LIB. II. ideoque $\sin.\varpi = \cos.(q-p)$ & $\sin.(q+\varpi) = \cos.p$. Unde (ex §. 119.) erit $\frac{CE^2}{CG^2} = \frac{\sin.p.\cos.p}{\sin(q-p).\cos.(q-p)} = \frac{\sin.2p}{\sin.2(q-p)} = \frac{\sin.2p}{\sin.2q.\cos.2p - \cos.2q.\sin.2p}$; ergo $\frac{CG^2}{CE^2} = \sin 2q.\cot.2p - \cos.2q$. ex quo fit $\cot.2GCM = \cot.2q + \frac{CG^2}{CE^2.\sin.2q}$, quæ æquatio semper præbet solutionem possibilem. Erit vero $\frac{CM^2}{CG^2} = \frac{\sin.q.\cos.p}{\sin.(q-p)}$ & $\frac{CG^2}{CM^2} = 1 - \frac{\tang.p}{\tang.q}$, unde $\tang.p = \tang.q - \frac{CG^2}{CM^2}\tang.q$. At cum sit $CM^2 + CK^2 = CG^2 + CE^2$ & $CK.CM = CG.CE.\sin.q$; erit $CM + CK = \sqrt{(CG^2 + 2CG.CE.\sin.q + CE^2)}$ & $CM - CK = \sqrt{(CG^2 - 2CG \times CE.\sin.q + CE^2)}$ unde ipsæ Diametri conjugatæ orthogonales reperiuntur.

TAB. VII. Fig. 29. 126. Sint igitur CA & CE ambæ Semidiametri conjugatæ Sectionis conicæ orthogonales, quæ vocari solent DIAMETRI PRINCIPALES, sese in Centro C normaliter decussantes. Sit Abscissa $CP = x$, Applicata $PM = y$, eritque, uti vidimus, $yy = \alpha - \beta xx$, vocatis autem Semidiametris principalibus $AC = a$, $CE = b$ erit $\alpha = bb$ & $\beta = \frac{bb}{aa}$, unde fit $yy = bb - \frac{bbxx}{aa}$. Ex qua æquatione intelligitur, cum non mutetur, sive x & y sumantur affirmativæ sive negativæ, Curvam esse habituram quatuor partes similes & æquales utrinque circa Diametros AC & EF sitas. Erit nempe quadrans ACE similis & æqualis quadranti ACF, hisque bini pares ad alteram partem Diametri EF sunt positi.

127. Si ex Centro C, quod pro initio Abscissarum assumsimus, ducamus rectam CM, erit ea $= \sqrt{(xx + yy)} = \sqrt{(bb - \frac{bbxx}{aa} + xx)}$, unde intelligitur, si fuerit $b = a$, seu $CE = CA$, fore $CM = \sqrt{bb} = b = a$. Hoc ergo casu omnes rectæ ex Centro C ad Curvam productæ inter se erunt

erunt æquales; quæ, cum ſit proprietas Circuli, manifeſtum eſt Sectionem conicam, cujus binæ Diametri conjugatæ principales ſint inter ſe æquales, eſſe Circulum, cujus adeo æquatio inter Coordinatas orthogonales, poſitis $CP = x$ & $PM = y$, erit $yy = aa - xx$, exiſtente Radio Circuli $CA = a$.

128. Sin autem non fuerit $b = a$, recta CM per x rationaliter nunquam exprimi poterit. Dabitur autem aliud punctum D in Axe, a quo omnes rectæ ad Curvam ductæ DM rationaliter exprimi poſſunt; ad quod inveniendum, ponatur $CD = f$, atque ob $DP = f - x$ erit $DM^2 = ff - 2fx + xx + bb - \frac{bbxx}{aa} = bb + ff - 2fx + \frac{(aa - bb)xx}{aa}$, quæ expreſſio quadratum evadet ſi fuerit $ff = \frac{(aa - bb)(bb + ff)}{aa}$ ſeu $0 = aa - bb - ff$, unde fit $f = \pm \sqrt{(aa - bb)}$, hujuſmodi ergo punctum dabitur geminum in Axe AC, utrinque ſcilicet a Centro in diſtantia $CD = \sqrt{(aa - bb)}$. Erit autem tum $DM^2 = aa - 2x\sqrt{(aa - bb)} + \frac{(aa - bb)xx}{aa}$, hincque $DM = a - \frac{x\sqrt{(aa - bb)}}{a} = AC - \frac{CD.CP}{AC}$. Facto $CP = 0$, fiet $DM = DE = a = AC$, ſumta autem Abſciſſa $CP = CD$, ſeu $x = \sqrt{(aa - bb)}$, recta DM abibit in Applicatam DG, eritque ergo $DG = \frac{bb}{a} = \frac{CE^2}{AC}$, ſeu fiet DG tertia proportionalis ad AC & CE.

129. Ob ſingularem hanc proprietatem, qua puncta D hoc modo definita gaudent, iſta Diametri principalis puncta omnino attentione ſunt digna; plurimis aliis autem hæc eadem puncta prædita ſunt eximiis proprietatibus, ob quas peculiaria nacta ſunt nomina. Vocantur vero iſta puncta FOCI ſeu UMBILICI Sectionis conicæ; &, cum in Diametro majori a ſint poſita, iſta Diameter a ſua conjugata b ita diſtinguitur, ut ea vocetur Axis principalis & *tranſverſus*, dum altera b ejus Axis *conjugatus* appellatur. Applicata vero orthogonalis DG in ipſo Foco

LIB. II. Foco alterutro erecta nomen SEMIPARAMETRI obtinuit, tota enim PARAMETER est Ordinata in D, seu DG bis sumta, quæ etiam *latus rectum* nuncupatur. Est ergo Semiaxis conjugatus CE media proportionalis inter Semiparametrum DG & Semiaxem transversum AC. Termini porro Axis transversi, ubi is a Curva intersecatur, vocantur VERTICES, ut A; atque hanc habent proprietatem ut iis in locis tangens curvæ sit ad Axem principalem AC normalis.

130. Ponatur semiparameter $DG = c$; & distantia Foci a Vertice $AD = d$, erit $CD = a - d = \sqrt{(aa - bb)}$ & $DG = \frac{bb}{a} = c$, unde fit $bb = ac$, & $a - d = \sqrt{(aa - ac)}$: ergo $ac = 2ad - dd$, & $a = \frac{dd}{2d - c}$, & $b = d\sqrt{\frac{c}{2d - c}}$. Ex datis ergo distantia Foci a Vertice $AD = d$ & semilatere recto $DG = c$, Sectio conica determinatur. Posito nunc $CP = x$ erit $DM = a - \frac{(a - d)x}{a} = \frac{dd}{2d - c} - \frac{(c - d)x}{d}$. Sit $DP = t$, erit $x = CD - t = \frac{(c - d)d}{2d - c} - t$; unde fit $DM = c + \frac{(c - d)t}{d}$. Vocetur angulus $ADM = v$, erit $\frac{t}{DM} = -\cos.v$, ideoque $d.DM = cd + (d - c)DM.\cos.v$ & $DM = \frac{cd}{d - (d - c).\cos.v}$, & $\cos.v = \frac{d(DM - DG)}{(d - c)DM}$.

CAPUT

CAPUT VI.

De Linearum secundi ordinis subdivisione in genera.

131. PRoprietates, quas in Capite præcedente elicuimus, in omnes Lineas, quæ ad ordinem secundum pertinent, æque competunt; neque enim ullius varietatis, qua istæ Lineæ aliæ ab aliis distinguuntur, fecimus mentionem. Quanquam autem omnes Lineæ secundi ordinis his expositis proprietatibus communiter gaudent, tamen eæ inter se ratione figuræ plurimum differunt; quamobrem Lineas in hoc ordine contentas distribui convenit in genera, quo facilius diversæ figuræ, quæ in hoc ordine occurrunt, distingui, atque proprietates, quæ tantum in singula genera competunt, evolvi queant.

132. Æquationem autem generalem pro Lineis secundi ordinis, mutando tantum Axem & Abscissarum initium, eo reduximus, ut omnes Lineæ secundi ordinis contineantur in hac æquatione $yy = \alpha + \beta x + \gamma xx$, in qua x & y denotant Coordinatas orthogonales. Cum igitur pro qualibet Abscissa x Applicata y duplicem induat valorem, alterum affirmativum alterum negativum, iste Axis, in quo Abscissæ x capiuntur, Curvam secabit in duas partes similes & æquales; eritque adeo iste Axis Diameter Curvæ orthogonalis, atque omnis Linea secundi ordinis habebit Diametrum orthogonalem, super qua, tanquam Axe, Abscissas hic assumo.

133. Tres igitur ingrediuntur in hanc æquationem quantitates constantes α, β, & γ: quæ, cum infinitis modis inter se variari possint, innumerabiles varietates in Lineis curvis orientur, quæ autem vel magis vel minus a se invicem ratione figuræ discrepabunt. Primum enim eadem figura infinities ex proposita æquatione $yy = \alpha + \beta x + \gamma xx$ resultat; variato nempe Abscissarum initio in Axe, quod fit dum Abscissa x

 data quantitate vel augetur vel minuitur. Deinde eadem quoque figura, ſub diverſa magnitudine in æquatione continetur, ita ut infinitæ Lineæ curvæ prodeant, quæ tantum ratione quantitatis a ſe invicem differant, uti Circuli diverſis Radiis deſcripti. Ex quibus manifeſtum eſt, non omnem litterarum α, β, & γ variationem diverſas Linearum ſecundi ordinis ſpecies vel genera producere.

134. Maximum autem diſcrimen in Lineis curvis quæ in æquatione $yy = \alpha + \beta x + \gamma xx$ continentur, ſuggerit natura coëfficientis γ, prout is vel affirmativum habuerit valorem vel negativum. Si enim γ habeat valorem affirmativum, poſita Abſciſſa x infinita, quo caſu terminus γxx infinities major evadet quam reliqui $\alpha + \beta x$, ac propterea expreſſio $\alpha + \beta x + \gamma xx$ affirmativum obtinet valorem, Applicata y pariter duplicem habebit valorem infinite magnum, alterum affirmativum alterum negativum, quod idem evenit ſi ponatur $x = -\infty$, quo caſu nihilominus expreſſio $\alpha + \beta x + \gamma xx$ induet valorem infinite magnum affirmativum. Hanc ob rem, exiſtente γ quantitate affirmativa, Curva quatuor habebit ramos in infinitum excurrentes, binos Abſciſſæ $x = +\infty$ & binos Abſciſſæ $x = -\infty$ reſpondentes. Hæ igitur curvæ quatuor ramis in infinitum excurrentibus præditæ unum Linearum ſecundi ordinis genus conſtituere cenſentur, atque nomine HYPERBOLARUM appellantur.

135. Sin autem coëfficiens γ negativum habuerit valorem, tum, poſito ſive $x = +\infty$ ſive $x = -\infty$ expreſſio $\alpha + \beta x + \gamma xx$ negativum valorem tenebit, ideoque Applicata y imaginaria fiet. Neque igitur uſquam in his Curvis Abſciſſa neque Applicata poterit eſſe infinita, ideoque nulla dabitur Curvæ portio in infinitum excurrens, ſed tota Curva in ſpatio finito ac determinato continebitur. Hæc igitur Linearum ſecundi ordinis ſpecies nomen ELLIPSIUM obtinuit, quarum propterea natura continetur in hac æquatione $yy = \alpha + \beta x + \gamma xx$, ſi γ fuerit quantitas negativa.

136. Cum igitur valor ipſius γ, prout is fuerit vel affirmativus