esse continuas. Sit igitur *mEBMDM* linea curva continua, cujus naturam contineat Functio quæpiam ipsius x, quæ sit y; atque manifestum est, sumtis valoribus ipsius x determinatis in recta RS, a puncto fixo A, tum valores ipsius y respondentes præbere Applicatarum normalium PM longitudinem.

11. In hac linearum curvarum explicatione nomina quædam sunt tenenda, quorum frequentissimus usus existit in doctrina de Lineis curvis.

Primum igitur recta RS, in qua valores ipsius x abscinduntur, vocatur Axis, seu linea recta *directrix*.

Punctum A, a quo valores ipsius x mensurantur, dicitur *initium Abscissarum*.

Portiones autem Axis AP, quibus determinati ipsius x valores indicantur, vocari solent Abscissæ.

Et perpendiculares PM, ex terminis *Abscissarum* M ad lineam curvam pertingentes, nomen Applicatarum obtinuerunt.

Vocantur autem hoc casu Applicatæ *normales* seu *orthogonales*, quia cum Axe angulum rectum constituunt; cum enim simili modo Applicatæ PM ad angulum obliquum cum Axe constitui possint, hoc casu Applicatæ *obliquangulæ* vocantur; hic vero constanter naturam curvarum per Applicatas orthogonales explicabimus, nisi expressis verbis contrarium indicetur.

12. Si igitur Abscissa quæcunque AP insigniatur per variabilem x, ut sit $AP = x$, tum Functio y indicabit magnitudinem Applicatæ PM, eritque $PM = y$. Natura igitur lineæ curvæ, si quidem fuerit continua, exprimetur per qualitatem Functionis y, seu per rationem, qua y ex x & quantitatibus constantibus componitur. In Axe igitur RS erit portio AS locus Abscissarum affirmativarum; portio AR locus Abscissarum negativarum; tum vero supra Axem RS exsistet regio Applicatarum affirmativarum, infra autem erit regio Applicatarum negativarum.

13. Cum igitur ex qualibet Functione ipsius x nascatur linea curva continua, hæc etiam ex illa Functione cognosci atque

 que describi poterit. Tribuantur enim primo ipsi x valores affirmativi à o ad ∞ usque progrediendo, ac pro singulis quærantur valores Functionis y respondentes, quæ per Applicatas, sive sursum sive deorsum porrectas, repræsententur, prout valores habeant sive affirmativos sive negativos; sicque orietur portio curvæ BMM. Deinde simili modo ipsi x tribuantur omnes valores negativi ab o ad $-\infty$ progrediendo, & valores ipsius y respondentes determinabunt curvæ portionem BEm, sicque universa linea curva in Functione contenta exhibebitur.

14. Quia est y Functio ipsius x; vel y æquabitur Functioni ipsius x explicitæ, vel dabitur æquatio inter x & y, qua y per x definitur: utroque casu habebitur æquatio, quæ dicitur naturam curvæ exprimere. Hanc ob rem natura cujusque lineæ curvæ per æquationem inter duas variabiles x & y exhibetur; quarum altera x denotet Abscissas in Axe a dato principio A sumtas; altera vero y Applicatas ad Axem normales. Abscissæ autem & Applicatæ conjunctim consideratæ appellantur Coordinatæ *orthogonales*: hincque natura lineæ curvæ per æquationem inter Coordinatas orthogonales definiri dicitur, si habeatur æquatio determinans, qualis Functio ipsius x sit y.

15. Cum igitur linearum curvarum cognitio ad Functiones perducatur, tot varia linearum curvarum existent genera, quot supra Functionum esse vidimus. Ad modum ergo Functionum lineæ curvæ aptissime dividuntur in *algebraïcas* & *transcendentes*. Linea curva scilicet erit algebraïca, si Applicata y fuerit Functio algebraïca ipsius Abscissæ x; seu, cum natura lineæ curvæ exprimitur per æquationem algebraïcam inter Coordinatas x & y, hujus generis lineæ curvæ quoque *geometricæ* vocari solent. Linea curva autem *transcendens* est, cujus natura exprimitur per æquationem transcendentem inter x & y; seu, ex qua fit y Functio transcendens ipsius x. Hæcque est præcipua linearum curvarum continuarum divisio, qua eæ sunt vel *algebraïcæ* vel *transcendentes*.

16. Ad lineam autem curvam ex data Functione ipsius x, qua Applicata y exprimitur describendam, natura Functionis,

an

an ſit uniformis, an multiformis probe eſt attendenda. Ponamus primo y eſſe Functionem uniformem ipſius x, ſeu eſſe $y = P$, denotante P Functionem quamcunque uniformem ipſius x; &, quia ipſi x valorem quemvis determinatum tribuendo, Applicata y unum quoque valorem determinatum recipit, unicuique Abſciſſæ una reſpondebit Applicata, & hanc ob rem Curva ita erit comparata, ut, ſi in quovis Axis RS puncto P ducatur ad ipſum normalis PM, ea ſemper Curvam ſecet, idque in unico puncto M. Singulis ergo Axis punctis ſingula reſpondebunt Curvæ puncta; &, cum Axis utrinque in infinitum extendatur, Curva quoque utrinque in infinitum excurret. Seu Curva ex tali Functione orta continuo tractu utrinque cum Axe in infinitum porrigetur, cujuſmodi tractum figura 2 exhibet, ubi linea curva $mEBMDM$ utrinque ſine ulla interruptione in infinitum excurrit. CAP. I.

17. Sit y Functio biformis ipſius x, ſeu denotantibus litteris P & Q Functiones ipſius x uniformes, ſit $yy = 2Py - Q$ ut ſit $y = P \pm \surd(PP - Q)$. Unicuique igitur Abſciſſæ x reſpondebit duplex Applicata y, utraque exiſtente vel reali vel imaginaria: prius ſi $PP > Q$, poſterius ſi $PP < Q$. Quamdiu ergo uterque valor ipſius y erit realis, Abſciſſæ AP duplex conveniet Applicata PM, PM, ſeu recta ad Axem in P normalis Curvam in duobus punctis M & M trajiciet. Ubi autem fit $PP < Q$, ibi Abſciſſæ nulla convenit Applicata; ſeu normalis ad Axem his in locis Curvæ nuſquam occurret, uti fit in p. At cum ante eſſet $PP > Q$, fieri non poterit $PP < Q$, niſi tranſeundo per caſum $PP = Q$, qui erit limes inter Applicatas reales & imaginarias. Ubi ergo Applicatæ reales deſinunt, uti in C vel G, ibi fit $y = P \pm 0$, ſeu ambæ Applicatæ inter ſe fiunt æquales, ibique Curva curſum inflectendo regredietur. TAB. I. *Fig.* 3.

18. Secundum Figuram apparet, dum Abſciſſa negativa $-x$ contineatur intra limites AC & AE, Applicatam y fieri imaginariam, eſſeque $PP < Q$: ultra E vero ſiniſtrorſum progrediendo Applicatæ iterum fiunt reales, quod fieri nequit niſi

LIB. II. in E ſit $PP = Q$, ideoque ambæ Applicatæ conveniant. Tum rurſus Abſciſſis AP duplex Applicata Pm, Pm reſpondet, donec ad G perveniatur, ubi hæ duæ Applicatæ conveniunt, atque ultra G denuo fiunt imaginariæ. Hujuſmodi ergo linea curva conſtare poterit ex partibus a ſe invicem disjunctis ut $MBDBM$ & $FmHm$ duabus pluribuſve: nihilo vero minus hæ partes conjunctim conſideratæ unam Curvam continuam ſeu regularem conſtituere ſunt cenſendæ, quia hæ ſingulæ partes ex una eademque Functione naſcuntur. Iſtæ ergo Curvæ hanc habent proprietatem, ut, ſi in ſingulis Axis punctis normaliter producantur rectæ MM, eæ ſemper Curvam vel nuſquam vel in duobus punctis trajiciant; niſi forte duo interſectionis puncta in unum coaleſcant, quod fit ſi Applicatæ per puncta D, F, H, vel I ducantur.

19. Si y fuerit Functio triformis ipſius x, ſeu ſi y per hujuſmodi æquationem $y^3 - Py^2 + Qy - R = 0$ definiatur, exiſtentibus P, Q, & R Functionibus uniformibus ipſius x, tum pro quovis valore ipſius x Applicata y tres habebit valores, qui, vel omnes erunt reales, vel unicus tantum, reliquis duobus exiſtentibus imaginariis Hinc omnes Applicatæ Curvam ſecabunt, vel in tribus punctis, vel tantum in unico, niſi ubi duo vel etiam tria interſectionis puncta in unum coleſcunt. Cum igitur unicuique Abſciſſæ ſaltem una Applicata realis conveniat, neceſſe eſt ut Curva utrinque cum Axe in infinitum excurrat. Curva ergo vel uno continuo tractu conſtabit, ut in *Figura quarta;* vel duabus partibus a ſe ſejunctis, ut in *Figura quinta;* vel pluribus, quæ tamen omnes conjunctæ unam eandemque Curvam continuam conſtituunt.

TAB. I. *Fig.* 4. & 5.

20. Si y fuerit Functio quadriformis ipſius x, ſeu ſi y per hujuſmodi æquationem $y^4 - Py^3 + Qy^2 - Ry + S = 0$ definiatur, tum unicuique valori ipſius x, vel quatuor reſpondebunt valores reales ipſius y, vel duo tantum, vel omnino nullus. Hinc, in Curva ex hujuſmodi Functione quadriformi orta ſingulæ Applicatæ Curvam ſecabunt vel in quatuor punctis,

vel

vel in duodus tantum, vel nuſquam, quos ſingulos caſus *Figura Sexta* exhibet; notari autem debent loca *I* & *o*, ubi duo interſectionis puncta in unum coaleſcunt. Hanc ob rem tam dextrorſum quam ſiniſtrorſum vel nulli Curvæ rami in infinitum excurrunt, vel duo vel etiam quatuor. Priori caſu, quo ex neutra parte nulli rami in infinitum extenduntur, Curva undique erit clauſa, ut figura indicat, ſpatiumque definitum includit. Hinc ergo jam concludi poteſt indoles linearum curvarum, quæ formantur ex Functionibus multiformibus quotcunque ſignificatuum. C A P. I. Tab. II. *Fig.* 6.

21. Si ſcilicet fuerit y Functio multiformis, ſeu determinetur per æquationem, in qua n ſit exponens maximæ poteſtatis ipſius y, tum numerus valorum realium ipſius y erit vel n, vel $n - 2$, vel $n - 4$, vel $n - 6$, &c., in totidem ergo punctis quælibet Applicata Curvam interſecabit. Ita, ſi una Applicata Curvam continuam ſecet in m punctis, omnes aliæ Applicatæ Curvam ſecabunt in tot punctis, quorum numerus ſemper numero pari differat ab m; nuſquam ergo Curva ab Applicata ſecari poterit in $m + 1$, vel $m - 1$, vel $m \pm 3$ &c., punctis. Hoc eſt, ſi numerus interſectionum unius Applicatæ fuerit par vel impar, omnes quoque Applicatæ reliquæ Curvam ſecabunt in punctorum numero vel pari vel impari.

22. Si igitur una Applicata Curvam ſecet in punctorum numero impari, tum fieri nequit, ut ulla alia Applicata Curvam nuſquam interſecet: Curva ergo utrinque ad minimum unum habebit ramum in infinitum excurrentem, &, ſi ex alterutra parte plures rami in infinitum extendantur, eorum numerus debet eſſe impar, quia numerus interſectionum unius cujuſque Applicatæ non poteſt eſſe par; ſi ergo rami utrinque in infinitum excurrentes ſimul numerentur, eorum numerus conſtanter erit par. Hoc idem locum habet ſi Applicatæ Curvam interſecent in punctorum numero pari, tum enim ex utraque parte ſeorſim vel nullus, vel duo, vel quatuor &c., rami in infinitum excurrent, unde ergo quoque omnium ramorum in infinitum excurrentium numerus erit par. Jam igitur adepti ſu-