Numeri congrui residua minima habent eadem, incongrui diuersa.

6. *Si habentur quotcunque numeri A, B, C, etc. totidemque alii a, b, c, etc. illis secundum modulum quemcunque congrui, $A \equiv a$, $B \equiv b$, etc. erit $A + B + C +$ etc. $\equiv a + b + c +$ etc.*

Si $A \equiv a$, $B \equiv b$ erit $A - B \equiv a - b$.

7. *Si $A \equiv a$, erit quoque $kA \equiv ka$.*

Si k numerus positiuus, hoc est tantummodo casus particularis propos. art. praec., ponendo ibi $A = B = C$ etc., $a = b = c$ etc. Si k negatiuus, erit $-k$ positiuus, adeoque $-kA \equiv -ka$, vnde $kA \equiv ka$.

Si $A \equiv a$, $B \equiv b$, erit $AB \equiv ab$. Namque $AB \equiv Ab \equiv ba$.

8. *Si habentur quotcunque numeri A, B, C, etc. totidemque alii a, b, c etc. his congrui, $A \equiv a$, $B \equiv b$ etc. producta ex vtrisque erunt congrua, ABC etc. $\equiv abc$ etc.*

Ex artic. praec. $Ab \equiv ab$, et ob eandem rationem $ABC \equiv abc$; eodemque modo quotcunque alii factores accedere possunt.

Si omnes numeri A, B, C, etc. aequales assumuntur, nec non respondentes a, b, c, etc. habetur hoc theorema: *Si $A \equiv a$ et k integer positiuus, erit $A^k \equiv a^k$.*

9. *Sit X functio algebraica indeterminatae x, huius formae, $Ax^a + Bx^b + Cx^c +$ etc. designantibus A, B, C, etc. numeros integros quoscunque; a, b, c, etc. vero integros non negatiuos. Tum si indeterminatae x valores secundum modulum quemcunque*

congrui tribuuntur, valores functionis X inde prodeuntes congrui erunt.

Sint f, g, valores congrui ipsius x. Tum ex art. praec. $f^a \equiv g^a$ et $Af^a \equiv Ag^a$, eodemque modo $Bf^b \equiv Bg^b$ etc. Hinc $Af^a + Bf^b + Cf^c +$ etc. $\equiv Ag^a + Bg^b + Cg^c +$ etc. *Q. E. D.*

Ceterum facile intelligitur, quomodo hoc theorema ad functiones plurium indeterminatarum extendi possit.

10. Quodsi igitur pro x omnes numeri integri consecutiui substituuntur, valoresque functionis X ad residua minima reducuntur, haec seriem constituent, in qua post interuallum m terminorum (designante m modulum) iidem termini iterum recurrunt; siue haec series ex *periodo* m terminorum infinities repetita, erit formata. Sit e. g. $X = x^3 - 8x + 6$ et $m = 5$; tum pro $x = 0, 1, 2, 3$ etc., valores ipsius X haec residua minima positiua suppeditant, 1, 4, 3, 4, 3, 1, 4, etc., vbi quina priora 1, 4, 3, 4, 3 in infinitum repetuntur; atque si series retro continuatur, i. e. ipsi x valores negatiui tribuuntur, eadem periodus ordine terminorum inuerso prodit: vnde manifestum est, terminos alios quam qui hanc periodum constituant in tota serie locum habere non posse.

11. In hoc igitur exemplo X neque $\equiv 0$, neque $\equiv 2$ (mod. 5) fieri potest, multoque minus $= 0$, aut $= 2$. Vnde sequitur, aequationes $x^3 - 8x + 6 = 0$, et $x^3 - 8x + 4 = 0$ per numeros integros et proin, vti notum est, per numeros rationales solui non posse. Ge-

neraliter perspicuum est, aequationem $X = 0$, quando X functio incognitae x, huius formae, $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \text{etc.} + N$; A, B, C, etc. integri, atque n integer positiuus, (ad quam formam omnes aequationes algebraicas reduci posse constat) radicem rationalem nullam habere, si congruentiae $X \equiv 0$ secundum vllum modulum satisfieri nequeat. Sed hoc criterium, quod hic sponte se nobis obtulit, in *sect. VIII* fusius pertractabitur. Poterit certe ex hoc specimine notiuncula qualiscunque de harum inuestigationum vtilitate efformari.

12. Theorematibus in hoc capite traditis complura quae in arithmeticis doceri solent innituntur, e. g. regulae ad explorandam diuisibilitatem numeri propositi per 9, 11 aut alios numeros. *Secundum modulum* 9 omnes numeri 10 potestates vnitati sunt congruae: quare si numerus propositus habet formam $a + 10b + 100c + \text{etc.}$, idem residuum minimum secundum modulum 9 dabit, quod $a + b + c + \text{etc.}$ Hinc manifestum est, si figurae singulae numeri decadice expressi sine respectu loci quem occupant addantur, summam hanc numerumque propositum eadem residua minima praebere, adeoque hunc per 9 diuidi posse, si illa per 9 sit diuisibilis, et contra. Idem etiam de diuisore 3 tenendum. Quoniam *secundum modulum* 11, $100 \equiv 1$ erit generaliter $10^{2k} \equiv 1$, $10^{2k+1} \equiv 10 \equiv -1$, et numerus formae $a + 10b + 100c + \text{etc.}$ secundum modulum 11 idem residuum minimum dabit quod $a - b + c$ etc.; vnde regula nota protinus deriuatur. Ex eo-