Ita e. g. tentamine facto 997331 contentus inuenitur in forma non diuisorum ipsorum $xx + 1848$, $xx + 1365$, $xx + 1320$, sed in forma diuisorum ipsius $xx + 840$; pro valoribus expr. $\sqrt{-840}$ (mod. 997331) prodeunt expr. $\pm \frac{1272}{163}$, $\pm \frac{3288}{125}$, vnde iidem factores deducuntur vt ante. — Si quis plura exempla desiderat, art. 328 consulat, vbi primum docet esse $5428681 = 307.17683$; secundum, 4272943 esse numerum primum; tertium, 997331 certe e pluribus primis compositum esse.

* * *

Ceterum limites huius operis praecipua tantum momenta vtriusque methodi factores inuestigandi hic exsequi permiserunt; disquisitionem vberiorem vna cum pluribus tabulis auxiliaribus aliisque subsidiis aliae occasioni reseruamus.

SECTIO SEPTIMA

DE AEQVATIONIBVS CIRCVLI SECTIONES DEFINIENTIBVS.

335. Inter incrementa splendidissima, mathesi per recentiorum labores adiecta, theoria functionum a circulo pendentium procul dubio locum imprimis insignem tenet. Cui mirabili quantitatum generi, ad quod in disquisitionibus maxime heterogeneis saepissime deferimur, cuiusque subsidio nulla vniuersae matheseos pars carere potest, summi geometrae recentiores industriam sagacitatemque suam tam assidue impenderunt, disciplinamque tam vastam inde efformauerunt, vt parum exspectari potuisset, vllam huius theoriae partem, nedum elementarem atque in limine quasi positam, grauium adhuc incrementorum capacem esse. Loquor de theoria functionum trigonometricarum, arcubus cum peripheria commensurabilibus respondentium, siue de theoria polygonorum regularium, cuius quam parua pars hucusque enucleata sit, sectio praesens patefaciet. Mirari possent lectores, talem disquisitionem in hocce potissimum opere, disciplinae primo aspectu maxime heterogeneae imprimis dicato, institui; sed tractatio ipsa abun-

de declarabit, quam intimo nexu hoc argumentum cum arithmetica sublimiori coniunctum sit.

Ceterum principia theoriae, quam exponere aggredimur, multo latius patent, quam hic extenduntur. Namque non solum ad functiones circulares, sed pari successu ad multas alias functiones transscendentes applicari possunt, e. g. ad eas quae ab integrali $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$ pendent, praetereaque etiam ad varia congruentiarum genera: sed quoniam de illis functionibus transscendentibus amplum opus peculiare paramus, de congruentiis autem in continuatione disquisitionum arithmeticarum copiose tractabitur, hoc loco solas functiones circulares considerare visum est. Imo has quoque, quas summa generalitate amplecti liceret, per subsidia in art. sq. exponenda ad casum simplicissimum reducemus, tum breuitati consulentes, tum vt principia plane noua huius theoriae eo facilius intelligantur.

336. Designando circuli peripheriam siue quatuor angulos rectos per P, supponendoque m, n esse integros, atque n productum e factoribus inter se primis a, b, c etc.: angulus $A = \frac{mP}{n}$ per art. 310 sub hanc formam reduci potest $A = (\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \text{etc.})\, P$, functionesque trigonometricae ipsi respondentes e functionibus ad partes $\frac{\alpha P}{a}$, $\frac{\beta P}{b}$ etc. pertinentibus per methodos notas deducentur. Quoniam itaque pro a, b, c etc. numeros primos aut numerorum primo-

rum potestates accipere licet: manifesto sufficit, sectionem circuli in partes, quarum multitudo est numerus primus aut primi potestas, considerare, polygonumque n laterum e polygonis a, b, c etc. laterum protinus habebitur. Attamen hoc loco disquisitionem ad eum casum restringemus, vbi circulus in partes diuidendus est, quarum multitudo est numerus primus (impar), sequenti praesertim ratione inducti. Constat, functiones circulares angulo $\frac{mP}{pp}$ respondentes e functionibus ad $\frac{mP}{p}$ pertinentibus per solutionem aequationis p^{ti} gradus deriuari, et perinde ex illis per aequationem aeque altam functiones ad $\frac{mP}{p^3}$ pertinentes etc., ita vt, si polygonum p laterum iam habeatur, ad determinationem polygoni p^λ laterum necessario solutio $\lambda - 1$ aequationum p^{ti} gradus requiratur. Etiamsi vero theoriam sequentem ad hunc quoque casum extendere liceret, tamen hac via non minus ad totidem aequationes p^{ti} gradus delaberemur, quae, siquidem p est numerus primus, ad inferiores deprimi nullo modo possunt. Ita e. g. infra ostendetur, polygonum 17 laterum geometrice construi posse: sed ad determinationem polygoni 289 laterum aequationem 17^{mi} gradus nullo modo euitare licet.

337. Satis constat, functiones trigonometricas omnium angulorum $\frac{kP}{n}$, denotando per k indefinite omnes numeros $0, 1, 2 \ldots n - 1$, per