LIB. II. ex quibus unam æquationem, in qua y amplius non insit, conflari oporteat. Ad hoc multiplicetur æquatio posterior per hanc quantitatem

$$Py^{k-n} + Ay^{k-n-1} + By^{k-n-2} + Cy^{k-n-3} + \&c.,$$

quæ $k-n$ litteras arbitrarias A, B, C, &c., continet. Æquatio vero prior multiplicetur per hanc quantitatem

$$py^{k-m} + ay^{k-m-1} + by^{k-m-2} + cy^{k-m-3} + \&c.,$$

in qua $k-m$ litteræ arbitrariæ a, b, c, &c., insunt. Tum ambo producta ita inter se æqualia ponantur ut omnes termini qui continent potestates ipsius y se mutuo destruant, terminique ultimi ipsa y carentes æquationem quæsitam exhibeant. Summæ autem potestates jam sponte se destruunt, in utroque enim producto summus terminus erit Ppy^k; supersunt ergo adhuc $k-1$ termini, qui destrui debebunt, ad quod totidem litteræ arbitrariæ sunt determinandæ. Numerus autem litterarum arbitrariarum sic introductarum est $2k-m-n$, qui cum æqualis esse debeat $k-1$, fiet $k = m+n-1$.

484. Hanc ob rem prima æquatio multiplicetur per hanc quantitatem indeterminatam

$$py^{n-1} + ay^{n-2} + by^{n-3} + cy^{n-4} + \&c.,$$

secunda vero æquatio multiplicetur per hanc

$$Py^{m-1} + Ay^{m-2} + By^{m-3} + Cy^{m-4} + \&c.$$

Singulisque terminis, in quibus similes ipsius y occurrunt potestates, inter se coæquatis, nascentur sequentes æquationes

$$\begin{aligned} Pp &= Pp \\ Pa + Qp &= pA + qP \\ Pb + Qa + Rp &= pB + qA + rP \\ Pc + Qb + Ra + Sp &= pC + qB + rA + sP \\ &\&c. \end{aligned}$$

Hujus-

Hujusmodi ergo æquationes, prima $Pp = Pp$ simul computata, habebuntur numero $m+n$, ex quibus si litteræ arbitrariæ A, B, C, &c. a, b, c, &c. determinentur, ultima æquatio nonnisi litteras datas P, Q, R, &c. p, q, r, &c. continebit, sicque quæsito satisfaciet.

485. Hæc autem litterarum arbitrariarum determinatio facilius expedietur, si membra uniuscujusque æquationis æqualia ponantur novis indeterminatis quantitatibus α, β, γ, &c.; quod ex sequenti exemplo clarius apparebit.

Sint propositæ hæ æquationes duæ

I.

$$Py^2 + Qy + R = 0$$

II.

$$py^3 + qy^2 + ry + s = 0,$$

multiplicetur ergo prima per $py^2 + ay + b$, & altera per $Py + A$; prodibuntque hæ æqualitates

$$\begin{aligned} Pp &= Pp \\ Pa + Qp &= pA + qP = \alpha \\ Pb + Qa + Rp &= qA + rP = \beta \\ Qb + Ra &= rA + sP \\ Rb &= sA \end{aligned}$$

Æquatione prima identica omissa, ex secunda fit

$$a = \frac{\alpha - Qp}{P}$$

$$A = \frac{\alpha - qP}{p}.$$

Ex tertia vero obinebitur

$$b = \frac{\beta}{P} - \frac{Qa}{P} - \frac{Rp}{P} = \frac{\beta}{P} - \frac{\alpha Q}{P^2} + \frac{Q^2p}{P^2} - \frac{Rp}{P}$$

&

$$\beta = \frac{\alpha q}{p} - \frac{qqP}{p} + rP,$$

 quo

LIB. II.

quo valore ipsius β substituto, erit

$$b = \frac{\alpha q}{Pp} - \frac{qq}{p} + r - \frac{\alpha Q}{P^2} + \frac{Q^2 p}{P^2} - \frac{Rp}{P},$$

seu

$$b = \frac{\alpha(Pq - Qp)}{P^2 p} + \frac{(Q^2p^2 - P^2q^2)}{P^2 p} + \frac{(Pr - Rp)}{P},$$

qui valor, in quarta æquatione substitutus, dabit

$$\frac{\alpha Q(Pq - Qp)}{P^2 p} - \frac{Q(Pq - Qp)(Qp + Pq)}{P^2 p} + \frac{Q(Pr - Rp)}{P} + \frac{\alpha R}{P} - \frac{RQp}{P} = \frac{\alpha r}{p} - \frac{Prq}{p} + Ps,$$

seu, per $P^2 p$ multiplicando,

$$\alpha Q(Pq - Qp) + \alpha P(Rp - Pr) - Q(Pq - Qp)(Pq + Qp) + PQp(Pr - 2Rp) + P^3qr - P^3ps = 0.$$

Ergo fiet

$$\alpha = \frac{P^2Qq^2 - Q^3pp - P^2Qpr + 2PQRp^2 - P^3qr + P^3ps}{PQq - Q^2p + PRp - P^2r}.$$

Ultima vero æquatio dabit

$$\frac{\alpha R(Pq - Qp)}{P^2 p} - \frac{R(P^2q^2 - Q^2p^2)}{P^2 p} + \frac{R(Pr - Rp)}{P} = \frac{\alpha S}{p} - \frac{Pqs}{p},$$

ex qua quoque elicitur

$$\alpha = \frac{P^2Rq^2 - Q^2RP^2 - P^2Rpr + PR^2p^2 - P^3qs}{PRq - QRp - P^2s},$$

qui gemini ipsius α valores præbebunt æquationem quæsitam, quæ tandem reducetur ad eandem formam, quam supra §. 480. pro eodem casu invenimus.

CAPUT

CAPUT XX.

De Constructione æquationum.

486. Quæ in superiori Capite de intersectione Curvarum sunt exposita potissimum ad constructiones æquationum altiorum graduum traduci solent. Cum enim duabus Curvis propositis æquationem invenerimus, cujus radices intersectionum locos exhibeant; ita vicissim intersectiones duarum Curvarum inservire possunt radicibus æquationum indicandis. Atque hic modus maximam affert utilitatem si radices cujuspiam æquationis per Lineas exprimi debeant; descripta namque utraque Curva ad hunc finem accommodata, intersectiones facile notabuntur, unde si ad Axem Applicatæ demittantur, Abscissæ præbebunt veras æquationis radices. Si autem incommodum supra memoratum locum habeat, tum quidem omnes Abscissæ sic inventæ radices præbebunt, at fieri poterit ut æquatio proposita plures complectatur radices, quam per talem constructionem reperiuntur.

487. Cum igitur proposita fuerit æquatio algebraïca incognitam x involvens, cujus radices assignari oporteat, duæ quærendæ sunt Lineæ curvæ, seu duæ æquationes inter binas variabiles x & y, quæ ita sint comparatæ, ut, si ex iis Applicata y eliminetur, ipsa æquatio proposita resultet. Quo facto istæ duæ Curvæ super communi Axe atque ad idem Abscissarum initium describantur, punctaque, quibus se mutuo intersecabunt, notentur. Tum ex his intersectionum punctis ad Axem Applicatæ normales demittantur, quæ in Axe exhibebunt Abscissas singulis æquationis propositæ radicibus æquales. Hoc itaque modo singularum radicum quæsitarum valores veri assignabuntur, nisi forte eveniat, ut æquatio plures contineat radices, quam intersectiones adesse deprehendantur.

 488. Ante-

LIB. II. 488. Antequam autem modum tradam, quo binæ illæ Curvæ constructioni datæ æquationis inservientes inveniri queant, a posteriori eas æquationes perpendamus, quarum resolutio ex datis duabus Curvis absolvitur. Ac primo quidem sint ambæ Lineæ resolventes rectæ EM, FM, sese in puncto M intersecantes. Sumatur recta EF pro Axe, in eoque punctum A pro initio Abscissarum, unde educta normalis ABC rectam priorem in B, posteriorem in C secet. Sit $AE = a$, $AF = b$; $AB = c$; $AC = d$; tum vero ponatur Abscissa $AP = x$; Applicata $PM = y$; eritque pro priori recta EM $a : c = a + x : y$, seu $ay = c(a+x)$; & pro altera $b : d = b - x : y$, seu $by = d(b - x)$. Ex his æquationibus si eliminetur y, prodibit $bc(a+x) = ad(b-x)$ seu $x = \frac{abd - abc}{bc + ad} = \frac{ab(d-c)}{bc+ad}$. Per intersectionem ergo duarum Linearum rectarum construi poterit æquatio simplex $x = \frac{ab(d-c)}{bc+ad}$; ad quam formam omnes omnino æquationes simplices revocari possunt.

TAB. XXIII. Fig. 97.

489. Lineas rectas ratione facilitatis describendi excipit Circulus, & hanc ob rem videamus cujusmodi æquationes per intersectionem rectæ & Circuli construi queant. Sit igitur, sumta AP pro Axe & A pro Abscissarum initio, descripta Linea recta EM: positisque $AE = a$, $AB = b$, & Coordinatis $AP = x$, $PM = y$; erit $a : b = a + x : y$; ideoque $ay = b(a + x)$, quæ est æquatio pro Linea recta. Deinde sit Radius Circuli $CM = c$, demissoque ex ejus Centro C in Axem perpendiculo CD, vocetur $AD = f$, $CD = g$; erit $DP = x - f$, & $PM - CD = y - g$. Jam, cum sit ex natura Circuli $CM^2 = DP^2 + (PM - CD)^2$, erit æquatio pro Circulo $cc = xx - 2fx + ff + yy - 2gy + gg = (x - f)^2 + (y - g)^2$. At æquatio pro recta dat $y = \frac{ab + bx}{a}$, unde fit $y - g = \frac{a(b-g) + bx}{a} = b - g + \frac{bx}{a}$,

TAB. XXIII. Fig. 98.

quo