batur, attamen per sequentem commode absoluitur. Si illic simul esset pNq, qNp, foret $-pRq$, $-qRp$, vnde facile deriuatur, -1 esse numerum characteristicum formae $(p, 0, q)$, quae proin, (secundum theoriam formarum ternariarum) per formam $xx + yy + zz$ repraesentari poterit. Sit $ptt + quu = (\alpha t + \beta u)^2 + (\alpha' t + \beta' u)^2 + (\alpha'' t + \beta'' u)$, siue $\alpha\alpha + \alpha'\alpha' + \alpha''\alpha'' = p$, $\beta\beta + \beta'\beta' + \beta''\beta'' = q$, $\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = 0$, eruntque ex aequatt. 1 et 2, omnes α, α', α'', β, β', β'' impares; tum vero manifesto aequatio tertia consistere nequit. — Haud absimili modo etiam casus II absolui potest.

298. Problema. *Designantibus a, b, c numeros quoscunque, quorum tamen nullus $= 0$: inuenire conditiones resolubilitatis aequationis $axx + byy + czz = 0 \ldots (\omega)$.*

Sol. Sint $\alpha\alpha$, $\beta\beta$, $\gamma\gamma$ quadrata maxima ipsos bc, ac, ab resp. metientia, fiatque $\alpha a = \beta\gamma A$, $\beta b = \alpha\gamma B$, $\gamma c = \alpha\beta C$. Tum A, B, C erunt integri, inter se primi; aequatio (ω) autem resolubilis erit vel non erit, prout haec $AXX + BYY + CZZ = 0 \ldots (\Omega)$ resolutionem admittit vel non admittit, quod per art. 294 diiudicari poterit.

Dem. Ponatur $bc = \mathfrak{A}\alpha\alpha$, $ac = \mathfrak{B}\beta\beta$, $ab = \mathfrak{C}\gamma\gamma$, eruntque $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ integri a factoribus quadratis liberi atque $\mathfrak{A} = BC$, $\mathfrak{B} = AC$, $\mathfrak{C} = AB$; hinc $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} = (ABC)^2$, adeoque $ABC = A\mathfrak{A} = B\mathfrak{B} = \mathfrak{C}C$ necessario integer. Sit numerorum $\mathfrak{A}$, $A\mathfrak{A}$ diuisor comm. max. m, atque $\mathfrak{A}$

$= gm$, $A\mathfrak{A} = hm$, eritque g primus ad h, nec non (quia $\mathfrak{A}$ liber a fact. qu.) ad m. Iam fit $hhm = gAA\mathfrak{A} = g\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, vnde g metietur ipsum hhm, quod manifesto impossibile est, nisi $g = \pm 1$. Hinc $\mathfrak{A} = \pm m$, $A = \pm h$, et proin integer, et perinde B, C integri erunt. *Q. E. P.* — Quam $\mathfrak{A} = BC$ factores quadratos non implicet, necessario B, C inter se primi esse debebunt; et similiter A ad C et ad B primus erit. *Q. E. S.* — Denique patet, si aequationi (Ω) satisfaciat $X = P$, $Y = Q$, $Z = R$, aequationem (ω) resolui per $x = \alpha P$, $y = \beta Q$, $z = \gamma R$; et vice versa si huic satisfiat per $x = p$, $y = q$, $z = r$, illi satisfieri per $X = \beta\gamma p$, $Y = \alpha\gamma q$, $Z = \alpha\beta r$, vnde vel vtraque resolubilis vel neutra. *Q. E. T.*

299. Problema. *Proposita forma ternaria $f = axx + a'x'x' + a''x''x'' + 2bx'x'' + 2b'xx'' + 2b''xx'$, inuenire, an cifra per eam repraesentari possit (per valores indeterminatarum qui non simul $= 0$).*

Sol. I. Quando $a = 0$, valores ipsorum x', x'' ad lubitum assumi possunt, patetque ex aequatione $a'x'x' + 2bx'x'' + a''x''x'' = -2x(b'x'' + b''x')$, x inde valorem determinatum rationalem nancisci; quoties pro x hoc modo fractio prouenit, oportet tantummodo, valores ipsorum x, x', x'' per fractionis denominatorem multiplicare, habebunturque integri. Vnice excludendi sunt tales valores ipsorum x', x'', qui reddunt $b'x'' + b''x' = 0$, nisi simul faciant $a'x'x' + 2bx'x'' + a''x''x'' = 0$, in quo casu x ad libitum accipi poterit. Simul patet, hoc modo omnes solutiones possibiles obtineri posse. Ceterum is casus vbi b' et $b'' = 0$ huc non pertinet; tunc enim x in f non ingreditur, siue f est forma binaria, cifraeque repraesentabilitas per f e theoria talium formarum diiudicari debet.

II. Quando vero non est $a = 0$, aequationi $f = 0$ aequiualebit haec $(ax + b''x' + b'x'')^2 - A''x'x' + 2Bx'x'' - A'x''x'' = 0$, ponendo $b''b'' - aa' = A''$, $ab - b'b'' = B$, $b'b' - aa'' = A'$. Iam quando hic $A'' = 0$, neque vero $B = 0$, manifestum est, si $ax + b''x' + b'x''$ atque x'' ad lubitum assumantur, x et x' inde rationaliter determinari, et quando integri non fiant, saltem multiplicatorem idoneum integros producturum. Pro vnico valore ipsius x'' valor ipsius $ax + b''x' + b'x''$ non est arbitrarius sed quoque $= 0$ poni debet; tunc vero x' ad lubitum assumi poterit valoremque rationalem ipsius x producet. — Quando vero simul A'' et $B = 0$, patet, si A'' sit quadratum $= kk$, aequationem $f = 0$ reduci ad has duas lineares (e quibus *vel* vna *vel* altera locum habere debet) $ax + b''x' + (b' + k)x'' = 0$, $ax + b''x' + (b' - k)x'' = 0$; si vero (in eadem hyp.) A'' est nonquadratus, manifesto solutio aequ. propositae pendet ab his (quae *simul* locum habere debent) $x'' = 0$ et $ax + b''x' = 0$.

Ceterum vix necessarium erit obseruare, methodum in I etiam applicari posse, quando a' vel $a'' = 0$, methodumque in II quando $A' = 0$.

III. Quando vero nec a nec $A'' = 0$, aequationi $f = 0$ aequiualet haec $A'(ax + b''x' + b'x'')$