Porro fit $\alpha nb = -\alpha m(e + a)$, $\gamma mb = -m(\alpha' e + \alpha a)$ adeoque $(n\alpha - m\gamma)b = (\alpha' - \alpha)me$ [13]

Denique fit $\gamma' e - \gamma a + \alpha c = 0$: hinc multiplicando per n, et pro na substituendo valorem ex [8] fit $(n\alpha - m\gamma)c = (\gamma - \gamma')ne$. . . [14]

Simili modo eruitur $\beta' e + \delta b - \beta d = 0$, siue $n\beta' e + n\delta b + n\beta a = 0$, adeoque per [7] $n\beta' e + n\beta a = m\delta e + m\delta a$, siue $(n\beta - m\delta)a = (m\delta - n\beta')e$ [15]

Porro fit $\beta nb = -\beta m(e + a)$, $\delta mb = -m(\beta e' + \beta a)$ adeoque $(n\beta - m\delta)b = (\beta' - \beta)me$ [16]

Tandem $\delta' e - \delta a + \beta c = 0$: hinc multiplicando per n et substituendo pro na valorem ex [8] fit $(n\beta - m\delta)c = (\delta - \delta')ne$ . . . . . [17]

Iam quum diuisor communis maximus numerorum a, b, c sit r, integri $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ita accipi possunt vt fiat $\mathfrak{A}a + \mathfrak{B}b + \mathfrak{C}c = r$. Quo facto erit ex 12, 13, 14; 15, 16, 17

$$\mathfrak{A}(m\gamma - n\alpha') + \mathfrak{B}(\alpha' - \alpha)m + \mathfrak{C}(\gamma - \gamma')n = \frac{r}{e}(n\alpha - m\gamma)$$
$$\mathfrak{A}(m\delta - n\beta') + \mathfrak{B}(\beta' - \beta)m + \mathfrak{C}(\delta - \delta')n = \frac{r}{e}(n\beta - m\delta)$$

adeoque $\frac{r}{e}(n\alpha - n\gamma)$, $\frac{r}{e}(n\beta - m\delta)$ integri. *Q. E. D.*

165. *Ex.* Forma $3xx + 14xy - 4yy$ in formam $-12x'x' - 18x'y' + 39y'y'$ transmutatur, tum proprie, ponendo $x = 4x' + 11y'$, $y = -x' - 2y$, tum improprie, ponendo $x = -74x' + 89y'$, $y = 15x' - 18y'$. Hic igitur $\alpha + \alpha'$, $\beta + \beta'$, $\gamma + \gamma'$, $\delta + \delta'$ sunt -70, 100, 14, -20; est autem $-70 : 14 = 100 : -20 = 5 : -1$. Faciemus itaque $m = 5$, $n = -1$, $\mu = 0$, $\nu = -1$. Numeri autem a, b, c inueniun-

tur -237, -1170, 48, quorum diuisor communis maximus $= 3 = r$; denique fit $e = 3$. Hinc transformatio (S) haec erit: $x = 5t - u$, $y = -t$. Per quam forma $(3, 7, -4)$ transit in formam ancipitem $tt - 16tu + 3uu$.

Si formae F, F' sunt aequiualentes: forma G, sub F contenta, etiam sub F' contenta erit. Sed quoniam eanden formam etiam implicat, ipsi aequiualens erit, et proin etiam formae F. In hoc igitur casu theorema ita enunciabitur:

Si F, F' tam proprie, quam improprie sunt aequiualentes: forma anceps vtrique aequiualens inueniri poterit. — Ceterum in hoc casu $e = \pm 1$, adeoque etiam r, ipsum e metiens, $= 1$ erit.

Haec de formarum transformatione in genere sufficiant: transimus itaque ad considerationem *repraesentationum.*

166. *Si forma F formam F' implicat: quicunque numerus per F' repraesentari potest etiam per F poterit.*

Sint indeterminatae formarum F, F' respectiue x, y; x', y', ponamusque numerum M per F' repraesentari faciendo $x' = m$, $y' = n$, formam F vero in F' transire per substitutionem $x = \alpha x' + \beta y'$, $y = \gamma x' + \delta y'$. Tum manifestum est si ponatur $x = \alpha m + \beta n$, $y = \gamma m + \delta n$, F transire in M.

Si M pluribus modis per formam F' repraesentari potest, e. g. etiam faciendo $x' = m'$,

$y' = n'$: plures repraesentationes ipsius M per F inde sequentur. Si enim esset tum $\alpha m + \beta n = \alpha m' + \beta n'$ tum $\gamma m + \delta n = \gamma m' + \delta n'$, foret aut $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$, adeoque etiam determinans formae $F' = 0$ contra hyp., aut $m = m'$, $n = n'$. Hinc sequitur M ad minimum totidem modis diuersis per F repraesentari posse quot per F'.

Si igitur tum F ipsam F', tum F' ipsam F implicat i. e. si F, F' sunt aequiualentes, numerusque M per alterutram repraesentari potest: etiam per alteram repraesentari poterit, et quidem totidem modis diuersis per alteram, quot per alteram.

Denique obseruamus, in hocce casu diuisorem communem maximum numerorum m, n aequalem esse diuisori comm. max. nnmerorum $\alpha m + \beta n$, $\gamma m + \delta n$. Sit ille $= \Delta$, nnmerique μ, ν ita accepti vt fiat $\mu m + \nu n = \Delta$. Tum erit $(\delta\mu - \gamma\nu)(\alpha m + \beta n) - (\beta\mu - \alpha\nu)(\gamma m + \delta n) = (\alpha\delta - \beta\gamma)(\mu m + \nu n) = \pm \Delta$. Hinc diu. comm. max. numerorum $\alpha m + \beta n$, $\gamma m + \delta n$ metietur ipsum Δ, Δ vero etiam illum metietur, quia manifesto ipsos $\alpha m + \beta n$, $\gamma m + \delta n$ metitur. Quare necessario ille erit $= \Delta$. — Quando igitur m, n inter se primi sunt, etiam $\alpha m + \beta n$, $\gamma m + \delta n$ inter se primi erunt.

167. Theorema. *Si formae $axx + 2bxy + cyy \ldots (F)$, $a'x'x' + 2b'x'y' + c'y'y' \ldots (F')$ sunt aequiualentes, ipsarum determinans $= D$, posteriorque in priorem transit ponendo $x' = \alpha x + \beta y$, $y' = \gamma x + \delta y$;*