mus), id tantum obseruamus, postquam ad talem aequationem $e^2 = bp \pm af$ (designante b illum numerum primum) peruentum fuerit, ad perspicuitatem profuturum, si vtrumque signum seorsim consideretur.

140. *Casus quartus.* *Quando* $T+1$ *est formae* $4n+1$, $(=a)$, p *formae* $4n+3$, *atque* $\pm\, pNa$, *non poterit esse* $+\,aRp$, *siue* $-\,aNp$. (Casus sextus supra).

Etiam huius casus demonstrationem quum prorsus similis sit demonstrationi casus tertii breuitatis gratia omittimus.

141. *Casus quintus.* *Quando* $T+1$ *est formae* $4n+3$, $(=b)$, p *eiusdem formae, atque* $+\,pRb$ (*siue* $-\,pNb$), *nequit esse* $+\,bRp$, *siue* $-\,bNp$. (Casus tertius supra).

Sit $p \equiv e^2$ (mod. b), atque e par et $< b$.

I. Quando e per p non est diuisibilis. Ponatur $e^2 = p + bf$, eritque f positiuus, formae $4n+3$, $< b$ atque ad p primus. Porro erit pRf adeoque per prop. 13. art 132, $-\,fRp$. Hinc et ex $+\,bfRp$ fit $-\,bRp$ adeoque $+\,bNp$ Q. E. D.

II. Quando e per p est diuisibilis, sit $e = pg$, atque $ggp = 1 + bh$. Tum erit h formae $4n+1$ atque ad p primus, $p \equiv g^2p^2$ (mod. h), adeoque pRh; hinc fit $+\,hRp$ (prop.

10 art. 132), vnde et ex — $bhRp$ sequitur — bRp, siue + bNp. *Q. E. D.*

142. *Casus sextus. Quando* $T+1$ *est formae* $4n+3$, $(=b)$, p *formae* $4n+1$, *atque* pRb, *non poterit esse* $\pm\, bNp$. Supra casus septimus.

Demontrationem praecedenti omnino similem, omittimus.

143. *Casus septimus. Quando* $T+1$ *est formae* $4n+3$, $(=b)$, p *eiusdem formae atque* $+pNb$ *siue* $-pRb$, *non poterit esse* $+bNp$ *siue* $-bRp$. (Casus quartus supra)

Sit $-p \equiv e^2$ (mod. b), atque e par et $< b$.

I. Quando e per p non diuisibilis. Sit $-p = e^2 - bf$ eritque f positiuus, formae $4n+1$, ad p primus ipsoque b minor (etenim e certo non maior quam $b-1$, $p < b-1$, quare erit $bf = e^2 + p < b^2 - b$. i. e. $f < b-1$). Porro erit $-pRf$, hinc (prop. 10 art. 132) $+fRp$, vnde et ex $+bfRp$ fit $+bRp$, siue $-bNp$.

II. Quando e per p est diuisibilis, sit $e = pg$, atque $g^2p = -1 + bh$. Tum erit h positiuus, formae $4n+3$, ad p primus et $< b$. Porro erit pRh, vnde fit (prop. 14 art 132) $+hRp$. Hinc et ex bRp equitur $+bRp$ siue $-bNp$. *Q. E. D.*

144. *Casus octauus. Quando* $T + 1$ *est formae* $4n + 3$, $(= b)$, p *formae* $4n + 1$, *atque* $+ pNb$ *siue* $- pRb$, *non poterit esse* $\pm bRp$. Casus vltimus supra.

Demonstratio perinde procedit vt in casu praecedente.

145. In demonstrat. praec. semper pro e valorem parem accepimus (art. 137. 144); obseruare conuenit, etiam valorem imparem adhiberi potuisse, sed tum plures adhuc distinctiones introducendae fuissent. Qui his disquisitionibus delectantur, haud inutile facient, si vires suas in euolutione horum casuum exercitent. Praeterea theoremata ad residua $+ 2$ et $- 2$ pertinentia tunc supponi debuissent; quum vero nostra demonstratio absque his theorematibus sit perfecta, nouam hinc methodum nanciscimur, illa demonstrandi. Quae minime est contemnenda, quum methodi, quibus supra pro demonstratione theorematis, ± 2 esse residuum cuiusuis numeri primi formae $8n + 1$, vsi sumus, minus directae videri possint. Reliquos casus (qui ad numeros primos formarum $8n + 3$, $8n + 5$, $8n + 7$ spectant) per methodus supra traditas demonstratos, illudque theorema tantummodo per inductionem inuentum esse supponemus; hanc autem inductionem per sequentes reflexiones ad certitudinis gradum euehemus.

Si ± 2 omnium numerorum primorum formae $8n + 1$ residuum non esset, ponatur