

colligitur. Habebit autem infinitas Asymptotas inter se parallelas. Pari modo describi poterit *Linea Secantium* ex æqua-

CAP.  
XXI.

tione  $y = A.\sec. x$ , seu  $x = \sec. A.y = \frac{1}{\cos. y}$ , quæ etiam infinitos ramos habet in infinitum excurrentes. Maxime vero ex hoc Curvarum genere innotuit CYCLOIS, seu *Trochois*, quæ describitur a puncto in peripheria Circuli super linea recta rotando progredientis, cujus æquatio inter Coordinatas orthogonales est  $y = \sqrt{(1 - x x) + A. \cos. x}$ . Curva hæc, cum ob descriptionis facilitatem tum ob plurimas, quibus gaudet, insignes proprietates, maxime est notatu digna. Quoniam autem pleræque sine Analyfi infinitorum explicari nequeunt, hic tantum præcipuas, quæ ex descriptione immediate fluunt, breviter perpendamus.

522. Rotetur ergo Circulus  $ACB$  super recta  $EA$ ; atque, ut investigatio latius pateat, non punctum Peripheriæ  $B$  sed punctum Diametri productæ  $D$  quodcumque describat Lineam curvam  $Dd$ . Sit hujus Circuli radius  $CA = CB = a$ , distantia  $CD = b$ , atque in hoc quidem situ punctum  $D$  locum obtineat summum. Pervenerit inter rotandum Circulus in situm  $aQbR$ ; ac, posito spatio  $AQ = z$ , erit Arcus  $aQ = z$ , qui divisus per radium  $a$  dabit angulum  $a c Q = \frac{z}{a}$ , & punctum describens erit in  $d$ , ut sit  $cd = b$ , angulus  $dcQ = \pi - \frac{z}{a}$ ; &  $d$  erit punctum in Curva quæsitâ. Ducatur ex  $d$  primum in rectam  $AQ$  normalis  $dp$ , tum in rectam  $QR$  normalis  $dn$ ; erit  $dn = b.\sin. \frac{z}{a}$ , &  $cn = b.\cos. \frac{z}{a}$ ; ergo  $Qn = dp = a + b.\cos. \frac{z}{a}$ . Producatur  $dn$  donec rectæ  $AD$  occurrat in  $P$ ; ac vocentur Coordinatæ  $DP = x$ ,  $Pd = y$ ; erit  $x = b + cn$ ; seu  $x = b - b.\cos. \frac{z}{a}$ ; &  $y = AQ + dn = z + b.\sin. \frac{z}{a}$ . Cum igitur

TAB.  
XXV.  
Fig. 105.

Euleri *Introduct. in Anal. infin. Tom. II.*

P p fit

L I B. II. sit  $b. \cos. \frac{z}{a} = b - x$ , erit  $b. \sin. \frac{z}{a} = \sqrt{(2bx - xx)}$  &  
 $z = a A. \cos. (1 - \frac{x}{b}) = a A. \sin. \frac{\sqrt{(2bx - xx)}}{b}$ ; quibus  
 valoribus substitutis, erit  $y = \sqrt{(2bx - xx)} + a A. \sin. \frac{\sqrt{(2bx - xx)}}{b}$ .  
 Vel, si Abscissæ in Axe  $AD$  a Centro computentur voceturque  $b - x = t$ , erit  $\sqrt{(2bx - xx)} = \sqrt{(bb - tt)}$ , &  
 inter  $t$  &  $y$  habebitur æquatio ista

$$y = \sqrt{(bb - tt)} + a A. \cos. \frac{t}{b},$$

quæ æquatio dat Cycloidem *ordinariam*, si fuerit  $b = a$ ; sin autem sit vel  $b$  major quam  $a$ , vel  $b$  minor quam  $a$ , Curva vocatur Cyclois vel *curtata* vel *elongata*. Semper autem erit  $y$  Functio infinitiplex ipsius  $x$ , vel  $t$ ; seu, quælibet recta basi  $AQ$  parallela Curvam in infinitis punctis secabit, nisi ejus distantia  $x$  vel  $t$  fuerit tanta, ut  $\sqrt{(2bx - xx)}$  vel  $\sqrt{(bb - tt)}$  fiat imaginaria quantitas.

T A B. 523. Inter Curvas hujus generis, quæ imprimis sunt cogni-  
XXVI. tæ, referri debent *Epicycloides* & *Hypocycloides*, quæ oriuntur si  
Fig. 106. Circulus  $ACB$  super Peripheria alterius Circuli  $O A Q$  rotatur, intereaque punctum quodpiam  $D$ , vel extra vel intra Circulum mobilem sumtum, Curvam  $D d$  describit. Ponatur Circuli immoti radius  $OA = c$ , radius Circuli mobilis  $CA = CB = a$ , & distantia puncti describentis  $CD = b$ ; sumatur autem recta  $OD$  pro Axe Curvæ quæsitæ  $D d$ . A situ hoc initiali, quo puncta  $O, C, D$  in directum jacent, processerit Circulus mobilis in situm  $Q c R$ , descripto Arcu  $AQ = z$ , ita ut sit angulus  $AOQ = \frac{z}{c}$ . Erit ergo Arcus  $Qa = AQ = z$ ; hincque angulus  $acQ = \frac{z}{a} = Rcd$ : & sumta recta  $cd = CD = b$ , erit  $d$  punctum in Curva  $D d$ . Ex eo in Axem demittatur perpendicularum  $dP$ ; itemque ex  $c$  perpendi-

perpendicularum  $cm$  &  $cn$  parallela Axi  $OD$ . Ergo, ob  $\angle an$   
gulum  $Rcn = AOQ = \frac{z}{c}$ , erit angulus  $dcn = \frac{z}{c} + \frac{z}{a} = \frac{(a+c)z}{ac}$ . Unde obtinetur  $dn = b \sin. \frac{(a+c)z}{ac}$ , &  
 $cn = b \cos. \frac{(a+c)z}{ac}$ . Deinde, ob  $OC = Oc = a + c$ ,  
erit  $cm = (a+c) \sin. \frac{z}{c}$ , &  $Om = (a+c) \cos. \frac{z}{c}$ . Vo-  
catis ergo Coordinatis  $OP = x$ , &  $Pd = y$ , erit  $x =$   
 $(a+c) \cos. \frac{z}{c} + b \cos. \frac{(a+c)z}{ac}$ , &  $y = (a+c) \sin. \frac{z}{c} +$   
 $b \sin. \frac{(a+c)z}{ac}$ . Hinc patet, si  $\frac{a+c}{a}$  fuerit numerus ratio-  
nalis, tum ob commensurabilitatem angulorum  $\frac{z}{c}$  &  $\frac{(a+c)z}{ac}$ ,  
ipsam incognitam  $z$  eliminari, ideoque æquationem algebraï-  
cam inter  $x$  &  $y$  inveniri posse. Reliquis casibus Curva hoc  
modo descripta erit transcendens.

Ceterum hic notandum est, si sumatur  $a$  negativum, tum  
Hypocycloidem esse prodituram, Circulo mobili intra Circu-  
lum immobilem cadente. Vulgo quidem  $b$  statuitur Radius  $a$   
æqualis; sicque Epicycloides & Hypocycloides proprie sic di-  
ctæ resultant. Hic igitur inventæ Curvæ latius patent; &  
quia æquationes non sunt difficiliore, hanc conditionem adji-  
cere visum est. Si quadrata  $xx$  &  $yy$  addantur, erit  $xx + yy =$   
 $(a+c)^2 + b^2 + 2b(a+c) \cos. \frac{z}{a}$ , cujus æquationis ope eli-  
minatio ipsius  $z$  eo facilius expeditur, quoties quidem quan-  
titates  $a$  &  $c$  fuerint commensurabiles.

524. Præter casus, quibus amborum Circulorum radii  $a$  &  
 $c$  sunt inter se commensurabiles, Curvæque fiunt algebraïcæ,  
notari meretur iste quo  $b = -a - c$ ; seu, quo punctum  
Curvæ  $D$  in Centrum Circuli immobilis  $O$  incidit. Sit igitur  
 $b = -a - c$ ; eritque  $xx + yy = 2(a+c)^2(1 - \cos. \frac{z}{a})$

LIB. II.  $= 4(a+c)^2 (\text{cof. } \frac{z}{2a})^2$ ; unde fiet  $\text{cof. } \frac{z}{2a} = \frac{\sqrt{(xx+yy)}}{2(a+c)}$ . Deinde, cum fit  $x = (a+c) (\text{cof. } \frac{z}{c} - \text{cof. } \frac{(a+c)z}{ac})$  &  $y = (a+c) (\text{fin. } \frac{z}{c} - \text{fin. } \frac{(a+c)z}{ac})$ , erit  $\frac{x}{y} = -\text{tang. } \frac{(2a+c)z}{2ac}$  &  $\text{fin. } \frac{(2a+c)z}{2ac} = \frac{x}{\sqrt{(xx+yy)}}$ ; atque  $\text{cof. } \frac{(2a+c)z}{2ac} = \frac{-y}{\sqrt{(xx+yy)}}$ . Quare, cum fit  $\sqrt{(xx+yy)} = 2(a+c) \text{cof. } \frac{z}{2a}$ , fiet  $x = 2(a+c) \cdot \text{cof. } \frac{z}{2a} \cdot \text{fin. } \frac{(2a+c)z}{2ac}$ , &  $y = -2(a+c) \cdot \text{cof. } \frac{z}{2a} \cdot \text{cof. } \frac{(2a+c)z}{2ac}$ . Sit, exempli gratia,  $c = 2a$ ; erit  $x = 6a \cdot \text{cof. } \frac{z}{2a} \cdot \text{fin. } \frac{z}{a}$ , &  $y = -6a \cdot \text{cof. } \frac{z}{2a} \cdot \text{cof. } \frac{z}{a}$ , &  $\sqrt{(xx+yy)} = 6a \cdot \text{cof. } \frac{z}{2a}$ . Ponamus  $\text{cof. } \frac{z}{2a} = q$ , erit  $\text{fin. } \frac{z}{2a} = \sqrt{(1-qq)}$ , &  $\text{fin. } \frac{z}{a} = 2q\sqrt{(1-qq)}$ , atque  $\text{cof. } \frac{z}{a} = 2qq - 1$ : unde fit  $q = \frac{\sqrt{(xx+yy)}}{6a}$ , &  $y = -6aq(2qq-1) = (1-2qq)\sqrt{(xx+yy)} = (1 - \frac{xx-yy}{18aa})\sqrt{(xx+yy)}$ ; seu,  $18aay = (18aa - xx - yy)\sqrt{(xx+yy)}$ . Ponatur  $18aa = ff$ ; & sumtis quadratis, habebitur ista æquatio sexti ordinis  $(xx+yy)^3 - 2ff(xx+yy)^2 + f^2xx = 0$ . Quoniam vero hic nobis est propositum non Curvas algebraicas sed transcendentes contemplari, his missis ad ejusmodi Curvas progrediamur, quarum constructio simul tam Logarithmos quam Arcus circulares requirar.

Γ Α Β.  
XXVI.

Fig. 107. 525. Supra vero jam ejusmodi nacti sumus Curvam ex æquatione  $2y = x + \sqrt{-1} + x - \sqrt{-1}$ , quam transmutavimus in hanc  $y = \text{cof. } A \cdot lx$ . Hæc vero ulterius abit in  $A \cdot \text{cof. } y = lx$ , &  $x = {}^A \text{cof. } y$ . Sumta ergo recta  $AP$  pro Axe, in eoque  $A$  pro initio Abscissarum, primo patet ultra  $A$  in regione

gione Abscissarum negativarum Curvæ nullam dari portionem continuam, Axis autem  $AP$  a Curvâ in infinitis punctis  $D$  interfecabitur, quorum punctorum ab  $A$  distantiae progressio-

CAP.  
XXI.

nem geometricam constituent, erit scilicet  $AD = e^{\frac{\pi}{2}}$ ;

$AD^1 = e^{\frac{3\pi}{2}}$ ;  $AD^2 = e^{\frac{5\pi}{2}}$ ;  $AD^3 = e^{\frac{7\pi}{2}}$ ; &c., tum vero dabuntur infinitæ intersectiones ad  $A$  propius accedentes,

$AD^{-1} = e^{-\frac{\pi}{2}}$ ,  $AD^{-2} = e^{-\frac{3\pi}{2}}$ ,  $AD^{-3} = e^{-\frac{5\pi}{2}}$  &c.

Deinde hæc Curva utrinque ad Axem excurrat ad distantias  $AB = AC = 1$ , ibique rectas Axi parallelas tanget in infinitis punctis  $E$  &  $F$ , quorum distantiae a  $B$  &  $C$  pariter progressionem geometricam constituent. Infinitis ergo flexibus Curva ad rectam  $BC$  accedet, atque tandem cum ea prorsus confundetur. Singularis ergo hujus Curvæ proprietas in hoc consistit, quod non recta infinita sed finita  $BC$  Curvæ sit Asymptota, quo ipso hujus Curvæ indoles ab algebraicis maxime distinguitur.

526. Ad Curvas transcendentes, quarum constructio angulos, vel solos vel cum Logarithmis conjunctos, requirit, referri quoque debent innumerabiles SPIRALIUM species.

TAB.  
XXVI  
Fig. 108

Respiciunt autem Spirales punctum quodpiam fixum  $C$  tanquam Centrum, circa quod plerumque infinitis spiris circumducuntur. Natura harum Curvarum commodissime explicatur per æquationem inter cujusque Curvæ puncti  $M$  a Centro  $C$  distantiam  $CM$  & angulum  $ACM$ , quem hæc recta  $CM$  cum recta positione data  $CA$  constituit. Sit ergo angulus  $ACM = s$ ; seu, sit  $s$  Arcus Circuli radio  $= 1$  descripti, qui sit anguli  $ACM$  mensura, ac ponatur recta  $CM = z$ . Quod, si nunc detur æquatio quæcunque inter variables  $s$  &  $z$ , Curva resultabit spiralis. Cum enim angulus  $ACM$ , præter  $s$ , infinitis modis exprimi queat; quoniam anguli  $2\pi + s$ ,  $4\pi + s$ ,  $6\pi + s$ , &c., item  $-2\pi + s$ ,  $-4\pi + s$ , &c., eandem positionem rectæ  $CM$  exhibent, his valoribus loco  $s$