quando omnes repraesentationes propriae ipsius $M$ per $xx + yy + zz$ desiderantur, quum hae e discerptionibus facillime euoluantur.

Exempli caussa inuestigabimus omnes discerptiones numeri 770 in terna quadrata, vbi $\mu = 3$, $e = e' = 0$, adeoque $E = 2k$. Per classificationem formarum binariarum positiuarum determinantis — 770, quam quoniam a quouis ad normam art. 231 facile condi potest breuitatis gratia non adscribimus, inuenitur classium positiuarum multitudo = 32, quae omnes sunt proprie primitiuae et inter 8 genera distribuuntur, ita vt sit $k = 4$, et proin $E = 8$. Genus, cuius numerus characteristicus — 1, respectu numerorum 5, 7, 11 manifesto characteres particulares $R5$; $N7$; $N11$ habere debet, vnde per art. 263 facile concluditur, ipsius characterem respectu numeri 8 esse debere 1 et 3, 8. Iam in eo genere cuius character 1 *et* 3, 8; $R5$; $N7$; $N11$, quatuor classes reperiuntur, pro quarum repraesentantibus eligimus formas (6, 2, 129), (6, — 2, 129), (19, 3, 41), (19, — 3, 41); classem secundam vero et quartam reiicimus, vtpote primae et tertiae oppositas. Quatuor discerptiones formae (19, 3, 41) iam in art. 289 tradidimus, e quibus sequuntur discerptiones numeri 770 in 9 + 361 + 400, 16 + 25 + 729, 81 + 400 + 289, 576 + 169 + 25. Simili ratione inueniuntur quatuor discerptiones formae $6tt + 4tu + 129uu$ in $(t - 8u)^2 + (2t + u)^2 + (t + 8u)^2$, $(t - 10u)^2 + (2t + 5u)^2 + (t + 2u)^2$, $(2t - 5u)^2 + (t + 10u)^2 + (t + 2u)^2$, $(2t + 7u)^2 + (t - 8u)^2 + (t - 4u)^2$, resp. e valoribus expressionis $\sqrt{-(6, -2, 129)}$ hisce oriundae $(48, 369)$, $(62, -149)$, $(92, -159)$, $(202, -61)$; vnde prodeunt discerptiones numeri 770 in $225 + 256 + 289$, $1 + 144 + 625$, $64 + 81 + 625$, $16 + 225 + 529$. Praeter has octo discerptiones aliae non dantur.

Quae ad discerptiones numerorum in terna quadrata diuisores communes habentia attinent, tam facile e theoria generali art. 281 sequuntur, vt non opus sit huic rei immorari.

293. Disquisitiones praecedentes etiam suppeditant demonstrationem theorematis famosi, *omnem numerum integrum positiuum in tres numeros trigonales discerpi posse*, quod a Fermatio olim inuentum est, sed cuius demonstratio rigorosa hactenus desiderabatur. Manifestum est, quamuis discerptionem numeri $M$ in trigonales $\frac{1}{2}x(x+1) + \frac{1}{2}y(y+1) + \frac{1}{2}z(z+1)$ producere discerptionum numeri $8M + 3$ in terna quadrata imparia $(2x+1)^2 + (2y+1)^2 + (2z+1)^2$, et vice versa. Quiuis autem numerus integer positiuus $8M + 3$ per theoriam praecedentem in tria quadrata resolubis est, quae necessaria erunt imparia (V. annot. art. 291); resolutionumque multitudo pendet tum a multitudine factorum primorum ipsius $8M + 3$, tum a multitudine classium in quas formae binariae determinantis $-(8M + 3)$ distribuuntur. Totidem discerptiones numeri $M$ in ternos trigonales dabuntur. Supponimus autem, $\frac{1}{2}x(x+1)$ pro valore quocunque integro ipsius $x$ tamquam trigonalem spectari; quodsi magis placeret cifram

excludere, theorema ita immutare oporteret: Quiuis integer positiuus vel ipse trigonalis est, vel in duos vel in tres trigonales resolubilis. Similis mutatio in theoremate sequente facienda esset, si cifram a quadratis excludere placeret.

Ex iisdem principiis demonstratur aliud Fermatii theorema, *quemuis numerum integrum positiuum in quatuor quadrata decomponi posse.* Subtrahendo a numero formae $4n + 2$ quadratum arbitrarium (illo numero minus), a numero formae $4n + 1$ quadratum par, a numero formae $4n + 3$ quadratum impar, residuum in omnibus his casibus in tria quadrata resolubilis erit, adeoque numerus propositus in quatuor. Denique numerus formae $4n$ exhiberi potest per $4^{\mu}N$ ita vt $N$ ad aliquam trium formarum praecedentium pertineat: resoluto autem ipso $N$ in quatuor quadrata, etiam $4^{\mu}N$ resolutus erit. A numero formae $8n + 3$ etiam subduci potest quadratum radicis pariter paris, a numero formae $8n + 7$ quadratum radicis impariter paris, a numero formae $8n + 4$ quadratum impar, residuumque in tria quadrata resolubile erit. Ceterum hocce theorema iam ab ill. La Grange demonstratum erat, *Nouv. Mem. de l'Ac. de Berlin* 1770 *p.* 123, quam demonstrationem (a nostra prorsus diuersam) fusius explicauit ill. Euler in *Actis Ac. Petr. Vol. II. p.* 48. — Alia Fermatii thepraecedentium quasi continuationem constituunt, quinuis numerum integrum in quinque numeros pentagonales, sex hexagonales, septem heptagonales etc. resolubilem esse, demonstratione hactenus carent, aliaqua principia requirere videntur.