ſpicuum eſt, ſi fuerit n minor quam $2m$, radium oſculi fore infinite parvum; contra vero, ſi n major quam $2m$, infinite magnum. Cap. XIV.

332. Phænomena ergo, quæ in omni Curva conſpectui ſe offerunt, ad tria genera reducuntur. Primo ſcilicet Curva *continua curvatura* progreditur, neque uſquam punctum flexus contrarii habet, neque Cuſpidem ſeu punctum reflexionis. Evenit hoc primum ſi radius oſculi ubique fuerit finitæ magnitudinis, tum vero etiam dantur caſus quibus radii oſculi magnitudo ſive infinite magna ſive infinite parva continuum tractum non perturbat, quod uſu venit ſi natura Curvæ circa punctum M exprimitur æquatione $\alpha r^m = s^n$, exiſtente m numero impari, at n numero pari majori quam m. Secundum phænomenon eſt *punctum Flexus contrarii*, quod locum habere nequit niſi radius oſculi fuerit vel infinite magnus vel infinite parvus; indicatur autem æquatione $\alpha r^m = s^n$, ſi uterque exponens m & n fuerit numerus impar, exiſtente ſemper n majore quam m Erit enim radius oſculi infinite magnus ſi n major quam $2m$, at infinite parvus ſi n minor quam $2m$. Tertium phænomenon eſt *punctum Reflexionis* ſeu *Cuſpis*, ubi duo quaſi rami verſus ſe invicem convexi in puncto coeuntes ſe tangunt atque terminantur; tale punctum monſtrat æquatio $\alpha r^m = s^n$, ſi m fuerit numerus par & n impar. In Cuſpide ergo radius oſculi ſemper eſt vel infinite parvus vel infinite magnus.

333. Quoniam igitur in his tribus generibus omnes Curvarum, ratione tractus continui, varietates continentur, primum intelligitur Curvæ continuæ ramum nunquam ita inflexum dari, ut in C angulum finitum ACB conſtituat. Deinde, cum in puncto reflexionis ambo rami ſibi convexitatem obvertant, ejusmodi punctum reflexionis ACB in C non datur, ubi rami AC & BC in C quidem communem Tagentem habeant, at alterius concavitas alterius convexitatem reſpiciat; & quoties Tab. XVI. Fig. 66. Tab. XVI. Fig. 67.

Z 2 hujuſ-

LIB. II. hujusmodi reflexio adesse videatur, toties Curva non est completa; &, si Curva ad normam æquationis compleatur ac secundum omnes partes exprimatur, orietur figura, qualis in

TAB. XVI. *Figura 64.* exhibetur. Dantur quidem Curvarum describendarum modi, quibus ejusmodi Cuspis ACB oritur, quæ propterea ab HOSPITALIO *Cuspis secundæ speciei* vocatur. Verum notandum est descriptiones mechanicas non semper totam Curvam, quæ quidem æquatione contineatur, producere, sed sæpenumero certam tantum partem exhibere, qua sola notatione lis, quæ circa hanc Cuspidem secundæ speciei est mota, dirimitur.

Non obstantibus his argumentis, quibus existentia hujusmodi Cuspidis secundæ speciei everti videtur, innumerabiles dantur Curvæ algebraïcæ tali Cuspide præditæ. Inter quas adeo una ex ordine Linearum quarto, hac æquatione contenta $y^4 - 2y^2x - 4yxx - x^3 = 0$, quæ ex ista formula $y = \sqrt{x} \pm \sqrt[4]{x^3}$ resultat. Quanquam enim hic primum occurrit terminus $\sqrt{x}$, tamen ejus signum non est ambiguum, sed necessario debet esse $+$. Nam, si ipsi tribueretur signum negationis, alter terminus $\sqrt[4]{x^3} = \sqrt{(x\sqrt{x})}$ evaderet imaginarius. Ex quo exemplo quemadmodum exempla supra allata restringi oporteat luculenter perspicitur.

TAB. XVI. *Fig. 64.* 334. Si duo rami, qui in M communem habent Tangentem, ideoque quatuor Arcus ex M exeuntes repræsentant nempe Mm, $M\mu$, Mn, $M\nu$, diversis æquationibus exprimantur, dubium est nullum, quinam horum Arcuum sint continui; ii scilicet, qui sub eadem æquatione continentur; eritque Arcus Mm continuatio Arcus Mn, & $M\mu$, continuatio Arcus νM. Quod si vero ambo rami illi eadem æquatione exprimantur, tum ob cessantem rationem priorem, Arcus Mm æque haberi potest pro continuatione Arcus νM, atque Arcus nM. Cum autem uterque Arcus Mn & $M\nu$ æque haberi possit pro continuatione Arcus Mm, etiam alter pro alterius continuatione haberi poterit. Hinc Arcus mM, &

& $M\mu$ Curvam continuam conſtituere cenſendi ſunt, æque ac bini Arcus quicunque alii, ſicque hoc caſu in M ſe reſpicient duæ Cuſpides ſecundæ ſpeciei, $mM\mu$ & $nN\nu$. CAP. XIV.

335. Neque vero ſolum valet de duobus ramis qui ſine Flexu contrario ac ſine Cuſpide ſe mutuo in M tangunt atque eadem æquatione exprimuntur, ſed etiam eadem erit continuitatis ratio, cujuſcunque generis fuerint ambo illi rami ſe mutuo in M tangentes, dummodo communi æquatione exprimantur. Evenit hoc quoties inter r & s ad hujuſmodi pervenitur æquationem $\alpha^2 r^{2m} - 2\alpha\beta r^m s^n + \beta\beta s^{2n} = 0$; tum enim uterque ramus eadem æquatione $\alpha r^m = \beta s^n$ exprimetur. Hoc igitur caſu quatuor Arcuum ex puncto M exeuntium duo quicunque pro una Linea continua haberi poſſunt, hincque naſcentur innumerabiles Cuſpides ſecundæ ſpeciei. Hæc autem ipſa continuitatis ratio in cauſa eſt, quod quædam deſcriptiones ac conſtructiones mechanicæ nonnumquam Cuſpides ſecundæ ſpeciei producant; hoc tamen evenire non poteſt, niſi quando deſcriptio non totam Curvam in æquatione contentam, ſed ejus tantum ramum unum vel aliquot exhibet.

CAPUT XV.

De Curvis una pluribuſve Diametris præditis.

336. DE Lineis ſecundi ordinis ſupra vidimus, eas omnes unam ad minimum habere Diametrum orthogonalem, quæ totam Curvam in duas partes ſimiles & æquales ſecet. Parabola ſcilicet ejuſmodi unam habet Diametrum; ac propterea duabus conſtat partibus æqualibus & ſimilibus. Ellipſis autem atque Hyperbola duas ejuſmodi habent Diametros ſe mutuo in Centro normaliter decuſſantes; ideoque in iis quatuor dantur Arcus ſeu rami inter ſe æquales & ſimiles.

LIB. II. Circulus vero, quia ab omni recta per Centrum ducta in duas partes similes & æquales dividitur, innumeras habebit partes æquales, omnes scilicet Arcus, qui æqualibus chordis subtenduntur, simul inter se sunt æquales & similes.

337. Hanc igitur duarum pluriumve partium ejusdem Curvæ similitudinem hic data opera perpendemus; easque Curvas, quarum duæ pluresve partes inter se sunt similes, ad æquationes generales revocabimus. Ac primo quidem, si

TAB. XVII. Fig. 68.

consideremus æquationem inter Coordinatas orthogonales x & y, diviso universo spatio in quatuor regiones litteris Q, R, S, T indicatas per rectas AB, EF, se mutuo in C normaliter secantes, sumtis x & y affirmativis, portio Curvæ in regione Q sita oritur; sumta autem Abscissa x affirmativa, at Applicata y negativa, portio Curvæ in regione R sita oritur: sin autem x negativa ponatur, manente y affirmativa, portio Curvæ in regione S sita prodibit; portio denique in regione T sita invenitur, posita utraque Coordinata y & x negativa.

338. Portiones ergo in regionibus Q & R sitæ inter se erunt æquales & similes, si æquatio ita fuerit comparata, ut non mutetur etiamsi $-y$ loco y scribatur. Cum igitur omnis potestas parium exponentium ipsius y hac gaudeat proprietate; patet, si in æquatione pro Curva nullæ potestates impares ipsius y occurrant, Curvæ portiones in regionibus Q & R sitas inter se fore æquales & similes; ideoque rectam AB in qua Abscissæ $CP = x$ capiuntur, fore Curvæ Diametrum. Hujusmodi ergo Curvæ, si quidem fuerint algebraïcæ, omnes in hac æquatione generali continebuntur

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma xx + \delta yy + \varepsilon x^3 + \zeta xyy + \eta x^4 + \theta x^2 y^2 + \iota y^4 \text{ \&c.}$$

quæ expressio ita describi potest ut sit Functio rationalis ipsarum x & yy. Quod si ergo Z fuerit Functio quæcunque rationalis ipsarum x & yy, tum æquatio $Z = 0$, exprimet Lineam curvam, quæ a recta AB in duas partes similes & æquales

æquales bisecabitur; erunt ergo quoque portiones in regionibus S & T sitæ inter se æquales & similes.

339. Portiones vero in regionibus Q & S erunt æquales & similes, si æquatio ita fuerit comparata, ut posito $-x$ loco x non immutetur: quare, si Z fuerit Functio quæcunque rationalis ipsarum xx & y, tum æquatio $Z = 0$, exprimet Curvam, quæ per rectam EF in duas partes similes & æquales bisecabitur. Æquatio ergo pro his Curvis erit hujusmodi

$$0 = \alpha + \beta y + \gamma xx + \delta yy + \varepsilon xxy + \zeta y^3 + \eta x^4 + \theta xxyy + \iota y^4 + \&c.$$

Per hanc ergo æquationem portio Curvæ in S sita similis & æqualis erit portioni in Q, similique modo portio in T portioni in R.

340. Portiones autem in regionibus oppositis Q & T, seu R & S erunt similes & æquales, si æquatio inter Coordinatas x & y ita fuerit comparata, ut, posita utraque x & y negativa, nullam mutationem subeat. Sit $Z = 0$ æquatio pro his Curvis, ac primo patet, si Z fuerit Functio ipsarum x & y, parium dimensionum, seu, si fuerit aggregatum ex quotcunque Functionibus homogeneis parium dimensionum, tum æquationem $Z = 0$ præscripta gaudere proprietate. Tum vero si Z fuerit aggregatum quotcunque Functionum homogenearum imparium dimensionum, sumtis x & y negativis, Z abibit in $-Z$; ideoque, cum esset $Z = 0$, erit quoque $-Z = 0$. Hinc ergo duplex nascitur æquatio generalis pro Curvis, quæ in regionibus oppositis Q & T itemque in R & S portiones habent æquales & similes, altera scilicet erit

$$0 = \alpha + \beta xx + \gamma xy + \delta y^2 + \varepsilon x^4 + \zeta x^3 y + \eta xxyy + \theta xy^3 + \iota y^4 + \kappa x^6 + \&c.$$

altera vero erit

$$0 = \alpha x + \beta y + \gamma x^3 + \delta x^2 y + \varepsilon xy^2 + \zeta y^3 + \eta x^5 + \theta x^4 y + \iota x^3 y^2 + \&c.$$

341. Curvæ ergo, quæ duas habent partes similes & æquales, duplicis sunt generis: vel enim hæ duæ partes utrinque circa Lineam rectam ita sunt dispositæ, ut omnes Ordinatæ ortho-