LIB. II. motus directione. Ideoque punctum, quod Curvam $M\mu$ motu suo describit in $M$ promovebitur secundum directionem Tangentis $M\mu$; quam directionem si conservaret, describeret rectam $M\mu$: at e vestigio directionem motus inflectit, si quidem Lineam curvam describit: unde ad tractum Lineæ curvæ cognoscendum in singulis punctis positionem Tangentis definire oportet, id quod facile fit methodo hic tradita, neque enim ulla offenditur difficultas, dummodo æquatio pro Curva proposita fuerit rationalis atque a fractionibus libera. Ad talem autem formam æquationes omnes semper reduci possunt. Sin autem æquatio fuerit vel irrationalis vel fractionibus implicata, neque eam ad formam rationalem & integram reducere vacaverit, tum eadem quidem methodus, at cum moderatione quadam, adhiberi potest, quæ ipsa moderatio *Calculum differentialem* produxit; quam ob rem methodum inveniendi Tangentes, si æquatio pro Curva proposita non fuerit rationalis & integra, in calculum differentialem reservabimus.

291. Hinc ergo innotescit inclinatio Tangentis $M\mu$ ad Axem $AP$, seu ejus parallelam $Mq$. Cum enim sit $q\mu : Mq = -A : B$, si Coordinatæ fuerint orthogonales ideoque angulus $Mq\mu$ rectus, erit $\frac{-A}{B}$ Tangens anguli $qM\mu$; sin autem Coordinatæ fuerint obliquangulæ, tum ex angulo $Mq\mu$ dato & ratione laterum $Mq$, $q\mu$ per Trigonometriam reperietur angulus $qM\mu$. Patet autem, si in æquatione resultante $At + Bu = 0$, fuerit $A = 0$, tum angulum $qM\mu$ evanescere, ideoque Tangentem $M\mu$ fore Axi $AP$ parallelam. Sin autem fuerit $B = 0$, tum Tangens $M\mu$ Applicatis $PM$ erit parallela, seu ipsa Applicata $PM$ Curvam in puncto $M$ tanget.

292. Inventa Tangente $MT$, si ad eam in puncto contactus $M$ ducatur normalis $MN$, erit hæc ad ipsam Curvam simul normalis; cujus propterea positio quovis casu facile reperitur. Commodissime autem exprimitur, si Coordinatæ $AP$ & $PM$ fuerint orthogonales, tum enim erunt triangula $Mq\mu$ & $MPN$ similia;

similia, ideoque $Mq : q\mu = MP : PN$, seu $-B : A = q : PN$; unde fit $PN = \frac{-Aq}{B}$. Vocari autem hæc Axis portio $PN$, inter Applicatam & Normalem $MN$ intercepta, solet SUBNORMALIS. Hæc igitur Subnormalis, si Coordinatæ fuerint orthogonales, ex inventa Subtangente $PT$ facillime definitur; erit enim $PT : PM = PM : PN$, seu $PN = \frac{PM^2}{PT}$. Præterea vero, si angulus $APM$ fuerit rectus, erit ipsa tangens $MT = \surd(PT^2 + PM^2)$ & ipsa normalis $MN = \surd(PM^2 + PN^2)$; seu, cum sit $PT : TM = PM : MN$, erit $MN = \frac{PM \cdot TM}{PT} = \frac{PM}{PT}\surd(PT^2 + PM^2)$. CAP. XIII.

293. Quoniam vidimus, si in æquatione $At + Bu = 0$, fuerit vel $A = 0$ vel $B = 0$, tum Tangentem fore vel Axi vel Applicatis parallelam; superest casus, quo uterque coëfficiens $A$ & $B$ simul fit $= 0$, considerandus. Hoc ergo cum evenit, in æquatione supra (§. 286.) inventa, sequentes termini, in quibus $t$ & $u$ duas obtinent dimensiones, non amplius præ his $At + Bu$, (qui ipsi evanescunt,) negligi poterunt. Hanc ob rem consideranda veniet hæc æquatio $0 = Ctt + Dtu + Euu$, neglectis sequentibus terminis; quippe qui præ his, si $t$ & $u$ statuantur infinite parva, evanescunt. Ex hac igitur æquatione, uti ex generali, manifestum est, si ponatur $t = 0$, fore & $u = 0$, ideoque $M$ esse punctum in Curva, quod quidem Hypothesi est consentaneum.

294. Cum igitur hæc æquatio $0 = Ctt + Dtu + Euu$ statum Curvæ prope punctum $M$ declaret; manifestum est, si fuerit $DD$ minor quam $4CE$, tum æquationem fore imaginariam, nisi sint $t$ & $u = 0$. Hoc igitur casu punctum $M$ quidem ad Curvam pertinebit, verum erit sejunctum a reliqua Curva; eritque ideo Ovalis conjugata in punctum evanescens, cujusmodi casum in Capite præcedente notavimus. Hic igitur ne idea quidem Tangentis locum habet; quia, si Tan-

LIB. II. gens est recta duo puncta proxima cum Curva habens communia, punctum a recta tangi hoc modo non potest. Hoc itaque pacto punctum conjugatum, si quod datur in Curva quapiam, agnoscetur atque a reliquis Curvæ punctis discernetur.

TAB. XV. Fig. 56. 295. Quod si autem fuerit $DD$ major quam $4CE$, æquatio $0 = Ctt + Dtu + Euu$ resolubilis erit in duas æquationes hujus formæ $\alpha t + \beta u = 0$, quarum utraque in Curvæ naturam æque competit. Cum igitur utraque positionem Tangentis seu directionem Curvæ in puncto $M$ exhibeat, necesse est ut duo Curvæ rami se in puncto $M$ decussent, ibique punctum duplex constituant. Sumta scilicet $Mq = t$, sint $q\mu$ & $q\nu$ ambo valores ipsius $u$, quos illa æquatio præbet, atque rectæ $M\mu$ & $M\nu$ erunt ambæ Tangentes Curvæ in puncto $M$. In $M$ ergo erit intersectio duorum Curvæ ramorum, quorum alter secundum $M\mu$, & alter secundum $M\nu$ dirigitur. Cum igitur punctum conjugatum pariter pro puncto duplici sit habendum, hæc æquatio $Ctt + Dtu + Euu = 0$, semper punctum duplex indicabit, quemadmodum æquatio $At + Bu = 0$, quoties locum habet, punctum Curvæ tantum simplex declarat.

296. Sin autem fuerit $DD = 4CE$, tum ambæ istæ Tangentes $M\mu$ & $M\nu$ coincident, & angulus $\mu M\nu$ evanescet; ex quo intelligitur duos Curvæ ramos in $M$ non solum concurrere, sed etiam eandem directionem habere, ideoque se invicem tangere; quo casu punctum $M$ nihilominus erit duplex, quia recta per hoc punctum ducta Curvam hoc loco in duobus punctis secare est censenda. Quando ergo in æquatione, quam §. 286. obtinuimus, ambo coëfficientes primi $A$ & $B$ evanescunt, tum concludenda est Curva in $M$ punctum duplex habere, cujus tres dantur Species diversæ; vel Ovalis in punctum evanescens seu punctum conjugatum, vel duorum Curvæ ramorum intersectio mutua seu nodus, vel duorum Curvæ ramorum contactus, quas diversas puncti duplicis Species triplex æquationis $0 = Ctt + Dtu + Euu$ constitutio definit.

297. Si

297. Si præter coëfficientes $A$ & $B$, etiam hi tres $C$, $D$, & $E$ omnes evanescant, tum sequentes sumi debebunt termini, in quibus $t$ & $u$ tres obtinent dimensiones, eritque $Ft^3 + Gttu + Htuu + Iu^3 = 0$. Quæ æquatio si unicum habeat Factorem simplicem realem, hic ostendet unum Curvæ ramum per punctum $M$ transeuntem ejusque simul directionem seu Tangentem; bini vero reliqui Factores imaginarii in ipso puncto $M$ Ovalem evanescentem, arguent. Sin autem omnes radices illius æquationis fuerint reales, hinc cognoscetur tres Curvæ ramos se in eodem puncto $M$ vel decussare vel tangere, prout illæ radices fuerint vel inæquales vel æquales. Quicquid horum evenerit, Curva in $M$ semper habebit punctum triplex, atque recta per $M$ ducta Curvam simul in tribus punctis secare putanda est.

298. Quod, si præter omnes coëfficientes præcedentes etiam hi quatuor $F$, $G$, $H$, & $I$ evanescant; tum, ad naturam puncti Curvæ $M$ cognoscendam, contemplari oportebit terminos æquationis sequentes, in quibus $t$ & $u$ quatuor habeant dimensiones: unde punctum $M$ quadruplex erit judicandum. In eo enim vel duæ Ovales conjugatæ coalescunt; quod evenit si æquationis quarti gradus omnes radices fuerint imaginariæ. Vel in $M$ erit intersectio seu contactus duorum Curvæ ramorum cum puncto conjugato; quod evenit si duæ radices fuerint reales, duæ reliquæ vero imaginariæ. At in $M$ denique erit intersectio quatuor Curvæ ramorum, si omnes radices æquationis fuerint reales; intersectio autem vel duorum vel trium vel omnium quatuor abibit in contactum, si duæ tres vel omnes quatuor radices fiant æquales. Simili autem modo in judicio erit progrediendum, si etiam his terminis, ubi $t$ & $u$ quatuor obtinent dimensiones, evanescentibus, procedendum erit ad terminos quinque ulteriorumve dimensionum.

299. His perpensis, facile erit æquationem generalem pro omnibus Curvis invenire quæ non solum per punctum $M$ transeant, sed etiam in $M$ habeant punctum vel simplex vel

X 2 duplex,