Si variabiles y *&* z *seorsim considerata ubique pares habeant dimensiones,*
tum sequentes quaternæ regiones congruent

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8
2,	1,	5,	6,	3,	4,	8,	7
3,	5,	1,	7,	2,	8,	4,	6
5,	3,	2,	8,	1,	7,	6,	4.

22. Si una variabilium ubique pares habeat dimensiones, reliquæ vero binæ simul consideratæ vel ubique pares vel ubique impares constituant dimensiones, tum quoque quaternæ regiones congruent, sequenti modo.

Si z *ubique pares habeat dimensiones, &* x *&* y *ubique vel pares vel impares dimensiones constituant,*
tum sequentes quaternæ regiones congruent

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8
2,	1,	5,	6,	3,	4,	8,	7
7,	8,	4,	3,	6,	5,	1,	2
8,	7,	6,	5,	4,	3,	2,	1.

Si y *ubique pares habeat dimensiones, atque* x *&* z *ubique vel pares vel impares dimensiones junctim constituant,*
tum sequentes quaternæ regiones congruent

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8
3,	5,	1,	7,	2,	8,	4,	6
6,	4,	8,	2,	7,	1,	5,	3
8,	7,	6,	5,	4,	3,	2,	1.

Si x *ubique pares habeat dimensiones, atque* y *&* z *junctim considerata ubique vel pares vel impares constituant dimensiones,*
tum sequentes quaternæ regiones congruent

1, 2,

APPEND.

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8
4,	6,	7,	1,	8,	2,	3,	5
5,	3,	2,	8,	1,	7,	6,	4
8,	7,	6,	5,	4,	3,	2,	1.

His ergo tribus caſibus ſimul omnes tres variabiles x, y, & z junctim conſideratæ ubique vel pares vel impares dimenſiones adimplebunt.

23. Superſunt ſequentes caſus quaternarum regionum æqualium.

Si x *&* y *&* y *&* z } *ubique vel pares vel ubique impares dimenſiones conſtituant,*
tum ſequentes quaternæ regiones congruent

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8
5,	3,	2,	8,	1,	7,	6,	4
7,	8,	4,	3,	6,	5,	1,	2
6,	4,	8,	2,	7,	1,	5,	3.

Eædem ergo ſimilitudines prodeunt, ſi inſuper binæ reliquæ variabiles x & z ubique vel pares vel impares dimenſiones conſtituant, ita ut hæc conditio jam in propoſita contineatur. Portiones ergo Superficiei in quaternis disjunctis regionibus erunt inter ſe æquales, ſi in æquatione binæ quæque variabiles junctim conſideratæ ubique vel pares vel impares dimenſiones conſtituant. Cum autem tres dentur combinationes, notandum eſt ſi duæ expoſita proprietate fuerint præditæ, tum ſimul tertiam combinationem eadem proprietate eſſe gaviſuram.

24. Quod ſi ad conditiones, quæ quaternas regiones ſimiles & æquales produxerant, nova inſuper accedat in iis non contenta, quæ per ſe æqualitatem in binas regiones inferret, tum omnes prorſus regiones inter ſe fient æquales, atque Superficies conſtabit ex octo partibus inter ſe æqualibus & ſimilibus.

libus. Æquatio ergo pro hujuſmodi Superficiebus omnes hactenus memoratas proprietates conjunctim poſſidebit: ſcilicet, ſingulæ variabiles x, y, z ſeorſim conſideratæ ubique pares conſtituent dimenſiones; ex quo jam ſequitur binas quaſque junctim conſideratas, atque etiam omnes tres ſimul ſumtas, ubique pares eſſe conſtituturas dimenſiones. Cap. I.

25. Utrum autem æquatio inter tres variabiles propoſita una duabuſve vel adeo tribus exhibitarum proprietatum ſit prædita an non, id quidem, quod ad cujuſvis variabilis pares dimenſiones attinet, facile perſpicitur. Neque difficilius eſt inquirere, utrum omnes variabiles ſimul conſideratæ ubique vel pares vel impares conſtituant dimenſiones. At utrum binæ tantum ad hanc proprietatem ſint comparatæ, difficilius erit examinare. Ponatur in æquatione vel $x = nz$, vel $y = nz$, vel $x = ny$, ac diſpiciatur utrum uno alterove caſu æquatio reſultet, in qua variabilis z duobus prioribus caſibus, vel y poſtremo caſu, ubique induat pares dimenſiones: quod ſi eveniat, duæ variabiles junctim ſumtæ ubique vel pares vel impares dimenſiones conſtituant neceſſe eſt; hincque Superficies duas ſaltem habebit partes inter ſe ſimiles & æquales.

CAPUT II.

De Sectionibus Superficierum a planis quibuſcunque factis.

26. QUemadmodum interſectiones Linearum ſunt puncta, ita Superficierum interſectiones ſunt Lineæ vel rectæ, vel curvæ. Interſectio duorum planorum eſt Linea recta, uti ex Elementis conſtat. Globi autem plano ſecti figura eſt Circulus. Plurimum autem ad cognitionem Superficiei affertur ſubſidii, ſi Lineas, quibus Superficies a datis planis interſecatur, noverimus. Hoc enim modo ſimul infinita Su-

Append. perficiei puncta innotescunt, cum modo præcedente singuli variabilis unius z valores singula tantum Superficiei puncta præbeant.

Tab. XXXI. Fig. 121. 27. Cum igitur Superficies ad tria plana inter se normalia referamus, ante omnia investigari conveniet intersectiones Superficiei & horum planorum. Sumto ergo primo plano APQ, quod variabilibus $AP = x$, $AQ = y$ determinatur, (quoniam tertia variabilis z designat distantiam cujusque Superficiei puncti ab hoc plano,) perspicuum est, si ponatur $z = 0$, ea Superficiei puncta inventum iri, quæ in ipso plano APQ sint sita, atque idcirco æquatio residua inter x & y exhibebit Lineam, qua Superficies a plano APQ intersecatur. Simili modo, si ponatur $y = 0$, æquatio inter x & z exprimet intersectionem Superficiei a plano APR factam; atque, posito $x = 0$, æquatio inter y & z dabit intersectionem Superficiei & plani AQR.

28. Supra jam innuimus Superficiem Globi Centrum in puncto A habentis, cujus radius $= a$, exprimi hac æquatione $xx + yy + zz = aa$; hoc ergo exemplo ad illustrationem harum intersectionum utar. Sit igitur $z = 0$, atque æquatio $xx + yy = aa$, exhibebit intersectionem Globi a plano APQ factam, quam ergo patet esse Circulum Centrum A & radium $= a$, habentem. Simili modo, facto $y = 0$, intersectio Globi a plano APR facta erit Circulus æquatione $xx + zz = aa$, contentus. Eodemque modo, si ponatur $x = 0$, æquatio $yy + zz = aa$, parem Circulum pro intersectione plani AQR indicat. Hæc quidem sunt satis nota, cum Sectiones Globi planis per ejus Centrum transeuntibus factæ omnes sint Circuli maximi, seu cum Globo radium communem habentes.

29. Haud difficilius erit Sectiones Superficiei per plana alia uni istorum planorum principalium parallela factas determinare. Concipiatur planum plano APQ parallelum ab eoque distans intervallo $= h$, omnia ergo Superficiei puncta, quorum ab eodem plano APQ distantia, quæ per variabilem z indicatur, est $= h$, simul in isto plano parallelo sita erunt, ideoque intersectionem

tersectionem formabunt. Pro hac ergo intersectione æquatio habebitur, si in æquatione pro Superficie ponatur $z = h$; tum enim habebitur æquatio inter binas Coordinatas orthogonales x & y naturam sectionis exprimens. Eodem autem modo sectiones, quæ per plana vel ipsi APR vel AQR parallela fiunt, definientur, unde superfluum foret, quæ de uno dicta sunt, in reliquis repetere.

30. Si ergo in æquatione pro Superficie inter tres Coordinatas x, y & z, una earum z ponitur constans $= h$, tum sectio Superficiei per planum plano APQ parallelum ab eoque intervallo h distans formata oritur. Quod si ergo successive huic litteræ h omnes valores possibiles, tam affirmativi quam negativi, tribuantur, tum omnes sectiones Superficiei, quæ a planis plano APQ parallelis formantur, obtinentur: atque, cum tota Superficies hujusmodi planis parallelis in partes infinitas dissecari possit, hocque modo omnes sectiones cognoscantur, ex istis omnibus sectionibus tota Superficies innotescet. Omnes scilicet istæ sectiones unica æquatione inter Coordinatas x & y, constantem indeterminatam h involvente, exprimentur; ex quo omnes istæ sectiones erunt Lineæ vel similes vel saltem affines una æquatione contentæ.

31. Omnes ergo sectiones Superficiei plano APQ parallelæ erunt inter se æquales, atque a planis APR, AQR æquali modo trajicientur, si æquatio inter x & y ita fuerit comparata, ut eadem maneat quicunque valor ipsi h tribuatur. Hoc autem evenire nequit, nisi variabilis z, cujus loco h est posita, prorsus desit in æquatione pro Superficie. Quo circa, si variabilis tertia z in æquationem Superficiei omnino non ingrediatur, tum omnes sectiones plano APQ parallelæ erunt inter se æquales; quarum natura exprimetur ipsa Superficiei æquatione; quippe, quæ duas tantum variabiles x & y involvit. Simili vero modo, si in æquatione pro Superficie vel variabilis x vel y desit, tum omnes sectiones vel plano AQR vel plano APR parallelæ inter se congruent.