 6$ (mod. 8). Pro casu priori character Ω; 1 *et* 3, 8 manifesto pertinet ad P, adeoque Ω; 5 *et* 7, 8, ad Q, vnde ipsi respondebit genus pr. prim. neg.; similique ratione pro posteriori vnum genus in ordine pr. prim. negatiuo dabitur, cuius formae proprietate praescripta praeditae sint, puta cuius character Ω; 3 *et* 5, 8.

Ex his colligitur, formas primitiuas negatiuas det. — M quarum numerus characteristicus sit 1 dari, quando M alicui numerorum 1, 2, 3, 5, 6 secundum modulum 8 congruus sit et quidem in vnico semper genere, quod improprium erit quando $M \equiv 3$; tales formas omnino non dari, quando $M \equiv 0$, 4 vel 7 (mod. 8). Ceterum manifestum est, si $(-a, -b, -c)$ sit sit forma primitiua negatiua cuius num. char. + 1, (a, b, c) esse formam primitiuam positiuam cuius num. char. — 1; hinc perspicuum est, in quinque casibus prioribus (quando $M \equiv 1, 2, 3; 5, 6$) dari genus vnum primitiuum positiuum cuius formae habeant num. char. — 1, et quidem, pro $M \equiv 3$, *improprium*, in tribus reliquis vero (quando $M \equiv 0, 4, 7$) tales formas positiuas omnino dari non posse.

289. Circa repraesentationes proprias formarum binariarum per ternariam $xx + yy + zz = f$, e theoria generali in art. 282 tradita colliguntur haec:

I. Forma binaria φ per f proprie repraesentari nequit, nisi fuerit forma positiua primitiua, atque — 1 (i. e. det. formae f) ipsius numerus characteristicus. Quare pro determinante positiuo, nec non pro negatiuo — M quando M est vel per 4 diuisibilis vel formae $8n + 7$, nullae formae binariae per f proprie repraesentabiles dantur.

II. Si vero $\varphi = (p, q, r)$ est forma positiua primitiua determinantis $-M$, atque -1 numerus characteristicus formae Φ, adeoque etiam oppositae $(p, -q, r)$: dabuntur repraesentationes propriae formae φ per f ad quemlibet valorem datum expr. $\sqrt{-(p, -q, r)}$ pertinentes. Scilicet omnes coëfficientes formae ternariae g det. -1 (art. 283) necessario fient integri, g vero forma definita, adeoque ipsi f certo aequiualens (art. 285. I).

III. Multitudo omnium repraesentationum ad eundem valorem expr. $\sqrt{-(p, -q, r)}$ pertinentium in omnibus casibus, praeter $M = 1$ et $M = 2$, per art. 283, III aeque magna est ac multitudo transformationum formae f in g, adeoque, per art. 285, $= 48$; ibinde patet, si vna repraesentatio ad valorem datum pertinens habeatur, 47 reliquas inde deriuari, valores ipsorum x, y, z, omnibus quibus fieri potest modis tum inter se permutando tum signis oppositis afficiendo; quare omnes 48 repraesentationes *vnicam* decompositionem formae φ in tria quadrata producunt, si ad quadrata ipsa tantum, neque ad ipsorum ordinem radicumue signa respicitur.

IV. Posita multitudine omnium numerorum primorum imparium diuersorum ipsum M metientium $= \mu$, haud difficile ex art. 233 concluditur, multitudinem omnium valorum diuersorum expressionis $\sqrt{-(p, -q, r)}$ (mod. M) fore $= 2^{\mu}$, e quibus per art. 283 semissem tantum considerare oportet (quando $M > 2$). Qua-