facile colligitur, si omnes transformationes propriae formae (F) in (G) habeantur, ex his omnes repraesentationes ipsius M per (F) ad valorem N pertinentes sequi. Vnde quaestio de repraesentationibus numeri dati per formam datam (in quibus indeterminatae valores inter se primos nanciscuntur) inuestigandis, reducta est ad quaestionem de inueniendis omnibus transformationibus propriis formae illius in datam aequiualentem.

Applicanda iam ad haec, ea quae in art. 162 docuimus, facile concluditur: Si repraesentatio aliqua numeri M per formam (F) ad valorem N pertinens sit haec: $x = \alpha$, $y = \gamma$: formulam generalem omnes repraesentationes eiusdem numeri per formam (F), ad valorem N pertinentes, comprehendentem fore hanc: $x = \frac{\alpha t - (\alpha b + \gamma c)u}{m}$, $y = \frac{\gamma t + (\alpha a + \gamma b)u}{m}$, vbi m diuisor communis maximus numerorum a, $2b$, c; et t, u omnes numeri, indefinite, aequationi $tt - Duu = mm$ satisfacientes.

170. Si forma (a, b, c) ancipiti alicui aequiualens, adeoque formae $\left(M, N, \frac{NN - D}{M}\right)$ tam proprie, quam improprie, siue tam formae $\left(M, N, \frac{NN - D}{M}\right)$, quam huic $\left(M, -N, \frac{NN - D}{M}\right)$

$+ u'x'$. Sed ex duabus aequationibus $m\mu + n\nu = m\mu' + n\nu'$, $\mu(mb + nc) - \nu(ma + mb) = \mu'(mb + nc) - \nu'(ma + nc)$, facile deducitur esse aut $M = 0$ aut $\mu = \mu'$, $\nu = \nu'$. At $M = 0$ iam exclusimus.

proprie: repraesentationes numeri M habebuntur per formam (F), tam ad valorem N, quam ad valorem $-N$, pertinentes. Et vice versa si plures repraesentationes numeri M per eandem formam (F), ad valores *oppositos* expr. $\sqrt{D}$ (mod. M), N, $-N$, pertinentes habentur: forma (F) formae (G) tam proprie quam improprie aequiualens erit, formaque anceps assignari poterit, cui (F) aequiualeat.

Haec generalia de repraesentationibus hic sufficiant: de repraesentationibus, in quibus indeterminatae valores inter se non primos habent, infra dicemus. Respectu aliarum proprietatum, formae quarum determinans est negatiuus prorsus alio modo sunt tractandae, quam formae determinantis positiui: quare iam vtrasque seorsim considerabimus. Ab illis tamquam facilioribus initium facimus.

171. Problema. *Proposita forma quacunque* (a, b, a') *cuius determinans negatiuus,* $= -D$, *designante* D *numerum positiuum, inuenire formam huic proprie aequiualentem,* (A, B, C), *in qua* A *non* $> \sqrt{\frac{4}{3}D}$, B *non* $> \frac{1}{2}A$, C *non* $< A$.

Solutio. Supponimus in forma proposita non omnes tres conditones simul locum habere: alioquin enim aliam formam quaerere opus non esset. Sit b' residuum abs. min. numeri $-b$ secundum modulum a'*), atque $a'' = \frac{b'b' + D}{a'}$,

*) Obseruare conuenit, si formae alicuius (a, b, a') terminus primus vel vltimus a vel a' sit $= 0$, ipsius determinantem esse quadratum positiuum: quare illud in casu praesenti euenire nequit. — Ex simili ratione termini exteri a, a' formae determinantis negatiui, signa opposita habere non possunt.

qui erit integer quia $b'b' \equiv bb$, $b'b' + D \equiv bb + D = aa' \equiv 0$ (mod. a'). Iam si $a'' < a'$, fiat denuo b'' resid. abs. min. ipsius $-b'$ secundum mod. a'', atque $a''' = \frac{b''b'' + D}{a''}$. Si hic iterum $a''' < a''$, sit rursus b''' res. abs. min. ipsius b'' secundum mod. a''' atque $a^{\text{IV}} = \frac{b'''b''' + D}{a'''}$. Haec operatio continuetur donec in progressione a', a'', a''', a^{IV} etc. ad terminum a^{m+1} perueniatur, qui praecedente suo a^m non sit minor, quod tandem euenire debet, quia alias progressio infinita numerorum integrorum continuo decrescentium haberetur. Tum forma (a^m, b^m, a^{m+1}) omnibus conditionibus satisfaciet.

Dem. I. In progressione formarum (a, b, a'), (a', b', a''), (a'', b'', a''') etc, quaeuis praecedenti est contigua, quare vltima primae proprie aequiualens erit (artt. 159, 160).

II. Quum b^m sit residuum absolute minimum ipsius $-b^{m-1}$ secundum mod. a^m, maior quam $\frac{1}{2}a^m$ non erit (art. 4).

III. Quia $a^m a^{m+1} = D + b^m b^m$, atque a^{m+1} non $< a^m$, $a^m a^m$ non erit $> D + b^m b^m$, et quum b^m non $> \frac{1}{2}a^m$, $a^m a^m$ non erit $> D + \frac{1}{4}a^m a^m$ et $\frac{3}{4}a^m a^m$ non $> D$, tandemque a^m non $> \sqrt{\frac{4D}{3}}$.

Exempl. Proposita sit forma (304, 217, 155) cuius determinans $= -31$. Hic inuenitur progressio formarum: (304, 217, 155), (155, —