

si ponatur $x = \alpha \mathfrak{G} + \mathfrak{C} \mathfrak{H}$, $y = \gamma \mathfrak{G} + \delta \mathfrak{H}$, valorem formae f fieri M , adeoque M repraesentabilem esse per formam f .

2° Si supponitur esse $a\mathfrak{z}\mathfrak{z} + 2b\mathfrak{z}\mathfrak{v} + c\mathfrak{v}\mathfrak{v} = M$, manifestum est per substitutionem $G\mathfrak{z}$, $H\mathfrak{z}$, $G\mathfrak{v}$, $H\mathfrak{v}$, formam f transire in F . Quod vero

3° in hoc casu substitutio $G\mathfrak{z}$, $H\mathfrak{z}$, $G\mathfrak{v}$, $H\mathfrak{v}$ omnes transformationes formae f in F exhibeat, si \mathfrak{z} , \mathfrak{v} supponantur exhibere omnes valores ipsorum x , y , qui faciunt $f = M$, ita perspicitur. Sit α , \mathfrak{C} , γ , δ transformatio quaecunque formae f in F , et vt ante $\mathfrak{G}G + \mathfrak{H}H = 1$. Tum inter valores ipsorum x , y erunt etiam hi, $x = \alpha \mathfrak{G} + \mathfrak{C} \mathfrak{H}$, $y = \gamma \mathfrak{G} + \delta \mathfrak{H}$, ex quibus obtinetur substitutio $G(\alpha \mathfrak{G} + \mathfrak{C} \mathfrak{H})$, $H(\alpha \mathfrak{G} + \mathfrak{C} \mathfrak{H})$, $G(\gamma \mathfrak{G} + \delta \mathfrak{H})$, $H(\gamma \mathfrak{G} + \delta \mathfrak{H})$, siue $\alpha + \mathfrak{H}(\mathfrak{C}G - \alpha H)$, $\mathfrak{C} + \mathfrak{G}(\alpha H - \mathfrak{C}G)$, $\gamma + \mathfrak{H}(\delta G - \gamma H)$, $\delta + \mathfrak{G}(\gamma H - \delta G)$. Sed quoniam $a(\alpha X + \mathfrak{C}Y)^2 + 2b(\alpha X + \mathfrak{C}Y)(\gamma X + \delta Y) + c(\gamma X + \delta Y)^2 = M(GX + HY)^2$ erit $a(\alpha\delta - \mathfrak{C}\gamma)^2 = M(\delta G - \gamma H)^2$, $c(\mathfrak{C}\gamma - \alpha\delta)^2 = M(\mathfrak{C}G - \alpha H)^2$, adeoque (quum determinans formae f per $(\alpha\delta - \mathfrak{C}\gamma)^2$ multiplicatus aequalis sit determinanti formae F i. e. $= 0$, adeoque etiam $\alpha\delta - \mathfrak{C}\gamma = 0$), $\delta G - \gamma H = 0$, $\mathfrak{C}G - \alpha H = 0$. Hinc substitutio illa transit in hanc α , \mathfrak{C} , γ , δ , vnde patet, formulam traditam omnes transformationes formae f in F suppeditare.

III. Superest vt omnes repraesentationes numeri dati per formam datam determinantis o exhibere doceamus. Sit forma haec $m(gx +$

$hy)^2$, patetque statim, numerum illum per m diuisibilem, et quotientem quadratum esse debere. Si itaque numerus propositus statuitur $= mee$, perspicuum est, pro quibus valoribus ipsorum x, y fiat $m(gx + hy)^2 = mee$, pro iisdem fieri $gx + hy$ aut $= +e$, aut $= -e$. Quare omnes repraesentationes habebuntur, si omnes solutiones aequationum linearium $gx + hy = e$, $gx + hy = -e$ in integris, sunt inuentae. Has vero solubiles esse constat (siquidem g, h sunt inter se primi vt supponitur). Scilicet si g, h ita determinantur vt sit $gg + hh = 1$, aequationi priori satisfiet ponendo $x = ge + hz$, $y = he - gz$; posteriori vero faciendo $x = -ge + hz$, $y = -he - gz$, denotante z integrum quemcunque. Simul vero formulae hae omnes valores integros ipsorum x, y exhibent, si z indefinite numerum quemuis integrum designare supponitur.

* * *

His disquisitionibus coronidis loco apponimus

216. PROBLEMA. *Inuenire omnes solutiones aequationis generalis *) indeterminatae secundi gradus duas incognitas implicantis*

$$axx + 2bxy + cyy + 2dx + 2ey + f = 0$$

(ubi a, b, c etc. sunt integri quicunque dati) per numeros integros.

*) Si aequatio proponeretur in qua coefficiens secundus, quartus vel quintus non esset par, multiplicata per 2 eam formam reciperet quam hic supponimus.

Sol. Introducamus loco incognitarum x, y alias $p = (bb - ac) x + be - cd$, et $q = (bb - ac) y + bd - ae$, qui manifesto semper erunt integri, quando x, y sunt integri. Quo facto habebitur aequatio $app + 2bpq + cq + (bb - ac)(aee - 2bde + cdd) = 0$, siue posito breuitatis gratia numero $(bb - ac)(aee - 2bde + cdd) = -M$, haec $app + 2bpq + cq = M$. Iam omnes solutiones huius aequationis, i. e. omnes repraesentationes numeri M per formam (a, b, c) in praecedentibus inuenire docuimus. Si vero ex singulis valoribus ipsorum p, q , valores respondentes ipsorum x, y adiumento aequationum $x = \frac{p + cd - be}{bb - ac}, y = \frac{q + ae - bd}{bb - ac}$ determinantur, facile perspicitur, omnes hos valores aequationi propositae satisfacere, et nullos valores integros ipsorum x, y dari qui hoc modo non obtineantur. Si itaque ex omnibus valoribus ipsorum x, y sic prodeuntibus valores fractos elicimus, omnes solutiones quaesitae remanebunt.

Circa hanc solutionem sequentia sunt obseruanda.

1° Si aut M per formam (a, b, c) repraesentari non potest, aut ex nulla repraesentatione valores *integri* ipsorum x, y sequuntur: aequatio in integris nullo modo solui poterit.

2° Quando determinans formae (a, b, c) , i. e. numerus $bb - ac$ est negatiuus, vel positiuus quadratus simulque $M \neq 0$: multitudo repraesentationum numeri M per formam (a, b, c)