obtineantur, aequatio proposita in integris nullo prorsus modo solui posset; quoties vero reuera est solubilis, omnes solutiones in integris per praecepta in praecc. tradita exhiberi poterunt.

218. Quando $bb - ac$ est numerus quadratus atque $M = 0$, omnes valores ipsorum p, q comprehensi erunt sub duabus huiusmodi formulis $p = \mathfrak{A}z$, $q = \mathfrak{B}z$; $p = \mathfrak{A}'z$, $q = \mathfrak{B}'z$, vbi z indefinite designat quemuis numerum integrum, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ vero sunt integri dati, quorum primus cum secundo, tertius cum quarto diuisorem communem non habent (art. 212). Omnes itaque valores integri ipsorum x, y ex formula prima oriundi contenti erunt sub formula [1]

$$x = \frac{\mathfrak{A}z + cd - be}{bb - ac},\quad y = \frac{\mathfrak{B}z + ae - bd}{bb - ac},$$

omnesque reliqui ex formula secunda oriundi sub hac [2]

$$x = \frac{\mathfrak{A}'z + cd - be}{bb - ac},\quad y = \frac{\mathfrak{B}'z + ae - bd}{bb - ac}.$$

Sed quoniam vtraque formula etiam valores fractos praebere potest (nisi $bb - ac = 1$); opus est vt eos valores ipsius z, qui tum ipsum x tum ipsum y integrum reddunt, a reliquis in vtraque formula separemus; attamen sufficit primam solam considerare, quum pro altera prorsus eadem methodus adhibenda sit.

Quoniam $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ inter se primi sunt, duos numeros $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ ita determinare licebit vt fiat $\mathfrak{a}\mathfrak{A} + \mathfrak{b}\mathfrak{B} = 1$. Quo facto habetur $(\mathfrak{a}x + \mathfrak{b}y)(bb -$

$ac) = z + \mathfrak{a}(cd - be) + \mathfrak{b}(ae - bd)$, vnde statim patet, omnes valores ipsius z qui valores integros ipsorum x, y producere possint, necessario numero $\mathfrak{a}(be - cd) + \mathfrak{b}(bd - ae)$ sec. mod. $bb - ac$ congruos, siue sub formula $(bb - ac)z' + \mathfrak{a}(be - cd) + \mathfrak{b}(bd - ae)$ contentos esse debere, designante z' indefinite numerum integrum. Hinc facile loco formulae [1] obtinemus sequentem

$$x = \mathfrak{A}z' + \mathfrak{b} \times \frac{\mathfrak{A}(bd - ae) - \mathfrak{B}(be - cd)}{bb - ac}$$

$$y = \mathfrak{B}z' - \mathfrak{a} \times \frac{\mathfrak{A}(bd - ae) - \mathfrak{B}(be - cd)}{bb - ac}$$

quam aut pro omnibus valoribus ipsius z' aut pro nullo valores integros ipsorum x, y praebere manifestum est, et quidem casus prior semper locum habebit quando $\mathfrak{A}(bd - ae)$ et $\mathfrak{B}(be - cd)$ sec. mod. $bb - ac$ sunt congrui, posterior quando sunt incongrui. — Prorsus eodem modo tractanda erit formula [2], solutionesque in integris (si quas praebere potest) a reliquis separandae.

219. Quando $bb - ac = 0$, forma $axx + 2bxy + cyy$ exhiberi poterit ita: $m(\alpha x + \beta y)^2$, vbi m, α, β sunt integri (art. 215.). Ponatur $\alpha x + \beta y = z$, transitque aequatio proposita in hanc: $mzz + 2dx + 2ey + f = 0$, vnde et ex $z = \alpha x + \beta y$, deducitur

$$x = \frac{\beta mzz + 2ez + \beta f}{2\alpha e - 2\beta d},\quad y = \frac{\alpha mzz + 2dz + \alpha f}{2\beta d - 2\alpha e}$$

Iam patet, nisi fuerit $\alpha e = \beta d$ (quem casum statim seorsim considerabimus), valores ipsorum x, y, ex his formulis deductos tribuendo ipsi z valorem quemcunque, aequationi propositae satisfacere; quare nihil superest, nisi vt eos valores ipsius z determinare doceamus ex quibus valores integri ipsorum x, y sequantur.

Quoniam $\alpha x + \beta y = z$, necessario pro z numeri *integri* tantum accipi possunt; praeterea vero manifestum est, si aliquis valor ipsius z tum ipsum x tum ipsum y integrum reddat, omnes valores ipsius z illi secundum modulum $2\alpha e - 2\beta d$ congruos itidem valores integros producere. Quodsi itaque pro z omnes numeri integri a 0 vsque ad $2\alpha e - 2\beta d - 1$ (quando $\alpha e - \beta d$ est positiuus) aut ad $2\beta d - 2\alpha e - 1$ (quando $\alpha e - \beta d$ est negatiuus) incl. substituuntur, et pro nullo horum valorum tum x tum y integri fiunt, nullus omnino valor ipsius z valores integros ipsorum x, y producet, aequatioque proposita in integris nullo modo poterit resolui; si vero quidam ex illis valoribus ipsius z ipsis x, y valores integros conciliant, puta hi ζ, ζ', ζ'' etc. (quos etiam per solutionem congruentiarum secundi gradus ex principiis sect. IV. inuenire licet); *omnes* solutiones prodibunt ponendo $z = (2\alpha e - 2\beta d)v + \zeta$, $z = (2\alpha e - 2\beta d)v + \zeta'$ etc., designante v indefinite omnes numeros integros.

220. Pro eo quem exclusimus casu, vbi $\alpha e = \beta d$, methodum peculiarem indagare oportet. Supponamus, α, β inter se primos esse, quod licere ex art. 215. I constat, eritque $\frac{d}{\alpha} =$