LIB. II.

	$s = 70^\circ$	$s = 80^\circ$	$s = 84^\circ$	$s = 85^\circ$
$l.s =$	1,8450980	1,9030900	1,9242793	1,9294189
subtrahe	1,7581226	1,7581226	1,7581226	1,7581226
	0,0869754	0,1449674	0,1661567	0,1712963
$l.\mathit{fin}.\ \frac{1}{2} s =$	9,7585913	9,8080675	9,8255109	9,8296833
	9,8455667	9,9530349	9,9916676	0,0009796
Error	$+$ 0,1544332	0,0469650	$+$ 83223	$-$ 9796

Unde s continetur intra limites $84^\circ, 53'$ & $84^\circ, 54'$

Sit ergo

	$s = 84^\circ, 53'$ seu	$s = 84^\circ, 54'$ seu
$s =$	$5093'$	$5094'$
$\frac{1}{2} s =$	$42^\circ, 26\frac{1}{2}'$	$42^\circ, 27'$
$l.s =$	3,7069737	3,7070589
subtrahe	3,5362739	3,5362739
	0,1706998	0,1707850
$l.\mathit{fin}.\ \frac{1}{2} s =$	9,8292003	9,8292694
	0,9999001	0,0000544
Error	$+$ 998	$-$ 544

Hincque oritur

Arcus $s = AE = 84^\circ, 53', 38'', 51'''$,

&

Arcus $BE = 50^\circ, 6', 21'', 9'''$. *Q. E. I.*

539. Quanquam in primo quadrante omnes Arcus ſunt ſuis Tangentibus minores, tamen in ſequentibus quadrantibus dantur ejuſmodi Arcus qui ſint æquales ſuis Tangentibus, quos in ſequenti Problemate methodo ex ſeriebus petita inveſtigemus.

PROBLEMA IX.

Invenire omnes Arcus, qui Tangentibus ſuis ſint æquales.

SOLUTIO.

Primus Arcus hac proprietate præditus eſt infinite parvus.

Tum

Tum in ſecundo quadrante, quia hic Tangentes ſunt negativæ, datur nullus iſtiuſmodi Arcus; in tertio vero quadrante dabitur unus 270° aliquanto minor; porro dabuntur ejuſmodi Arcus in quinto, ſeptimo, &c. Ponatur quarta Peripheriæ pars $= q$, & Arcus quæſiti contineantur in hac forma $(2n+1)q - s$, ita ut ſit $(2n+1)q - s = cot.s = \frac{1}{tang.s}$. Sit $tang.s = x$; erit $s = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \&c.$, ideoque $(2n+1)q = \frac{1}{x} + x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \&c.$ Patet autem, ob s Arcum eo minorem, quo major fuerit numerus n, fore x quantitatem valde parvam ideoque proxime $x = \frac{1}{(2n+1)q}$; ſeu $\frac{1}{x} = (2n+1)q$; propius autem invenitur $\frac{1}{x} = (2n+1)q - s = (2n+1)q - \frac{1}{(2n+1)q} - \frac{2}{3(2n+1)^3 q^3} - \frac{13}{15(2n+1)^5 q^5} - \frac{146}{105(2n+1)^7 q^7} - \frac{2343}{945(2n+1)^9 q^9} - \&c.$ Cum ergo ſit $q = \frac{\varpi}{2} = 1{,}5707963267948$, erit Arcus quæſitus $= (2n+1)\, 1{,}57079632679 - \frac{1}{2n+1}\, 0{,}63661977 - \frac{0{,}17200817}{(2n+1)^3} - \frac{0{,}09062596}{(2n+1)^5} - \frac{0{,}05892834}{(2n+1)^7} - \frac{0{,}04258543}{(2n+1)^9} -$ &c. Vel ſi iſti termini, qui in partibus Radii exprimuntur, ad menſuram Arcuum reducantur, erit Arcus quæſitus in genere conſideratus $= (2n+1)90° - \frac{131313''}{2n+1} - \frac{35479''}{(2n+1)^3} - \frac{18692''}{(2n+1)^5} - \frac{12155''}{(2n+1)^7} - \frac{8784''}{(2n+1)^9}$. Arcus ergo quæſtioni ſatisfacientes ordine ſunt.

CAP. XXII.

LIB. II.

I.	1. 90°	— 90°
II.	3. 90°	— 12°, 32′, 48″
III.	5. 90°	— 7, 22, 32
IV.	7. 90°	— 5, 14, 22
V.	9. 90°	— 4, 3, 59
VI.	11. 90°	— 3, 19, 24
VII.	13. 90°	— 2, 48, 37
VIII.	15. 90°	— 2, 26, 5
IX.	17. 90°	— 2, 8, 51
X.	19. 90°	— 1, 55, 16

540. Hujusmodi quæstiones plures non propono, cum methodus eas resolvendi ex his exemplis clare perspiciatur. Ceterum hæc Problemata in hunc finem potissimum sunt excogitata, ut Circuli natura, cujus quadratura omnibus methodis adhuc usitatis frustra fuit tentata, penitius inspiciatur. Si enim accidisset, ut in solutione cujuspiam Problematis, vel Arcus cum tota Circumferentia commensurabilis, vel ejus Sinus Tangensve per Radium construibilis prodiisset, tum utique species quædam quadraturæ Circuli haberetur. Scilicet, si in solutione Problematis VI. Sinus DE, qui prodit $= 0,6665578$, inventus fuisset $= 0,6666666 = \frac{2}{3}$, elegans certe Circuli proprietas innotesceret, Arcus quippe AE construi posset Lineæ rectæ $AD + DE = 1 + \frac{2}{3} + \sqrt{\frac{5}{9}}$ æqualis. Nulla vero etiamnum ratio patet, quæ hujusmodi Circuli quadraturam impossibilem esse evincat: atque, si talis detur, nulla alia via, præter hanc, quam hoc Capite aperuimus, ad eam investigandam magis apta videtur.

TAB. XXIX. Fig. 116.

FINIS LIBRI SECUNDI.

APPEN-

APPENDIX

DE

SUPERFICIEBUS.

CAPUT I.

Cap. I.

De Superficiebus Corporum in genere.

1. Quæ in ſuperiori Sectione de Lineis curvis ſunt tradita earumque ad æquationes revocandarum ratione, latiſſime quidem patent, atque ad omnes Lineas curvas, quarum cuncta puncta in eodem plano ſint poſita, extenduntur. Verum, ſi tota Linea curva non fuerit in eodem plano ſita, tum præcepta ſupra data non ſufficiunt ad proprietates ejuſmodi Curvarum eruendas. Hujus generis Curvæ duplicem habent curvaturam; hocque nomine de iis eximium ſcripſit tractatum Acutiſſimus Geometra CLAIRAUT. Cum autem hæc materia maxime ſit connexa cum natura Superficierum, de qua hac ſectione exponere conſtitui, ſeorſim eam non pertractabo, ſed ejus explicationem cum ſequenti de Superficiebus doctrina conjungam.

2. Quemadmodum Lineæ ſunt vel rectæ vel curvæ, ita Superficies ſunt vel planæ, vel non planæ. Non planas autem voco, quæ vel convexæ ſunt vel concavæ, vel utriuſque naturæ participes. Sic, Superficies externa Globi, Cylindri, & Coni, exceptis baſibus, eſt convexa; interna autem catini Superficies concava. Quemadmodum porro Linea recta eſt, cujus terna quæque puncta in directum ſunt poſita; ita Superficies plana eſt cujus quaterna quæque puncta in eodem plano ſunt poſita; ex quo perſpicuum eſt Superficiem non planam, hoc eſt ſive convexam ſive concavam, eſſe cujus non omnia quaterna puncta in eodem plano ſunt ſita.

3. Superficies igitur non plana qualis ſit facillime intelligetur ſi, quantum a Superficie plana ubique diſcrepet, cognoverimus. Simili ſcilicet modo, quo indolem Linearum curvarum ex diſtantiis, quibus ejus quæque puncta a Linea recta pro Axe aſſumta diſtant, colligimus; ita naturam Superficierum

APPEND. æstimari conveniet ex singulorum ejus punctorum distantiis a Superficie plana pro lubitu assumta. Proposita ergo quacunque Superficie, cujus indolem definiri oporteat, pro arbitrio eligatur Superficies plana, ad quam ex singulis Superficiei propositæ punctis perpendicula ducta concipiantur: quo facto, si cujusvis horum perpendiculorum longitudo per æquationem determinari queat, naturam Superficiei hac ipsa æquatione exprimi censebimus. Ex tali enim æquatione vicissim omnia Superficiei puncta assignari poterunt, atque ideo ipsa Superficies determinabitur.

TAB. XXX. Fig. 119. 4. Repræsentet planum tabulæ eam Superficiem planam, ad quam singula cujusque Superficiei propositæ puncta referamus. Sit M punctum quodcunque Superficiei propositæ, quod extra planum tabulæ situm concipiatur, unde ad hoc planum perpendicularis demittatur MQ, plano in puncto Q occurrens. Jam, ad situm hujus puncti Q calculo exprimendum, assumatur in plano tabulæ recta quæpiam AB pro Axe, ad quem ex puncto Q recta normalis ducatur QP. Denique in ipso Axe AB sumatur punctum quodvis A pro initio Abscissarum: quo facto, situs puncti M innotescet si noverimus longitudines trium istarum Linearum AP, PQ & QM; sicque tribus Coordinatis inter se normalibus situs cujusque Superficiei puncti M simili modo determinabitur, quo Linearum curvarum in plano sitarum singula puncta per duas Coordinatas inter se normales exhiberi solent.

5. Cum igitur habeamus tres Coordinatas AP, PQ & QM, ponamus $AP = x$, $PQ = y$, & $QM = z$; ex hisque indolem Superficiei propositæ intelligemus, si, sumtis pro lubitu binis x & y, noverimus quanta futura sit tertia z; hoc enim modo omnia Superficiei puncta M determinare poterimus. Natura ergo cujusvis Superficiei exprimitur æquatione, qua Coordinata z definitur per binas reliquas x & y una cum constantibus. Hinc pro quavis Superficie proposita variabilis z æquabitur Functioni cuidam binarum variabilium x & y. Atque vicissim, si z æqualis fuerit Functioni cuicunque