LIB. II. orthogonales ad illam rectam simul bifariam secentur, quo casu illa recta *Diameter* Curvæ *orthogonalis* appellatur, quorsum pertinent æquationes §. §. 337. & 338. traditæ. Vel binæ illæ partes similes & æquales in regiones oppositas Q & R seu T & S cadunt, ita ut omnis recta per punctum C ducta Curvam dividat in duas partes alternatim æquales, cujusmodi Curvæ continentur in æquationibus in paragrapho præcedente exhibitis. Hanc igitur partium æqualium diversam positionem ita describemus, ut eas, quæ ad priorem speciem pertinent, *diametraliter æquales*; quæ vero ad posteriorem, *alternatim æquales* appellemus. Quia vero in posteriore specie datur punctum C, per quod omnis recta utrinque ad Curvam producta simul bisecatur, hoc punctum *Centri* nomine appellari convenit, ita ut Curvæ binas partes alternatim æquales habentes Centro præditæ dicantur; illæ vero Curvæ, quæ duas partes diametraliter æquales habent, Diametro præditæ vocentur.

342. Cum æquatio $Z = 0$, præbeat Curvas, quarum Diameter est recta AB, si Coordinata y pares tantum obtineat dimensiones in Functione Z; atque eadem æquatio $Z = 0$, rectam EF Curvæ Diametrum indicet, si altera Coordinata x ubique pares habeat exponentes, sequitur, si Z ejusmodi fuerit Functio ipsarum x & y ut omnes exponentes tam ipsius x quam ipsius y sint numeri pares, tum utramque rectam AB & EF fore Curvæ Diametrum orthogonalem; ideoque quatuor partes in regionibus Q, R, S & T sitas inter se fore æquales & similes. Hujusmodi ergo Curvæ omnes in hac generali æquatione continebuntur.

$$0 = \alpha + \beta x^2 + \gamma y^2 + \delta x^4 + \varepsilon x^2 y^2 + \zeta y^4 + \eta x^6 + \theta x^4 y^2 + \&c.$$

343. Curvæ ergo in hac æquatione contentæ duas habebunt Diametros orthogonales AB & EF se mutuo in C normaliter intersecantes. Pertinent ergo hæ Curvæ omnes ad Linearum ordines vel secundum, vel quartum, vel sextum, &c., ita ut in nullo Linearum ordine impari ulla contineatur Linea curva duabus Diametris se mutuo normaliter intersecantibus prædita.

prædita. Deinde, quia ista æquatio quoque continetur in æquatione priori, §. 339., hæ Curvæ simul Centrum habebunt in puncto C, ita ut omnis recta per id utrinque ad Curvam producta, in eo simul bifariam secetur. Hujusmodi igitur Curvas duplici Diametro gaudentes præbebit æquatio $Z = 0$, si quidem fuerit Z Functio quæcunque rationalis ipsarum xx & yy. Cap. XV.

344. Quia igitur hoc modo deducti sumus ad Lineas curvas duabus Diametris præditas, inquiramus in æquationes pro Lineis curvis, quæ plures habeant Diametros. Ac primo quidem facile ostendetur, si quæpiam Curva duas tantum habeat Diametros, eas inter se normales esse oportere, ita ut nulla Curva duabus Diametris tantum prædita detur, quæ non in æquatione modo inventa contineatur. Ponamus enim cujuspiam Lineæ curvæ duas esse Diametros AB, & EF sese in C non normaliter decussantes. Cum igitur EC sit Diameter, Curva utrinque circa eam æqualiter erit comparata: quare, cum ejus pars citerior rectam AC pro Diametro habeat, etiam pars ulterior Diametrum habebit GC, in eodem puncto C cum EC angulum $GCE = ACE$ constituentem. Simili modo, cum GC sit Diameter, debebit quoque recta IC, existente $GCI = GCE$, esse Diameter ejusdem indolis, cujus est EC. Porro Diameter quoque erit recta LC, sumto angulo $ICL = ICG$; sicque progrediendo, continuo novæ Diametri reperientur donec in primam AC recidant; quod evenit, si angulus ACE ad angulum rectum habeat rationem rationalem. Tab. XVII. Fig. 69.

345. Nisi ergo angulus ACE ad angulum rectum habeat rationem rationalem, numerus Diametrorum erit infinitus, quo casu Curva erit Circulus; quippe in quo omnis recta per Centrum ducta est Diameter orthogonalis: hic enim Diametri nomen ad solas Diametros orthogonales restringimus, quia his solis Curvæ in duas partes similes & æquales dividuntur. Ex his intelligitur nullam Curvam algebraïcam duas habere posse Diametros inter se parallelas: ob rationes enim allegatas, si duas haberent Diametros parallelas, simul infinitas inter

LIB. II. ſe parallelas & æqualiter diſtantes habere deberent; ideoque Linea recta hujuſmodi Curvam in infinitis punctis ſecare poſſet: quæ proprietas in Lineas curvas algebraïcas non cadit.

346. Quod ſi ergo quæpiam Linea curva plures habeat Diametros, eæ omnes ſe mutuo in eodem puncto C interſecabunt, atque a ſe invicem ſub æqualibus angulis diſtabunt. Erunt vero hæ Diametri duplicis generis alternatim progredientes; Diameter enim CG ejuſdem erit indolis, cujus eſt Diameter CA; atque æquatio pro Curva, ſumta Diametro CG pro Axe, conveniet cum æquatione pro Curva, ſumta Diametro CA pro Axe: Diametri ergo alternæ CA, CG, CL &c., æqualiter ad Curvam erunt affectæ, ſimilique modo Diametri CE, CI &c. eadem ratione ad Curvam pertinebunt. Quam ob rem, ſi numerus Diametrorum fuerit finitus, tum angulus ACG erit pars aliquota quatuor rectorum, ſeu angulus ACE erit pars aliquota anguli 180 graduum, ſeu ſemiperipheriæ, quam vocemus $= \pi$.

TAB. XVII. Fig. 70. 347. Si fuerit angulus $ACE = 90° = \frac{1}{2}\pi$, caſus exiſtit jam ſupra tractatus, quo Curva duas habet Diametros inter ſe normales. Hujuſmodi ergo Curvas denuo inveſtigemus, at methodo diverſa a priori, quæ æque ad inventionem plurium Diametrorum accommodari queat. Sit igitur Curva duabus Diametris AB, & EF prædita; ſumatur in ea quodcunque punctum M, &, ducta ex Centro C recta CM, ponatur $CM = z$, & angulus $ACM = s$; quæraturque æquatio inter z & s. Ac primo quidem intelligitur, quia recta AC eſt Diameter, z eſſe debere ejuſmodi Functionem ipſius s, quæ maneat eadem, etiamſi $-s$ loco s ponatur; ſumto enim angulo $ACM = s$ negativo ACm, recta Cm debet eſſe $= CM$. Verum $\cos. s$ eſt ejuſmodi Functio ipſius s, quæ manet eadem poſito $-s$ loco $+s$, quam ob rem huic requiſito ſatisfiet ſi fuerit z Functio quæcunque rationalis ipſius $\cos. s$.

348. Ponatur Abſciſſa $CP = x$, Applicata $PM = y$, erit

erit $z = \surd(xx+yy)$ & $cos.s = \frac{x}{z}$; ſitque $Z = 0$, æquatio pro Curva, cujus recta CA ſit Diameter; atque eſſe debebit Z Functio rationalis ipſarum z & $\frac{x}{z}$, vel ipſarum z & x, vel, ob rationalitatem, ipſarum $xx+yy$ & x. At ſi Z fuerit Functio ipſarum $xx+yy$ & x, erit quoque Functio ipſarum yy & x. Sit enim $xx+yy = u$; quia Z debet eſſe Functio ipſarum x & u, poſito $u = t+xx$, ut ſit $t = yy$, fiet Z Functio ipſarum t & x, hoc eſt ipſarum yy & x. Quoties ergo Z fuerit Functio rationalis ipſarum yy & x, toties recta CA Curvæ erit Diameter: quæ eſt eadem proprietas Curvarum una Diametro gaudentium, quam ſupra invenimus. CAP. XV.

349. At Curvam quæſitam duabus Diametris AB & EF præditam eſſe oportet; unde CB erit Diameter ejuſdem indolis, ac CA. Quare, ſi recta $CM = z$, ad Diametrum CB referatur, ob angulum $BCM = \pi - s$, neceſſe eſt ut z ejuſmodi ſit Functio ipſius s, quæ non varietur, etiamſi loco s ponatur $\pi - s$. Hujuſmodi Functio quidem foret $fin.s$, eſt $fin.s = fin.(\pi - s)$: ſed hoc modo præcedenti conditioni non ſatisfit. Hinc ejuſmodi expreſſio inveniri debet, quæ ad angulos s, $-s$, & $\pi - s$ æqualiter pertineat; talis eſt $cof.2s$, eſt enim $cof.2s = cof.-2s = cof.2(\varpi - s)$. Quocirca æquatio $Z = 0$, erit pro Curva duabus Diametris AB & EF prædita, ſi Z fuerit Functio rationalis ipſarum z & $cof.2s$. Eſt vero $cof.2s = \frac{xx-yy}{zz}$. Ex quo Z debebit eſſe Functio ipſarum $xx+yy$, & $xx-yy$, vel ipſarum xx & yy, uti ſupra invenimus.

350. Progrediamur ad Curvas tribus Diametris AB, EF & GH præditas inveſtigandas; quæ Diametri in eodem puncto C ad angulos ACE, ECG, $GCB = 60° = \frac{1}{3}\varpi$ ſe mutuo ſecabunt, atque Diametri alternæ CA, CG, CF ejuſdem erunt indolis. Quare, ſi ponatur $CM = z$, & angu- TAB. XVII. Fig. 71.

 lus

LIB. II. lus $ACM = s$, ob $GCM = \frac{2}{3}\pi - s$, æquatio pro Curva $Z = 0$, ita debebit esse comparata, ut Z sit Functio rationalis ipsius z, & quantitatis cujuspiam w, quæ ab s ita pendeat, ut maneat eadem, sive loco s ponatur $-s$, sive $\frac{2}{3}\pi - s$. Erit ergo $w = cos.3s$; est enim $cos.3s = cos.-3s = cos.(2\pi - 3s)$. At, positis Coordinatis $CP = x$, $PM = y$, erit $cos.3s = \frac{x^3 - 3xyy}{z^3}$, ideoque Z esse debet Functio rationalis ipsarum $xx + yy$ & $x^3 - 3xyy$.

351. Quod si ergo ponatur $xx + yy = t$ & $x^3 - 3xyy = u$, hæc erit æquatio generalis pro Curvis tribus Diametris præditis

$$0 = \alpha + \beta t + \gamma u + \delta tt + \varepsilon tu + \zeta uu + \eta t^3 + \&c.,$$

quæ præbet hanc inter x & y

$$0 = \alpha + \beta(xx + yy) + \gamma x(xx - 3yy) + \delta(xx + yy)^2 + \&c.$$

Cum igitur æquatio $0 = \alpha + \beta xx + \beta yy$ sit pro Circulo, qui, habens infinitas Diametros, etiam quæstioni de tribus Diametris satisfacit; simplicissima Curva tres habens Diametros erit Linea tertii ordinis hac æquatione expressa $x^3 - 3xyy = axx + ayy + b^3$, quæ tres habet Asymtotas triangulum æquilaterum comprehendentes, in cujus medio existit punctum C; & singulæ Asymtotæ sunt speciei $u = \frac{A}{tt}$. Pertinent ergo hæ Curvæ ad Speciem quintam secundum enumerationem a nobis supra factam.

TAB. XVIII. Fig. 72. 352. Si Curva habeat quatuor Diametros AB, EF, GH & IK se mutuo in puncto C ad angulos semirectos $= \frac{1}{4}\varpi$ intersecantes, tum Diametri CA, CG, CB, & CH ejusdem erunt naturæ. Quare, posita $CM = z$, & angulo $ACM = s$, quæri debet Functio quædam ipsius s, quæ non mutetur