$\frac{1-D}{2}$), atque hinc etiam characterem cuiusuis formae improprie primitiuae (pos.) det. $D$, pertinere ad $Q$, adeoque nulli characterum $P$ genus impr. prim. pos. respondere posse.

III. Denique pro determinante negatiuo genera improprie primitiua negatiua rursus contraria sunt generibus improprie primitiuis positiuis, scilicet illa non poterunt habere characterem ex $P$ vel ex $Q$, prout $D \equiv 1$ vel $\equiv 5$ (mod. 8), siue prout $-D$ est formae $8n+7$ vel $8n+3$. Hoc nullo negotio deducitur inde, quod ex compositione formae $(-1, 0, D)$, cuius character est ex $Q$, cum formis improprie primitiuis negatiuis eiusdem determinantis formae improprie primitiuae positiuae proueniunt, adeoque, quando ab his exclusi sunt characteres $Q$, necessario ab illis exclusi esse debent characteres $P$, et contra.

265. Ex disquisitionibus artt. 257, 258 supra multitudine classium ancipitum, quibus omnia praecedentia sunt superstructa, multae aliae conclusiones attentione perdignae deduci possunt, quas breuitatis caussa supprimere oportet; sequentem tamen, elegantia sua insignem, praeterire non possumus. Pro determinante positiuo $p$, qui est numerus primus formae $4n+1$, vnicam tantummodo classem ancipitem proprie primitiuam dari ostendimus; quapropter omnes formae ancipites proprie primitiuae talis determinantis proprie aequiualentes erunt. Si itaque $b$ est numerus integer positiuus proxime minor quam

$\sqrt{p}$, atque $p - bb = a'$, formae $(1, b, -a')$, $(-1, b, a')$ proprie aequiualebunt, adeoque, quum vtraque manifesto sit forma reducta, altera in alterius periodo erit contenta. Tribuendo formae priori in periodo sua indicem 0, index posterioris necessario erit impar (quoniam termini primi harum duarum formarum signa opposita habent); ponatur itaque $= 2m + 1$. Porro facile perspicitur, si formae indicum 1, 2, 3 etc. resp. sint $(-a', b', a'')$, $(a'', b'', -a''')$, $(-a''', b''', a^{IV})$ etc.: indicibus $2m$, $2m - 1$, $2m - 2$, $2m - 3$ etc. resp. responsuras esse formas $(a', b, -1)$, $(-a'', b', a')$, $(a''', b'', -a'')$, $(-a^{IV}, b''', a''')$ etc. Hinc colligitur, si forma indicis $m$ sit $(A, B, C)$, eandem fore $(-C, B, -A)$, adeoque $C = -A$ et $p = BB + AA$. Quare quiuis numerus primus formae $4n + 1$ in duo quadrata decomponi potest (quam propositionem supra, art. 182, e principiis prorsus diuersis deduximus), et ad talem decompositionem peruenire possumus per methodum simplicissimam et omnino vniformem, scilicet per euolutionem periodi formae reductae, cuius determinans est ille numerus primus et cuius terminus primus 1, vsque ad formam, cuius termini externi magnitudine sunt aequales, signis oppositi. Ita e. g. pro $p = 233$ habetur $(1, 15, -8)$, $(-8, 9, 19)$, $(19, 10, -7)$, $(-7, 11, 16)$, $(16, 5, -13)$, $(-13, 8, 13)$, atque $233 = 64 + 169$. Ceterum patet, $A$ necessario fieri imparem (quoniam $(A, B, -A)$ debet esse forma proprie primitiua), et proin $B$ parem. — Quum pro determinante positiuo $p$, qui est numerus primus formae $4n + 1$, etiam in ordine improprie primitiuo vnica tantum classis anceps contineatur, perspicuum est si $g$ sit numerus impar proxime minor quam $\sqrt{p}$, atque $p - gg = 4h$, formas reductas improprie primitiuas $(2, g, -2h)$, $(-2, g, 2h)$ proprie aequiualere, adeoque alteram in alterius periodo contentam esse. Hinc per ratiocinia praecedentibus omnino similia concluditur, in periodo formae $(2, g, -2h)$ reperiri formam, cuius termini externi magnitudine aequales sint, signa habeant opposita, ita vt discerptio numeri $p$ in duo quadrata etiam hinc peti possit. Patet autem, terminos externos huius formae fore pares, adeoque medium imparem; et quum constet, numerum primum vnico tantum modo in duo quadrata decomponi posse, forma per hanc posteriorem methodum inuenta erit vel $(B, \pm A, -B)$, vel $(-B, \pm A, B)$. Ita in exemplo nostro pro $p = 233$ habetur $(2, 15, -4)$, $(-4, 13, 16)$, $(16, 3, -14)$, $(-14, 11, 8)$, $(8, 13, -8)$, et $233 = 169 + 64$ vt supra.

266. Hactenus disquisitionem nostram ad tales functiones secundi gradus restrinximus, quae *duas* indeterminatas implicant, neque opus fuit, denominationem specialem ipsis tribuere. Sed manifesto hoc argumentum tamquam sectionem maxime particularem disquisitionis generalissimae *de functionibus algebraicis rationalibus integris homogeneis plurium indeterminatarum et plurium dimensionum* considerare, talesque functiones secundum multitudinem dimensionum in *formas secundi, tertii, quarti gradus etc.*, secundum multitudinem indeterminatarum autem