361. Superest vt nexum inter radices Ω atque functiones trigonometricas angulorum $\frac{P}{n}$, $\frac{2P}{n}$, $\frac{3P}{n}$ ... $\frac{(n-1)P}{n}$ adhuc propius contemplemur. Methodus quam pro inueniendis radicibus Ω exposuimus ita comparata est, vt adhuc incertum relinquat (nisi tabulae sinuum inter laborem ita vt supra diximus consultae fuerint, quod tamen minus directum foret), *quaenam* radices *singulis* illis angulis respondeant i. e. quaenam radix sit $= \cos\frac{P}{n} + i \sin\frac{P}{n}$, quaenam $= \cos\frac{2P}{n} + i \sin\frac{2P}{n}$ etc. Haec vero incertitudo facile discutitur, reflectendo, cosinus angulorum $\frac{P}{n}$, $\frac{2P}{n}$, $\frac{3P}{n}$ ... $\frac{(n-1)P}{2n}$ continuo decrescere (siquidem etiam signorum ratio habeatur), sinus omnes positiuos esse; angulos $\frac{(n-1)P}{n}$, $\frac{(n-2)P}{n}$, $\frac{(n-3)P}{n}$ ... $\frac{(n+1)P}{2n}$ vero eosdem resp. cosinus habere vt illos, sinus autem negatiuos ceterum magnitudine absoluta sinubus illorum aequales. Quare e radicibus Ω duae istae, quae partes reales maximas (inter se aequales) habent, respondebunt angulis $\frac{P}{n}$, $\frac{(n-1)P}{n}$, et quidem priori ea vbi quantitas imaginaria i per quantitatem positiuam, posteriori ea vbi i per quantitatem negatiuam multiplicata est. Ex $n - 3$ reliquis radicibus istae rursus quae maximas partes reales habent angulis $\frac{2P}{n}$, $\frac{(n-2)P}{n}$ respondebunt et sic porro.

— Simulac ea radix cui angulus $\frac{P}{n}$ respondet agnota est, eae quae angulis reliquis respondent etiam inde distingui poterunt, quod, si illa supponatur esse $=$, [1] angulis $\frac{2P}{n}$, $\frac{3P}{n}$, $\frac{4P}{n}$ etc. manifesto respondebunt radices [2λ], [3λ], [4λ] etc. Ita in exemplo art. 353 illico videtur, angulo $\frac{1}{19}P$ aliam radicem respondere non posse quam hanc [11] anguloque $\frac{18}{19}P$ radicem [8]; similiter angulis $\frac{2}{19}P$, $\frac{17}{19}P$, $\frac{3}{19}P$, $\frac{16}{19}P$ etc. respondent radices [3], [16], [14], [5] etc. In exemplo art. 354 angulo $\frac{1}{17}P$ manifesto respondet radix [1], angulo $\frac{2}{17}P$ haec [2] etc. Hoc itaque modo cosinus et sinus angulorum $\frac{P}{n}$, $\frac{2P}{n}$ etc. plene determinati erunt.

362. Quod vero attinet ad reliquas functiones trigonometricas horum angulorum, possent eae quidem e cosinubus et sinubus respondentibus per methodos vulgo notas facile deriuari, puta secantes et tangentes, diuidendo vnitatem et sinus per cosinus; nec non cosecantes et cotangentes, diuidendo vnitatem et cosinus per sinus. Sed commodius plerumque idem obtinetur adiumento formularum sequentium absque diuisionibus per meras additiones. Sit ω angulus quicunque ex his $\frac{P}{n}$, $\frac{2P}{n}$ ... $\frac{(n-1)P}{n}$ atque $\cos\omega + i\sin\omega = R$, vnde R erit aliqua e radicibus Ω, $\cos\omega = \frac{1}{2}(R + \frac{1}{R}) = \frac{1+RR}{2R}$, $\sin\omega = \frac{1}{2i}(R - \frac{1}{R}) = \frac{i(1-RR)}{2R}$. Hinc fit $\sec\omega =$

$\frac{2R}{1+RR}$, $\text{tang}\,\omega = \frac{i(1-RR)}{1+RR}$, $\text{cosec}\,\omega = \frac{2Ri}{RR-1}$, $\text{cotang}\,\omega = \frac{i(RR-1)}{RR-1}$. Iam numeratores harum quatuor fractionum ita transformare ostendemus, vt per denominatores diuisibiles euadant.

I. Propter $R = R^{n+1} = R^{2n+1}$, fit $2R = R + R^{2n+1}$, quam expressionem per $1 + RR$ diuisibilem esse patet, quum n sit numerus impar. Hinc fit $\sec\omega = R - R^3 + R^5 - R^7 \ldots + R^{2n-1}$, adeoque (quum propter $\sin\omega = \sin(2n-1)\omega$, $\sin 3\omega = -\sin(2n-3)\omega$ etc. manifesto fiat $\sin\omega - \sin 3\omega + \sin 5\omega \ldots + \sin(2n-1)\omega = 0$), $\sec\omega = \cos\omega - \cos 3\omega + \cos 5\omega \ldots + \cos(2n-1)\omega$, siue tandem, (quoniam $\cos\omega = \cos(2n-1)\omega$, $\cos 3\omega = \cos(2n-3)\omega$ etc), $= 2(\cos\omega - \cos 3\omega + \cos 5\omega \ldots \mp \cos(n-2)\omega) \pm \cos n\omega$, signo signo superiori vel inferiori valente prout n est formae $4k+1$ vel $4k+3$. Manifesto haec formula etiam ita exhiberi potest

$$\sec\omega = \pm(1 - 2\cos 2\omega + 2\cos 4\omega \ldots \pm 2\cos(n-1)\omega).$$

II. Simili modo substituendo $1 - R^{2n+2}$ pro $1 - RR$, prodit $\text{tang}\,\omega = i(1 - RR + R^4 - R^6 \ldots - R^{2n})$, siue (quoniam $1 - R^{2n} = 0$, $RR - R^{2n-2} = 2i\sin 2\omega$, $R^4 - R^{2n-4} = 2i\sin 4\omega$ etc.),

$$\text{tang}\,\omega = 2(\sin 2\omega - \sin 4\omega + \sin 6\omega \ldots \mp \sin(n-1)\omega).$$

III. Quum habeatur $1 + RR + R^4 \ldots + R^{2n-2} = 0$ fit $n = n - 1 - RR - R^4 \ldots$