

si ponatur $x = \alpha G + \epsilon H$, $y = \gamma G + \delta H$, va-
lorem formae f fieri M , adeoque M represe-
tabilem esse per formam f .

2° Si supponitur esse $\alpha\xi + 2b\xi\nu + c\nu\nu = M$, manifestum est per substitutionem $G\xi$, $H\xi$, $G\nu$, $H\nu$, formam f transire in F . Quod vero

3° in hoc casu substitutio $G\xi$, $H\xi$, $G\nu$, $H\nu$ omnes transformationes formae f in F exhibeat, si ξ , ν supponantur exhibere omnes valores ipsorum x , y , qui faciunt $f = M$, ita perspicitur. Sit α , ϵ , γ , δ transformatio quaecunque formae f in F , et ut ante $G + H = 1$. Tum inter valores ipsorum x , y erunt etiam hi, $x = \alpha G + \epsilon H$, $y = \gamma G + \delta H$, ex quibus obtinetur substitutio $G(\alpha G + \epsilon H)$, $H(\alpha G + \epsilon H)$, $G(\gamma G + \delta H)$, $H(\gamma G + \delta H)$, siue $\alpha + \delta (\epsilon G - \alpha H)$, $\epsilon + \gamma (\alpha H - \epsilon G)$, $\gamma + \delta (\delta G - \gamma H)$, $\delta + \gamma (\gamma H - \delta G)$. Sed quoniam $\alpha(\alpha X + \epsilon Y)^2 + 2b(\alpha X + \epsilon Y)(\gamma X + \delta Y) + c(\gamma X + \delta Y)^2 = M(GX + HY)^2$ erit $\alpha(\alpha\delta - \epsilon\gamma)^2 = M(\delta G - \gamma H)^2$, $c(\delta\gamma - \alpha\epsilon)^2 = M(\epsilon G - \alpha H)^2$, adeo-
que (quum determinans formae f per $(\alpha\delta - \epsilon\gamma)^2$ multiplicatus aequalis sit determinanti formae F i.e. = 0, adeoque etiam $\alpha\delta - \epsilon\gamma = 0$), $\delta G - \gamma H = 0$, $\epsilon G - \alpha H = 0$. Hinc substitutio illa transit in hanc α , ϵ , γ , δ , vnde patet, formulam traditam omnes transformationes formae f in F suppeditare.

III. Superest ut omnes representationes nu-
meri dati per formam datam determinantis o
exhibere doceamus. Sit forma haec $m(Gx +$

$hy)^2$, patetque statim, numerum illum per m diuisibilem, et quotientem quadratum esse debere. Si itaque numerus propositus statuitur $= mee$, perspicuum est, pro quibus valoribus ipsorum x, y fiat $m(gx + hy)^2 = mee$, pro iisdem fieri $gx + hy$ aut $= + e$, aut $= - e$. Quare omnes repraesentationes habebuntur, si omnes solutiones aequationum linearium $gx + hy = e$, $gx + hy = - e$ in integris, sunt inuentae. Has vero solubiles esse constat (siquidem g, h sunt inter se primi ut supponitur). Scilicet si g, h ita determinantur ut sit $gg + hh = 1$, aequationi priori satisfiet ponendo $x = ge + hz, y = he - gz$; posteriori vero faciendo $x = - ge + hz, y = - he - gz$, denotante z integrum quemcunque. Simul vero formulae hae *omnes* valores integros ipsorum x, y exhibent, si z indefinite numerum quemuis integrum designare supponitur.



His disquisitionibus coronidis loco apponimus

216. PROBLEMA. Inuenire omnes solutiones aequationis generalis *) indeterminatae secundi gradus duas incognitas implicantis

$$axx + 2bxy + cyy + 2dx + 2ey + f = 0$$

(ubi a, b, c etc. sunt integri quicunque dati) per numeros integros.

*) Si aequatio proponeretur in qua coefficiens secundus, quartus vel quintus non esset par, multiplicata per 2 eam formam reciperebat quam hic supponimus.

Sol. Introducamus loco incognitarum x, y alias $p = (bb - ac)x + be - cd$, et $q = (bb - ac)y + bd - ae$, qui manifeste semper erunt integri, quando x, y sunt integri. Quo facto habebitur aequatio $app + 2bpq + cqq + (bb - ac)(aee - 2bde + cdd) = 0$, siue posito breuitatis gratia numero $(bb - ac)(aee - 2bde + cdd) = -M$, haec $app + 2bpq + cqq = M$. Iam omnes solutiones huius aequationis, i. e. omnes repraesentationes numeri M per formam (a, b, c) in praecedentibus inuenire docuimus. Si vero ex singulis valoribus ipsorum p, q , valores respondentes ipsorum x, y adiumento aequationum $x = \frac{p + cd - be}{bb - ac}, y = \frac{q + ae - bd}{bb - ac}$ determinantur, facile perspicitur, omnes hos valores aequationi propositae satisfacere, et nullos valores integros ipsorum x, y dari qui hoc modo non obtineantur. Si itaque ex omnibus valoribus ipsorum x, y sic prodeuntibus valores fractos eiciimus, omnes solutiones quaesitae remanebunt.

Circa hanc solutionem sequentia sunt obseruanda.

1° Si aut M per formam (a, b, c) repraesentari non potest, aut ex nulla repraesentatione valores *integri* ipsorum x, y sequuntur: aequatio in integris nullo modo solui poterit.

2° Quando determinans formae (a, b, c) , i. e. numerus $bb - ac$ est negatiuus, vel positiuus quadratus simulque M non $= 0$: multitudine repraesentationum numeri M per formam (a, b, c)