radices aequationum n^{ti} gradus exprimi, puta *sinus* per radices huius (I)

$$x^n - \tfrac{1}{4}nx^{n-2} + \tfrac{1}{16}\,\frac{n.n-3}{1.2}\,x^{n-4} - \tfrac{1}{64}\,\frac{n.n-4.n-5}{1.\;2.\;3}\,x^{n-6} + \text{etc.} \pm \frac{1}{2^{n-1}}\,nx = 0$$

cosinus per radices huius (II)

$$x^n - \tfrac{1}{4}nx^{n-2} + \tfrac{1}{16}\,\frac{n.n-3}{1.\;2}\,x^{n-4} - \tfrac{1}{64}\,\frac{n.n-4.n-5}{1.\;2.\;3}\,x^{n-6} + \text{etc.} \pm \frac{1}{2^{n-1}}\,nx - 1 = 0$$

denique *tangentes* per radices huius (III)

$$x^n - \frac{n.n-1}{1.\;2}\,x^{n-2} + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.\;2.\;3.\;4}\,x^{n-4} - \text{etc.} \pm nx = 0$$

Hae aequationes (quae generaliter pro quouis valore impari ipsius n valent, II vero pro pari quoque), ponendo $n = 2m + 1$, facile ad gradum m^{tum} deprimuntur; scilicet I et III, diuidendo partem a laeua per x et substituendo y pro xx. Aequatio II autem manifesto radicem $x = 1$ ($= \cos 0$) implicat, et e reliquis binae semper aequales sunt ($\cos\frac{P}{n} = \cos\frac{(n-1)P}{n}$, $\cos\frac{2P}{n} = \cos\frac{(n-2)P}{n}$ etc.); quare ipsius pars a laeua per $x - 1$ diuisibilis, quotiensque quadratum erit, cuius radicem quadratam extrahendo, aequatio II reducitur ad hanc

$$x^m + \tfrac{1}{2}x^{m-1} - \tfrac{1}{4}(m-1)\,x^{m-2} - \tfrac{1}{8}(m-2)\,x^{m-3} + \tfrac{1}{16}\,\frac{m-2.m-3}{1.\;2}\,x^{m-4} + \tfrac{1}{32}\,\frac{m-3.m-4}{1.\;2}\,x^{m-5} - \text{etc.} = 0$$

cuius radices erunt cosinus angulorum $\frac{P}{n}$, $\frac{2P}{n}$,

$\frac{3P}{n} \ldots \frac{mP}{n}$. Vlteriores reductiones harum aequationum, pro eo quidem casu vbi n est numerus primus, hactenus non habebantur.

Attamen nulla harum aequationum tam tractabilis et ad institutum nostrum tam idonea est, quam haec $x^n - 1 = 0$, cuius radices cum radicibus illarum arctissime connexas esse constat. Scilicet, scribendo breuitatis caussa i pro quantitate imaginaria $\sqrt{-1}$, radices aequationis $x^n - 1 = 0$ exhibentur per $\cos\frac{kP}{n} + i\sin\frac{kP}{n} = r$, vbi pro k accipiendi sunt omnes numeri $0, 1, 2 \ldots n-1$. Quocirca quum sit $\frac{1}{r} = \cos\frac{kP}{n} - i\sin\frac{kP}{n}$, radices aequationis I exhibebuntur per $\frac{1}{2i}(r - \frac{1}{r})$ siue per $\frac{i(1-rr)}{2r}$; radices aequationis II per $\frac{1}{2}(r + \frac{1}{r}) = \frac{1+rr}{2r}$; denique radices aequationis III per $\frac{i(1-rr)}{1+rr}$. Hanc ob caussam disquisitionem considerationi aequationis $x^n - 1 = 0$ superstruemus, ipsum n esse numerum primum imparem supponendo. Ne vero inuestigationum ordinem interrumpere oporteat, sequens lemma hic praemittimus.

338. Problema. *Data aequatione* $(W) \ldots z^m + Az^{m-1}$ *etc.* $= 0$, *inuenire aequationem* (W'), *cuius radices sint potestates* λ^{tae} *radicum aequationis* (W), *designante* λ *exponentem integrum positiuum datum.*

Sol. Designatis radicibus aequationis W per a, b, c etc., radices aequ. W' esse debebunt a^λ, b^λ, c^λ etc. Per theorema notum Newtonianum e coëfficientibus aequ. W inuenire licet aggregata quarumlibet potestatum radicum a, b, c etc. Quaerantur itaque summae $a^\lambda + b^\lambda + c^\lambda +$ etc., $a^{2\lambda} + b^{2\lambda} + c^{2\lambda}$ etc. etc. vsque ad $a^{m\lambda} + b^{m\lambda} + c^{m\lambda} +$ etc., vnde via inuersa per idem theorema coëfficientes aequ. W' deduci poterunt. *Q. E. F.* — Simul hinc liquet, si omnes coëfficientes in W sint rationales, omnes quoque in W' rationales euadere. Alia quidem via probari potest, si illi omnes integri sint, etiam hos omnes integros fieri; huic autem theoremati, ad institutum nostrum non adeo necessario, hic non immoramur.

339. Aequatio $x^n - 1 = 0$ (in suppositione semper abhinc subintelligenda, n esse numerum primum imparem) vnicam radicem realem implicat, $x = 1$; $n - 1$ reliquae, quas aequatio $x^{n-1} + x^{n-2} +$ etc. $+ x + 1 = 0$ complectitur, omnes sunt imaginariae; harum complexum per Ω, functionemque $x^{n-1} + x^{n-2} +$ etc. $+ x + 1$ per X denotabimus. Si itaque r est radix quaecunque ex Ω, erit $1 = r^n = r^{2n}$ etc., et generaliter $r^{en} = 1$ pro quouis valore integro ipsius e, positiuo seu negatiuo; hinc perspicuum est, si λ, μ sint integri secundum n congrui, fore $r^\lambda = r^\mu$. Si vero λ, μ sec. mod. n incongrui sunt, r^λ et r^μ inaequales erunt; in hoc enim casu integer ν ita accipi potest vt fiat $(\lambda - \mu)\nu \equiv 1$ (mod. n), vnde $r^{(\lambda-\mu)\nu} = r$, adeoque $r^{\lambda-\mu}$ certo non $= 1$. Porro patet, quamuis