I. Quando A est primus, manifestum est omnes numeros ab 1 vsque ad $A - 1$ ad A primos esse; quare in hoc casu erit $\varphi A = A - 1$.

II. Quando A est numeri primi potestas puta $= p^m$, omnes numeri per p diuisibiles ad A non erunt primi, reliqui erunt. Quamobrem de $p^m - 1$ numeris hi sunt reiiciendi: p, $2p$, $3p \ldots (p^{m-1} - 1)p$; remanent igitur $p^m - 1 - (p^{m-1} - 1)$ siue $p^{m-1}(p - 1)$. Hinc $\varphi p^m = p^{m-1}(p - 1)$.

III. Reliqui casus facile ad hos reducuntur ope sequentis propositionis: *Si A in factores M, N, P etc. inter se primos est resolutus, erit $\varphi A = \varphi M . \varphi N . \varphi P$ etc.*, quae ita demonstratur. Sint numeri ad M primi ipsoque M minores, m, m', m'' etc. quorum itaque multitudo $= \varphi M$. Similiter sint numeri ad N, P etc. respectiue primi ipsisque minores, n, n', n'' etc.; p, p', p'' etc. etc., quorum multitudo φN φP etc. Iam constat omnes numeros ad productum A primos etiam ad factores singulos M, N, P etc. primos fore et vice versa (art. 19); porro omnes numeros qui horum m, m', m'' etc. alicui sint congrui secundum modulum M ad M primos fore et vice versa, similiterque de N, P etc. Quaestio itaque huc reducta est: determinare quot dentur numeri infra A, qui secundum modulum M, alicui numerorum m, m', m'' etc. secundum modulum N, alicui ex his n, n', n'' etc. etc. sint congrui. Sed ex art. 32 sequitur, omnes numeros, secundum singulos modulos M, N, P etc. residua determinata dantes, congruos secundum eorum productum A fore, adeoque infra A vnicum tantum dari, secundum singulos M, N, P etc. residuis datis congruum. Quare numerus quaesitus aequalis erit numero combinationum singulorum numerorum m, m', n'' cum singulis n, n', n'' atque p, p', p'' etc. etc. Hunc vero esse $= \varphi M. \varphi N. \varphi P$ etc. ex theoria combinationum constat. *Q. E. D.*

IV. Iam quomodo hoc ad casum de quo agimus applicandum sit facile intelligitur. Resoluatur A in factores suos primos siue reducatur ad formam $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ etc. designantibus a, b, c etc. numeros primos diuersos. Tum erit $\varphi A = \varphi a^\alpha. \varphi b^\beta. \varphi c^\gamma$ etc. $= a^{\alpha-1}(a-1) b^{\beta-1} (b-1) c^{\gamma-1}(c-1)$ etc. seu concinnius $\varphi A = A \frac{a-1}{a}. \frac{b-1}{b}. \frac{c-1}{c}$ etc.

Exempl. Sit $A = 60 = 2^2. 3. 5$, adeoque $\varphi A = \frac{1}{2}. \frac{2}{3}. \frac{4}{5}. 60 = 16$. Numeri hi ad 60 primi sunt 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59.

Solutio prima huius problematis exstat in commentatione ill. Euleri, *theoremata arithmetica noua methodo demonstrata*, Comm. nou. Ac. Petrop. VIII. p. 74. Demonstratio postea repetita est in alia diss. *Speculationes circa quasdam insignes proprietates numerorum*, Acta Petrop. VIII p. 17.

39. Si characteris φ significatio ita determinatur, vt φA exprimat multitudinem numerorum ad A primorum ipsoque A *non maiorum* perspicuum est φ 1 fore non amplius $= 0$, sed $= 1$; in omnibus reliquis casibus nihil hinc immutari. Hancce definitionem adoptantes sequens habebimus theorema.

Si a, a', a'' etc. sunt omnes diuisores ipsius A, (vnitate et ipso A non exclusis) erit $\varphi a + \varphi a' + \varphi a'' +$ etc. $= A$.

Ex. sit $A = 30$; tum erit $\varphi 1 + \varphi 2 + \varphi 3 + \varphi 5 + \varphi 6 + \varphi 10 + \varphi 15 + \varphi 30 = 1 + 1 + 2 + 4 + 2 + 4 + 8 + 8 = 30$.

Demonstr. Multiplicentur omnes numeri ad a primi ipsoque a non maiores per $\frac{A}{a}$, similiter omnes ad a' primi per $\frac{A}{a'}$ etc., habebunturque $\varphi a + \varphi a' + \varphi a'' +$ etc. numeri, omnes ipso A non maiores. At

1) omnes hi numeri erunt inaequales. Omnes enim eos qui ex *eodem* ipsius A diuisore sint generati, inaequales fore, per se clarum. Si vero e diuisoribus diuersis M, N numerisque μ, ν ad istos respectiue primis aequales prodiissent, *i. e.* si esset $\frac{A}{M}\mu = \frac{A}{N}\nu$, sequeretur $\mu N = \nu M$. Ponatur $M > N$ (id quod licet). Quoniam M ad μ est primus, atque numerum μN metitur, etiam ipsum N metietur, maior minorem. Q. E. A.

2) inter hos numeros, omnes hi $1, 2, 3 \ldots A$ inuenientur. Sit numerus quicunque ipsum A non superans t, maxima numerorum A, t communis mensura δ eritque $\frac{A}{\delta}$ diuisor ipsius A ad quem $\frac{t}{\delta}$ primus. Manifesto hinc numerus t inter eos inuenietur qui ex diuisore $\frac{A}{\delta}$ prodierunt.

3) Hinc colligitur horum numerorum multitudinem esse A, quare $\varphi a + \varphi a' + \varphi a'' +$ etc. $= A$. Q. E. D.

40. *Si maximus numerorum A, B, C, D etc. diuisor communis $= \mu$: numeri a, b, c, d etc. ita determinari possunt, vt sit $aA + bB + cC +$ etc. $= \mu$.*