LIB. II. quoque huic ab a ad e per ſpatium $ae = ba$ progrediendo, reſpondebit ex altera parte Arcus ſimilis & æqualis eE, huicque porro Arcus dD, ita ut hæc Curva habitura ſit infinitas partes ſimiles & æquales utrinque circa rectam CV diſpoſitas. Hujuſmodi ergo Curva algebraïca eſſe nequit.

363. Hoc ita ſe habet, ſi recta AB fuerit obliqua ad parallelas AR & BS, vel (quod eodem redit,) ſi in triangulo AOB latera AO & BO fuerint inæqualia. Sin autem fuerit $AO = BO$, tum ſimul recta AB erit perpendicularis ad parallelas AR & BS, & ad CV, quæ ſimul per O tranſibit. Hoc ergo caſu puncta b & a congruent. Et, quia portiones aA & bB non ſolum erunt æquales & ſimiles, ſed etiam utrinque circa rectam CV æqualiter diſpoſitæ, hæc recta CV erit Curvæ Diameter; qui caſus ad priores Curvas expoſitas Diametro gaudentes pertinent. Quocirca ad caſus in hoc Capite expoſitos referuntur omnes omnino Curvæ algebraïcæ, quæ duas pluresve partes habent ſimiles & æquales.

CAPUT XVI.

De inventione Curvarum ex datis Applicatarum proprietatibus.

364. Sint P & Q Functiones quæcunque rationales Abſciſſæ x, atque natura Curvæ exprimatur hac æquatione $yy - Py + Q = 0$. Hinc ergo unicuique Abſciſſæ x vel nulla vel duplex reſpondebit Applicata; erit autem harum duarum Applicatarum ſumma $= P$ & productum $= Q$. Si igitur P fuerit quantitas conſtans, ſumma binarum Applicatarum ſingulis Abſciſſis reſpondentium erit conſtans, atque Curva habebit Diametrum; hoc idem autem evenit ſi fuerit $P = a + nx$; tum enim Linea recta hac æquatione $z = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}nx$ contenta erit Diameter, in latiore ſignificatione

tione hoc nomine accepto, ita ut obliquitas non excludatur. Sin autem fuerit Q quantitas constans, tum rectangulum binarum Applicatarum erit ubique constans; Axis ergo a Curva nusquam secari poterit. At si sit $Q = \alpha + \beta x + \gamma xx$, hæcque expressio duos habeat Factores reales, Axis à Curva in duobus punctis trajicietur, atque Q erit multiplum rectanguli ex partibus Axis, ideoque rectangulum Applicatarum se habebit ad rectangulum partium Axis in constanti ratione. CAP. XVI.

365. Hæ igitur proprietates, quas supra Sectionibus conicis convenire observavimus, in innumerabiles alias Lineas curvas competunt. Sic, constans magnitudo rectangulorum ex binis Applicatis eidem Abscissæ respondentibus formatorum, qua Hyperbolam ad Asymtotam relatam gaudere vidimus, communis ipsi est cum omnibus Curvis hac æquatione $yy - Py \pm aa = 0$, contentis. Deinde, sumta recta EF Curvam in TAB. V. duobus punctis E & F secante pro Axe, cum in Sectionibus Fig. 19. conicis rectangulum $PM . PN$ ad rectangulum $PE . PF$ constantem habeat rationem, hæc proprietas Sectionibus conicis communis erit cum omnibus Curvis in hac æquatione $yy - Py + ax - nxx = 0$ contentis. Erit autem $PM . PN = PE . PF$ seu $pm . pn = Ep . pF$, si fuerit $yy - Py = ax - xx$. Hæc igitur proprietas, qua Circulum præditum esse ex Elementis constat, non solum ipsi communis est cum infinitis Curvis altiorum ordinum, sed etiam in reliquas Sectiones conicas cadit. Sit enim $P = b + nx$, atque æquatio $yy - nxy + xx = ax + by$, quæ est pro Circulo si $n = 0$, & angulus EPM rectus, complectetur quoque Ellipsin si nn minor quam 4, & Hyperbolam si nn major quam 4, atque Parabolam si $nn = 4$.

366. Hinc concludimus in omni Sectione conica $AEBF$ TAB. cujus Axes, seu Diametri principales, sint AB, EF, si binæ XIX. ducantur rectæ quæcunque pq & mn, quæ ad Axes princi- Fig. 77. pales sub angulo semirecto inclinentur, eas in h se mutuo ita esse secturas, ut sit $mh . nh = ph . qh$. Quod quidem manifestum est ex proprietatibus palmariis: si enim per Centrum

 C du-

LIB. II. C ducantur rectæ PQ & MN sub angulis semirectis ad Axes principales, erunt inter se æquales, ideoque $MC . NC = PC . QC$; quare, cum omnes rectæ his parallelæ eadem lege se secent, erit quoque $mh . nh = ph . qh$. Quin etiam hinc intelligitur, si modo rectæ MN & PQ ita ducantur, ut ad eundem Axem principalem æqualiter inclinentur, seu ut sit $PCA = NCA$, ob $CP = CN$, omnes rectas his parallelas se mutuo ita secare, ut rectangula partium sint æqualia, scilicet ut sit $mh . hn = ph . hq$.

TAB. XIX. Fig. 78. 367. His præmissis, contemplemur alias quæstiones circa binas Applicatas cuique Abscissæ respondentes ex æquatione $yy - Py + Q = 0$. Sit AP Abscissa $= x$, cui respondeant duæ Applicatæ PM, PN: ac primo quærantur omnes Curvæ hujus indolis ut sit $PM^2 + PN^2$ quantitas constans $= aa$. Cum sit $PM + PN = P$ & $PM . PN = Q$, erit $PM^2 + PN^2 = PP - 2Q$, & quæsito satisfiet si fuerit $PP - 2Q = aa$ seu $Q = \frac{PP - aa}{2}$; unde, pro Curvis desideratis obtinebitur ista æquatio $yy - Py + \frac{PP - aa}{2} = 0$. Quod si ponatur $P = 2nx$, prodibit Sectio conica proprietate proposita gaudens, $yy - 2nxy + 2nnxx - \frac{1}{2}aa = 0$, quæ æquatio est pro Ellipsi, Abscissis a Centro computatis.

TAB. XIX. Fig. 79. 368. Hinc sequitur non inelegans Ellipsium proprietas ista. Si circa Ellipseos duas quasvis Diametros conjugatas AB & EF describatur parallelogrammum $GHIK$ cujus latera Ellipsin tangent in punctis A, B, E, F, hujus parallelogrammi diagonales GK & HI omnes chordas MN alterutri Diametro EF parallelas ita secabunt in P & p, ut sit quadratorum summa $PM^2 + PN^2$ vel $pM^2 + pN^2$ perpetuo constans nempe æqualis $2CE^2$. Similique modo ducta chorda RS Diametro alteri AB parallela erit $PR^2 + PS^2 = \varpi R^2 + \varpi S^2 = 2CA^2$. Positis enim $CA = CB = a$, $CE = CF = b$, $CQ = t$, $QM = u$, erit $aauu + bbtt = aabb$. Jam est $a : b = CQ (t) :$ PQ,

PQ, & CP ad CQ ratione data, puta $m:1$. Quare, posita $CP = x$, $PM = y$, erit $x = mt$ & $y = u + \frac{bt}{a}$, seu $t = \frac{x}{m}$, & $u = y - \frac{bx}{ma}$, quibus valoribus substitutis orietur ista æquatio $aayy - \frac{2abxy}{m} + \frac{2bbxx}{mm} = aabb$. Sit $\frac{b}{ma} = n$, erit $yy - 2nxy + 2nnxx = bb$, quæ est æquatio ante inventa indicans esse $PM^2 + PN^2$ magnitudinem constantem. CAP. XVI.

369. Quærantur nunc Curvæ in quibus sit summa cuborum $PM^3 + PN^3$ perpetuo quantitas constans. Cum sit $PM + PN = P$, erit $PM^3 + PN^3 = P^3 - 3PQ$: quare, si ponatur $PM^3 + PN^3 = a^3$, erit $Q = \frac{P^3 - a^3}{3P}$: ideoque pro his Curvis erit æquatio generalis $yy - Py + \frac{1}{3} P^2 - \frac{a^3}{3P} = 0$, ubi pro P Functionem quamcunque rationalem ipsius x substituere licet. Simplicissima ergo Curva hanc habens proprietatem erit Linea tertii ordinis, quæ, ponendo $P = 3nx$, & $a = 3nb$, hac æquatione exprimetur TAB. XIX. Fig. 78.

$$xyy - 3nxxy + 3nnx^3 - 3nnb^3 = 0,$$

quæ pertinet ad Speciem secundam secundum enumerationem supra factam.

370. Simili modo, si effici debeat ut sit $PM^4 + PN^4$ constans, quia est $PM^4 + PN^4 = P^4 - 4P^2Q + 2QQ$, quantitas Q per P ita determinari debet ut sit $P^4 - 4P^2Q + 2QQ = a^4$ seu $Q = PP + \surd(\frac{1}{2}P^4 + \frac{1}{2}a^4)$. Quia vero tam P quam Q debent esse Functiones rationales seu uniformes ipsius x, ne y plures quam duos valores pro quavis Abscissa x induere possit, quantitas $\surd(\frac{1}{2}P^4 + \frac{1}{2}a^4)$ deberet esse rationalis; quod cum fieri nequeat, Functio Q semper erit biformis, ideoque Applicatam y reddet Functionem quadriformem.

 driformem.