u''' etc. Hoc facile inde deducitur, quod vtraque series t°, t', t'' etc., u°, u', u'' etc. est ex recurrentium genere, scilicet quoniam $t'' = \frac{2T}{m} t' - t^\circ$, $t^{\varrho+2} = \frac{2T}{m} t^{\varrho+1} - t^\varrho$ erit $t'' \equiv t^{\varrho+2}$ similiterque de reliquis. — Hinc autem sequitur, fore generaliter $t^{h+\varrho} \equiv t^h$, $u^{h+\varrho} \equiv u^h$ (mod. r), denotante h numerum quemcunque, nec non adhuc generalius, si fuerit $\mu \equiv \nu$ (mod. ϱ), fore $t^\mu \equiv t^\nu$, $u^\mu \equiv u^\nu$ (mod. r).

4) Conditionibus autem in obseru. praec. requisitis semper satisfieri potest, scilicet semper inueniri potest index ϱ (pro modulo quocunque dato r) pro quo sit $t^\varrho \equiv t^\circ$, $t^{\varrho+1} \equiv t'$, $u^\varrho \equiv u^\circ$, $u^{\varrho+1} \equiv u'$. Ad quod demonstrandum obseruamus

primo, conditioni tertiae semper satisfieri posse. Nullo enim negotio per criteria in (1) tradita perspicietur, etiam aequationem $pp - rrDqq = mm$ solubilem fore; et si valores minimi positiui ipsorum p, q (praeter hos m, o) supponuntur esse P, Q: inter valores ipsorum t, u manifesto erunt etiam $t = P$, $u = rQ$. Quare P, rQ in progressionibus t°, t' etc., u°, u' etc. contenti erunt, et si $P = t^\lambda$, $rQ = u^\lambda$, erit $u^\lambda \equiv 0 \equiv u^\circ$ (mod. r). Praeterea facile perspicietur, inter u° et u^λ nullum terminum fore ipsi u° secundum modulum r congruum.

Secundo patet, si hic insuper tres reliquae conditiones adimpletae sint, puta si etiam $u^{\lambda+1} \equiv u'$,

$t^\lambda \equiv t^0$, $t^{\lambda+1} \equiv t'$, poni tantummodo debere $\varrho = \lambda$. Si vero vna aut altera illarum conditionum locum non habet, dico certe statui posse $\varrho = 2\lambda$. Nam ex aequat. [1] formulisque generalibus pro t^e, u^e in art. praec. deducitur $t^{2\lambda} = \frac{1}{m}(t^\lambda t^\lambda + Du^\lambda u^\lambda) = \frac{1}{m}(mm + 2Du^\lambda u^\lambda)$ adeoque $\frac{t^{2\lambda} - t^0}{r} = \frac{2Du^\lambda u^\lambda}{mr}$, quae quantitas erit numerus integer, quia per hyp. r ipsum u^λ metititur, nec non mm ipsum $4D$, adeoque a potiori m ipsum $2D$. — Porro erit $u^{2\lambda} = \frac{2}{m} t^\lambda u^\lambda$, et quoniam $4t^\lambda t^\lambda = 4Du^\lambda u^\lambda + 4mm$, adeoque per mm diuisibilis, $2t^\lambda$ erit diuisibilis per m, et proin $u^{2\lambda}$ per r, siue $u^{2\lambda} \equiv u^0 \pmod{r}$. — Tertio inuenitur $t^{2\lambda+1} = t' + \frac{2Du^\lambda u^{\lambda+1}}{m}$, et quoniam ex simili ratione $\frac{2Du^\lambda}{mr}$ est integer, erit $t^{2\lambda+1} \equiv t' \pmod{r}$. — Tandem reperitur $u^{2\lambda+1} = u^\lambda + \frac{2t^{\lambda+1} u^\lambda}{m}$, et quoniam $2t^{\lambda+1}$ per m diuisibilis est, u^λ per r: erit $u^{2\lambda+1} \equiv u' \pmod{r}$. *Q. E. D.*

Ceterum vsus posteriorum duarum obseruationum in sequentibus apparebit.

202. Casus particularis problematis, nempe soluere aequationem $tt - Duu = 1$, iam a geometris seculi praecedentis fuit agitatus. Sagacissimus Fermatius problema hoc analystis Anglis

proposuit, Wallisiusque Brounkerum tamquam inuentorem solutionis quam in *Alg. Cap.* 98, *Opp. T. II p.* 418 *sqq.* tradit nominat; Ozanam Fermatium; denique ill. Euler qui de illo egit in *Comm. Petr. VI. p.* 175, *Comm. nou. XI, p.* 28*), *Algebra P. II. pag.* 226, *Opusc. An. I. p.* 310, Pellium, vnde problema illud a quibusdam auctoribus *Pellianum* vocatum est. Omnes hae solutiones, si essentiam spectas, conueniunt cum ea quam obtinemus, si in art. 198 formam reductam eam adoptamus in qua $a = 1$; attamen operationem quam praescribunt tandem necessario *finiri*, siue problema semper *reuera solubile* esse, nemo ante ill. La Grange rigorose**) demonstrauit, *Melanges de la Soc. de Turin T. IV. p.* 19, et concinnius *Hist. de l'Ac. de Berlin*, 1767, *p.* 237. Exstat haec disquisitio etiam in *supplementis ad Euleri Algebram* iam saepius laudatis. Ceterum methodus nostra (ex principiis omnino diuersis petita, neque ad casum $m = 1$ restricta) plerumque plures vias ad solutionem perueniendi suppeditat, quoniam in art. 198 a quauis alia forma reducta $(a, b, -a')$ proficisci possumus.

*) In hac comm. algorithmus quem art. 32 exposuimus, per similia signa exhibetur, quod nos illic annotare neglеximus.

**) Quae Wallisius ad hunc finem protulit l. c. p. 427, 428 nihil ponderis habent. Paralogismus in eo consistit, quod p. 428 l. 4 supponit, proposita quantitate p inueniri posse numeros integros a, z tales vt $\frac{z}{a}$ minor sit quam p, defectus vero *assignato* minor. Hoc vtique verum est, quando defectus *assignatus* est *quantitas data*, neque vero, quando ab a et z pendet adeoque variabilis est, vti in casu praesenti euenit.