

L I B. II. esse debebunt. Crura enim hyperbolica speciei  $u = \frac{A}{t}$ ,

$u = \frac{A}{t^2}$  &c., infinites magis ad suas Asymptotas convergunt,

quam species  $u = \frac{A}{t^2}$ . Hinc igitur in enumeratione Specierum, quæ in ordine quopiam superiori continentur, casus impossibiles facile excludi, hocque insignes calculi molestiæ evitari poterunt.

253. Ponamus autem Lineam tertii ordinis a recta quapiam in duobus tantum punctis secari; atque ab omnibus aliis rectis huic parallelis vel in duobus etiam punctis vel nusquam secabitur. Si igitur in Axe quocunque statuantur Applicatæ  $y$  huic rectæ parallelæ, æquatio ita erit comparata

$$yy + \frac{(\gamma xx + \zeta x + \theta)y}{\epsilon x + \epsilon} + \frac{\delta x^3 + \eta xx + \iota x + \kappa}{\epsilon x + \epsilon} = 0.$$

Scilicet, si Abscissa  $AP$  dicatur  $= x$ , duæ habebuntur Applicatæ  $y$ , nempe  $PM$  &  $-PN$ ; erit autem, ex natura æquationum,  $PM - PN = \frac{-\gamma xx - \zeta x - \theta}{\epsilon x + \epsilon}$ . Bifecetur

Ordinata  $MN$  in puncto  $O$ , erit  $PO = \frac{\gamma xx + \zeta x + \theta}{\epsilon x + \epsilon}$ ; hinc, si ponatur  $PO = z$ , erit  $z(\epsilon x + \epsilon) = \gamma xx + \zeta x + \theta$ : unde patet omnia puncta  $O$  Ordinatas parallelas  $MN$  bifecantia sita esse in Hyperbola, nisi fuerit  $\gamma xx + \zeta x + \theta$  divisibile per  $\epsilon x + \epsilon$ , quo casu punctum  $O$  positum erit in Linea recta.

254. Quod si ergo  $\gamma xx + \zeta x + \theta$  divisibile fuerit per  $\epsilon x + \epsilon$ , tum Curva prædita erit Diametro, seu recta omnes Ordinatas parallelas  $MN$  bifecante; quæ proprietas in omnes Lineas secundi ordinis competit. Verum, si  $\gamma xx + \zeta x + \theta$  divisibile sit per  $\epsilon x + \epsilon$ , evanescere debet si ponatur  $x = -\frac{\epsilon}{\epsilon}$ ; quare, si fuerit  $\gamma\epsilon\epsilon - \epsilon\epsilon\zeta + \epsilon\epsilon\theta = 0$ , tum Linea tertii ordinis Diametro erit prædita.

255. Hinc

255. Hinc igitur generalissime omnes casus determinare poterimus, quibus Lineæ tertiæ ordinis Diametris sunt præditæ. CAP. X.  
 Sit enim propofita æquatio generalis

$$ay^3 + 6y^2x + \gamma yxx + \delta x^3 + \epsilon yy + \zeta yx + \eta xx + \theta y + ix + u = 0,$$

cujus Applicatæ  $y$ , quia triplicem valorem vel unicum habent, Diametri proprietatem recipere nequeunt. Ducantur ergo sub alio quocunque angulo ad eundem Axem aliæ Applicatæ  $u$ , ita ut sit  $y = nu$ , &  $x = t - mu$ , ac fiat substitutio

$$\left. \begin{aligned} &+ an^3u^3 + 6n^2u^2t + \gamma nmt + \delta t^3 + \epsilon n^2u^2 + \zeta nmt + \eta tt + \theta nm + it + u \\ &- 6nm^2u^3 - 2\gamma nmmt^2 - 3\delta mmtt - \zeta nmmt^2 - 2\eta mmt - nm \\ &+ \gamma m^2mu^3 + 3\delta m^2u^2t + \eta m^2u^2 \end{aligned} \right\} = 0$$

Primum ergo, quo hæ novæ Applicatæ ad Diametrum recipiendam aptæ reddantur, necesse est ut duplicem tantum valorem induere possint, eritque idcirco

$$an^3 - 6nm^2 + \gamma m^2n - \delta m^3 = 0.$$

256. Præterea vero requiritur ut quantitas, per quam  $u$  est multiplicata, nempe  $(\gamma n - 3\delta m)tt + (\zeta n - 2\eta m)t + \theta n - im$ , divisibilis sit per eam, quæ  $u$  multiplicat, quæ est  $(\epsilon nm - 2\gamma mn + 3\delta mm)t + \epsilon nm - \zeta nm + \eta mm$ ; sive illa nihilo fieri debet æqualis, si ponatur  $t = \frac{\epsilon nm + \zeta nm - \eta mm}{\epsilon nm - 2\gamma mn + 3\delta mm}$ .

Hinc ergo fiet

$$i = \frac{\theta n}{m} \frac{(\zeta n - 2\eta m)(\epsilon nn - \zeta mn + \eta mm)}{(\epsilon nn - 2\gamma mu + 3\delta mm)m} + \frac{(\gamma n - 3\delta m)(\epsilon nn - \zeta mn + \eta mm)^2}{(\epsilon nn - 2\gamma mn + 3\delta mm)^2m}.$$

257. Si hæc ad Species supra enumeratas applicemus, apparebit in Specie prima nullam prorsus Diametrum locum habere posse. In Specie autem secunda Ordinatæ Axi, in quo Abscissæ

LIB. II. cissæ  $x$  capiuntur parallelæ Diametro, bisecabuntur. Species tertia nullam prorsus Diametrum admittit. Species quarta semper unam habet Diametrum Ordinatæ uni Asymptotæ parallelas bisecantem. Quinta vero Species tres habebit Diametros, quæ Ordinatæ singulis Asymptotis parallelas bisecabunt. Species sexta nullam prorsus habere potest Diametrum. Septima unam Diametrum semper habet pro Ordinatis Asymptotæ ex Factore  $x - my$  ortæ parallelis. Octava unam Diametrum habet pro Ordinatis Axi parallelis. Nona Species duas habet Diametros; alteram pro Ordinatis Axi parallelis, alteram pro Ordinatis alteri Asymptotæ parallelis. Decima uti octava, & undecima uti nona est comparata. Duodecima ratione Diametrorum par est octavæ, & decima-tertia nonæ. Decima-quarta unam habet Diametrum pro Ordinatis Axi parallelis. Species decima-quinta & sexta omnino Ordinatæ, quæ in duobus punctis Curvam secant, non admittunt; ideoque Diametro gaudere nequeunt. Hæ autem Diametrorum proprietates a NEWTONO probe sunt notatæ, quam ob causam earum commemorationem hic data opera attulisse juvabit.

258. Quanquam in æquationibus, quas supra pro singulis Speciebus Linearum tertii ordinis dedimus, Coordinatas  $x$  &  $y$  inter se normales posuimus, tamen Speciei natura non mutatur, etiam si eæ quomodocunque ad se invicem sint inclinatæ. Quot enim æquatio, positis Coordinatis orthogonalibus, præbet crura in infinitum extensa, totidem quoque præbebit eadem æquatio, si Applicatæ ad Axem utcunque inclinentur. Neque vero etiam natura crurum in infinitum excurrentium mutatur, mutata Coordinatarum inclinatione; quæ enim crura sunt parabolica, eadem manebunt parabolica, & quæ sunt hyperbolica eandem naturam retinebunt. Quin etiam Species crurum tam parabolicorum quam hyperbolicorum non alterabitur. Quare omnis Curva, quam æquatio pro prima Specie exhibita præbet, siue Coordinatæ statuatur rectangulæ siue obliquangulæ, semper ad eandem Speciem primam erit referenda,

referenda, similique modo reliquarum Specierum omnium ratio est comparata. CAP. X.

259. Admissa ergo Coordinatarum obliquitate quacunque, æquationes supra datæ non restringentur, si loco  $y$  ponatur  $vu$ , &  $t - \mu u$  loco  $x$ , existente  $\mu u + vu = 1$ . Sumto autem angulo obliquitatis pro lubitu, æquationes supra datæ simpliciores reddi poterunt. Hinc pro singulis Speciebus sequentes simplicissimæ æquationes inter Coordinatas obliquangulas  $t$  &  $u$  formabuntur.

## SPECIES PRIMA.

$$u(tt + nuu) + auu + bt + cu + d = 0,$$

existente nec  $n = 0$  nec  $b = 0$

## SPECIES SECUNDA.

$$u(tt + nuu) + auu + cu + d = 0,$$

non existente  $n = 0$ .

## SPECIES TERTIA.

$$u(tt - nuu) + auu + bt + cu + d = 0,$$

existente nec  $n = 0$ , nec  $b = 0$ , nec  $\pm nb + c + \frac{aa}{4m} = 0$ .

## SPECIES QUARTA.

$$u(tt - nuu) + auu + cu + d = 0,$$

existente nec  $n = 0$ , nec  $c + \frac{aa}{4m} = 0$ .

## SPECIES QUINTA.

$$u(tt - nuu) + auu - \frac{aan}{4m} + d = 0,$$

non existente  $n = 0$ .

LIB. II.

## SPECIES SEXTA.

$$tuu + att + bt + cu + d = 0,$$

existente nec  $a = 0$ , nec  $c = 0$ .

## SPECIES SEPTIMA.

$$tuu + att + bt + d = 0,$$

non existente  $a = 0$ .

## SPECIES OCTAVA.

$$tuu + bbt + cu + d = 0,$$

existente nec  $b = 0$ , nec  $c = 0$ .

## SPECIES NONA.

$$tuu + bbt + d = 0,$$

non existente  $b = 0$ .

## SPECIES DECIMA.

$$tuu - bbt + cu + d = 0,$$

existente nec  $b = 0$ , nec  $c = 0$ .

## SPECIES UNDECIMA.

$$tuu - bbt + d = 0,$$

non existente  $b = 0$ .

## SPECIES DUODECIMA.

$$tuu + cu + d = 0,$$

non existente  $c = 0$ .

## SPECIES DECIMA-TERTIA.

$$tuu + d = 0.$$

SPECIES

## SPECIES DECIMA-QUARTA.

CAP. X.

$$u^3 + att + cu + d = 0.$$

## SPECIES DECIMA-QUINTA.

$$u^3 + atu + bt + d = 0,$$

non existente  $a = 0$ .

## SPECIES DECIMA-SEXTA.

$$u^3 + at = 0.$$

## CAPUT XI.

*De Lineis quarti Ordinis.*

260. **Æ** Quatio generalis pro Lineis quarti Ordinis est

$$\alpha y^4 + \zeta y^3 x + \gamma y^2 x^2 + \delta y x^3 + \epsilon x^4 + \zeta y^3 + \eta y^2 x + \rho x x + \kappa^3 + \kappa y y + \lambda y x + \mu x x + \nu y + \xi x + o = 0;$$

quæ autem, (variatis tum Coordinatarum inclinatione, tum Axis positione, tum Abscissarum initio,) multis modis pro diversis casibus ad simpliciorum formam reduci potest. Quo igitur, secundum methodum traditam, omnes *Species* vel potius *Genera* Linearum, quæ in hoc ordine continentur enumerentur, ad membrum supremum respici oportet, unde sequentes casus nascuntur diversi.

I.

Si supremi membri omnes quatuor Factores simplices sunt imaginarii.

II.

Si duo Factores tantum sunt reales & inæquales inter se.

S 2

III. Si