LIB. II. tas y, vel nullam, prout binæ radices ipſius y fuerint vel reales vel imaginariæ. Quod ſi autem fuerit $\zeta = 0$ tum unica quidem Applicata ſingulis Abſciſſis reſpondebit, altera abeunte in infinitum, quam ob rem iſte caſus noſtram indagationem non turbabit.

TAB. V. Fig. 19. 87. Quoties autem ambo ipſius y valores fuerint reales; id quod evenit, ſi Applicata PMN Curvam in duobus punctis M & N interſecat, erit ſumma radicum $PM + PN = \frac{-\varepsilon x - \gamma}{\zeta} = \frac{-\varepsilon . AP - \gamma}{\zeta}$, ſumta recta AEF pro Axe, A pro initio Abſciſſarum, & angulo APN, quo Applicatæ Axi inſiſtunt, poſito obliquo pro lubitu. Quod ſi ergo ſub eodem angulo ducatur quævis alia Applicata npm, cujus quidem valor pm eſt negativus, erit eodem modo $pn - pm = \frac{-\varepsilon . Ap - \gamma}{\zeta}$. Subtrahatur hæc æquatio a priori, erit $PM + pm + PN - pn = \frac{\varepsilon (Ap - AP)}{\zeta} = \frac{\varepsilon . Pp}{\zeta}$. Ducantur ex punctis m & n rectæ Axi parallelæ, donec priori Applicatæ occurrant in punctis μ & ν, eritque $M\mu + N\nu = \frac{\varepsilon . Pp}{\zeta}$, ſeu ſumma $M\mu + N\nu$ ad Pp ſeu $m\mu$ ſeu $n\nu$ rationem habebit conſtantem ut ε ad ζ. Ratio ſcilicet hæc perpetuo erit eadem, ubicunque in Curva ducantur rectæ MN & mn, dummodo cum Axe datum faciant angulum, atque rectæ $n\nu$ & $m\mu$ Axi parallelæ ducantur.

TAB. V. Fig. 20. 88. Si Applicata PMN eo promoveatur, quo puncta M & N coincidant, tum Applicata tanget Curvam; ubi enim duæ interſectiones conveniunt, ibi Linea ſecans abit in tangentem. Sit igitur KCI ejuſmodi tangens, cui ducantur parallelæ quotcunque rectæ MN, mn, Curvæ utrinque occurrentes, cujuſmodi rectæ vocari ſolent CHORDÆ & ORDINATÆ. Tum ex punctis M, N, m, n ad tangentem producantur rectæ MI, NK; & mi, nk Axi prius aſſumto parallelæ. Quia nunc intervalla CK, Ck ad contrariam puncti C partem cadunt, negative

negative capi debebunt. Hinc erit $CI - CK : MI = \varepsilon : \zeta$ Cap. V.
& $Ci - Ck : mi = \varepsilon : \zeta$; ideoque $CI - CK : MI = Ci - Ck : mi$ seu $MI : mi = CI - CK : Ci - Ck$.

89. Quia positio Axis respectu Curvæ est arbitraria, rectæ MI, NK, mi, nk pro lubitu duci poterunt, dummodo inter se fuerint parallelæ: eritque semper $MI : mi = CI - CK : Ci - Ck$. Quod si ergo rectæ parallelæ MI & NK ita ducantur ut fiat $CI = CK$; quod evenit si parallelæ MI & NK statuantur rectæ CL, quæ ex contactu C ducta Ordinatam MN in L bisecat: tum, ob $CI - CK = 0$, fiet quoque $Ci - Ck = \frac{mi}{MI}(CI - CK) = 0$. Quare producta recta CL in l, quia, ob mi & nk pariter ipsi CL parallelas, est $ml = Ci$ & $nl = Ck$, erit $ml = nl$. Unde sequitur rectam CLl, quæ ex puncto contactus C ducta unam Ordinatam MN tangenti parallelam bisecat, eandem omnes Ordinatas mn eidem tangenti parallelas bifariam secare.

90. Cum igitur recta CLl omnes Ordinatas tangenti ICK parallelas in duas partes æquales secet, hæc Linea CLl vocari solet DIAMETER *Lineæ secundi ordinis* seu *Sectionis conicæ*. Hinc innumerabiles in unaquaque Linea secundi Ordinis duci possunt Diametri, quia in singulis punctis Curvæ datur tangens. Ubicunque enim data fuerit tangens ICK, ducatur una quævis Ordinata MN hinc tangenti parallela, qua in L bisecta, erit recta CL Diameter Lineæ secundi ordinis, omnes Ordinatas tangenti IK parallelas bifariam secans.

91. Ex his etiam sequitur, si recta Ll duas quasvis parallelas Ordinatas MN & mn bisecet, eandem esse omnes reliquas Ordinatas illis parallelas bisecturam: dabitur enim alicubi recta Curvam tangens IK his Ordinatis parallela, ideoque dabitur Diameter. Hinc nova habetur methodus in data Linea secundi ordinis innumerabiles Diametros inveniendi; ducantur enim pro lubitu duæ Ordinatæ seu Chordæ MN & mn inter se parallelæ, quibus bisectis in L & l, recta per hæc puncta ducta omnes reliquas Ordinatas illis parallelas pariter bisecabit, eritque

F 2 propterea

LIB. II. propterea Diameter. Atque ubi Diameter producta Curvam secat in C, per id recta IK Ordinatis parallela ducta Curvam in puncto C tanget.

TAB. V. Fig. 19. 92. Ad hanc proprietatem nos manuduxit consideratio summæ binarum radicum ipsius y ex æquatione

$$yy + \frac{(\varepsilon x + \gamma)}{\zeta}y + \frac{\delta xx + \beta x + \alpha}{\zeta} = 0.$$

Ex eadem vero æquatione constat fore productum ambarum radicum $PM.\,PN = \frac{\delta xx + \beta x + \gamma}{\zeta}$, quæ expressio $\frac{\delta xx + \beta x + \gamma}{\zeta}$ vel duos Factores habet simplices reales vel secus. Illud evenit si Axis Curvam in duobus punctis E & F secet, quia enim his in locis fit $y = 0$, erit $\frac{\delta xx + \beta x + \alpha}{\zeta} = 0$, hincque radices ipsius x erunt AE & AF, atque adeo Factores $(x - AE)(x - AF)$ ita ut sit $\frac{\delta xx + \beta x + \alpha}{\zeta} = \frac{\delta}{\zeta}(x - AE)(x - AF) = \frac{\delta}{\zeta}.\,PE.\,PF$ ob $x = AP$. Hanc ob rem ergo erit $PM.\,PN = \frac{\delta}{\zeta}.\,PE.\,PF$: seu rectangulum $PM.\,PN$ ad rectangulum $PE.\,PF$ constantem habebit rationem ut δ ad ζ ubicunque Applicata PMN ducatur, dummodo sit angulus NPF assumto, quo Applicatæ ad Axem inclinari ponuntur, æqualis. Erit ergo simili modo, si ducatur Applicata mn ob Ep & pm negativas $pm.\,pn = \frac{\delta}{\zeta}\,pE.\,pF$.

TAB. V. Fig. 21. 93. Ducta ergo recta quacunque PEF Lineam secundi ordinis secante in duobus punctis E, F, si ad eam parallelæ ducantur Ordinatæ quotcunque NMP, npm, erit semper $PM.\,PN : PE.\,PF = pm.\,pn : pE.\,pF$, utraque enim hujus proportionis ratio æquatur $\delta : \zeta$. Simili modo si, quia Axis positio est arbitraria, recta PMN sumatur pro Axe, atque ipsi PEF alia quæcunque parallela ducatur eqf, erit quoque $PM.$

PN:

$PN : PE.PF = qM.qN : qe : qf = pm.pn : pE.pF$. Ergo alternando $qe.qf.\ pE.pF = qM.qN : pm.pn$. Datis igitur duabus Ordinatis parallelis ef & EF, si aliæ quæcunque duæ Ordinatæ inter se parallelæ MN & mn ducantur, illas secantes in punctis P, p, q, r, erunt hæ rationes omnes inter se æquales. $PM.PN : PE.PF = pm.pn : pE.pF = qM.qN : qe.qf = rm.rn : re.rf$. Quæ est altera proprietas generalis Linearum secundi ordinis. CAP. V.

94. Si igitur duo Curvæ puncta M & N coincidant, recta PMN fiet Curvæ tangens in concursu illorum duorum punctorum, abibitque rectangulum $PM.PN$ in quadratum ipsius PM vel PN, unde nova tangentium proprietas obtinebitur. Tangat nimirum recta CPp Lineam secundi ordinis in puncto C, & ducantur lineæ quotvis PMN, pmn inter se parallelæ, quæ ergo omnes cum tangente eundem angulum constituant. Ex proprietate igitur ante inventa erit TAB. VI. Fig. 24.

$$PC^2 : PM.PN = pC^2 : pm.pn,$$

seu quæcunque Ordinata MN ad tangentem sub angulo dato ducatur, erit semper quadratum rectæ CP ad rectangulum $PM \times PN$ in ratione constante.

95. Indidem etiam sequitur, si Lineæ secundi ordinis ducatur Diameter quæcunque CD, omnes Ordinatas MN, mn inter se parallelas bifariam secans, atque ipsa Diameter Curvæ occurrat in punctis duobus C & D, fore TAB. V. Fig. 20.

$$CL.LD : LM.LN = Cl.lD : lm.ln.$$

Cum autem sit $LM = LN$, & $lm = ln$, erit $LM^2 : lm^2 = CL.LD : Cl.lD$, seu perpetuo erit quadratum semiordinatæ LM ad rectangulum $CL.LD$ in ratione constante. Hinc sumta Diametro CD pro Axe, & semiordinatis LM pro Applicatis, reperietur æquatio pro Lineis secundi ordinis. Sit enim Diameter $CD = a$, Abscissa $CL = x$ & Applicata $LM = y$, ob $LD = a - x$ erit, y^2 ad $ax - xx$ in ratione

 constante

LIB. II. conſtante, quæ ſit ut h ad k, unde orietur iſta pro Lineis ſecundi ordinis æquatio $yy = \frac{h}{k}(ax - xx)$.

96. Ex ambabus autem jam inventis Linearum ſecundi Ordinis proprietatibus conjunctim aliæ erui poterunt proprietates.
TAB. V. Fig. 22. Dentur in Linea ſecundi ordinis duæ Ordinatæ inter ſe parallelæ AB & CD, & compleatur quadrilaterum $ACDB$, quod ſi jam per punctum quodcunque Curvæ M ducatur Ordinata MN illis AB & CD parallela ſecans rectas AC & BD in punctis P & Q, erunt partes PM & QN inter ſe æquales. Nam recta, quæ biſecat Ordinatas duas AB & CD inter ſe parallelas, biſecabit quoque Ordinatam MN: at, per Geometriam elementarem, eadem recta biſecans latera AB & CD quoque biſecabit portionem PQ. Cum igitur lineæ MN & PQ in eodem puncto biſecentur, neceſſe eſt ut ſit $MP = NQ$ & $MQ = NP$. Dato ergo, præter quatuor Lineæ ſecundi ordinis puncta A, B, C, & D, quinto M ex eo reperietur ſextum N, ſumto $NQ = MP$.

97. Cum jam ſit $MQ.QN$ ad $BQ.DQ$ in ratione conſtante, ob $QN = MP$ erit quoque $MP.MQ$ ad $BQ.DQ$ in eadem ratione conſtante. Scilicet, ſi aliud quodcunque Curvæ punctum, uti c, ſumatur, & per id recta GcH ipſis AB, & CD parallela ducatur donec lateribus AC, BD occurrat in punctis G & H, erit quoque $cG.cH$ ad $BH.DH$ in eadem ratione conſtante, ideoque $cG.cH : BH.DH = MP.MQ : BQ.DQ$. Quod ſi autem per M baſi BD parallelæ ducatur RMS Ordinatis parallelis AB, CD occurrens in R & S, erit, ob $BQ = MR$ & $DQ = MS$, hæc quoque ratio $MP.MQ : MR.MS$ conſtans. Si igitur per quodvis Curvæ punctum M duæ ducantur rectæ, altera MPQ lateribus oppoſitis AB, CD parallela, altera vero RMS baſi BD parallela, interſectiones P, Q, R, & S ita erunt comparatæ, ut ſit $MP.MQ$ ad $MR.MS$ in ratione conſtante.

98. Si loco Ordinatæ CD, quæ poſita eſt ipſi AB parallela, ex puncto D alia quæcunque Dc in ejus locum ſubſtituatur,