formae F cum periodo formae f conueniat, siue vt *periodus formae F sibi ipsi sit socia.* Quoties hoc euenit, in hac periodo duae formae ancipites inuenientur Ponamus enim periodum formae F constare e $2n$ formis siue F et F^{2n} esse identicas; porro sit $2m+1$ index formae f in periodo formae F *), siue F^{2m+1} et F sociae. Tum patet etiam F' et F^{2m} fore socias nec non F'' et F^{2m-1} etc., adeoque etiam F^m et F^{m+1}. Sit $F^m = (a^m, b^m, -a^{m+1})$, $F^{m+1} = (-a^{m+1}, b^{m+1}, a^{m+2})$. Tum erit $b^m + b^{m+1} \equiv 0$, (mod. a^{m+1}); ex defin. formarum sociarum vero erit $b^m = b^{m+1}$ atque hinc $2b^{m+1} \equiv 0$ (mod. a^{m+1}), siue formae F^{m+1} anceps. — Eodem modo F^{2m+1} et F^{2n} erunt sociae; hinc F^{2m+2} et F^{2n-1}; F^{2m+3} et F^{2n-2} etc. tandemque F^{m+n} et F^{m+n+1}, quarum posterior erit anceps, vti per simile ratiocinium facile probatur. Quia vero $m+1$ et $m+n+1$ secundum mod. $2n$ sunt incongrui, formae F^{m+1} et F^{m+n+1} identicae non erunt (art. 186, vbi n idem denotat, quod hic $2n$). Ita in I sunt formae ancipites $(1, 8, -15)$, $(2, 7, -15)$, in II vero $(-1, 8, 15)$, $(-2, 7, 15)$.

8) Vice versa, *quaeuis periodus, in qua forma anceps occurrit, sibi ipsi socia est.* Facile enim perspicitur, si F^m sit forma reducta anceps: formam ipsi sociam, (quae etiam est reducta), simul ipsi a parte prima contiguam esse, i. e. F^{m-1} et F^m socias. Tum vero to-

*) Index hic necessario erit impar, quia manifesto termini primi formarum F, f signa opposita habent (*vid. supra*, 2).

ta periodus sibi ipsi socia erit. — Hinc patet, *fieri non posse, vt vnica tantum forma anceps in periodo aliqua contenta sit.*

9) Sed etiam *plures quam duae in eadem periodo esse nequeunt.* Ponamus enim in periodo formae F, ex $2n$ formis constante, tres formas ancipites dari F^λ, F^μ, F^ν, ad indices λ, μ, ν respectiue pertinentes, ita vt λ, μ, ν sint numeri inaequales inter limites 0 et $2n - 1$ (incl.) siti. Tum formae $F^{\lambda-1}$ et F^λ erunt sociae; similiterque $F^{\lambda-2}$ et $F^{\lambda+1}$ etc. tandemque F et $F^{2\lambda-1}$. Ex eadem ratione F et $F^{2\mu-1}$ sociae erunt, nec non F et $F^{2\nu-1}$; quare $F^{2\lambda-1}$, $F^{2\mu-1}$, $F^{2\nu-1}$ identicae, indicesque $2\lambda - 1$, $2\mu - 1$, $2\nu - 1$ secundum modulum $2n$ congrui erunt, et proin etiam $\lambda \equiv \mu \equiv \nu$ (mod. n). *Q. E. A.* quia manifesto inter limites 0 et $2n - 1$ tres numeri diuersi secundum modulum n congrui iacere nequeunt.

188. Quum omnes formae ex eadem periodo proprie sint aequiualentes: quaestio oritur, annon etiam formae e periodis diuersis proprie aequiualentes esse possint. Sed antequam ostendamus, *hoc esse impossibile*, quaedam de transformatione formarum reductarum sunt exponenda.

Quoniam in sequentibus de formarum transformationibus persaepe agendum erit; vt prolixitatem quantum fieri potest euitemus, sequenti scribendi compendio abhinc semper vtemur. Si forma aliqua $LXX + 2MXY +$

NYY per substitutionem $X = \alpha x + \beta y$, $Y = \gamma x + \delta y$ in formam $lxx + 2mxy + nyy$ transformatur; simpliciter dicemus, (L, M, N) transformari in (l, m, n) per substitutionem $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Hoc modo opus non erit, indeterminatas formarum singularum, de quibus agitur, per signa propria denotare. — Palam vero est, indeterminatam *primam* a *secunda* in quauis forma probe distingui debere.

Proposita sit forma reducta $(a, b, -a') \ldots f$, determinantis D. Formetur simili modo vt in art. 186 progressio formarum reductarum vtrimque infinita, ... ${}''f, {}'f, f, f', f''$...., et quidem sit $f' = (-a', b', a'')$, $f'' = (a'', b'', -a''')$ etc.; ${}'f = (-{}'a, {}'b, a)$, ${}''f = ({}''a, {}''b, -{}'a)$ etc. Ponatur $\frac{b+b'}{-a'} = h'$, $\frac{b'+b''}{a''} = h''$, $\frac{b''+b'''}{-a'''} = h'''$ etc.; $\frac{{}'b+b}{a} = h$, $\frac{{}''b+{}'b}{-{}'a} = {}'h$, $\frac{{}'''b+{}''b}{{}''a} = {}''h$ etc. Tum patet, si (vt in art. 177) numeri $\alpha', \alpha'', \alpha'''$ etc. $\beta', \beta'', \beta'''$ etc. etc. formentur secundum algorithmum sequentem

$\alpha' = 0$	$\beta' = -1$	$\gamma' = 1$	$\delta' = h'$
$\alpha'' = \beta'$	$\beta'' = h''\beta'$	$\gamma'' = \delta'$	$\delta'' = h''\delta' - 1$
$\alpha''' = \beta''$	$\beta''' = h'''\beta'' - \beta'$	$\gamma''' = \delta''$	$\delta''' = h'''\delta'' - \delta'$
$\alpha^{IV} = \beta'''$	$\beta^{IV} = h^{IV}\beta''' - \beta''$	$\gamma^{IV} = \delta'''$	$\delta^{IV} = h^{IV}\delta''' - \delta''$

etc.

f transformatum iri

in	per substitutionem
f'	$\alpha', \beta', \gamma', \delta'$
f''	$\alpha'', \beta'', \gamma'', \delta''$
f'''	$\alpha''', \beta''', \gamma''', \delta'''$ etc.

omnesque has transformationes fore proprias.