

colligitur. Habebit autem infinitas Asymptotas inter se parallelas. Pari modo describi poterit *Linea Secantium* ex æquatione  $y = A \sec x$ , seu  $x = \sec A \cdot y = \frac{1}{\cos y}$ , quæ etiam infinitos ramos habet in infinitum excurrentes. Maxime vero ex hoc Curvarum genere innotuit **CYCLOIS**, seu *Trochois*, quæ describitur a puncto in peripheria Circuli super linea recta rotando progradientis, cuius æquatio inter Coordinatas orthogonales est  $y = \sqrt{1 - xx} + A \cdot \cos x$ . Curva hæc, cum ob descriptionis facilitatem tum ob plurimas, quibus gaudet, insignes proprietates, maxime est notata digna. Quoniam autem pleraque sine Analyſi infinitorum explicari nequeunt, hic tantum præcipuas, quæ ex descriptione immediate fluunt, breviter perpendamus.

522. Rotetur ergo Circulus *ACB* super recta *EA*; atque, ut investigatio latius pateat, non punctum Peripheriarum *B* sed punctum Diametri productæ *D* quodcumque describat Lineam curvam *Dd*. Sit hujus Circuli radius  $CA = CB = a$ , distantia  $CD = b$ , atque in hoc quidem situ punctum *D* locum obtineat summum. Pervenerit inter rotandum Circulus in situm  $aQbR$ ; ac, posito spatio  $AQ = z$ , erit Arcus  $aQ = z$ , qui divisus per radium  $a$  dabit angulum  $acQ = \frac{z}{a}$ , & punctum describens erit in *d*, ut sit  $cd = b$ , angulus  $dcQ = \pi - \frac{z}{a}$ ; & *d* erit punctum in Curva quæsita. Datur ex *d* primum in rectam *AQ* normalis *dp*, tum in rectam *QR* normalis *dn*; erit  $dn = b \cdot \sin \frac{z}{a}$ , &  $cn = -b \cdot \cos \frac{z}{a}$ : ergo  $Qn = dp = a + b \cdot \cos \frac{z}{a}$ . Producatur *dn* donec rectæ *AD* occurrat in *P*; ac vocentur Coordinatae  $DP = x$ ,  $Pd = y$ ; erit  $x = b + cn$ ; seu  $x = b - b \cdot \cos \frac{z}{a}$ ; &  $y = AQ + dn = z + b \cdot \sin \frac{z}{a}$ . Cum igitur

Euleri *Introduct. in Anal. infin. Tom. II.*

P p fit

CAP.  
XXI.

TAB.  
XXV.  
Fig. 105.

L I B . II. sit  $b \cdot \cos. \frac{z}{a} = b - x$ , erit  $b \cdot \sin. \frac{z}{a} = \sqrt{(2bx - xx)}$  &  
 $z = aA \cdot \cos. (1 - \frac{x}{b}) = aA \cdot \sin. \frac{\sqrt{(2bx - xx)}}{b}$ ; quibus  
 valoribus substitutis, erit  $y = \sqrt{(2bx - xx)} + aA \cdot \sin. \frac{\sqrt{(2bx - xx)}}{b}$ .  
 Vel, si Abscissæ in Axe  $AD$  a Centro computentur voceturque  $b - x = t$ , erit  $\sqrt{(2bx - xx)} = \sqrt{(bb - tt)}$ , &  
 inter  $t$  &  $y$  habebitur æquatio ista

$$y = \sqrt{(bb - tt)} + aA \cdot \cos. \frac{t}{b},$$

quæ æquatio dat Cycloidem ordinariam, si fuerit  $b = a$ ; sin autem sit vel  $b$  major quam  $a$ , vel  $b$  minor quam  $a$ , Curva vocatur Cyclois vel *curtata* vel *elongata*. Semper autem erit  $y$  Functio infinitiplex ipsius  $x$ , vel  $t$ ; seu, quilibet recta basi  $AQ$  parallela Curvam in infinitis punctis secabit, nisi ejus distantia  $x$  vel  $t$  fuerit tanta, ut  $\sqrt{(2bx - xx)}$  vel  $\sqrt{(bb - tt)}$  fiat imaginaria quantitas.

T A B . 523. Inter Curvas hujus generis, quæ imprimis sunt cognitæ, referri debent *Epicycloides* & *Hypocycloides*, quæ oriuntur si Fig. 106. Circulus  $ACB$  super Peripheria alterius Circuli  $OAQ$  rotatur, intereaque punctum quodpiam  $D$ , vel extra vel intra Circulum mobilem sumtum, Curvam  $Dd$  describit. Ponatur Circuli immoti radius  $OA = c$ , radius Circuli mobilis  $CA = CB = a$ , & distantia puncti descriptoris  $CD = b$ ; sumatur autem recta  $OD$  pro Axe Curvæ quasitæ  $Dd$ . A situ hoc initiali, quo puncta  $O, C, D$  in directum jacent, processerit Circulus mobilis in situm  $QeR$ , descripto Arcu  $AQ = z$ , ita ut sit angulus  $AOQ = \frac{z}{c}$ . Erit ergo Arcus  $Qa = AQ = z$ ; hincque angulus  $acQ = \frac{z}{a} = Rcd$ : &, sumta recta  $cd = CD = b$ , erit  $d$  punctum in Curva  $Dd$ . Ex eo in Axem demittatur perpendicularum  $dP$ ; itemque ex  $c$  perpendiculari-

C A P.  
XXI.

perpendiculum  $cm$  &  $cn$  parallela Axi  $OD$ . Ergo, ob  $\tan$ -gulum  $Rcn = AOQ = \frac{z}{c}$ , erit angulus  $d\,cn = \frac{z}{c} + \frac{z}{a} = \frac{(a+c)z}{ac}$ . Unde obtinetur  $dn = b \cdot \sin. \frac{(a+c)z}{ac}$ , &  $cn = b \cdot \cos. \frac{(a+c)z}{ac}$ . Deinde, ob  $OC = Oc = a + c$ , erit  $cm = (a + c) \cdot \sin. \frac{z}{c}$ , &  $Om = (a + c) \cdot \cos. \frac{z}{c}$ . Vocatis ergo Coordinatis  $OP = x$ , &  $Pd = y$ , erit  $x = (a + c) \cdot \cos. \frac{z}{c} + b \cdot \cos. \frac{(a+c)z}{ac}$ , &  $y = (a + c) \cdot \sin. \frac{z}{c} + b \cdot \sin. \frac{(a+c)z}{ac}$ . Hinc patet, si  $\frac{a+c}{a}$  fuerit numerus rationalis, tum ob commensurabilitatem angulorum  $\frac{z}{c}$  &  $\frac{(a+c)z}{ac}$ , ipsam incognitam  $z$  eliminari, ideoque æquationem algebraicam inter  $x$  &  $y$  inveniri posse. Reliquis casibus Curva hoc modo descripta erit transcendens.

Ceterum hic notandum est, si sumatur  $a$  negativum, tum Hypocycloidem esse prodituram, Circulo mobili intra Circulum immobilem cadente. Vulgo quidem  $b$  statuitur Radio  $a$  æqualis; sive Epicycloides & Hypocycloides propriæ sic dictæ resultant. Hic igitur inventæ Curvæ latius patent; &, quia æquationes non sunt difficiliores, hanc conditionem adjicere vîsum est. Si quadrata  $xx$  &  $yy$  addantur, erit  $xx + yy = (a + c)^2 + b^2 + 2b(a + c) \cdot \cos. \frac{z}{a}$ , cuius æquationis ope eliminatio ipsius  $z$  eo facilius expedietur, quoties quidem quantitates  $a$  &  $c$  fuerint commensurabiles.

524. Præter casus, quibus amborum Circulorum radii  $a$  &  $c$  sunt inter se commensurabiles, Curvæque fiunt algebraicæ, notari meretur iste quo  $b = -a - c$ ; seu, quo punctum Curvæ  $D$  in Centrum Circuli immobilis  $O$  incidit. Sit igitur  $b = -a - c$ ; eritque  $xx + yy = 2(a + c)^2(1 - \cos. \frac{z}{a})$

LIB. II.  $= 4(a+c)^2(\cos. \frac{z}{2a})^2$ ; unde fit  $\cos. \frac{z}{2a} = \frac{\sqrt{(xx+yy)}}{2(a+c)}$ . Deinde, cum sit  $x = (a+c)(\cos. \frac{z}{c} - \cos. \frac{(a+c)z}{ac})$  &  $y = (a+c)(\sin. \frac{z}{c} - \sin. \frac{(a+c)z}{ac})$ , erit  $\frac{x}{y} = -\tan. \frac{(2a+c)z}{2ac}$  &  $\sin. \frac{(2a+c)z}{2ac} = \frac{x}{\sqrt{(xx+yy)}}$ ; atque  $\cos. \frac{(2a+c)z}{2ac} = \frac{-y}{\sqrt{(xx+yy)}}$ . Quare, cum sit  $\sqrt{(xx+yy)} = 2(a+c)\cos. \frac{z}{2a}$ , fit  $x = 2(a+c).\cos. \frac{z}{2a}.\sin. \frac{(2a+c)z}{2ac}$ , &  $y = -2(a+c).\cos. \frac{z}{2a}.\cos. \frac{(2a+c)z}{2ac}$ . Sit, exempli gratia,  $c = 2a$ ; erit  $x = 6a.\cos. \frac{z}{2a}.\sin. \frac{z}{a}$ , &  $y = -6a.\cos. \frac{z}{2a}.\cos. \frac{z}{a}$ , &  $\sqrt{(xx+yy)} = 6a.\cos. \frac{z}{2a}$ . Ponamus  $\cos. \frac{z}{2a} = q$ , erit  $\sin. \frac{z}{2a} = \sqrt{(1-qq)}$ , &  $\sin. \frac{z}{a} = 2q\sqrt{(1-qq)}$ , atque  $\cos. \frac{z}{a} = 2qq-1$ : unde fit  $q = \frac{\sqrt{(xx+yy)}}{6a}$ , &  $y = -6aq(2qq-1) = (1-2qq)\sqrt{(xx+yy)} = (1-\frac{xx-yy}{18aa})\sqrt{(xx+yy)}$ ; seu,  $18aay = (18aa-xx-yy)\sqrt{(xx+yy)}$ . Ponatur  $18aa=ff$ ; &, sumis quadratis, habebitur ista æquatio sexti ordinis  $(xx+yy)^3 - 2ff(xx+yy)^2 + f^4xx = 0$ . Quidam vero hic nobis est propositum non Curvas algebraicas sed transcendentes contemplari, his missis ad ejusmodi Curvas progrediamur, quarum construetio simul tam Logarithmos quam Arcus circulares requirat.

ΓΑΒ.  
XXVI.

Fig. 107. 525. Supra vero jam ejusmodi naeti sumus Curvam ex æquatione  $2y = x + \sqrt{-1} + x - \sqrt{-1}$ , quam transmutavimus in hanc  $y = \cos. A. lx$ . Hec vero ulterius abit in A.  $\cos. y = lx$ , &  $x = e^{A.\cos.y}$ . Sumta ergo recta AP pro Axe, in eoque A pro initio Absciſsarum, primo patet ultra A in reione

gione Abscissarum negativarum Curvæ nullam dari portionem continuam , Axis autem  $AP$  a Curva in infinitis punctis  $D$  intersecabitur , quorum punctorum ab  $A$  distantia progressio-

C A P.  
XXI.

nem geometricam constituent , erit scilicet  $AD = e^{\frac{\pi}{2}}$  ;

$AD^1 = e^{\frac{3\pi}{2}}$  ;  $AD^2 = e^{\frac{5\pi}{2}}$  ;  $AD^3 = e^{\frac{7\pi}{2}}$  ; &c. , tum vero dabuntur infinitæ intersectiones ad  $A$  proprius accedentes ,

$AD^{-1} = e^{-\frac{\pi}{2}}$  ,  $AD^{-2} = e^{-\frac{3\pi}{2}}$  ,  $AD^{-3} = e^{-\frac{5\pi}{2}}$  &c.

Deinde hæc Curva utrinque ad Axem excurret ad distantias  $AB = AC = 1$  , ibique rectas Axi parallelas tanget in infinitis punctis  $E$  &  $F$  , quorum distantia a  $B$  &  $C$  pariter progressionem geometricam constituent. Infinitis ergo flexibus Curva ad rectam  $BC$  accedit , atque tandem cum ea prorsus confundetur. Singularis ergo hujus Curvæ proprietas in hoc consistit , quod non recta infinita sed finita  $BC$  Curvæ sit Asymtota , quo ipso hujus Curvæ indoles ab algebraicis maxime distinguitur.

526. Ad Curvas transcendentes , quarum constructio angulos , vel solos vel cum Logarithmis conjunctos , requirit , re-  
ferri quoque debent innumerabiles SPIRALIUM species . TAB.  
Fig. 108

Respiciunt autem Spirales punctum quodpiam fixum  $C$  tanquam Centrum , circa quod plerumque infinitis spiris circumducuntur. Natura harum Curvarum commodissime explicatur per æquationem inter cuiusque Curvæ puncti  $M$  a Centro  $C$  distantiam  $CM$  & angulum  $ACM$  , quem hæc recta  $CM$  cum recta positione data  $CA$  constituit. Sit ergo angulus  $ACM = s$  ; seu , sit  $s$  Arcus Circuli radio = 1 descripti , qui sit anguli  $ACM$  mensura , ac ponatur recta  $CM = z$ . Quod , si nunc detur æquatio quæcumque inter variabiles  $s$  &  $z$  , Curva resultabit spiralis. Cum enim angulus  $ACM$  , præter  $s$  , infinitis modis exprimi queat ; quoniam anguli  $2\pi + s$  ,  $4\pi + s$  ,  $6\pi + s$  , &c. , item  $-2\pi + s$  ,  $-4\pi + s$  , &c. , eandem positionem rectæ  $CM$  exhibent , his valoribus loco  $s$