inter $\frac{\alpha}{\gamma}$ et $\frac{\beta}{\delta}$. Quare pars prima theorematis pro casu priori est demonstrata.

Eodem modo perspicitur, in [5] et [6] necessario signa inferiora accipi debere, quando neque $\frac{\gamma}{\alpha}$ neque $\frac{\delta}{\beta}$ signum idem habeant vt a' siue a, quia accepto superiori $\frac{a'\gamma}{\alpha}$, $\frac{a'\delta}{\beta}$ necessario fierent quantitates positiuae. Vnde protinus sequitur $\frac{-\sqrt{D}+b}{a'}$ pro hocce casu iacere inter $\frac{\gamma}{\alpha}$ et $\frac{\delta}{\beta}$. Demonstrata est itaque etiam pars secunda theorematis pro casu posteriori. Quodsi aeque facile ostendi posset, in [3] et [4] signa inferiora accipi debere, quando neutra quantitatum $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\delta}$ signum idem habeat vt a, et in [5] et [6] superiora, quando neque $\frac{\gamma}{\alpha}$ neque $\frac{\delta}{\beta}$ signum oppositum habeat: hinc simili modo sequeretur, pro illo casu $\frac{-\sqrt{D}-b}{a}$ iacere inter $\frac{\alpha}{\gamma}$ et $\frac{\beta}{\delta}$, pro hoc $\frac{\sqrt{D}+b}{a'}$ inter $\frac{\gamma}{\alpha}$ et $\frac{\delta}{\beta}$, siue pars prima theorematis etiam pro casu posteriori, et secunda pro casu priori demonstratae forent. Sed quum illud difficile quidem non sit, attamen sine quibusdam ambagibus fieri nequeat, methodum sequentem praeferimus.

Quando nullus numerorum α, β, γ, $\delta = 0$, $\frac{\alpha}{\gamma}$ et $\frac{\beta}{\delta}$ eadem signa habebunt vt $\frac{\gamma}{\alpha}$, $\frac{\delta}{\beta}$. Quando itaque neutra harum quantitatum signum idem habet vt a' siue a, adeoque $\frac{-\sqrt{D}+b}{a'}$ inter $\frac{\gamma}{\alpha}$ et $\frac{\delta}{\beta}$ cadit: neutra quantitatum $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\delta}$ signum idem vt a habebit, cadetque $\frac{a'}{-\sqrt{D}+b} = \frac{-\sqrt{D}-b}{a}$ (propter $aa' = D - bb$) inter $\frac{\alpha}{\gamma}$ et $\frac{\beta}{\delta}$. Quare pro eo casu vbi neque α neque $\beta = 0$, pars prima theor. etiam pro casu secundo est demonstrata (nam conditio vt neque γ neque $\delta = 0$, iam in theor. ipso est adiecta). Simili modo, quando nullus numerorum $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 0$, et neque $\frac{\alpha}{\gamma}$ neque $\frac{\beta}{\delta}$ signum signo ipsius a vel a' oppositum habet, adeoque $\frac{\sqrt{D}-b}{a'}$ inter $\frac{\alpha}{\gamma}$ et $\frac{\beta}{\delta}$ iacet: etiam $\frac{\gamma}{\alpha}$ et $\frac{\delta}{\beta}$ signum oppositum signo ipsius a' non habebit, cadetque $\frac{a}{\sqrt{D}-b} = \frac{\sqrt{D}+b}{a'}$ inter $\frac{\gamma}{\alpha}$ et $\frac{\delta}{\beta}$. In eo igitur casu vbi neque γ neque $\delta = 0$ pars secunda theor. etiam pro casu secundo est demonstrata.

Nihil itaque superesset quam vt demonstretur, partem primam theor. etiam pro casu secundo locum habere si alteruter numerorum α, β sit $= 0$, et partem secundam pro casu primo si aut γ aut $\delta = 0$; At *omnes hi casus sunt impossibiles.* Supponamus enim, pro parte *prima* theor., esse neque γ neque $\delta = 0$, $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\delta}$ non habere signum idem vt a atque esse 1) $\alpha = 0$. Tum ex aequ. $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ fit $\beta =$

± 1, $\gamma = \pm 1$. Hinc ex [1] $A = - a'$, quare A et a', adeoque etiam a et A' signa opposita habent, vnde fit $\sqrt{(D - \frac{aA'}{\delta\delta})} > \sqrt{D} > b$. Hinc patet in [4] necessario signum inferius accipi debere, quia accepto superiori $\frac{\beta}{\delta}$ manifesto signum idem obtineret vt a. Fit itaque $\frac{\beta}{\delta} > \frac{-\sqrt{D}-b}{a} > 1$ (propter $a < \sqrt{D} + b$ ex def. formae reductae), *Q. E. A.* quum $\beta = \pm 1$, et δ non $= 0$. — 2). Sit $\beta = 0$. Tum ex aequ. $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ fit $\alpha = \pm 1$, $\delta = \pm 1$. Hinc ex [2] $-A' = -a'$, quare a et a et A signa eadem habebunt, vnde fit $\sqrt{(D + \frac{aA}{\alpha\alpha})} > \sqrt{D} > b$. Hinc patet in [3] signum inferius accipi debere, quia accepto superiori $\frac{\alpha}{\gamma}$ signum idem obtineret vt a. Fit itaque $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{-\sqrt{D}-b}{a} > 1$, *Q. E. A.* eadem ratione vt ante. — Pro parte *secunda* si supponimus neque α, neque $\beta = 0$; $\frac{\gamma}{\alpha}, \frac{\delta}{\beta}$ non habere signum signo ipsius a' oppositum atque 1) $\gamma = 0$: ex aequ. $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ fit $\alpha = \pm 1$, $\delta = \pm 1$. Hinc ex [1] $A = a$, quare a' et A' signa eadem habebunt, vnde fit $\sqrt{(D + \frac{a'A'}{\beta\beta})} > \sqrt{D} > b$. Quocirca in [6] signum superius erit accipiendum, quia accepto inferiori, $\frac{\delta}{\beta}$ obtineret signum oppositum signo ipsius a'. Fit igitur $\frac{\delta}{\beta} > \frac{\sqrt{D}+b}{a'} > 1$, *Q. E. A*, quia $\delta = \pm 1$ et