per quas f transit in f'', f''' f^{IV} resp., et ex subst. vltima haec

$$\begin{matrix} 1, & 4, & 4 \\ 3, & 1, & 5 \\ 3, & -2, & 3 \end{matrix}$$

per quam f^{IV} transit in f. Simili modo pro ex. 2 art. praec. prodeunt substitutiones

$$\begin{matrix} 1, & -1, & 1 \\ -3, & 4, & -3 \\ 10, & -14, & 11 \end{matrix} \quad \Bigg| \quad \begin{matrix} 2, & -3, & -1 \\ 3, & 1, & 0 \\ 2, & 4, & 1 \end{matrix}$$

per quas resp. transit forma $\begin{pmatrix} 10, & 26, & 2 \\ 7, & 0 & 4 \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} 0, & 2, & 0 \\ 0, & -1, & 0 \end{pmatrix}$, atque haec in illam.

276. Theorema. *Classium, in quas omnes formae ternariae determinantis dati distribuuntur, multitudo semper est finita.*

Dem. I. Multitudo omnium formarum $\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}$ determinantis dati D, in quibus $a = 0$, $b'' = 0$, b non maior quam semissis diuisoris comm. max. numerorum a', b'; a'' non maior quam b', manifesto est finita. Quoniam enim esse debet $a'b'b' = D$, pro b' alii valores accipi nequeunt, quam $+1$, -1 atque radices quadratorum ipsum D metientium (si quae alia praeter 1 dantur) signo positiuo et negatiuo affectae, quorum valorum multitudo finita est. Pro singulis autem valoribus ipsius b' valor ipsius

a' est determinatus, ipsorumque b, a'' valores manifesto limitantur ad multitudinem finitam.

II. Simili modo finita est multitudo omnium formarum $\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}$ determinantis D, in quibus a non $= 0$, neque maior quam $\frac{4}{3}\sqrt[3]{\pm D}$; $b''b'' - aa' = A''$ non $= 0$ neque maior quam $\frac{4}{3}\sqrt[3]{D^2}$; b'' non maior quam $\frac{1}{2}a$; $ab - b'b'' = B$ et $a'b' - bb'' = B'$ non maiores quam $\frac{1}{2}A''$. Nam multitudo omnium combinationum valorum ipsorum a, b'', A'', B, B' finita erit; his vero singulis determinatis, etiam formae coëfficientes reliqui a', b, b', a'', coëfficientesque formae adiunctae $bb - a'a'' = A$, $b'b' - aa'' = A'$, $a''b'' - bb' = B''$ determinati erunt per aequationes hasce: $a' = \frac{b''b'' - A''}{a}$, $A' = \frac{BB - aD}{A''}$, $A = \frac{B'B' - a'D}{A''}$, $B'' = \frac{BB' + b''D}{A''}$, $b = \frac{AB - B'B''}{D} = -\frac{Ba' + B'b''}{A''}$, $b' = \frac{A'B' - BB''}{D} = -\frac{Bb'' + B'a}{A''}$, $a'' = \frac{b'b' - A'}{a} = \frac{bb - A}{a'} = \frac{bb' + B''}{b''}$. Iam quum omnes illae formae obtineantur, eligendo e cunctis combinationibus valorum ipsorum a, b'', A'', B, B' eas, e quibus etiam a', a'', b, b' valores integros nanciscuntur, illarum multitudo manifesto erit finita.

III. Cunctae itaque formae in I et II multitudinem finitam classium constituunt, quae etiam formarum ipsarum multitudine minor esse poterit, si quae ex ipsis inter se sunt aequivalentes. Iam quum per disquisitiones praecedentes quaeuis forma ternaria determinantis D alicui ex illis formis necessario aequiualeat, i. e. ad aliquam e classibus quas hae formae constituunt pertineat: hae classes omnes formas det. D complectentur, i. e. omnes formae ternariae det. D in multitudinem finitam classium distribuentur. *Q. E. D.*

277. Regulae, per quas omnes formae in I et II art. praec. erui possunt, ex ipsarum explicatione sponte defluunt; quare sufficiet quaedam exempla apposuisse. Pro $D = 1$, formae I hae sex (per ambiguitatem signorum) prodeunt $\begin{pmatrix} 0, & 1, & 0 \\ 0, & \pm 1, & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0, & 1, & \pm 1 \\ 0, & \pm 1, & 0 \end{pmatrix}$; in formis II a et A'' alios valores quam $+1$ et -1 habere nequeunt, pro singulis quatuor combinationum hinc oriundarum b'', B et B' poni debent $= 0$, vnde emergunt quatuor formae $\begin{pmatrix} 1, & -1, & 1 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1, & 1, & 1 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1, & 1, & -1 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1, & -1, & -1 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$. Simili modo pro $D = -1$ sex forma I quatuorque II habentur, $\begin{pmatrix} 0, & -1, & 0 \\ 0, & \pm 1, & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0, & -1, & 1 \\ 0, & \pm 1, & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1, & -1, & -1 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1, & 1, & -1 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1, & -1, & 1 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$. Pro $D = 2$ sex formae I proueniunt $\begin{pmatrix} 0, & 2, & 0 \\ 0, & \pm & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0, & 2, & \pm 1 \\ 0, & \pm 1, & 0 \end{pmatrix}$, octoque formae II, $\begin{pmatrix} 1, & -1, & 2 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1, & 1, & 2 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1, & 1, & -2 \\ 0, & 0, & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1, & -1, & -2 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1, & -2, & 1 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1, & 2, & 1 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1, & 2, & -1 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1, & -2, & -1 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$.