$y = \frac{6aax + 6axx}{2aa + 2ax} = 3x$. Quoniam vero illa æquatio eſt diviſibilis per $y - 3x$; ſi dividatur, orietur æquatio ab y libera hæc $2aa + 2ax = 0$, unde oritur $x = -a$. Deberet ergo eſſe interſectio Curvarum reſpondens Abſciſſæ $x = -a$, cui in Parabola nulla Applicata realis reſpondet: in Linea autem altera tertii ordinis, poſito $x = -a$, fit $y^3 - 3ayy + 2aay - 6a^3 = 0$, ex qua una naſcitur Applicata realis, $y = 3a$, reliqui duo ipſius y valores in æquatione $yy + 2aa = 0$, contenti ſunt imaginarii; hoc ſcilicet loco Applicatæ iſtæ imaginariæ æquales fiunt Applicatis Parabolæ imaginariis eodem hoc loco; ſicque habebuntur duæ interſectiones imaginariæ. Habebuntur vero etiam duæ interſectiones reales ex ſuperioris æquationis Factore $y - 3x = 0$, oriundæ; ex qua fit $9xx - 2ax = 0$. Primum ergo in ipſo Abſciſſarum initio, ubi $x = 0$, ſimulque $y = 0$, exiſtit interſectio, altera reſpondet Abſciſſæ $x = \frac{2a}{9}$, ubi eſt $y = 3x = \frac{2a}{3}$.

473. Hoc igitur caſu perventum eſt ad interſectiones imaginarias, etiamſi in negotio eliminationis ipſius y, prodierit æquatio $2axy - 6aax + 2aay - 6axx = 0$, in qua y unicam tantum obtinet dimenſionem, ita ut inde y per Functionem rationalem ipſius x exprimi poſſe videatur, quod ante tanquam criterium nullarum interſectionum imaginariarum annotavimus. Atque revera, ſi hæc æquatio nullos haberet diviſores, interſectionibus imaginariis nullus locus relinqueretur, quoniam vero hoc caſu per diviſionem elicitur æquatio Applicatam y non amplius involvens, perinde eſt, ac ſi y per Functionem rationalem ipſius x exprimi non poſſet. Quoties ſcilicet hujuſmodi æquatio in Factores eſt reſolubilis, pro unoquoque Factore ſeorſim judicium eſt ferendum, unde fit, ut, dum alter Factor interſectiones imaginarias penitus reſpuit, alter eaſdem admittat.

474. His perpenſis, oſtendamus aliquanto diſtinctius, quemadmodum

LIB. II. admodum duabus quibusvis Curvis propositis earum intersectiones definiri debeant: atque, cum hæc investigatio ab eliminatione alterius Coordinatæ y pendeat, ad hujus tantum dimensiones, quas in utraque æquatione obtinet, erit respiciendum. Eliminatio enim eodem modo absolvetur, utcunque altera Coordinata x utramque æquationem afficiat. Sint igitur P, Q, R, S, T &c., itemque p, q, r, s, t &c., Functiones quæcunque rationales ipsius x: ac primo quidem ponamus ambas Curvas, quarum intersectiones requiruntur, exprimi his æquationibus

I.

$$P + Qy = 0$$

II.

$$p + qy = 0$$

multiplicetur prior æquatio per p, posterior per P; atque hæ æquationes a se invicem subductæ relinquent hanc æquationem ab y prorsus liberam:

$$pQ - Pq = 0.$$

Hujus igitur æquationis, in qua sola incognita x, præter constantes, inest, omnes radices reales ipsius x præbebunt puncta in Axe, quibus intersectiones imminent. Pro quocunque valore ipsius x invento habebitur valor ipsius y realis ex alterutra æquatione $y = \frac{-P}{Q} = \frac{-p}{q}$, qui intersectionem indicabit; unde, si utriusque Curvæ Applicata y exprimatur per Functionem rationalem seu uniformem ipsius x, nullæ intersectiones imaginariæ locum inveniunt.

475. Exprimatur jam alterius Curvæ Applicata y per Functionem uniformem ipsius x ut ante; alterius vero per Functionem biformem, ita ut sit

I.

I.

$$P + Qy = 0$$

II.

$$p + qy + ryy = 0,$$

multiplicetur prior æquatio per p, poſterior per P, & a ſe invicem ſubtrahantur, factaque diviſione per y, erit

III.

$$pQ - Pq - Pry = 0,$$

ſeu

$$(Pq - pQ) + Pry = 0.$$

Nunc multiplicetur prima per Pr, & tertia per Q; atque, facta ſubtractione, emerget hæc æquatio ab y libera.

$$PPr - PQq + pQQ = 0.$$

Hujus æquationis ergo ſingulæ radices præbebunt Abſciſſas interſectionibus reſpondentes, quibus cum Applicatæ reales $y = \frac{-P}{Q} = \frac{pQ - Pq}{Pr}$ conveniant, interſectiones erunt reales.

476. Sit, ut ante, alterius Curvæ Applicata æqualis Functioni uniformi ipſius x; alterius vero Curvæ Applicata exprimatur per æquationem cubicam; ſeu, ſit Functio triformis ipſius x, ita ut binæ æquationes propoſitæ ſint hujuſmodi:

I.

$$P + Qy = 0$$

II.

$$p + qy + ryy + sy^3 = 0.$$

Multiplicetur prior per p & poſterior per P; alteraque ab altera ſubducta ac diviſione per y facta, erit

III.

$$(Pq - pQ) + Pry + Psyy = 0,$$

LIB. II. in qua ſi loco y valor ex prima $y = \frac{-P}{Q}$ ſubſtituatur & a fractionibus liberetur, proveniet iſta æquatio

$$PQQq - pQ^3 - P^2Qr + P^3s = 0,$$
ſeu
$$Q^3p - PQ^2q + P^2Qr - P^3s = 0,$$

quæ eadem ſtatim prodit, ſi in ſecunda æquatione loco y ejus valor ex prima $\frac{-P}{Q}$ ſubſtituatur. Hujus ergo ultimæ æquationis omnes radices reales ipſius x, quoniam ſingulis per primam æquationem $y = \frac{-P}{Q}$ Applicatæ reales reſpondent, totidem interſectiones veras monſtrabunt.

477. Simili modo, ſi alterius Curvæ Applicata y exprimatur per æquationem quatuor pluriumve dimenſionum, dum alterius Applicata manet Functio uniformis ſeu rationalis ipſius x, facile incognita y eliminatur. Sint enim ambæ æquationes propoſitæ

I.
$$P + Qy = 0$$
II.
$$p + qy + ry^2 + sy^3 + ty^4 = 0;$$

atque, cum ex priori ſit $y = \frac{-P}{Q}$, hic valor in altera ſubſtitutus dabit æquationem inter x & cognitas tantum hanc

$$Q^4p - PQ^3q + P^2Q^2r - P^3Qs + P^4t = 0.$$

Hujus ergo æquationis ſingulæ radices ipſius x reales ſuppeditabunt totidem interſectiones veras; propterea quod unicuique Abſciſſæ x ex prima æquatione aſſignari poteſt una Applicata y realis, nempe $y = \frac{-P}{Q}$.

478. Exprimatur jam utriuſque Curvæ Applicata y per æquationem

quationem quadraticam; ac primo quidem puram, ita ut æquationes ambæ ſint hujuſmodi CAP. XIX.

$$\text{I.}\quad P + Ryy = 0$$

$$\text{II.}\quad p + ryy = 0$$

ex quibus, eliminando yy, ſtatim obtinetur hæc æquatio,

$$Pr - Rp = 0,$$

cujus ſingulæ radices reales tum ſolum demonſtrant interſectiones veras, ſi valores ipſius x inventi ita fuerint comparati, ut $\frac{-P}{R}$ vel $\frac{-p}{r}$ fiat quantitas affirmativa; tum enim, ob $yy = \frac{-P}{R} = \frac{-p}{r}$, Applicata y duplicem nanciſcetur valorem realem, alterum affirmativum alterum negativum; ideoque cuique Abſciſſæ x valori ex æquatione $Pr - Rp = 0$, invento, binæ reſpondebunt interſectiones, ab Axe utrinque æqualiter diſtantes, quod, cum Axis utriuſque Curvæ Diameter exiſtat, aliter evenire non poteſt. Quod ſi autem quis valor ipſius x ex æquatione $Pr - Rp = 0$, inventus expreſſionibus $\frac{-P}{R} = \frac{-p}{r}$ inducat valorem negativum; tum, ob y imaginarium, interſectiones quoque erunt imaginariæ.

479. Adſit nunc in utraque æquatione propoſita quadratica ſecundus quoque terminus continens y, ſintque ambæ æquationes propoſitæ iſtæ

$$\text{I.}\quad P + Qy + Ryy = 0$$

$$\text{II.}\quad p + qy + ryy = 0$$

Ad incognitam y ex his æquationibus eliminandam multiplicetur primum illa æquatio per p, hæc vero per P, factaque ſubtractione & diviſione per y, erit

 III.