signum ipsius α^m $+ \pm - \mp$; ipsius β^m, $\pm, - \mp +$; ipsius γ^m, $\pm + \mp -$; ipsius δ^m, $+ \mp - \pm$; ipsius ${}^m\alpha$, $+ \pm - \mp$; ipsius ${}^m\beta$, $\mp + \pm -$; ipsius ${}^m\gamma$, $\mp - \pm +$; ipsius ${}^m\delta$ $+ \mp - \pm$, valentibus superioribus quando a est positiuus, inferioribus quando a negatiuus. Teneatur imprimis haec proprietas: Designante m indicem quemcunque positiuum, α^m et γ^m habebunt eadem signa quando a positiuus, opposita quando a negatiuus, similiterque β^m et δ^m contra; ${}^m\alpha$ et ${}^m\gamma$, vel ${}^m\beta$ et ${}^m\delta$ habebunt eadem signa quando a negatiuus, opposita quando a positiuus.

4) In signis art. 32 magnitudo ipsorum α^m etc. concinne ita exhiberi potest, ponendo $\mp h' = k'$; $\pm h'' = k''$, $\mp h''' = k'''$ etc. $\pm h = k$, $\mp {}'h = {}'k$, $\pm {}''h = {}''k$ etc. ita vt omnes k', k'' etc. k, ${}'k$ etc. sint numeri positiui: $\alpha^m = \pm [k'', k''', k^{IV} \ldots k^{m-1}]$; $\beta^m = \pm [k'', k''' \; k^{IV} \ldots k^m]$; $\gamma^m = \pm [k', k'', k''' \ldots k^{m-1}]$; $\delta^m = \pm [k', k'', k''' \ldots k^m]$; ${}^m\alpha = \mp [k, {}'k, {}''k \ldots {}^{m-1}k]$; ${}^m\beta = \pm [k, {}'k, {}''k \ldots {}^{m-2}k]$; ${}^m\gamma = \pm [{}'k, {}''k \ldots {}^{m-1}k]$; ${}^m\delta = \pm [{}'k, {}''k \ldots {}^{m-2}k]$; *signa* vero ad praecepta modo tradita determinari debent. Secundum has formulas, quarum demonstrationem propter facilitatem omittimus, calculus semper expeditissime absolui poterit.

190. Lemma. *Designantibus m, μ, m', n, ν, n' numeros integros quoscunque, ita tamen vt trium posteriorum nullus sit $= 0$: dico, si $\frac{\mu}{\nu}$ iaceat inter limites $\frac{m}{n}$ et $\frac{m'}{n'}$ exclusiue, atque sit $mn' - nm' = \mp 1$, denominatorem ν fore maiorem quam n et n'.*

Dem. Manifesto $\mu n n'$ iacebit inter $\nu m n'$ et $\nu n m'$, adeoque ab vtroque limite minus differet quam limes alter ab altero, i. e. erit $\nu m n' - \nu n m > \mu n n' - \nu m n'$ et $> \mu n n' - \nu n m'$, siue $\nu > n'(\mu n - \nu m)$ et $> n(\mu n' - \nu m')$. Hinc sequitur, quoniam $\mu n - \nu m$ certe non $= 0$ (alioquin enim foret $\frac{\mu}{\nu} = \frac{m}{n}$ contra hyp.), neque $\mu n' - \nu m' = 0$ (ex simili ratione), sed vterque ad minimum $= 1$, fore $\nu > n'$ et $> n$. *Q. E. D.*

Perspicuum itaque est, ν non posse esse $= 1$, i. e. si fuerit $mn' - nm' = \pm 1$, inter fractiones $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$ nullum numerum integrum iacere posse. Quare etiam cifra inter ipsas iacere nequit, i. e. fractiones istae signa opposita habere nequeunt.

191. Theorema. *Si forma reducta $(a, b, -a')$ determinantis D per substitutionem $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ transit in reductam $(A, B, -A')$ eiusdem determinantis: iacebit*, primo, $\frac{\pm\sqrt{D}-b}{a}$ *inter* $\frac{\alpha}{\gamma}$ *et* $\frac{\beta}{\delta}$ *(siquidem neque γ neque $\delta = 0$, i. e. si vterque limes est finitus), accepto signo superiori, quando neuter horum limitum habet signum signo ipsius a oppositum (siue clarius, quando aut* v t e r q u e *idem habet, aut* a l t e r *idem,* a l t e r *est $= 0$), inferiori quando neuter habet idem vt a;* secundo $\frac{\pm\sqrt{D}+b}{a'}$ *inter* $\frac{\gamma}{\alpha}$ *et* $\frac{\delta}{\beta}$ *(siquidem neque α neque $\beta \neq 0$), signo superiori accepto quando limes neuter signum signo ipsius a' (vel a) oppositum habet, inferiori quando neuter habet idem vt a'*).*

*) Manifestum est, alios casus locum habere non posse, quum ex art. praec. propter $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$, limites bini neque signa opposita habere, neque simul $= 0$ esse possint.

Dem. Habentur aequationes $a\alpha\alpha + 2b\alpha\gamma - a'\gamma\gamma = A \ldots$ [1]; $a\beta\beta + 2b\beta\delta - a'\delta\delta = -A' \ldots$ [2]. Vnde deducitur

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\pm\sqrt{(D + \frac{aA}{\gamma\gamma})} - b}{a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad [3]$$

$$\frac{\beta}{\delta} = \frac{\pm\sqrt{(D - \frac{aA'}{\delta\delta})} - b}{a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad [4]$$

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\pm\sqrt{(D - \frac{aA'}{\alpha\alpha})} \mp b}{a'} \quad \ldots\ldots \quad [5]$$

$$\frac{\delta}{\beta} = \frac{\pm\sqrt{(D + \frac{a'A}{\beta\beta})} \mp b}{a'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad [6].$$

Aequatio 3, 4, 5, 6 reiicienda erit, si γ, δ, α, β resp. $= 0$. — Sed dubium hic manet, quae *signa* quantitatibus radicalibus tribui debeant; hoc sequenti modo decidemus.

Statim patet in [3] et [4] necessario signa superiora accipi debere, quando neque $\frac{\alpha}{\gamma}$ neque $\frac{\beta}{\delta}$ signum habeat signo ipsius a oppositum; quoniam accepto signo inferiori $\frac{a\alpha}{\gamma}$ et $\frac{a\beta}{\delta}$ fierent quantitates negatiuae. Quia vero A et A' signa eadem habent, $\sqrt{D}$ cadet inter $\sqrt{(D + \frac{aA}{\gamma\gamma})}$ et $\sqrt{(D - \frac{aA'}{\delta\delta})}$ adeoque in hocce casu $\frac{\sqrt{D} - b}{a}$