tivus vel negativus, tam diversam Linearum secundi ordinis indolem producat, ut hinc merito duo diversa genera constituantur: si ponatur $\gamma = 0$, qui valor inter affirmativos & negativos medium tenet locum, Curva quoque hinc resultans mediam quandam speciem inter Hyperbolas atque Ellipses constituet, quæ PARABOLA vocatur, cujus ergo natura hac exprimetur æquatione $yy = \alpha + \beta x$. Hic perinde est sive β fuerit quantitas affirmativa sive negativa, quoniam indoles Curvæ non mutatur sumta Abscissa x negativa. Sit igitur β quantitas affirmativa, atque manifestum est, crescente Abscissa x in infinitum, Applicatam y quoque infinitam fore tam affirmativam quam negativam, ex quo Parabola duos habebit ramos in infinitum excurrentes, plures autem duobus habere non poterit, quia posito $x = -\infty$, Applicatæ y valor fit imaginarius. Cap. VI.

137. Habemus ergo tres Linearum secundi ordinis species, Ellipsin, Parabolam, & Hyperbolam, quæ a se invicem tantopere discrepant, ut eas inter se confundere omnino non liceat. Discrimen enim essentiale in numero ramorum in infinitum excurrentium consistit; Ellipsis enim nullam portionem habet in infinitum abeuntem, sed tota in spatio finito includitur. Parabola vero duos habet ramos in infinitum excurrentes: & Hyperbola quatuor. Quare, cum in Capite præcedente proprietates Sectionum conicarum in genere simus contemplati, nunc quibus proprietatibus quæque species sit prædita, videamus.

138. Incipiamus ab Ellipsi, cujus æquatio est hæc $yy = \alpha + \beta x - \gamma xx$, sumtis Abscissis in Diametro orthogonali. Quoniam vero initium Abscissarum ab arbitrio nostro pendet, si id removeamus intervallo $\frac{\beta}{2\gamma}$, orietur æquatio hujus formæ $yy = \alpha - \gamma xx$, in qua Abscissæ a Centro figuræ capiuntur. Sit igitur C Centrum & AB Diameter orthogonalis, atque erit Abscissa $CP = x$, & Applicata $PM = y$. Fiet ergo Tab. VIII. Fig. 31.

 $y = 0$,

Lib. II. $y=0$, sumta $x=\pm\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$ &, si x limites hos $+\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$, $-\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$ transgrediatur Applicata y fiet imaginaria; quod indicio est totam Curvam intra istos limites contineri. Erit ergo $CA = CB = \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$: tum facto $x=0$, fiet $CD = CE = \sqrt{\alpha}$. Ponatur ergo Semidiameter seu Semiaxis principalis $CA = CB = a$, & Semiaxis conjugatus $CD = CE = b$, erit $\alpha = bb$ & $\gamma = \frac{bb}{aa}$. Unde pro Ellipsi ista orietur æquatio $yy = bb - \frac{bbxx}{aa} = \frac{bb}{aa}(aa - xx)$.

139. Quando isti Semiaxes conjugati a & b fiunt inter se æquales, tum Ellipsis abibit in Circulum ob $yy = aa - xx$, seu $yy + xx = aa$; erit enim $CM = \sqrt{(xx+yy)} = a$, ideoque omnia Curvæ puncta M æqualiter a Centro C erunt remota, quæ est proprietas Circuli. Sin autem Semiaxes a & b inter se fuerint inæquales, tum Curva erit oblonga, nempe erit vel AB major quam DE vel DE major quam AB. Quia vero Axes conjugati AB & DE inter se commutari possunt, atque perinde est in utro Abscissas capiamus, ponamus AB esse Axem majorem, seu a majorem quam b; atque in hoc Axe existent Foci Ellipsis F & G sumendo $CF = CG = \sqrt{(aa - bb)}$, Semiparameter vero, seu Semilatus rectum Ellipsis erit $= \frac{bb}{a}$, quæ exprimit magnitudinem Applicatæ in alterutro Foco F vel G erectæ.

140. Ad Curvæ punctum M ducantur ex utroque Foco rectæ FM & GM, eritque, uti supra vidimus, $FM = AC - \frac{CF.CP}{AC} = a - \frac{x\sqrt{(aa-bb)}}{a}$, & $GM = a + \frac{x\sqrt{(aa-bb)}}{a}$: unde fit $FM + GM = 2a$. Quare, si ad quodvis Curvæ punctum M ex ambobus Focis ducantur rectæ FM & GM, earum summa semper æquabitur Axi majori $AB =$

$AB = 2a$; ex quo cum insignis Focorum proprietas perspicitur, tum modus facilis Ellipsin mechanice describendi colligitur. Cap. VI.

141. In puncto M ducatur tangens TMt, quæ Axibus occurrat in punctis T & t; eritque, ut supra demonstravimus, $CP : CA = CA : CT$; unde $CT = \frac{aa}{x}$: similique modo, permutatis Coordinatis, $Ct = \frac{bb}{y}$. Erit ergo $TP = \frac{aa}{x} - x$, $TF = \frac{aa}{x} - \sqrt{(aa - bb)}$, & $TA = \frac{aa}{x} - a$. Fiet itaque $TP = \frac{aa - xx}{x} = \frac{aayy}{bbx}$, & $TM = \frac{y\sqrt{(b^4xx + a^4yy)}}{bbx}$, hincque *tang.* $CTM = \frac{bbx}{aay}$; *sin.* $CTM = \frac{bbx}{\sqrt{(b^4xx + a^4yy)}}$ & *cos.* $CTM = \frac{aay}{\sqrt{(b^4xx + a^4yy)}}$. Quare, si ad Axem in A normalis erigatur AV, quæ Curvam simul tanget, erit $AV = \frac{a(a - x)}{x} \cdot \frac{bbx}{aay} = \frac{bb(a - x)}{ay} = b\sqrt{\frac{a - x}{a + x}}$ ob $ay = b\sqrt{(aa - xx)}$.

142. Cum sit $FT = \frac{aa - x\sqrt{(aa - bb)}}{x}$ & $FM = \frac{aa - x\sqrt{(aa - bb)}}{a}$ erit $FT : FM = a : x$. Simili vero modo ob $GT = \frac{aa + x\sqrt{(aa - bb)}}{x}$ & $GM = \frac{aa + x\sqrt{(aa - bb)}}{a}$ erit $GT : GM = a : x$; unde erit $FT : FM = GT : GM$. At est $FT : FM =$ *sin.* FMT : *sin.* CTM & $GT : GM =$ *sin.* GMt : *sin.* CTM, quam ob rem erit *sin.* $FMT =$ *sin.* GMt, ideoque angulus $FMT =$ angulo GMt. Ambæ ergo rectæ ex Focis ad punctum Curvæ quodvis M ductæ æqualiter inclinantur ad tangentem Curvæ in illo puncto M, quæ est maxime principalis Foctorum proprietas.

143. Cum sit $GT : GM = a : x$, ob $CT = \frac{aa}{x}$ erit quoque

LIB. II. que $CT : CA = a : x$; unde $GT : GM = CT : CA$, quare si ex Centro C rectæ GM parallela ducatur CS, tangenti in S occurrens, erit $CS = CA = a$: eodem autem modo si ex C rectæ FM parallela ducatur ad tangentem erit ea pariter $= CA = a$. Cum autem sit $TM = \frac{y}{bbx} \sqrt{(b^4xx + a^4yy)}$, erit, ob $aayy = aabb - bbxx$, $TM = \frac{y}{bx} \sqrt{(a^4 - xx)(aa - bb))}$: at est $FT.GT = \frac{a^4 - xx(aa - bb)}{xx}$; unde $TM = \frac{y}{b} \sqrt{FT.GT}$. Quare, ob $TG : TC = TM : TS$, erit $TS = \frac{TM.CT}{TG}$, ideoque $TS = \frac{y.CT}{b} \sqrt{\frac{FT}{GT}} = \frac{y.CT.FT}{b\sqrt{FT.GT}} = \frac{yy.CT.FT}{bb.TM}$. Deinde est $PT = \frac{aayy}{bbx} = \frac{CT.yy}{bb}$, ergo $TS = \frac{PT.FT}{TM}$, ideoque $TM : PT = FT : TS$; unde intelligitur triangula TMP & TFS esse similia, ideoque rectam FS ad tangentem ex Foco F esse normalem. Erit vero $SV = \frac{AF.MV}{GM}$, quod ex his expressionibus eruere licet.

144. Quod si ergo ex alterutro Foco F in tangentem ducatur perpendiculum FS, & ad punctum S ex Centro C recta CS jungatur, erit hæc CS perpetuo semiaxi majori $AC = a$ æqualis. Erit vero ob $TM : y = TF : FS$, $FS = \frac{y.TF}{TM} = \frac{b.TF}{\sqrt{FT\ GT}} = b\sqrt{\frac{FT}{GT}}$, ergo $GT : FT = GM : FM = CD^2 : FS^2$; perpendiculum vero ex altero Foco in tangentem demissum erit $= b\sqrt{\frac{GT}{FT}}$, quare inter hæc perpendicula erit Semiaxis minor $CD = b$ media proportionalis. Demittatur nunc quoque ex Centro C in tangentem perpendiculum CQ erit $TF : FS = CT : CQ$ ergo $CQ = \frac{b.CT}{\sqrt{FT.\ GT}} =$

$bx.CT$

$\frac{bx.CT}{a\surd FM.GM} = \frac{ab}{\surd FM.GM}$, unde $CQ - FS = \frac{b.CF}{\surd FT.GT} = CX$, ducta FX tangenti parallela. Hinc erit $CQ - CX = \frac{b.TF}{\surd FT.GT}$ & $CQ + CX = \frac{b.TG}{\surd FT.GT}$, unde $CQ^2 - CX^2 = bb$ & $CX = \surd(CQ^2 - bb)$: ex dato ergo Axe minori, in perpendiculo CQ reperitur punctum X unde normalis educta per Focum F transibit.

145. His Focorum proprietatibus expositis, consideremus duas quasvis Diametros conjugatas. Erit autem CM Semidiameter, cujus conjugata reperietur si tangenti TM ex Centro parallela ducatur CK. Ponatur $CM = p$, $CK = q$, & angulus $MCK = CMT = s$, erit primo $pp + qq = aa + bb$ & secundo $pq.\,sin.\,s = ab$, uti supra vidimus. At vero erit $pp = xx + yy = bb + \frac{(aa - bb)xx}{aa}$ & $qq = aa + bb - pp = aa - \frac{(aa - bb)xx}{aa} = FM.GM$, eodemque modo $pp = FK.GK$. Deinde, cum sit $CQ = \frac{ab}{\surd FM.GM}$, erit $sin.\,CMQ = sin.\,s = \frac{ab}{p\surd FM.GM}$. Denique erit $TM : TP = \frac{y}{b}\surd FT.GT, \frac{aayy}{bbx} = \surd FM.GM = \frac{ay}{b} = CK : CR$, unde $CR = \frac{ay}{b}$, & $KR = \frac{bx}{a}$, ideoque $CR.KR = CP.PM$. Denique erit $sin.\,FMS = \frac{b}{\surd GM.FM} = \frac{b}{q}$: quia porro est $x = CP\, \frac{a\surd(pp - bb)}{\surd(aa - bb)}$ & $y = \frac{b\surd(aa - pp)}{\surd(aa - bb)} = PM$, atque $CR = \frac{a\surd(aa - pp)}{\surd(aa - bb)}$ & $KR = \frac{b\surd(pp - bb)}{\surd(aa - bb)}$, erit $tang.\,ACM = \frac{y}{x}$, & $tang.\,2ACM = \frac{2yx}{xx - yy} = \frac{2ab\surd(aa - pp)(pp - bb)}{(aa + bb)pp - 2aabb}$. At est $ab = pq\,sin.\,s$, $aa + bb = pp + qq$,

&