transformationes proprias quaesitas amplectuntur. — Eodem vero modo inuenitur omnes transformationes improprias formae (2, 5, 7) in (275, 0, — 1) sub sequentibus duabus formulis contentas esse: (I) ... $65t - 1100n$, $4t - 65u$, $-15t + 275u$, $-t + 15u$; et (II) ... $10t + 275u$, $-t - 10u$, $-15t - 275u$, $t + 15u$.

215. Hucusque formas determinantis 0 ab omnibus disquisitionibus exclusimus; de his itaque, vt theoria nostra ab omni parte completa euadat, quaedam adhuc sunt adiicienda. Quoniam generaliter demonstratum est, si forma aliqua determinantis D formam determinantis D' implicet, D' esse multiplum ipsius D, statim patet formam cuius determinans = 0 aliam formam quam cuius determinans etiam sit = 0 implicare non posse. Quare duo tantummodo problemata soluenda restant, scilicet 1° *propositis duabus formis f, F, quarum posterior habet determinantem* 0, *diiudicare vtrum prior posteriorem implicet necne, et in illo casu omnes transformationes illius in hanc exhibere.* 2° *Inuenire omnes repraesentationes numeri dati per formam datam determinantis* 0. Problema primum aliam methodum requirit, quando determinans prioris formae f etiam est 0, aliam quando non est 0. Haec omnia iam exponemus.

I. Ante omnia obseruamus, quamuis formam $axx + 2bxy + cyy$, cuius determinans $bb - ac = 0$, ita exhiberi posse $m(gx + hy)^2$, denotantibus g, h numeros inter se primos, m integrum. Sit enim m diuisor communis maximus ipsorum a, c eodem signo acceptus quo hi numeri ipsi sunt affecti (hos signa opposita habere non posse facile perspicitur), eruntque $\frac{a}{m}$, $\frac{c}{m}$ integri inter se primi non negatiui, productum ex ipsis $= \frac{bb}{mm}$ i. e. quadratum, adeoque illi ipsi quadrata (art. 21). Sit $\frac{a}{m} = gg$, $\frac{b}{m} = hh$, eruntque etiam g, h inter se primi, $gghh = \frac{bb}{mm}$, et $gh = \pm \frac{b}{m}$. Hinc patet $m(gx \pm hy)^2$ fore $= axx + 2bxy + cyy$.

Iam propositae sint duae formae f, F, vtraque determinantis 0, et quidem sit $f = m(gx + hy)^2$, $F = M(GX + HY)^2$, ita vt g ad h, G ad H sint primi. Tum dico si forma f implicet formam F, m aut ipsi M aequalem esse aut saltem ipsum M metiri et quotientem esse quadratum; et vice versa si $\frac{M}{m}$ sit quadratum integrum, F contentam esse sub f. Si enim f per substitutionem $x = \alpha X + \beta Y$, $y = \gamma X + \delta Y$ in F transire supponitur, erit $\frac{M}{m}(GX + HY)^2 = ((\alpha g + \gamma h) X + (\beta g + \delta h) Y)^2$, vnde facile sequitur $\frac{M}{m}$ esse quadratum. Ponatur $= ee$, eritque $e(GX + HY) = \pm ((\alpha g + \gamma h) X + (\beta g + \delta h) Y)$, i. e. $\pm eG = \alpha g + \gamma h$, $\pm eH = \beta g + \delta h$; si itaque $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ ita determinantur vt sit $\mathfrak{G}G + \mathfrak{H}H = 1$, erit $\pm e = \mathfrak{G}(\alpha g + \gamma h) + \mathfrak{H}(\beta g + \delta h)$, adeoque *integer*. *Q. E. P.* — Si vero, vice versa, supponitur, $\frac{M}{m}$ esse quadratum integrum $= ee$, forma f implicabit formam F. Scilicet integri $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ita poterunt determinari vt fiat $\alpha g + \gamma h = \pm eG$, $\beta g + \delta h = \pm eH$. Accipiantur enim integri $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ ita vt fiat $\mathfrak{g}g + \mathfrak{h}h = 1$, satisfietque aequationibus illis ponendo $\alpha = \pm eG\mathfrak{g} + hz$, $\mathfrak{h} = \pm eG\mathfrak{h} - gz$, $\beta = \pm eH\mathfrak{g} + hz'$, $\delta = \pm eH\mathfrak{h} - gz'$, quicunque valores integri ipsis z, z' tribuantur; quare F contenta erit sub f, *Q. E. S.* Simul haud difficulter intelligitur, has formulas omnes valores quas $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nancisci possunt, i. e. omnes transformationes formae f in F exhibere, si modo z, z' indefinite omnes numeros integros exhibere supponantur.

II. Propositis duabus formis $f = axx + 2bxy + cyy$ cuius determinans non $= 0$, et $F = M(GX + HY)^2$ cuius determinans $= 0$ (designantibus vt ante G, H numeros inter se primos), dico *primo*, si f implicet ipsam F, numerum M per formam f repraesentari posse; *secundo*, si M per f repraesentari possit, F sub f contentam esse; *tertio*, si in hoc casu omnes repraesentationes numeri M per formam f indefinite exhibeantur ita $x = \xi$, $y = \upsilon$, omnes transformationes formae f in F exhiberi ita $G\xi$, $H\xi$, $G\upsilon$, $H\upsilon$. Quae omnia sequenti modo demonstramus.

1° Ponamus f transire in F per substitutionem $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, accipianturque numeri $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ ita vt sit $\mathfrak{G}G + \mathfrak{H}H = 1$. Tunc manifestum est,