

III. Quando D est positivus non quadratus, ex singulis formis (A, B, C) in W contentis alias deducamus (A, B', C') , accipiendo $B' \equiv B \pmod{A}$ et inter limites \sqrt{D} et $\sqrt{D} \mp A$ (ubi signum superius vel inferius adhibendum, prout A est pos. vel neg.) atque $C' = \frac{B'B' - D}{A}$; designemusque harum complexum per W' . Manifesto hae formae erunt proprie primitivae ancipites det. D , atque omnes inter se diversae; praeterea vero omnes erunt formae reductae. Quando enim $A < \sqrt{D}$, B' manifesto erit $< \sqrt{D}$ atque positivus; praeterea $B' > \sqrt{D} \mp A$ adeoque $A > \sqrt{D} - B'$ et proin A , positivus acceptus, certo inter $\sqrt{D} + B'$ et $\sqrt{D} - B'$ situs. Quando vero $A > \sqrt{D}$, non poterit esse $B = 0$ (quippe quas formas eiecimus), sed erit necessario $B = \frac{1}{2}A$; hinc B' magnitudine ipsi $\frac{1}{2}A$ aequalis, signo positivus (quoniam enim $A < 2\sqrt{D}$, $\pm \frac{1}{2}A$ iacebit inter limites ipsi B' assignatos, ipsique B sec. mod. A erit congruus; quare $B' = \pm \frac{1}{2}A$), proin $B' < \sqrt{D}$, vnde $2B' < \sqrt{D} + B'$ siue $A < \sqrt{D} + B'$, quamobrem $\pm A$ necessario inter limites $\sqrt{D} + B'$ et $\sqrt{D} - B'$ iacebit. Denique W' omnes formas reductas pr. prim. ancipites det. D continebit; si enim (a, b, c) est huiusmodi forma, erit vel $b \equiv 0$, vel $b \equiv \frac{1}{2}a \pmod{a}$. In casu priori manifesto non poterit esse $b < a$ neque adeo $a > \sqrt{D}$, quapropter forma $(a, 0, -\frac{D}{a})$ certo contenta erit in W , et respondens (a, b, c) in W' ; in posteriori certo erit $a < 2\sqrt{D}$, adeoque $(a, \frac{1}{2}a, \frac{1}{4}a - \frac{D}{a})$ in W contenta, atque

respondens (a, b, c) in W . Ex his colligitur, multitudinem formarum in W aequalem esse multitudini omnium formarum reductarum ancipitum pr. prim. det. D ; quoniam vero in singulis classibus ancipitibus *binæ* formae reductae ancipites continentur (artt. 187, 194), multitudo omnium classium ancipitum pr. prim. det. D erit semissis multitudinis formarum in W , siue semissis omnium characterem assignabilem.

259. Multitudo classium ancipitum improprie primitiuarum determinantis dati D multitudini proprie primitiuarum eiusdem det. semper est aequalis. Sit K classis principalis, atque K' , K'' etc. reliquae classes ancipites pr. primitivae huius determinantis; L aliqua classis anceps improprie primitiva eiusdem det., e. g. ea in qua est forma $(2, 1, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}D)$. Prodibit itaque ex compositione classis L cum K classis L ipsa; ex compositione classis L cum K' , K'' etc. provenire supponamus classes L' , L'' etc. resp., quae manifesto omnes ad eundem determinantem D pertinebunt, atque improprie primitivae et ancipites erunt. Patet itaque, theorema demonstratum fore, simulac probatum fuerit, omnes classes L , L' , L'' etc. esse diuersas, aliasque ancipites impr. prim. det. D praeter illas non dari. Ad hunc finem sequentes casus distinguimus:

I. Quando multitudo classium impr. primitiuarum multitudini pr. primitiuarum aequalis est, quaevis illarum oritur ex compositione classis L cum classe determinata proprie primitiva, vnde necessario omnes L , L' , L'' etc. erunt diuersae.

Designante autem \mathfrak{L} classem quamcunque ancipitem impr. prim. det. D , dabitur classis proprie primitiua \mathfrak{K} talis vt sit $\mathfrak{K} + L = \mathfrak{L}$; si classi \mathfrak{K} opposita est classis \mathfrak{K}' , erit etiam (quoniam classes L , \mathfrak{L} sibi ipsae oppositae sunt) $\mathfrak{K}' + L = \mathfrak{L}$, vnde necessario \mathfrak{K} cum \mathfrak{K}' identica, erit, adeoque classis anceps: hinc \mathfrak{K} reperietur inter classes K , K' , K'' etc. atque \mathfrak{L} inter has L , L' , L'' etc.

II. Quando multitudo classium improprie primitiuarum ter maior est quam multitudo classium pr. primitiuarum, sit H classis in qua est forma $(4, 1, \frac{1-D}{4})$, H' ea in qua est forma $(4, 3, \frac{9-D}{4})$, eruntque H , H' proprie primitivae et tum inter se tum a classe principali K diuersae, atque $H + H' = K$, $2H = H'$, $2H' = H$; et si \mathfrak{L} est classis quaecunque improprie primitiua det. D , quae oritur ex compositione classis L cum proprie primitiua \mathfrak{K} , erit etiam $\mathfrak{L} = L + \mathfrak{K} + H$ et $\mathfrak{L} = L + \mathfrak{K} + H'$; praeter tres classes (pr. prim. atque diuersas) \mathfrak{K} , $\mathfrak{K} + H$, $\mathfrak{K} + H'$ aliae non dabuntur, quae cum L compositae ipsam \mathfrak{L} producant. Quoniam igitur, si \mathfrak{L} est anceps atque \mathfrak{K}' ipsi \mathfrak{K} opposita, etiam $L + \mathfrak{K}' = \mathfrak{L}$, necessario \mathfrak{K}' cum aliqua illarum trium classium identica erit. Si $\mathfrak{K}' = \mathfrak{K}$, erit \mathfrak{K} anceps; si $\mathfrak{K}' = \mathfrak{K} + H$, erit $K = \mathfrak{K} + \mathfrak{K}' = 2\mathfrak{K} + H = 2(\mathfrak{K} + H')$ adeoque $\mathfrak{K} + H'$ anceps; similiterque si $\mathfrak{K}' = \mathfrak{K} + H'$ erit $\mathfrak{K} + H$ anceps, vnde concluditur, \mathfrak{L} inter classes L , L' , L'' etc. necessario reperiri. Facile autem perspicitur, inter