

$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$, formam f non modo implicare formam F sed ipsi aequivalentem esse et proin si f ipsam F implicit neque vero eidem aequiualeat, quotientem $\frac{E}{D}$ esse integrum maiorem quam 1. Problema itaque hic soluendum erit, *dijudicare an forma data f determinantis D formam datam F determinantis Dee implicit*, vbi e supponitur esse numerus positius maior quam 1. Hoc negotium ita absoluemus, vt multitudinem finitam formarum sub f contentarum assignare doceamus quae ita sint comparatae, vt F si sub f contenta est necessario alicui ex illis aequiualeat debeat.

I. Ponamus omnes diuisores (positios) numeri e (inclusis etiam 1 et e) esse m, m', m'' etc., atque $e = mn = m'n' = m''n''$ etc. Designemus breuitatis gratia formam in quam f transit per substitutionem propriam m, o, o, n ita $(m; o)$, formam in quam f transit per substitutionem propriam $m, 1, o, n$ per $(m; 1)$ etc. generaliterque formam in quam f per subst. propriam, $m k, o, n$ transmutatur per $(m; k)$. Simili modo transeat f per subst. propriam m', o, o, n' in $(m'; o)$; per hanc $m', 1, o, n'$ in $(m'; 1)$; etc., per m'', o, o, n'' in $(m''; o)$ etc. etc. Omnes hae formae sub f proprie contentae erunt, et cuiusuis determinans = *Dee*. Complexum omnium formarum $(m; o), (m; 1), (m; 2) \dots (m; m - 1)$ $(m'; o), (m'; 1) \dots (m'; m' - 1); (m''; o)$ etc. quarum multitudo erit $m + m' + m'' +$ etc. et quas omnes inter se diuersas fore facile perspicitur, designemus per Ω .

T

Si e. g. forma f est haec (2, 5, 7) atque $e = 5$, Ω comprehendet sequentes sex formas (1; 0); (5; 0), (5; 1), (5; 2), (5; 3), (5; 4) quae si euoluuntur sunt (2, 25, 175), (50, 25, 7), (50, 35, 19), (50, 45, 35), (50, 55, 55), (50, 65, 79)

II. Iam dico, si forma F determinantis Dee sub f proprie contenta sit, necessario eandem alicui formarum Ω proprie aequivalentem fore. Ponamus formam f transformari in F per substitutionem propriam $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, eritque $\alpha\delta - \beta\gamma = e$. Sit numerorum γ, δ (qui ambo simul o esse nequeunt) divisor communis maximus positivus acceptus $= n$, atque $\frac{e}{n} = m$, qui manifesto erit integer. Accipientur g, h ita ut sit $\gamma g + \delta h = n$, denique sit k residuum minimum positivum numeri $\alpha g + \beta h$ secundum modulum m . Tum forma $(m; k)$ quaē manifesto erit inter formas Ω , formae F proprie aequualebit, et quidem in ipsam transformabitur per substitutionem propriam $\frac{\gamma}{n} \cdot \frac{\alpha g + \beta h - k}{m} + h, \frac{\delta}{n} \cdot \frac{\alpha g + \beta h - k}{m} - g, \frac{\gamma}{n}, \frac{\delta}{n}$. Nam primo perspicuum est hos quatuor numeros esse integros; secundo facile confirmatur substitutionem esse propriam; tertio patet, formam in quam $(m; k)$ per substitutionem illam transeat eandem esse in quam f^*) transeat per substitutionem m ($\frac{\gamma}{n} \cdot \frac{\alpha g + \beta h - k}{m} + h$) +

*) Quippe quae per substitutionem m, k, o, n , in $(m; k)$ transit v. art. 159.

$\frac{ky}{n}, m \left(\frac{\delta}{n} \cdot \frac{\alpha g + \epsilon h - k}{m} - g \right) + \frac{k\delta}{n}, \gamma, \delta$ siue quoniam $mn = e = \alpha\delta - \epsilon\gamma$ adeoque $\epsilon\gamma + mn = \alpha\delta$, $\alpha\delta - mn = \epsilon\gamma$, per hanc $\frac{1}{n} (\alpha\gamma g + \alpha\delta h)$, $\frac{1}{n} (\epsilon\gamma g + \epsilon\delta h)$, γ, δ , siue denique quoniam $\gamma g + \delta h = n$, per hanc $\alpha, \epsilon, \gamma, \delta$ i. e. per hyp., in F . Quare $(m; k)$ et F proprie aequivalentes erunt. *Q. E. D.*

Ex his igitur semper diiudicari potest, an forma aliqua data f determinantis D formam F determinantis Dee proprie implicit. Si vero quaeritur an f ipsam F improprie implicit, inuestigari tantummodo debet an forma ipsi F opposita sub f proprie contenta sit, art. 159.

214. PROBLEMA. *Propositis duabus formis, f , determinantis D , et F determinantis Dee , quarum prior posteriorem proprie implicat: exhibere omnes transformationes proprias formae f in F .*

Sol. Designante Ω eundem formarum complexum vt in art. praec., excerptantur ex hoc complexu omnes formae quibus F proprie aequialet, quae sint Φ, Φ', Φ'' etc. Quaevis harum formarum sequenti modo suppeditabit transformationes proprias formae f in F , et quidem aliae alias (i. e. singulae diuersas), cunctae vero cunctas (i. e. nulla transformatio propria formae f in F erit quam non vna ex formis Φ, Φ' etc. praefata). Quoniam methodus pro omnibus formis Φ, Φ' etc. eadem est, de vna tantum loquemur.