125. Quintum genus continebitur hac æquatione

$$App - Bqq = ar,$$

cujus ſectio principalis prima, facto $r = o$, erunt duæ lineæ rectæ Ee, Ff ſe mutuo in puncto A decuſſantes. Omnes vero ſectiones huic parallelæ erunt Hyperbolæ ſua centra in Axe AD habentes, & intra Aſymtotas rectas Ee & Ff conſtitutæ. Duo igitur plana, quæ plano ABC in Lineis Ee & Ff normaliter inſiſtunt, in infinitum cum Superficie propoſita congruent, ideoque hæc Superficies pro Aſymtoto habebit duo plana ſe mutuo decuſſantia, ſectiones reliquæ principales in planis ACD & ABd factæ erunt Parabolæ: unde Superficies ad hoc genus pertinentes vocabimus *parabolico-hyperbolicas* duo plana pro Aſymtotis habentes: cujus ſpecies, (ſi $a = o$, ut ſit $App - Bqq = bb$,) erit Cylindrus hyperbolicus, cujus omnes ſectiones ad Axem AD normales erunt Hyperbolæ inter ſe æquales: ſi inſuper ſit $b = o$, oriuntur duo illa ipſa plana aſymtotica. TAB. XXXIX. Fig. 147.

126. Sextum denique genus Superficierum ſecundi ordinis complectetur hæc æquatio

$$App = aq,$$

quæ præbet Cylindrum Parabolicum, cujus omnes ſectiones Axi AD normales erunt Parabolæ ſimiles & æquales, ita ut ſingularum Vertices in rectam AD incidant & Axes inter ſe ſint paralleli. Ad hæc igitur ſex genera omnes Superficies ſecundi ordinis reduci poterunt, ita ut nulla exhiberi poſſit, quæ non in uno horum generum contineatur. Ceterum, ſi in genere ultimo fiat $a = o$, ut ſit $App = bb$, hæc æquatio præbebit duo plana inter ſe parallela, quæ quaſi ſpeciem hujus generis conſtituent. Similitudo ſcilicet hic, uti in Lineis ſecundi ordinis obtinet, ubi vidimus duas rectas ſe decuſſantes Hyperbolæ ſpeciem, duas autem Lineas parallelas Parabolæ ſpeciem conſtituere.

APPEND.

127. Quanquam hæc ſex genera ex æquatione ſimpliciſſima, ad quam Superficies ſecundi ordinis reducere licet, formavimus; tamen nunc facile erit, ſi æquatio quæcunque ſecundi gradus ſit propoſita, genus aſſignare ad quod Superficies pertineat. Quod ſi enim propoſita fuerit hæc æquatio

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \epsilon xy + \zeta xx + \eta z + \theta y + \iota x + \varkappa = 0,$$

judicium ex ſupremis terminis, in quibus duæ variabilium occurrunt dimenſiones, petendum erit; ſpectari ſcilicet debebunt hi termini

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \epsilon xy + \zeta xx,$$

in quibus ſi fuerit

$4\alpha\zeta$ major quam $\gamma\gamma$; $4\alpha\delta$ major quam $\beta\beta$; $4\delta\zeta$ major quam $\epsilon\epsilon$
&
$\alpha\epsilon\epsilon + \delta\gamma\gamma + \zeta\beta\beta$ minor quam $\beta\gamma\epsilon + 4\alpha\delta\zeta$,

Superficies erit clauſa & ad genus primum, quod Elliptoides vocavimus, pertinebit.

128. Si una pluresve harum conditionum deſint; neque tamen ſit $\alpha\epsilon\epsilon + \delta\gamma\gamma + \zeta\beta\beta = \beta\gamma\epsilon + 4\alpha\delta\zeta$, Superficies vel ad ſecundum vel ad tertium genus pertinebit, eritque corpus hyperbolicum Cono Aſymtoto præditum, eique vel circumſcriptum in genere ſecundo, vel inſcriptum in genere tertio. At, ſi fuerit $\alpha\epsilon\epsilon + \delta\gamma\gamma + \zeta\beta\beta = \beta\gamma\epsilon + 4\alpha\delta\zeta$, quo caſu expreſſio

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \epsilon xy + \zeta xx,$$

reſolvi poterit in duos Factores ſimplices, ſive imaginarios ſive reales. Caſu priori Superficies pertinebit ad genus quartum, poſteriori vero ad quintum. Quod ſi denique iſta expreſſio duos habeat Factores æquales, ſeu ſit quadratum, tum orietur genus ſextum. Sicque ſtatim facile dijudicari poterit, ad quodnam genus quævis æquatio propoſita pertineat; difficilius

cilius tantum erit judicium circa genus ſecundum & tertium: quæ ambo ideo in unum conflari poſſent. CAP. V.

129. Simili modo Superficies tertii & ſequentium ordinum pertractari atque in genera dividi poterunt. Spectari ſcilicet tantum debebunt æquationis generalis termini ſuprêmi, & conſequenter, pro Superficiebus tertii ordinis, ii in quibus Coordinatæ tres obtinent dimenſiones, qui erunt

$$\alpha z^3 + \beta yzz + \gamma y^2 z + \delta x^2 z + \varepsilon xzz + \zeta xyz + \&c..$$

Primum igitur diſpiciendum eſt, utrum hi termini conjunctim ſumti, ſeu æquationis membrum ſupremum, reſolvi poſſit in Factores ſimplices an non. Si reſolutionem in Factores reſpuat, habebit Superficies Conum tertii ordinis pro Aſymtoto. Quia autem natura hujus Coni exprimitur ſupremo membro nihilo æquali poſito, plures hujuſmodi Coni tertii ordinis dabuntur, ex quorum diverſitate hinc plura Superficierum genera conſtituentur. Quamvis enim Coni ſecundi ordinis omnes ad unum genus referuntur, quia ſunt vel recti vel ſcaleni; tamen in tertio ordine multo major varietas locum invenit.

130. Expoſitis ergo his generibus, conſiderandi ſunt caſus, quibus ſupremum membrum in Factores ſimplices reſolvi poteſt, ſive ſint reales ſive imaginarii. Habeat primum unum Factorem ſimplicem, qui erit realis: ex eo Superficies habebit Aſymtotam planam. Alter Factor nihilo æqualis poſitus vel dabit æquationem poſſibilem vel non: ſi æquatio fuerit impoſſibilis, niſi omnes Coordinatæ evaneſcant, unica erit Aſymtota plana: ſin autem ſit impoſſibilis, Superficies duas habebit Aſymtotas, alteram planam, alteram Conum ſecundi ordinis. Quod ſi habeat tres Factores ſimplices, quia unus ſemper eſt realis, ſi bini reliqui ſint vel imaginarii, vel reales, duo nova genera oriuntur. Denique ſi omnes tres Factores ſimplices ſint reales, prout duo vel omnes ſint inter ſe æquales, adhuc duo genera conſtitui poterunt. Nulla autem in hoc ordine datur Superficies, quæ non in infinitum extendatur.

CAPUT VI.

De intersectione duarum Superficierum.

Append. 131. Supra jam exposita est methodus investigandi naturam sectionis, quæ oritur si Superficies quæcunque a plano secatur. Cum enim Linea curva, quam sectio format, tota posita sit in eodem plano, quo sectio est facta, binas Coordinatas, quarum relatione natura hujusmodi Linearum curvarum exprimi solet, in eodem plano assumsimus, ut hoc pacto cognitio ad receptam rationem reduceretur. At, si Superficies secans non fuerit plana, quoniam tum sectio non in eodem plano jacebit, ejus natura duabus Coordinatis comprehendi nequit: quapropter alio modo erit utendum, ad hujusmodi sectiones æquationibus includendas, quibus cujusque puncti positio vera indicetur.

132. Punctorum autem non in eodem plano sitorum loca definiri possunt, si tria plana inter se normalia in subsidium adhibeantur, atque pro quovis puncto ternæ illæ distantiæ assignentur, quibus id a quolibet plano distat. Hinc tres variabiles requirentur ad naturam Lineæ curvæ non in eodem plano constitutæ exprimendam; ita ut, si una pro libitu definiatur, ex ea binæ reliquæ valores determinatos obtineant. Una igitur æquatio inter tres illas Coordinatas non sufficit ad hoc præstandum; quippe, quæ indolem universæ Superficiei cujusdam indicaret; quocirca duabus opus erit æquationibus, quarum ope, si uni variabili datus valor tribuatur, simul binarum reliquarum valores determinentur.

133. Natura igitur cujusque Lineæ curvæ, quam in eodem plano constitutam esse non constat, commodissime exprimitur duabus æquationibus inter tres variabiles, puta x, y, z, quæ totidem Coordinatas inter se normales repræsentabunt. Ope duarum ergo hujusmodi æquationum binæ variabiles ex tertia determi-

determinari poterunt, æquabitur ſcilicet tam y quam z Functioni cuipiam ipſius x. Poterit etiam pro arbitrio una variabilium eliminari; unde tres æquationes duas tantum variabiles involventes formabuntur, una inter x & y, altera inter x & z, & tertia inter y & z. Harum trium vero æquationum quævis per binas reliquas ſponte determinatur, ita ut, ſi habeantur æquationes inter x & y, & inter x & z, ex his tertia jam per eliminationem ipſius x inveniatur. Cap. VI.

134. Sit ergo propoſita Linea quæcunque curva non in eodem plano poſita, cujus unum quoddam punctum ſit M. Sumantur pro arbitrio tres Axes invicem normales AB, AC, & AD, quibus tria plana invicem normalia BAC, BAD & CAD determinantur. Ex puncto Curvæ M in planum BAC demittatur perpendiculum MQ, & ex puncto Q ad Axem AD ducatur normalis QP, erunt AP, PQ & QM tres illæ Coordinatæ, inter quas ſi duæ dentur æquationes, natura Curvæ determinatur. Vocentur ergo $AP = x$, $PQ = y$, & $QM = z$; & ex duabus æquationibus inter x, y & z propoſitis, eliminando z, formetur aquatio duas tantum variabiles x & y continens, quæ determinabit poſitionem puncti Q in plano BAC; atque ſingula puncta Q ex ſingulis M orta præbebunt Lineam curvam EQF, cujus natura æquatione illa inter x & y inventa exprimetur. Tab. XL. Fig. 148.

135. Hoc igitur modo ex duabus æquationibus inter tres Coordinatas propoſitis facile cognoſcitur natura Curvæ EQF, quæ formatur demittendis ex ſingulis Curvæ indagandæ punctis M perpendiculis MQ in planum BAC. Curva autem hæc EQF vocatur *projectio* Curvæ GMH in planum BAC. Quemadmodum autem projectio in plano BAC facta invenitur eliminando variabilem z, ita ejuſdem Curvæ projectio in plano BAD vel in plano CAD obtinebitur, ſi vel variabilis y eliminetur vel x. Una autem projectio EQF non ſufficit ad Curvam GMH cognoſcendam, ſin autem pro ſingulis punctis Q cognita fuerint perpendicula $QM = z$, ex projectione EQF ipſa Curva GMH facile conſtruetur.

 Ad