quod ita demonstramus *). Si supponatur $4n = tt + 27uu = t't' + 27u'u'$, fieret *primo* $(tt' - 27uu')^2 + 27(tu' + t'u)^2 = 16nn$, *secundo* $(tt' + 27uu')^2 + 27(tu' - t'u)^2 = 16nn$, *tertio* $(tu' + t'u)(tu' - t'u) = 4n(u'u' - uu)$; ex aequatione tertia sequitur, ipsum n, quoniam est numerus primus, alterutrum numerorum $tu' + t'u$, $tu' - t'u$ metiri; e prima et secunda vero patet, vtrumque hunc numerum esse minorem quam n; quare is quem n metitur necessario esse debet $= 0$, adeoque etiam $u'u' - uu = 0$, vnde $u'u' = uu$ et $t't' = tt$, i. e. duae illae discerptiones non different. Si itaque discerptionem ipsius $4n$ in quadratum et quadratum 27^{plex} notam supponimus (quam vel per methodum directam sect. V vel per indirectam in artt. 323, 324 traditam eruere licet) puta si habetur $4n = MM + 27NN$, quadrata $(3k - 2)^2$, $(b - c)^2$ determinata erunt, et loco aequationis II duas iam nacti erimus. Sed facile patet, non solum quadratum $(3k - 2)^2$ sed etiam radicem ipsam $3k - 2$ penitus determinatam esse; quum enim necessario sit vel $= +M$ vel $= -M$, ambiguitas inde tolletur quod k fieri debet integer, quamobrem statuetur $3k - 2 = +M$ vel $= -M$, prout M est formae $3z + 1$ vel $3z + 2$ **). Iam quum fiat k

*) Magis directe haecce propositio e principiis sect. V probari posset.

**) Manifesto M nequit esse formae $3z$, alioquin enim $4n$ per 3 diuisibilis euaderet. — Ad ambiguitatem, vtrum $b - c$ statui debeat $= N$, an $= -N$, hic non opus est respicere, neque etiam per rei naturam vllo modo

$= 2a - b - c = 3a - m$, erit $a = \frac{1}{3}(m + k)$, $b + c = m - a = \frac{1}{3}(2m - k)$, vnde $C = aa - bc = aa - \frac{1}{4}(b + c)^2 + \frac{1}{4}(b - c)^2 = \frac{1}{9}(m + k)^2 - \frac{1}{36}(2m - k)^2 + \frac{1}{4}NN = \frac{1}{12}kk + \frac{1}{3}km + \frac{1}{4}NN$, atque sic omnes coëfficientes aequ. quaesitae inuenti. *Q. E. F.* — Haec formula adhuc simplicior euadit, si pro NN eius valor ex aequ. $(3k - 2)^2 + 27NN = 4n = 12m + 4$ substituitur, vnde elicitur calculo facto $C = \frac{1}{9}(m + k + 3km) = \frac{1}{9}(m + kn)$. Idem valor etiam ad $(3k - 2)\,NN + k^3 - 2kk + k - km + m$ reduci potest, quae expressio, ad vsum quidem minus idonea, protinus monstrat, C vt par est certo euadere integrum.

Ex. Pro $n = 19$, fit $4n = 49 + 27$, vnde $3k - 2 = + 7$, $k = 3$, $C = \frac{1}{9}(6 + 57) = 7$ et aequatio quaesita $x^3 + xx - 6x - 7 = 0$ vt supra (art. 351). — Simili modo pro $n = 7, 13, 31, 37, 43, 61, 67$ valor ipsius k eruitur resp. $1, -1, 2, -3, -2, 1, -1$, vnde $C = 1, -1, 8, -11, -8, 9, -5$.

Ceterum etsi problema in hoc art. solutum satis intricatum sit, tamen id supprimere noluimus, tum propter solutionis elegantiam, tum quod variis artificiis in vsum vocandis occasionem dedit, quae in aliis quoque quaestionibus insigni cum fructu adhiberi poterunt.

auferri potest, quum ab electione radicis primitiuae g pendeat, ita vt pro aliis radicibus primitiuis differentia $b - c$ positiua euadat, pro aliis negatiua.

359. Disquisitiones praecc. circa *inuentionem* aequationum auxiliarium versabantur: iam de earum *solutione* proprietatem magnopere insignem explicabimus. Constat, omnes summorum geometrarum labores, aequationum ordinem quartum superantium resolutionem generalem, siue (vt accuratius quid desideretur definiam) AFFECTARVM REDVCTIONEM AD PVRAS, inueniendi semper hactenus irritos fuisse, et vix dubium manet, quin hocce problema non tam analyseos hodiernae vires superet, quam potius aliquid impossibile proponat (Cf. quae de hoc argumento annotauimus in *Demonstr. noua* etc. *p.* 22). Nihilominus certum est, innumeras aequationes affectas cuiusque gradus dari, quae talem reductionem ad puras admittant, geometrisque gratum fore speramus, si nostras aequationes auxiliares semper huc referendas esse ostenderimus. Sed propter amplum ambitum huius disquisitionis, praecipua tantum momenta, quae ad possibilitatem ostendendam necessaria sunt, hoc loco tradimus, vberioremque tractationem qua hoc argumentum perdignum est ad aliud tempus differimus. Praemittendae sunt quaedam obseruationes generales circa radices aequ. $x^e - 1 = 0$, quae eum quoque casum complectantur, vbi e est numerus compositus.

I. Exhibentur hae radices (vt ex libris elementaribus notum est) per $\cos\frac{kP}{e} + i \sin\frac{kP}{e}$, vbi pro k accipiendi sunt e numeri $0, 1, 2, 3 \ldots e - 1$, aut quicunque alii his secundum modulum e congrui. Vna radix, pro $k = 0$ aut ge-