II. Si φ, χ sunt formae binariae proprie aequiualentes, quaeuis repraesentatio ipsius D per F alicui repraesentationi formae φ per f adiuncta, etiam alicui repraesentationi formae χ per f adiuncta erit.

Sint p, q indeterminatae formae χ; transeat φ in χ per substitutionem propriam $t = \alpha p + \beta q$, $u = \gamma p + \delta q$, sitque aliqua repraesentatio formae φ per f haec $x = mt + nu$, $x' = m't + n'u$, $x'' = m''t + n''u \ldots (R)$. Tunc nullo negotio perspicitur, si ponatur $\alpha m + \gamma n = g$, $\alpha m' + \gamma n' = g'$, $\alpha m'' + \gamma n'' = g''$, $\beta m + \delta n = h$, $\beta m' + \delta n' = h'$, $\beta m' + \delta n' = h'$, $\beta m'' + \delta n'' = h''$, formam χ repraesentatum iri per f statuendo $x = gp + hq$, $x' = g'p + h'q$, $x'' = g''p + h''q \ldots (R')$, calculoque facto inuenitur (propter $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$) esse $g'h'' - g''h' = m'n'' - m''n'$, $g''h - gh'' = m''n - mn''$, $gh' - g'h = mn' - m'n$, i. e. repraesentationibus R, R' eadem repraesentatio ipsius D per F adiuncta est.

Ita in ex. praec. formae Φ aequiualere inuenitur inuenitur $\chi = 13pp - 10pq + 18qq$, in quam illa transit per substitutionem propriam $t = -3p + q$, $u = 5p - 2q$; hinc inuenitur repraesentatio formae χ per f haec $x = 4q$, $x' = -3p + q$, $x'' = 2p - q$, ex qua eadem numeri -209 repraesentatio deducitur, a qua profecti eramus.

III. Denique si duae formae binariae φ, χ determinantis D, quarum indeterminatae sunt t, u; p, q, per f repraesentari possunt, alicuique repraesentationi vnius eadem repraesentatio propria ipsius D

per F adiuncta est, atque alicui repraesentationi alterius, illae formae necessario erunt proprie aequiualentes. Supponamus ϕ repraesentari per f ponendo $x = mt + nu$, $x' = m't + n'u$, $x'' = m''t + n''u$; χ vero statuendo $x = gp + hq$, $x' = g'p + h'q$, $x'' = g''p + h''p$, atque esse $m'n'' - m''n' = g'h'' - g''h' = L$, $m''n - mn'' = g''h - gh'' = L'$, $mn' - m'n = gh' - g'h = L''$. Accipiantur integri l, l', l'' ita vt fiat $Ll + L'l' + L''l'' = 1$, ponaturque $n'l'' - n''l' = M$, $n''l - nl'' = M'$, $nl' - n'l = M''$, $l'm'' - l''m' = N$, $l''m - lm'' = N'$, $lm' - l'm = N''$; denique statuatur $gM + g'M' + g''M = \alpha$, $hM + h'M' + h''M'' = \beta$, $gN + g'N' + g''N'' = \gamma$, $hN + h'N' + h''N'' = \delta$. Hinc facile deducitur

$$\alpha m + \gamma n = g - l(gL + g'L' + g''L'') = g$$
$$\beta m + \delta n = h - l(hL + h'L' + h''L'') = h$$

similique modo $\alpha m' + \gamma n' = g'$, $\beta m' + \delta n' = h'$, $\alpha m'' + \gamma n'' = g''$, $\beta m'' + \delta n'' = h''$. Hinc patet $mt + nu$, $m't + n'u$, $m''t + n''u$ transire per substitutionem $t = \alpha p + \beta q$, $u = \gamma p + \delta q$ ... (S) in $gp + hq$, $g'p + h'q$, $g''p + h''q$ resp., vnde manifestum est, ϕ transire per substitutionem S in eandem formam, in quam f transeat ponendo $x = gp + hq$, $x' = g'p + h'q$, $x'' = g''p + h''q$, adeoque in formam χ, cui itaque aequiualet. Denique per substitutiones debitas facile inuenitur $\alpha\delta - \beta\gamma = Ll + L'l' + L''l'' = 1$, quocirca substitutio S est propria, formaeque ϕ, χ proprie aequiualentes.

Ex his obseruationibus deriuantur regulae sequentes ad inueniendum omnes repraesentationes proprias ipsius D per F: Euoluantur omnes classes formarum binariarum determinantis D, et ex singulis vna forma ad libitum eligatur; quaerantur omnes repraesentationes propriae singularum harum formarum per f (reiectis iis quae forte per f repraesentari nequeunt), et ex singulis hisce repraesentationibus deducantur repraesentationes numeri D per F. Ex I et II manifestum est, hoc modo omnes repraesentationes proprias possibiles obtineri, adeoque solutionem esse completam; ex III, transformationes formarum e classibus diuersis certo producere repraesentationes diuersas.

281. Inuestigatio repraesentationum *impropriarum* numeri dati D per formam F ad casum praecedentem facile reducitur. Scilicet manifestum est, si D per nullum quadratum (praeter 1) diuisibilis sit, tales repraesentationes omnino non dari; sin secus, metientibus ipsum D quadratis $\lambda\lambda$, $\mu\mu$, $\nu\nu$ etc., omnes repraesentationes improprias ipsius D per F inueniri, si omnes repraesentationes propriae numerorum $\frac{D}{\lambda\lambda}$, $\frac{D}{\mu\mu}$, $\frac{D}{\nu\nu}$ etc. per eandem formam euoluantur, indeterminatarumque valores per λ, μ, ν etc. resp. multiplicentur.

Hoc itaque modo inuentio omnium repraesentationum numeri dati per formam ternariam datam, *quae alicui formae ternariae adiuncta est*, a problemate secundo pendet; ad hunc vero casum, qui primo aspectu minus late patere videri