bus rationibus hic fusius non explicandis analogam esse, atque valorem mediocrem illius producti aeque exacte exprimi per formulam talem $m\sqrt{D} - n$; sed valores quantitatum constantium m, n hactenus per theoriam determinare non licuit; si quid ex aliquot centadibus determinantium inter se comparatis concludere permissum est, m parum a $2\frac{1}{3}$ differe videtur. — Ceterum de principiis disquisitionum praecedentium circa valores mediocres quantitatum lege analytica non progredientium, sed ad talem legem asymptotice continuo magis approximantium alia occasione fusius agere nobis reseruamus. Transimus iam ad aliam disquisitionem, qua classes diuersae pr. prim. eiusdem det. inter se comparabuntur, finisque huic longae sectioni imponetur.

305. Theorema. *Designante K classem principalem formarum determinantis dati D, C classem quamcunque aliam e genere principali formarum eiusdem det.; $2C$, $3C$, $4C$ etc. classes resp. e duplicatione, triplicatione, quadruplicatione etc. classis C ortas (vt in art. 249): in progressione C, $2C$, $3C$ etc. satis continuata tandem ad classem cum K identicam peruenitur; supponendoque, mC esse primam cum K identicam, atque multitudinem omnium classium in genere principali $= n$, erit vel $m = n$, vel m pars aliquota ipsius n.*

Dem. I. Quum omnes classes K, C, $2C$, $3C$ etc. necessario ad genus principale pertineant (art. 247), classes $n + 1$ priores huius seriei K, C, $2C \ldots nC$ manifesto omnes diuersae esse nequeunt. Erit itaque vel K cum aliqua classium C, $2C$, $3C \ldots nC$ identica, vel saltem duae ex his classibus inter se identicae. Sit $rC = sC$

atque $r > s$, eritque etiam $(r - 1)\,C = (s - 1)\,C$, $(r - 2)\,C = (s - 2)\,C$ etc. et $(r + 1 - s)\,C = C$, vnde $(r - s)\,C = K$. *Q. E. P.*

II. Hinc etiam protinus sequitur, esse vel $m = n$ vel $m < n$, superestque tantummodo, vt ostendamus, in casu posteriori m esse partem aliquotam ipsius n. Quum classes K, C, $2C \ldots (m - 1)\,C$, quarum complexum per $\mathfrak{C}$ designabimus, totum genus principale in hoc casu nondum exhauriant, sit C' aliqua classis huius generis in $\mathfrak{C}$ non contenta, designeturque complexus classium, quae ex compositione ipsius C' cum singulis classibus in $\mathfrak{C}$ oriuntur, puta C', $C' + C$, $C' + 2C \ldots C' + (m - 1)\,C'$, per $\mathfrak{C}'$. Iam facile perspicitur, omnes classes in $\mathfrak{C}'$ tum inter se tum ab omnibus in $\mathfrak{C}$ diuersas esse et ad genus principale pertinere; quodsi itaque $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$ hoc genus omnino exhauriunt, habebimus $n = 2m$; sin minus, erit $2m < n$. Sit in casu posteriori C'' aliqua classis generis principalis nec in $\mathfrak{C}$ nec in $\mathfrak{C}'$ contenta, designeturque complexus classium ex compositione ipsius C'' cum singulis classibus in $\mathfrak{C}$ prodeuntium i. e. harum C'', $C'' + C$, $C'' + 2C \ldots C'' + (m - 1)\,C$ per $\mathfrak{C}''$, patetque facile, has omnes inter se et ab omnibus in $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$ diversas esse, et ad genus principale pertinere. Quare si $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}''$ hoc genus exhauriunt, erit $n = 3m$; sin minus, $n > 3m$, in quo casu classis alia C''', in genere principali contenta, neque vero in $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$ vel $\mathfrak{C}''$, simili modo tractata docebit esse vel $n = 4m$ vel $n > 4m$, et sic porro. Iam quum n et m sint numeri finiti, genus principale necessario tandem exhaurietur, eritque n multiplum ipsius m, siue m pars aliquota ipsius n. *Q. E. S.*

Ex. Sit $D = -356$, $C = (5, 2, 72)$ *), inuenieturque $2C = (20, 8, 21)$, $3C = (4, 0, 89)$ $4C = (20, -8, 21)$, $5C = (5, -2, 72)$, $6C = (1, 0, 356)$. Hic itaque est $m = 6$, n vero pro hoc determinante est 12. Accipiendo pro C' classem $(8, 2, 45)$, classes quinque reliquae in $\mathfrak{C}'$ erunt $(9, -2, 40)$, $(9, 2, 40)$, $(8, -2, 45)$, $(17, 1, 21)$, $(17, -1, 21)$.

306. Demonstratio theor. praec. omnino analoga inuenietur demonstrationibus in artt. 45, 49, reueraque theoria multiplicationis classium cum argumento in Sect. III. tractato permagnam vndique affinitatem habet. At limites huius operis non permittunt, illam theoriam ea qua digna est vbertate hic persequi; quocirca paucas tantummodo obseruationes hic adiiciemus, eas quoque demonstrationes quae apparatum prolixiorem requirerent supprimemus, disquisitionemque ampliorem ad aliam occasionem nobis reseruabimus.

I. Si series K, C, $2C$, $3C$ etc. vltra $(m-1)\,C$ producitur, eaedem classes iterum comparent, $mC = K$, $(m+1)\,C = C$, $(m+2)\,C = 2C$ etc.; generaliterque (spectando concinnitatis caussa K tamquam $0C$) classes gC, $g'C$ identicae erunt vel diuersae, prout g et g' secundum modulum m congrui sunt vel incongrui. Classis itaque nC semper identica est cum principali K.

*) **Classes hic semper per** ***formas*** **(simplissimas) in ipsis contentas exprimuntur.**