dentibus. Sic, ex ordine ſexto ſatisfacient Curvæ in his duabus æquationibus contentæ CAP. XVII.

$$(\alpha xx+\beta xy+\gamma yy)^2(xx+yy-aa)-2a(\delta x+\varepsilon y)(xx+yy)$$
$$(\alpha xx+\beta xy+\gamma yy-a(\delta x+\varepsilon y))=0,$$
&
$$(\delta x+\varepsilon y)^2(xx+yy)(xx+yy-aa)=$$
$$2a(\alpha xx+\beta xy+\gamma yy)((\delta x+\varepsilon y)(xx+yy)-a(\alpha xx+\beta yy+\gamma yy)).$$

In nullo ergo Linearum ordine impari ulla datur Linea hanc quæſtionem reſolvens.

412. Si jam non quærantur ejuſmodi Curvæ, in quibus ſit ſumma quadratorum CM^2+CN^2 conſtans, ſed in quibus ſit $CM^2+CM.CN+CN^2$ vel generaliter $CM^2+n.CM\times CN+CN^2$ quantitas conſtans; problema ſimili modo reſolutionem admittet. Cum enim ſit $CM^2+n.CM.CN+CN^2=P^2+(n-2)Q$, ponatur $P^2+(n-2)Q=aa$, eritque $Q=\frac{aa-PP}{n-2}$, quæ æquatio nullo incommodo laborat. Cum igitur ſit $P=\frac{Mz}{L}$, & $Q=\frac{Nzz}{L}$, erit $\frac{M^2z^2}{L^2}+\frac{(n-2)Nzz}{L}=aa$; ideoque $N=\frac{aaL}{(n-2)zz}-\frac{M^2}{(n-2)L}$. Quare, cum æquatio pro Curva ſit $L-M+N=0$, habebitur pro hac proprietate, qua $CM^2+n.CM.CN+CN^2$ debet eſſe conſtantis magnitudinis $=aa$, iſta æquatio

$$(n-2)LLzz-(n-2)LMzz+aaLL-M^2zz=0$$
ſeu, ob $zz=xx+yy$, erit
$$aaLL+(xx+yy)((n-2)L^2-(n-2)LM-M^2)=0,$$

exiſtente L Functione $m+2$, & M, $m+1$ dimenſionum ipſarum x & y. Sit N Functio quæcunque homogenea m dimenſionum, ac ponatur $L=(xx+yy)N$, prodibit alia æquatio generalis hæc

$$aa(xx+yy)N^2+(n-2)(xx+yy)^2N^2-(n-2)(xx+yy)MN-M^2=0.$$

413. Si

LIB. II. 413. Si ſtatuatur $n = 2$, ut ſit $(CM + CN)^2 = aa$, fiet, vel $aaLL = (xx + yy)MM$, vel $MM = aa(xx + yy)N^2$. Utraque autem æquatio cum ſit homogenea, continebit duas pluresve æquationes hujus formæ $\alpha y = \beta x$; ideoque quæſito ſatisfieri non poterit niſi duabus pluribusve rectis per punctum C ductis, quæ autem cum eo ſenſu, quo quæſtio proponitur, non ſatisfaciant, perſpicuum eſt hoc problema nullam admittere ſolutionem, uti ſupra jam notavimus: deberet enim eſſe $CM + CN =$ conſtanti a. Quod ſi vero ſtatuatur $n = -2$, ita ut quadratum differentiæ $(CN - CM)^2$, ideoque ipſa differentia MN deberet eſſe conſtans, orientur hæ duæ æquationes

$$aaLL = (xx + yy)(2L - M)^2$$

&

$$aa(xx + yy)NN = (2(xx + yy)N - M)^2$$

unde ſimpliciſſima ſolutio oritur, ſi ponatur $N = 1$ & $M = 2bx$; erit enim

$$aa(xx + yy) = 4(xx + yy - bx)^2,$$

ſeu, poſito $aa = 8cc$ erit,

$$(xx + yy)^2 = 2(cc + bx)(xx + yy) - bbxx.$$

Ergo $xx + yy = cc + bx \pm c\sqrt{(cc + 2bx)}$,

atque

$$y = \sqrt{(cc + bx - xx \pm c\sqrt{(cc + 2bx)})}.$$

414. Dantur ergo innumerabiles Lineæ curvæ, quæ a rectis per punctum C ductis ita in duobus punctis M & N ſecantur, ut intervallum MN perpetuo ſit conſtans. Ac primo quidem, patet huic conditioni ſatisfacere Circulum in C Centrum habentem, erit enim tum perpetuo intervallum $MN =$ Diametro Circuli; prodit autem Circulus ex æquationibus generalibus, ſi ponatur $M = 0$. Tum vero, poſt Circulum, ſatisfaciunt Lineæ quarti ordinis hac æquatione $aa(xx + yy) = 4(xx + yy - bx)^2$, atque hac $aaxx = (xx + yy)(2x - 2b)^2$, contentæ; ad quarum formam cognoſcendam expediet ad

æquationem

æquationem inter z & ang. Φ regredi. Cum igitur ſit $xx + yy = zz$, & $x = z.\cos.\Phi$, & $y = z.\sin.\Phi$, poſito $a = 2c$, erit primo CAP. XVII.

$$ccz z = (zz - bz.\cos.\Phi)^2$$

ſeu

$$b.\cos.\Phi \pm c = z.$$

tumque

$$cc(\cos.\Phi)^2 = (z.\cos.\Phi - b)^2$$

ſeu

$$z = \frac{b}{\cos.\Phi}$$

ex quibus facilis Curvarum conſtructio naſcitur.

415. Ad Curvam enim æquatione $z = b.\cos.\Phi \pm c$ contentam conſtruendam, per C ducatur recta ACB, in qua ſumatur $CD = b$, & ex D ſumatur utrinque $DA = DB = c$, erunt primo puncta A & B in Curva quæſita. Tum, ducta quavis recta NCM per C, ex D in eam demittatur perpendiculum DL, & ab L utrinque ſumatur $LM = LN = c$, erunt puncta M & N in quæſita Curva; ideoque perpetuo intervallum $MN = 2c$, uti quæſtio poſtulat. TAB. XX. Fig. 83, 84, 85.

Hic notandum eſt, ſi fuerit $CD = b$ minor quam c, Curvam in C habituram eſſe punctum conjugatum. Fig. 83.

Sin autem ſit $b = c$, Curva in C Cuſpide erit prædita, evaneſcente intervallo AC. Fig. 84.

Denique, ſi ſit b minor quam c, punctum A inter C & B cadet, Curvaque in C habebit nodum ſeu punctum duplex. Ceterum harum Curvarum Diameter erit recta ACB, & quæ huic normaliter inſiſtit ECF erit $= 2c$. Fig. 85.

416. Præter has Curvas in ſe redeuntes ex Linearum ordine quarto, etiam ſatisfaciunt ex eodem ordine aliæ in infinitum excurrentes, quæ hac æquatione $z = \frac{b}{\cos\Phi} \pm c$ continentur. Quarum conſtructio ita ſe habebit; ducta per C recta principali CAB, ſumatur $CD = b$, capiaturque $DA = DB = c$; erunt puncta A & B in Curva. Deinde, per D ducatur nor- TAB. XXI. Fig. 86.

.IB. II. malis EDF; & , acta recta quacunque CL, erit $CL = \frac{b}{cof.\,\Phi}$, vocato angulo $DCL = \Phi$. Tum perpetuo abſcindatur $LM = LN = c$, atque puncta M & N determinabunt Curvam quæſitam. Ex hac autem conſtructione perſpicuum eſt, Curvam ſic deſcriptam eſſe *Conchoidem* Veterum, polum C habentem, & Aſymtotam rectam EF, ad quam quatuor Curvæ rami in infinitum convergunt. Vocatur autem portio hBh *Conchois exterior*, & gAg *interior*, præter quas partes in C punctum exiſtit conjugatum.

417. Hæ Curvæ ex Linearum ordine quarto ſatisfaciunt. Facile autem erit Curvas altiorum ordinum quot libuerit exhibere. Quod ſi enim fuerit P Functio impar ſinus & coſinus anguli Φ, tum iſta æquatio $z = bP \pm c$ præbebit Curvam continuam, quam omnes rectæ per C ductæ ita in duobus punctis M & N ſecabunt, ut intervallum MN futurum ſit conſtans $= 2c$. Referri autem hæ Curvæ omnes poterunt ad genus Conchoidalium, loco rectæ EF directricis ſubſtituendo Lineam quamcunque Curvam æquatione $z = bP$ contentam. Supra autem vidimus hanc æquationem in ſe complecti Lineas curvas, quæ a rectis per punctum C ductis nonniſi in uno puncto ſecentur. Quare, ob intervallum c arbitrarium, ex unaquaque Curva $z = bP$ innumerabiles Curvæ ad
AB. præſens inſtitutum accommodatæ deſcribi poterunt.

XI. 418. Sumatur ſcilicet pro lubitu Curva $CEDLF$, quæ
.87. ab omnibus rectis per punctum C ductis in unicis tantum punctis D, L, ſecetur. Tum in his ſingulis rectis CL productis utrinque ab L capiantur intervalla æqualia $LM = LN = c$; eruntque puncta M & N in Curva quæſita. Sic igitur motu continuo deſcribi poterit Curva $AMPCQBNRC$, quæ a ſingulis rectis per C ductis in binis punctis M & N ita interſecabitur, ut intervallum MN ſit perpetuo conſtans $= 2c$. Ubi notandum eſt, ſi Curva $CEDF$ fuerit Circulus per punctum C ductus, tum Curvam deſcriptam fore eandem Lineam quarti ordinis, quam primo invenimus §. 414.

419. Sic

419. Sic igitur satisfecimus quæstioni, qua quærebantur Lineæ curvæ AMN a rectis per punctum C ductis ita secandæ in duobus punctis M & N, ut esset $CN - CM$ seu $CM^2 - 2CM.CN + CN^2$ perpetuo quantitas constans. Paucis igitur adhuc evolvamus casum, quo $CM^2 + CM.CN + CN^2$ debet esse quantitas constans. In §. 412. ergo poni debet $n = 1$, sicque nascetur vel ista æquatio CAP XVI — TAB XX Fig. 81

$$aaLL = (xx + yy)(L^2 - LM + M^2)$$

existente L Functione $m + 1$, & M Functione m dimensionum ipsarum x & y. Vel orietur hæc altera æquatio

$$aa(xx + yy)NN = (xx + yy)^2 NN - (xx + yy)MN + MM$$

in qua M est Functio homogenea una dimensione superior ipsarum x & y, quam Functio N.

420. Primum quidem perspicuum est, si ponatur $M = 0$, prodire Circulum, cujus Centrum in puncto C sit constitutum; qui, cum omnes rectæ ex C ad Curvam ductæ sint æquales, etiam omnibus hujus generis quæstionibus satisfacit. Pro præsenti autem casu post Circulum Curvæ simplicissimæ prodibunt, si in priori æquatione ponatur $M = b$ & $L = x$, eritque

$$aaxx = (xx + yy)(xx - bx + bb)$$

sive

$$yy = \frac{xx(aa - bb + bx - xx)}{bb - bx + xx}.$$

Quod si autem in altera æquatione ponatur $N = 1$, & $M = bx$, habebitur quoque Linea quarti ordinis

$$aa(xx + yy) = (xx + yy)^2 - bx(xx + yy) + bbxx,$$

seu

$$xx + yy = \frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}aa \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{2}aabx - \frac{3}{4}bbxx\right)}$$

quæ pariter, ac prior, quæstioni satisfaciet.