LIB. II. duplex, vel triplex, vel totuplex, prout quis voluerit. Positis enim $AP = p$, $PM = q$, ac denotantibus P, Q, R, S, &c. Functiones quascunque Coordinatarum x & y, manifestum est hanc æquationem $P(x - p) + Q(y - q) = 0$, exprimere Curvam per punctum M transeuntem; si enim ponatur $x = AP = p$, fiet $y = PM = q$; dummodo neque P per $y - q$, nec Q per $x - p$ fuerit divisibile, vel dummodo hi Factores $x - p$ & $y - q$, a quibus transitus Curvæ per punctum M pendet, ex æquatione per divisionem non eliminentur. Perspicuum autem est omnes Curvas, quæ quidem per punctum M transeant, in ista æquatione $P(x - p) + Q(y - q) = 0$, contineri; erit vero M punctum simplex, si hæc æquatio non fuerit ejus formæ, qualem pro punctis multiplicibus mox exhibebimus.

300. Si M debeat esse punctum duplex, æquatio pro Curva in hac forma generali continebitur $P(x - p)^2 + Q(x - p)(y - q) + R(y - q)^2) = 0$, dummodo hæc forma per divisionem non pereat. Perspicitur hinc in Lineas secundi ordinis punctum duplex cadere non posse, quo enim illa æquatio secundi tantum sit, necesse est ut P, Q, & R sint quantitates constantes; tum autem æquatio non erit pro Linea curva, sed pro duabus rectis. Sin autem P, Q, R sint Functiones primi ordinis, ut $\alpha x + \beta y + \gamma$, tum Lineæ habebuntur tertii ordinis in M punctum duplex habentes. At vero Linea tertii ordinis, nisi ex tribus rectis constet, plus uno puncto duplici habere nequit. Ponamus enim dari duo puncta duplicia, atque per ea Lineam rectam duci; hæc Linea recta Curvam in quatuor punctis secaret, quod naturæ Linearum tertii ordinis adversatur. Linea quarti ordinis duo tantum habebit puncta duplicia; Linea quinti ordinis plura tribus habere non poterit, & ita porro.

301. Sit M punctum Curvæ triplex, atque natura Lineæ curvæ hac exprimetur æquatione $P(x - p)^3 + Q(x - p)^2(y - q) + R(x - p)(y - q)^2 + S(y - q)^3 = 0$. Hæc æquatio igitur si Lineam curvam definiat, tertium ordinem superabit,

perabit; namque si P, Q, R, & S essent constantes, quod Linearum tertii ordinis natura exigit, tum æquatio tres haberet Factores formæ $\alpha(x-p)+\beta(y-q)$, ideoque foret pro tribus rectis. In Curvas ergo quarto ordine simpliciores punctum triplex non cadit; neque Lineæ quinti ordinis plus uno puncto triplici habere possunt, alioquin enim daretur recta Lineam quinti ordinis in sex punctis secans. Nihil autem impedit quo minus Linea sexti ordinis duo habeat puncta triplicia.

CAP. XIII.

302. Si æquatio in hac forma contineatur: $P(x-p)^4 + Q(x-p)^3(y-q) + R(x-p)^2(y-q)^2 + S(x-p)(y-q)^3 + T(y-q)^4 = 0$, tum Curva in M habebit punctum quadruplex. Linea ergo curva simplicissima, quæ puncto quadruplici gaudeat, ad Linearum ordinem quintum pertinebit. Duo vero puncta quadruplicia non cadunt nisi in Lineas aut octavi aut altioris gradus. Simili modo æquationes generales exhiberi possunt pro Lineis, quæ in M habeant punctum quintuplex, vel pro lubitu multiplex.

303. Quod, si autem M fuerit vel punctum duplex vel triplex vel utcunque multiplex, tum vel totidem Curvæ rami se mutuo in puncto M secabunt sive tangent; vel, si numerus ramorum se intersecantium sit minor, tum unum plurave puncta conjugata in eodem puncto M concrescent: qui Curvæ status cognoscetur ex iis, quæ ante sunt tradita. Scilicet, in Functionibus P, Q, R, S, &c., ubique loco x & y scribi debent p & q, & t & u loco Factorum $x-p$ & $y-q$; tum enim prodibunt ejusmodi æquationes, ex quibus constitutio Curvæ & ramorum se in M intersecantium Tangentes definiri poterunt.

Lib. II.

CAPUT XIV.

De curvatura Linearum curvarum.

304. Quemadmodum in superiori Capite lineas rectas indagavimus, quæ in quovis puncto Lineæ curvæ ipsius directionem indicabant, ita hic Lineas curvas simpliciores investigabimus, quæ in quovis loco cum Curva proposita tam exacte congruant, ut saltem per minimum spatium quasi confundantur. Sic enim cognita indole Curvæ simplicioris, simul Curvæ propositæ natura inde colligetur. Simili methodo scilicet hic utemur, qua supra ad naturam ramorum in infinitum extensorum scrutandam sumus usi; primo videlicet investigando Lineam rectam, quæ Curvam tangat, deinde vero Lineam curvam simpliciorem, quæ cum Curva proposita multo magis conveniat, eamque non solum tangat, sed quasi osculetur. Vocari autem ejusmodi Linearum curvarum arctissimus contactus solet Osculatio.

Tab. XV. Fig. 55.

305. Sit igitur proposita æquatio quæcunque inter Coordinatas orthogonales x & y, atque ad naturam minimæ Curvæ portionis Mm circa punctum M versantis indagandam, cum inventa sit Abscissa $AP = p$ & Applicata $PM = q$, ponatur in Axe MR Abscissa minima $Mq = t$, & Applicata $qm = u$; eritque $x = p + t$, & $y = q + u$; quibus valoribus in æquatione substitutis, perveniatur ad hanc æquationem

$$0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + Gt^2u + \&c.,$$

quæ exprimet naturam Curvæ ejusdem ad Axem MR relatæ. Quoniam autem has novas Coordinatas t & u minimas statuimus, sequentes termini quasi infinities erunt minores quam antecedentes; ideoque præ his sine errore rejici poterunt.

306. Nisi ergo ambo coëfficientes primi A & B evanescant, rejectis

rejectis ſequentibus terminis omnibus, æquatio $0 = At + Bu$ oſtendet Lineam rectam $M\mu$ quæ Curvam in puncto M tanget, hocque loco cum Curva communem habet directionem. Erit ergo $Mq : q\mu = B : -A$; unde, ob cognitas quantitates A & B, poſitio Tangentis $M\mu$ innoteſcit, quæ cum Curvam in puncto tantum M contingat, videamus quantum Curva Mm porro a recta $M\mu$ ſaltem per minimum ſpatium aberret. In hunc finem aſſumamus normalem MN pro Axe, in quem ex m Applicata orthogonalis mr ducatur, ac vocetur $Mr = r$; $rm = s$; erit $t = \frac{-Ar + Bs}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$ & $u = \frac{-As - Br}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$, & $r = \frac{-At - Bu}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$, & $s = \frac{Bt - Au}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$. Quare, cum ſit

$$-At - Bu = Ct^2 + Dtu + Eu^3 + Ft^3 + Gttu + \&c.,$$

erit r quantitas infinities minor, quam t & u, ac propterea erit quoque r quantitas infinities minor quam s; nam s per t & u, at r per ipſarum t & u quadrata vel poteſtates ſuperiores determinatur.

307. Naturam ergo Curvæ Mm multo propius cognoſcemus, ſi terminos quoque $Ct^2 + Dtu + Eu^2$ in computum ducamus, atque ſequentes tantum negligamus; ſicque habebimus inter t & u hanc æquationem $-At - Bu = Ct^2 + Dtu + Eu^2$, in qua ſi loco t & u valores ſuperiores ſubſtituamus, habebimus $r\sqrt{(A^2 + B^2)} = \frac{(A^2C + ABD + B^2E)rr}{A^2 + B^2} + \frac{(A^2D - B^2D - 2ABC + 2ABE)rs}{A^2 + B^2} + \frac{(A^2E - ABD + B^2C)ss}{A^2 + B^2}$.
At, quia r infinities minor eſt quam s, termini rr & rs præ termino ss evaneſcent, fietque $ss = \frac{(A^2 + B^2\, r\sqrt{(A^2 + B^2)}}{A^2E - ABD + B^2C}$, quæ æquatio exprimit naturam Curvæ Curvam propoſitam in M oſculantis.

308. Curvæ ergo Arcus minimus Mm congruet cum Vertice Parabolæ ſuper Axe MN deſcriptæ, cujus Latus rectum

ſeu

LIB. II. seu Parameter est $= \frac{(A^2 + B^2)\sqrt{(A^2 + B^2)}}{A^2E - ABD + B^2C}$: unde qualis est curvatura hujus Parabolæ in vertice talis erit Curvæ propositæ curvatura in puncto M. Cum autem nullius Curvæ curvatura distinctius cognoscatur quam Circuli, quoniam ipsius curvatura ubique est eadem, eoque major existit, quo minor fuerit radius; commodius erit curvaturam Curvarum definire per Circulum æqualis curvaturæ, qui *Circulus osculator* vocari solet. Hanc ob rem oportebit Circulum definire cujus curvatura conveniat cum curvatura propositæ Parabolæ in ipsius Vertice, quo tum Circulum istum in locum Parabolæ osculantis substituere liceat.

309. Ad hoc efficiendum, contemplemur curvaturam Circuli tanquam incognitam, eamque modo exposito per curvaturam Parabolæ exprimamus, sic enim vicissim pro Parabola osculante Circulus osculator substitui poterit. Sit igitur Curva Mm proposita Circulus radio $= a$ descriptus, cujus natura exprimetur æquatione $yy = 2ax - xx$. Sumta ergo $AP = p$, & $PM = q$ erit, $qq = 2ap - pp$. Jam ponatur $x = p + t$ & $y = q + u$, atque orietur hæc æquatio $qq + 2qu + uu = 2ap + 2at - pp - 2pt - tt$, quæ, ob $qq = 2ap - pp$, reducitur ad hanc formam $0 = 2at - 2pt - 2qu - tt - uu$, quæ cum superiori forma comparata dat $A = 2a - 2p$; $B = -2q$; $C = -1$, $D = 0$, & $E = -1$, unde fit $AA + BB = 4(aa - 2ap + pp + qq) = 4aa$, & $(AA + BB)\sqrt{(AA + BB)} = 8a^3$ atque $AAE - ABD + BBC = -AA - BB = -4aa$. Unde Circulum, cujus radius $= a$, in quovis puncto osculatur Parabolæ vertex, cujus natura exprimitur æquatione $ss = 2ar$; ideoque vicissim quam Curvam osculatur Vertex Parabolæ $ss = br$, eandem osculabitur Circulus, cujus radius est $= \frac{1}{2}b$.

310. Cum igitur supra invenerimus Curvam Mm osculari Parabolam cujus æquatio sit $ss = \frac{(AA + BB)\sqrt{(A^2 + B^2)}}{A^2E - ABD + B^2C}r$,

mani-