$$y = \frac{b \pm \surd(bb + dx + cxx + ax^3 - nnx^4)}{x}$$ CAP. XII.

existente neque $b$ neque $n = 0$.

274. Qui ergo valores ipsius $x$ Functioni $bb + dx + cxx + ax^3 - nnx^4$ valorem affirmativum induunt, iis duplex Applicata respondet; quibus casibus vero hæc Functio evanescit, iisdem unica Applicata $y$ Abscissæ $x$ convenit, seu binæ Applicatæ inter se fiunt æquales. At, si Functio illa valorem negativum obtinet, tum Abscissæ nulla prorsus Applicata respondet. Sed valores istius Functionis, si fuerint affirmativi, in negativos abire nequeunt, nisi prius facti sint æquales, seu Functio evanuerit. Casus igitur potissimum erunt considerandi, quibus Functio $bb + dx + cxx + ax^3 - nnx^4$ fit $= 0$; quod quidem certo duobus evenit casibus: quoniam, si $x$ certum limitem sive affirmative sive negative transgrediatur, ejus valor fit negativus. Hinc tota Curva determinato Abscissæ spatio respondebit, ultra quod omnes Applicatæ fiant imaginariæ.

275. Ponamus expressionem $bb + dx + cxx + ax^3 - nnx^4$ duos tantum habere Factores reales, seu duobus tantum casibus evanescere posse; quod eveniat, si Abscissa determinetur in punctis $P$ & $S$, ubi unica tantum Applicata reperiatur. Per totum ergo spatium $PS$ Applicatæ erunt geminæ & reales, extra spatium vero $PS$ omnes Applicatæ erunt imaginariæ: ideoque tota Curva intra Applicatas $Kk$ & $Nn$ jacebit. Applicata vero in initio Abscissarum $A$ erit Asymtota Curvæ, quæ præterea Curvam in puncto quopiam secabit; si enim ponatur $x = 0$, fiet $\surd(bb + dx + cxx + ax^3 - nnx^4) = b + \frac{dx}{2b}$, unde erit $y = \frac{b \pm (b + \frac{dx}{2b})}{x}$, hoc est, erit vel $y = \infty$, vel $y = \frac{-d}{2b}$. Curva ergo hoc casu ejusmodi habet formam qualem *Figura* 50. repræsentat.

TAB. XIII. *Fig.* 49.

TAB. XIII.

276. Ponamus expressionem $bb + dx + cxx + ax^3 - nnx^4$ quatuor habere Factores simplices reales inæquales; ideoque quatuor casibus evanescere. In totidem ergo locis $P$, $Q$, $R$ &

LIB. II. & $S$ Applicatæ Curvam in unico puncto ſtringent. Cum igitur Applicatæ per Axis ſpatium $XP$ fuiſſent imaginariæ, nunc per ſpatium $PQ$ erunt reales: tum vero per ſpatium $QR$ erunt iterum imaginariæ, ac per $RS$ rurſus reales. Extra $S$ vero verſus $Y$ denuo fient imaginariæ. Hinc Curva conſtabit duabus partibus a ſe invicem ſeparatis, quarum altera intra rectas $Kk$ & $Ll$, altera intra rectas $Mm$ & $Nn$ continetur. Cum vero in Abſciſſarum initio $A$ Applicatæ ſint reales, neceſſe eſt ut id vel in Axis intervallo $PQ$ vel $RS$ ſit ſitum. Hoc ergo TAB. XIV. caſu Curva figuram habebit, qualem *Figura* 51. oſtendit, ſcilicet conſtabit Ovali a reliqua Curva ad Aſymtotam $DE$ relata, diſtante, quæ vocatur OVALIS CONJUGATA.

277. Si duæ radices fiant inter ſe æquales, vel puncta $P$ & $Q$, vel $Q$ & $R$, vel $R$ & $S$, convenient. Verum, ſi prius eveniat, quia $A$ intra $P$ & $Q$ jacet, utraque radix deberet eſſe $x$; quod quia $b$ deeſſe nequit, fieri non poteſt. Sin autem puncta $R$ & $S$ conveniant, Ovalis conjugata fiet infinite parva, & abibit in PUNCTUM CONJUGATUM. At, ſi puncta $Q$ & $R$ conveniant, Ovalis cum reliqua Curva TAB. XIV. ita conjungetur ut prodeat Curva NODATA *Figuræ* 52. Quod ſi vero tres radices congruant, ſeu puncta $Q$, $R$ & $S$ conveniant, tum nodus in CUSPIDEM acutiſſimam evaneſcet, TAB. XIV. qualem *Figura* 53. repræſentat. Sic igitur quinque diverſæ varietates in ſpecie prima locum habent, ex quibus NEWTONUS totidem conſtituit Species.

278. Simili modo ſubdiviſiones reliquarum Specierum a NEWTONO ſunt factæ, quoniam omnes æquationes ita ſunt comparatæ, ut altera Coordinata plures duabus non habeat dimenſiones. Quando vero altera Coordinata unicam habet dimenſionem, forma Curvæ facillime cognoſcetur. Æquatio enim erit hujuſmodi $y = P$, exiſtente $P$ Functione quapiam rationali Abſciſſæ $x$; quicunque ergo ipſi $x$ valor tribuatur, Applicata quoque ſemper unum obtinet valorem, ideoque Curva continuo tractu Axem utrinque in infinitum comitabitur. Si Functio $P$ ſit fracta, fieri poteſt, ut Applicata in uno pluribuſve

busve locis fiat infinita, ideoque Curvæ Asymtotam exhibeat, quod evenit ubi denominator Functionis $P$ evanescit.

279. Ponatur ergo $y = \frac{P}{Q}$, atque istas Applicatas infinitas ostendent omnes radices reales æquationis $Q = 0$: quælibet enim radix hujus æquationis, puta $x = f$, declarat, si sumatur Abscissa $x = f$, fore Applicatam $y$ infinitam, quia fit $Q = 0$. Tum vero patet, si fuerint Applicatæ $y$ affirmativæ, dum esset $x$ major quam $f$, easdem, facto $x$ minore quam $f$, futuras esse negativas; ideoque Applicata erit Asymtota speciei $u = \frac{A}{t}$: hocque de omnibus Factoribus inæqualibus est tenendum. Sin autem denominator $Q$ duos habuerit Factores æquales, puta $(x - f)^2$, tum si Applicatæ sint affirmativæ sumto $f$ majore quam $x$, manebunt affirmativæ si ponatur $x$ minor $f$, eritque Applicata $y$, facto $x = f$, Asymtota speciei $uu = \frac{A}{t}$. At, si denominator $Q$ tres habuerit Factores æquales, nempe $(x - f)^3$, tum Applicatæ ante & post illam quæ fit infinita, diversa habebunt signa, uti casu primo.

280. Post has æquationes facillime tractantur, quæ in hac forma continentur $yy = \frac{2Py - R}{Q}$, existentibus $P$, $Q$, & $R$ Functionibus quibuscunque integris Abscissæ $x$. Cuique igitur Abscissæ $x$ vel geminæ convenient Applicatæ vel nulla; duæ scilicet prodeunt Applicatæ si fuerit $PP$ major quam $QR$, & nulla si $PP$ minor quam $QR$: in quolibet ergo limite, qui Applicatas reales ab imaginariis seu nullis dirimit, erit $PP = QR$; ideoque fit $y = \frac{P}{Q}$, seu hæc Applicata Curvam in unico puncto stringet vel tanget. Ad Curvæ ergo formam cognoscendam consideretur æquatio $PP - QR = 0$, cujus singulæ radices reales dabunt loca, ubi Applicatæ Curvam in unico puncto stringunt. Notentur hæc puncta in Axe,

atque, si omnes radices fuerint inæquales, Axis partes inter hæc puncta contentæ alternatim habebunt Applicatas geminas reales, & imaginarias; sicque Curva tot constabit partibus a se invicem sejunctis, quot hujusmodi alternationes adesse deprehenduntur, unde Ovales conjugatæ originem ducunt.

281. Si æquationis $PP - QR = 0$, duæ radices fiant æquales, tum illorum in Axe notatorum punctorum duo convenient, hincque in Axe portio vel imaginarias habens Applicatas vel reales evanescet. Priori casu Curva prodibit nodata uti in *Figura* 52.; posteriori Ovalis conjugata in punctum conjugatum evanescet. Quod si autem illa æquatio tres habuerit radices æquales, Nodus fiet infinite parvus atque in Cuspidem abibit, ut in *Figura* 53; si quatuor affuerint radices æquationis æquales, vel duæ Ovales separatæ concrescent in punctum, vel in ipsa Cuspide dabitur Nodus, seu duæ Cuspides ad verticem oppositæ. Sin quinque radices æquales affuerint, novæ fere formæ non proveniunt; Cuspis enim oritur in qua non una, ut ante, sed duæ Ovales in punctum coalescunt; neque etiam major radicum æqualium multitudo novum discrimen in figuris resultantibus producit.

Tab. XIV.

Tab. XIV.

282. Nodus seu intersectio duorum Curvæ ramorum vocari etiam solet PUNCTUM DUPLEX, propterea quod Linea recta Curvam in eo puncto secans, eam in duobus punctis secare censenda est. Atque, si per Nodum alius Curvæ ramus transiret, tum in hac intersectione nascetur punctum Curvæ *triplex*; punctum vero *quadruplex* orietur, si duo puncta duplicia conveniunt, ex quo genesis & natura punctorum quorumvis *multiplicium* perspicitur. Erit ergo etiam Ovalis evanescens, seu punctum conjugatum, punctum duplex, pariter ac Cuspis, quæ oritur a puncto conjugato cum reliqua Curva connexo.

283. Si æquatio, qua Applicata $y$ per Abscissam $x$ exprimitur, sit cubica vel altioris gradus, ita ut $y$ æquetur Functioni multiformi ipsius $x$; tum unicuique Abscissæ convenient vel tot Applicatæ, quot $y$ in æquatione habet dimensiones, vel earum numerus minuetur binario vel quaternario, vel senario &c.