

**APPEND.** 32. Hujusmodi ergo Superficies non solum animo facile concipiatur, sed etiam construitur atque in data materia efformatur. Ponamus enim in æquatione deesse variabilem  $z$ , ita ut æquatio tantum sit inter Coordinatas  $AP = x$  &  $AQ = PM = y$ ; ex hac in plano  $APQ$  describatur Linea curva  $BMD$ .

**T A B.** Quo factò concipiatur Linea recta infinita ad planum hoc perpetuo normalis secundum Lineam hanc curvam

**Fig. 122.**  $BMD$  circumferri; atque hæc recta motu suo producet seu efformabit Superficiem, per eam æquationem indicatam. Unde perspicuum est, si Linea  $BMD$  fuerit Circulus, tum Superficiem ex eo ortam fore Cylindri recti; sin autem Linea  $BMD$  fuerit Ellipsis, tum Superficiem Cylindri scaleni generari. Quod si Linea  $BMD$  non fuerit continua, sed ex pluribus rectis conflata figuram exhibens rectilineam, tum Superficies resultabit prismatica.

33. Quod hoc Superficierum genus Cylindros & omnia Prismata in se complectitur, universum hoc genus Superficierum appellari conveniet *cylindricum*, seu *prismaticum*; singulæ autem species sub hoc genere contentæ determinabuntur per figuram planam  $BMD$ , ex qua, modo ante descripto, sint ortæ: atque ista figura  $BMD$  *Basis* appellabitur. Quoties ergo in æquatione pro Superficie una trium variabilium  $x$ ,  $y$ ,  $z$  deest, tunc Superficies hac æquatione contenta erit cylindrica seu prismatica. Quod si autem duæ variabiles  $y$  &  $x$  simul desint; tum ob  $x = \text{Constanti}$ , Linea  $BMD$  abibit in rectam ad Axem  $AD$  normalem, atque propterea Superficies fiet plana normalis ad planum  $APQ$ .

34. Post hoc Superficierum genus maxime notari meretur id, quod oritur ex æquatione inter tres variabiles  $x$ ,  $y$  &  $z$  homogenea, seu in qua tres istæ variabiles ubique eundem dimensionum numerum constituant, cujusmodi est  $zz = mxz + xx + yy$ . Hinc enim omnes sectiones, quæ fiunt per plana uni ex tribus principalibus parallela, erunt figuræ inter se similes. Namque, si tribuatur ipsi  $z$  valor constans  $h$ , manifestum est æquationem  $hh = mbx + xx + yy$ , si pro  $h$  successive

sive alii aliisque valores tribuantur, infinitas continere figuras C A P. II.  
inter se similes; quarum Parametri sint æquales, seu proportionales ipsi  $b$ . Cum igitur hæ sectiones non solum sint similes, sed etiam crescent in ratione distantiarum a plano  $APQ$ , Lineæ, quæ ex punto  $A$  per singularum sectionum puncta homologa ducuntur, erunt rectæ.

35. Proposita ergo hujusmodi æquatione inter tres variabiles  $x$ ,  $y$ , &  $z$  homogenea, tribuatur ipsi  $z$  valor datus  $AR = b$ ; sitque  $TSSmMm$  figura in plano ipsi  $APQ$  parallelo & per punctum  $R$  ducto, quam exhibebit æquatio inter  $x$  &  $y$ , ita ut sit  $RV = x$ , &  $VM = y$ . Quod si ergo hæc sectio una  $TSSmMm$  fuerit descripta, concipiatur circa ejus Perimetrum circumduci Linea recta infinita perpetua per punctum  $A$  transiens; atque hæc recta motu suo describet Superficiem in æquatione proposita contentam. Perspicuum vero est, si figura  $TSSmMm$  fuerit Circulus Centrum in  $R$  habens, tum prodire Conum rectum; sin  $R$  non sit Centrum, Conum scalenum: at, si illa figura fuerit rectilinea, orientur cujusque generis Pyramides. Quam ob rem Superficies, quæ in hoc æquationum generum continentur, hic *conicas* seu *pyramidales* vocabimus.

TAB.  
XXXI.  
Fig. 123.

36. Ex his manifestum est, si æquatio inter tres variabiles  $x$ ,  $y$  &  $z$  fuerit homogenea, atque adeo Superficies conica seu pyramidalis; tum non solum omnes sectiones uni plano principali  $APQ$  parallelas inter se esse figuræ similes, quarum Parametri sint distantiis sectionum a vertice  $A$  proportionales; sed, ob eandem rationem, intelligitur quoque, omnes sectiones, quæ sint vel plano  $APR$  vel plano  $AQR$  parallelæ, eadem illa proprietate esse præditas, ut sint figuræ inter se similes, quarum latera homologa teneant distantiarum ab  $A$  rationem. Infra vero ostendetur, omnes omnino sectiones hujusmodi Corporum, quæ sunt inter se parallelæ, seu quæ sunt parallelæ plano cuicunque per Verticem  $A$  ducto, inter se quoque fore similes, earumque Parametros distantiis a vertice  $A$  esse proportionales.

APPEND. 37. Latius patet genus Superficierum, ad quod nunc sum progressurus. Sit  $Z$  Function quæcunque ipsius  $z$ ; ac propo-natur æquatio quæcunque homogenea inter tres variabiles  $x$ ,  $y$ , &  $Z$ . Fiat  $Z = H$ , posita  $z = b$ : &, cum hoc casu prodeat æquatio homogenea inter  $x$ ,  $y$  &  $H$ , erunt omnes sectiones, piano  $APQ$  parallelæ, figuræ inter se similes; quarum Parametri autem non distantiis  $b$ , sed earum Functionibus  $H$  erunt proportionales. Ex quo Lineæ per harum sectionum puncta homologa ductæ non erunt Lineæ rectæ, sed Curvæ a Functionis  $Z$  ratione pendentes. Tum vero etiam hinc non sequitur, sectiones, quæ alio cuipiam piano sint parallelæ, fore inter se similes.

38. In hoc genere ambo præcedentia continentur. Si enim fuerit  $Z = z$ , seu  $Z = \alpha z$ , ob æquationem inter  $x$ ,  $y$  &  $z$  homogeneam, orientur Superficies conicæ. Idem evenit, si fuerit  $Z = \alpha + \beta z$ ; hoc tantum discrimine, quod Vertex Coni non in ipsum punctum  $A$  cadat; scilicet, si fuerit  $Z = \frac{b-z}{b}$ , Vertex Coni ab  $A$  distabit intervallo  $b$ . Quod si jam statuatur  $b = \infty$ , figura conica abibit in cylindricam, fietque  $Z = 1$ . Hinc æquatio pro Superficiebus cylindricis ita erit comparata, ut in ea variabiles  $x$  &  $y$  una cum constanti  $z$  ubique eundem dimensionum numerum adimpleant. Quomodo-cunque autem æquatio inter  $x$  &  $y$  fuerit comparata, si tertia variabilis  $z$  in eam non ingrediatur, semper per unitatem homogeneitas impleri potest: unde, uti supra jam ostendimus, omnis æquatio una variabili carens exprimit Superficiem cylindricam.

39. Inter hæc Corpora, in quibus omnes sectiones, uni plano principali  $APQ$  parallelæ, sunt figuræ similes, maxime notatu sunt digna ea, quorum istæ sectiones sunt Circuli Cen-tra in eadem recta  $AR$  ad planum  $APQ$  normali habentes. Hujusmodi Corpora torno efformantur, indeque *tornata* ap-pellantur. Pro hujusmodi ergo Corporibus æquatio generalis erit  $ZZ = xx + yy$ : quicunque enim valor variabili  $z$  tribua-tur,

tur, ut fiat  $Z = H$ , prodibit pro sectione plano  $APQ$  parallelæ æquatio  $HH = xx + yy$ , quæ est pro Circulo radium  $= H$  & Centrum in recta  $AR$  habente. Si fuerit  $ZZ = zz$ , habebitur Conus rectus: sin  $ZZ = aa$ , Cylin- drus; &, si  $ZZ = aa - zz$  prodibit Globus, quæ sunt spe- cies præcipuae Corporum tornatorum.

40. Contemplemur ejusmodi Corpora, quotum omnes se- C A P. II.  
ctiones  $PTV$  normales ad Axem  $AP$  sint Triangula, horum- T A B.  
que Apices  $T$  in Linea recta  $DT$  Axi  $AP$  parallela sitæ. Fig. 124.  
Sit  $AVB$  Basis hujus Corporis, seu ejus sectio in plano  $APQ$   
facta, quæ sit Curva quæcunque. Sit distantia rectæ  $DT$  ab  
Axe  $AB$ , nempe  $AD = c$ : positisque, ut haecenus, tribus  
variabilibus  $AP = x$ ,  $PQ = y$ ,  $QM = z$ ; erit  $PV$  Fun-  
ctio quæpiam ipsius  $x$ : sit ea  $PV = P$ : erit, ob triangula  
 $VQM$ ,  $VPT$  similia,  $P : c = P - y : z$ ; seu  $z = \frac{cy}{P}$ . Pro hujusmodi ergo Corporibus æquabitur  $\frac{c-y}{y} = \frac{z}{y}$  Fun-  
ctioni cuipiam ipsius  $x$ . Differunt igitur hæc Corpora a co-  
nicis, quod definitur in aciem rectam  $DT$ , cum conica de-  
finant in cuspidem. Si Basis  $AVB$  ponatur Circulus, Cor-  
pus resultans a WALLISIO fusius est pertractatum, atque Co-  
no-cuneus appellatum.

41. Sint, ut modo, omnes sectiones Axi  $AB$  normales T A B.  
 $PTV$  triangula ad  $P$  rectangula, quorum Vertice autem  $T$  Fig. 125.  
constituant Curvam quamcunque  $AT$ : Basis autem sit figura  
 $AVB$ . Positis tribus variabilibus  $AP = x$ ,  $PQ = y$ , &  
 $QM = z$ ; erit in Curva  $AVB$ , recta  $PV$  Functio quædam  
ipsius  $x$  quæ sit  $= P$ : tum vero erit  $PT$  quoque Functio ip-  
sius  $x$ , quæ sit  $= Q$ ; quibus positis erit

$$P : Q = P - y : z;$$

ideoque  $z = Q - \frac{Qy}{P}$ , seu  $Pz + Qy = PQ$ , vel  $\frac{z}{Q} + \frac{y}{P} = 1$ , vel constanti. Quod si ergo in æquatione ambæ variabi-

APPEND. variabiles  $y$  &  $z$  una plures dimensiones nusquam constituant, tum Corpus ad hoc genus pertinebit, quod hic descripsimus.

T A B. 42. Quoniam jam sumus contemplati ea Corpora, quorum  
X X X I I. omnes sectiones, uni plano principali parallelæ, sunt inter se  
Fig. 126. similes: nunc ea consideremus, in quibus omnes istiusmodi se-  
ctiones sint figuræ inter se saltem affines; seu, quæ, sumtis  
Abscissis homologis, habeant Applicatas inter se proportiona-  
les. Sint igitur hujusmodi Corporis tres sectiones principales  
 $ABC$ ,  $ACD$ , &  $ABD$ , quarum isti  $ACD$  omnes sectiones  
parallelæ debeant esse figuræ affines. Quare in ea ponatur  
Basis  $AC = a$ , & altitudo  $AD = b$ ; sumtisque Coordinatis  
 $Aq = p$ , &  $qm = q$ , sit  $q$  Functionis quæcumque ipsius  $p$ .  
Concipiatur nunc sectio quæcumque parallela  $PTV$ , posito  
intervallo  $AP = x$ ; eritque Basis  $PV =$  Functioni ipsius  $x$ ,  
quæ sit  $= P$ , & altitudo  $PT =$  Functioni ipsius  $x$ , quæ sit  
 $= Q$ . Vocetur jam  $PQ = y$  &  $QM = z$ ; atque, ex affinitatis  
natura, erit  $a:p = P:y$  &  $b:q = Q:z$ ; seu  $y = \frac{Pp}{a}$ , &  
 $z = \frac{Qq}{b}$ .

43. Quod si ergo datæ fuerint omnes tres sectiones princi-  
pales Corporis,  $ABC$ ,  $ACD$ , &  $ABD$ ; hinc natura ip-  
si Corporis determinabitur, quod habeat omnes sectiones,  
ipsi  $ACD$  parallelas, simul eidem affines. Primum enim dan-  
tur  $P$  &  $Q$  Functiones ipsius  $x$ ; tum vero est  $q$  Functionis  
 $p$ ; unde, ex binis variabilibus  $x$  &  $p$ , definiuntur ambæ va-  
riabiles  $y$  &  $z$ . Verum, si æquationem inter tres Coordina-  
tas  $x$ ,  $y$  &  $z$  desideremus; quoniam  $q$  est Functionis  $p$ :  
seu, quia datur æquatio inter  $p$  &  $q$ , in hac æquatione substi-  
tuatur  $p = \frac{ay}{P}$ , &  $q = \frac{bz}{Q}$ ; sicque, ob  $P$  &  $Q$  Functiones  
ipsius  $x$ , orietur æquatio inter tres Coordinatas  $x$ ,  $y$  &  $z$ ,  
qua natura Corporum ad hoc genus pertinentium exprimetur.  
Patet autem, posito  $x = 0$ , fieri oportere  $P = a$  &  $Q = b$ .