

$m = 8$  vel altior potestas numeri 2, erit 1, 8; 3; 8; 5, 8; 7, 8 char. part. formae  $(a, b, c)$  prout  $M \equiv 1; 3; 5; 7 \pmod{8}$  resp.

III. Vice versa si  $m$  est numerus primus aut numeri primi imparis potestas  $= p^k$ , determinantem  $bb - ac$  metiens, atque  $M$  vel residuum vel non-residuum ipsius  $p$ , prout character formae  $(a, b, c)$  respectu ipsius  $p$  est  $Rp$  vel  $Np$  resp: erit  $M(a, b, c)$  resid. quadr. ipsius  $m$ . Quando enim  $a$  per  $p$  non est diuisibilis,  $aM$  erit res. ipsius  $p$  adeoque etiam ipsius  $m$ ; si itaque  $g$  est valor expr.  $\sqrt{aM} \pmod{m}$ ,  $h$  valor expr.  $\frac{bg}{a} \pmod{m}$ , erit  $gg \equiv aM$ ;  $ah \equiv bg$  adeoque  $agh \equiv bgg \equiv abM$  et  $gh \equiv bM$ ; denique  $ahh \equiv bgh \equiv bbM \equiv bbM - (bb - ac) M \equiv acM$  adeoque  $hh \equiv cM$ , i. e.  $(g, h)$  valor expr.  $\sqrt{M(a, b, c)}$ . Quando vero  $a$  per  $m$  est diuisibilis, certo  $c$  non erit; vnde facile perspicitur, eadem resultare, si pro  $h$  assumatur valor expr.  $\sqrt{cM} \pmod{m}$ , pro  $g$  valor expr.  $\frac{bh}{c} \pmod{m}$ .

Simili modo demonstratur, si  $m$  fuerit  $= 4$  ipsumque  $bb - ac$  metiatur, numerusque  $M$  accipiatur vel  $\equiv 1$  vel  $\equiv 3$  prout 1, 4 vel 3, 4 fuerit char. part. formae  $(a, b, c)$ : fore  $M(a, b, c)$  res. qu. ipsius  $m$ . Nec non, si  $m$  fuerit  $= 8$  vel altior potestas ipsius 2 per quam "  $bb - ac$  diuisibilis sit, atque  $M$  accipiatur  $\equiv 1; 3; 5; 7 \pmod{8}$  prout character part. formae  $(a, b, c)$  respectu numeri 8 postulet:  $M(a, b, c)$  fore res. qu. ipsius  $m$ .

IV. Si determinans formae  $(a, b, c)$  est  $= D$ , atque  $M(a, b, c)$  res. qu. ipsius  $D$ , omnes character particulares formae  $(a, b, c)$  tum respectu singulorum diuisorum primorum imparium ipsius  $D$ , tum respectu numeri 4 vel numeri 8 (si ipsum  $D$  metiuntur) ex numero  $M$  statim cognosci possunt. Ita e. g. quum  $\sqrt{3} (20, 10, 27)$  sit resid. qu. ipsius 440, scilicet  $(150, 9)$  valor expr.  $\sqrt{3} (20, 10, 27)$  sec. mod. 440, atque  $3N_5, 3R_{11}$ : characteres formae  $(20, 10, 27)$  sunt  $3, 8; N_5; R_{11}$ . Soli characteres particulares respectu numerorum 4 et 8, quoties determinantem non metiuntur, nexus necessarium cum numero  $M$  non habent.

V. Vice versa, si numerus  $M$  ad  $D$  primus omnes characteres particulares formae  $(a, b, c)$  in se complectitur (exceptis characteribus respectu numerorum 4, 8, quando ipsum  $D$  non metiuntur): erit  $M(a, b, c)$  res. qu. ipsius  $D$ . Nam ex III patet, si  $D$  sub formam  $\pm A^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma} \dots$  redigatur, ita vt  $A, B, C$  etc. sint numeri primi diuersi, fore  $M(a, b, c)$  resid. qu. singulorum  $A^{\alpha}, B^{\beta}, C^{\gamma}$  etc. Si igitur valor expr.  $\sqrt{M(a, b, c)}$  secundum mod.  $A^{\alpha}$ , est  $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$ ; secundum mod.  $B^{\beta}$ ,  $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}')$ ; sec. mod.  $C^{\gamma}$ ,  $(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}')$  etc. numerique  $g, h$  ita determinantur vt sit  $g \equiv \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$  etc.;  $h \equiv \mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}'$  etc. secundum modulos  $A^{\alpha}, B^{\beta}, C^{\gamma}$  etc. resp. (art. 32): facile perspicietur, fore  $gg \equiv aM, gh \equiv bM, hh \equiv cM$  secundum omnes modulos  $A^{\alpha}, B^{\beta}, C^{\gamma}$  etc. adeoque etiam secundum modulum  $D$  qui illorum est productum.

VI. Propter has rationes numeri tales ut  $M$  vocabuntur *numeri characteristici* formae ( $a, b, c$ ), poteruntque per V. plures huiusmodi numeri nullo negotio inueniri simulac omnes characteres particulares huius formae sunt eruti; simplissimi autem tentando plerumque euoluuntur facillime. Manifestum est, si  $M$  sit numerus characteristicus formae primitiae datae determinantis  $D$ , omnes numeros, ipsi  $M$  secundum mod.  $D$  congruos, fore numeros characteristicos eiusdem formae; formas in eadem classe, siue etiam in classibus diuersis ex eodem genere, contentas eosdem numeros characteristicos habere, quamobrem quiuis numerus characteristicus formae datae etiam toti classi et generi tribui potest; denique semper esse numerum characteristicum formae classis et generis principalis, siue quamlibet formam e genere principali esse residuum determinantis sui.

VII. Si  $(g, h)$  est valor expr.  $\sqrt{M(a, b, c)}$  (mod.  $m$ ), atque  $g' \equiv g, h' \equiv h$  (mod.  $m$ ): erit etiam  $(g', h')$  valor eiusdem expressionis. Tales valores pro aequivalentibus haberi possunt; contra si  $(g, h), (g', h')$  sunt valores eiusdem expr.  $\sqrt{M(a, b, c)}$ , neque tamen simul  $g' \equiv g, h' \equiv h$  (mod.  $m$ ), diuersi sunt censendi. Manifesto quoties  $(g, h)$  est valor talis expressionis, etiam  $(-g, -h)$  erit, facileque demonstratur, hos valores semper esse diuersos nisi  $m = 2$ . Aequa facile demonstratur, expressionem  $\sqrt{M(a, b, c)}$  (mod.  $m$ ) plures valores diuersos quam duos tales (oppositos) habere non posse, quando  $m$  sit aut numerus primus impar aut nu-