LIB. II. pm rationem tenebunt Parametrorum ſed etiam omnes aliæ Lineæ ſimiliter ductæ, quin etiam Curvarum arcus AM & am erunt ut AC & ac. Tum vero etiam Areæ ſimiles APM & apm erunt in ratione duplicata, ſeu ut AC^2 ad ac^2. Atque, ſi ſumantur duo puncta homologa O & o quæcunque, ita ut ſit $AO : ao = AC : ac$, ex iiſque ſub æqualibus angulis AOM, aom ad Curvas rectæ ducantur OM & om, erit quoque $OM : om = AC : ac$. Ob ſimilitudinem denique etiam Tangentes in punctis homologis M & m ad Axem æqualiter inclinabuntur, atque adeo radii oſculi ibidem tenebunt rationem Parametrorum AC & ac.

439. Hinc patet omnes Circulos eſſe figuras ſimiles, quæ continentur æquatione $yy = 2ax - xx$; parique modo omnes Curvæ æquatione $yy = ax$ contentæ, hoc eſt omnes Parabolæ, erunt inter ſe figuræ ſimiles. Ex hujuſmodi autem æquationibus, quibus Curvas ſimiles contineri vidimus, quia Coordinatæ x & y cum Parametro a ubique eundem conſtituunt dimenſionum numerum, ſi valor ipſius y definiatur, reperietur is æqualis Functioni homogeneæ unius dimenſionis ipſarum a & x. Viciſſim ergo, ſi denotet P Functionem homogeneam unius dimenſionis ipſarum a & x, æquatio $y = P$ innumerabiles continebit Curvas ſimiles, quæ oriuntur, ſi Parametro a ſucceſſive alii atque alii valores tribuantur. Simili autem modo ex hujuſmodi æquatione pro Curvis ſimilibus Abſciſſa x æquabitur Functioni unius dimenſionis ipſarum a & y, atque ipſa Parameter a æqualis erit Functioni unius dimenſionis ipſarum x & y.

440. Data autem Curva quacunque AMB, infinitæ aliæ ipſi ſimiles amb per facilem praxin deſcribi poſſunt. Sumatur enim ratio quæcunque, quam latera homologa Curvæ datæ & deſcribendæ inter ſe tenere debeant, quæ ſit $1 : n$; atque, ſi Curva data AMB referatur ad Axem AB per Coordinatas normales AP & PM, ſuper Axe ſimili ab capiatur Abſciſſa ap, ut ſit $AP : ap = 1 : n$, & ex p erigatur Applicata normalis pm, ut ſit pariter $PM : pm = 1 : n$, eritque punctum m in Curva

Curva ſimili amb, ita ut puncta M & m ſint homologa. Vel, deſcriptio quoque ex puncto quocunque fixo O abſolvi poterit; ſumto enim in Curva deſcribenda puncto ſimili fixo o, fiat perpetuo angulus aom æqualis angulo AOM, & abſcindatur om, ut ſit $OM : om = 1 : n$, eritque punctum m pariter in Curva ſimili amb. Hoc itaque modo, pro quavis ratione $1 : n$ ad arbitrium aſſumta, Curva ſimilis deſcribi poterit. Solent autem in hunc finem confici inſtrumenta mechanica, quorum ope figuræ cujuſcunque magnitudinis, quæ ſint datæ ſimiles, delineari poſſunt. CAP. XVIII.

441. Quod ſi igitur natura Curvæ propoſitæ AM exprimatur æquatione quacunque inter Coordinatas $AP = x$, & $PM = y$, inde facili negotio reperietur æquatio pro Curva ſimili am. Sit enim Abſciſſa homologa $ap = X$ & Applicata $pm = Y$; erit ex conſtructione $x : X = 1 : n$ & $y : Y = 1 : n$; unde fit $x = \frac{X}{n}$ & $y = \frac{Y}{n}$. Hi ergo valores in æquatione in x & y data ſubſtituti producent æquationem inter X & Y pro Curvis ſimilibus. Si igitur in hac nova æquatione ſolæ Coordinatæ X & Y cum littera n dimenſiones conſtituere cenſeantur, numerus dimenſionum ubique erit nullus; vel, ſi æquatio, ad fractiones tollendas, multiplicetur per quampiam poteſtatem ipſius n, orietur æquatio, in qua tres hæ quantitates X, Y, & n ubique eundem dimenſionum numerum producant. Supra autem vidimus in omni æquatione pro Curvis ſimilibus ambas Coordinatas cum ea conſtante, cujus variatione Curvæ ſimiles exiſtunt, ubique eundem dimenſionum numerum conſtituere; quod igitur eſt criterium æquationum Curvas ſimiles continentium.

442. Quemadmodum in Curvis ſimilibus Abſciſſæ & Applicatæ homologæ in eadem ratione ſive augentur ſive diminuuntur; ita, ſi Abſciſſæ aliam ſequantur rationem, aliam vero Applicatæ, Curvæ non amplius orientur ſimiles. Verum tamen, quia Curvæ hoc modo ortæ inter ſe quandam Affinitatem tenent, has Curvas *affines* vocabimus: complectitur ergo

Affinitas

LIB. II. TAB. XXI. *Fig.* 88. & 89.

Affinitas ſub ſe ſimilitudinem tanquam ſpeciem: quippe Curvæ affines in ſimiles abeunt, ſi ambæ illæ rationes, quas Abſciſſæ & Applicatæ ſeorſim ſequuntur, evadant æquales. Ex Curva ergo quacunque data AMB innumerabiles Curvæ affines amb reperientur hoc modo; ſumatur Abſciſſa ap, ita ut ſit $AP : ap = 1 : m$; tum conſtituatur Applicata pm, ut ſit $PM : pm = 1 : n$; ſicque, mutando harum rationum $1 : m$ & $1 : n$, vel alterutram vel utramque, innumerabiles prodibunt Curvæ, quæ primæ AMB erunt affines.

443. Exprimatur natura Curvæ datæ AMB æquatione quacunque inter Coordinatas orthogonales $AP = x$, & $PM = y$; atque in Curva affini amb modo præcedente deſcripta ponatur Abſciſſa $ap = X$, & Applicata $pm = Y$, ob $x : X = 1 : m$, & $y : Y = 1 : n$, erit $x = \frac{X}{m}$ & $y = \frac{Y}{n}$. Quod ſi ergo hi valores in æquatione inter x & y data ſubſtituantur, proveniet æquatio generalis pro Curvis affinibus inter X & Y. Ad hujus æquationis naturam penitius evolvendam, ponamus æquationem pro Curva data AMB ita eſſe conformatam, ut Applicata y æquetur Functioni cuicunque ipſius x, quæ ſit $= P$, ſeu eſſe $y = P$. Si igitur in P loco x ſubſtituatur $\frac{X}{m}$, fiet P Functio nullius dimenſionis ipſarum X & m; ideoque æquatio generalis pro Curvis affinibus ita erit comparata, ut $\frac{Y}{n}$ æquetur Functioni nullius dimenſionis ipſarum X & m; ſeu, quod eodem redit, Functio nullius dimenſionis ipſarum Y & n æquabitur Functioni nullius dimenſionis ipſarum X & m.

444. Diſcrimen autem inter Curvas ſimiles & affines hoc potiſſimum eſt notandum, quod Curvæ, quæ ſunt ſimiles reſpectu unius Axis vel puncti fixi, eædem ſimiles ſint futuræ reſpectu aliorum quorumvis Axium ſeu punctorum homologorum. Curvæ autem, quæ tantum ſunt affines, tales tantum ſunt reſpectu eorum Axium, ad quos referuntur, neque pro lubitu alii Axes, ſeu puncta homologa, in ipſis dantur, ad

quæ

quæ affinitas referri poſſit. Ceterum vero, notandum eſt, uti omnes Curvæ ſimiles ad eundem ordinem, atque adeo ad idem Linearum Genus referuntur, ita etiam Curvas affines ſemper in eodem Linearum ordine eodemque genere comprehendi. Quæ ut clarius percipiantur, ſimilitudinem atque affinitatem nonnullis exemplis Curvarum notiorum illuſtraſſe conveniet. CAP. XVIII.

445. Sit igitur Curva data Circulus ad Diametrum relatus, cujus natura exprimitur æquatione $yy = 2cx - xx$. Ponatur $x = \frac{X}{n}$ & $y = \frac{Y}{n}$, atque æquatio inter X & Y reſultans complectetur omnes Curvas ſimiles; erit autem $\frac{Y^2}{n^2} = \frac{2cX}{n} - \frac{XX}{nn}$, ſeu, $Y^2 = 2ncX - XX$; ex qua patet omnes Curvas Circulo ſimiles quoque eſſe Circulos, quorum Diametri $2nc$ utcunque diſcrepent. Ad Curvas autem Circulo affines inveniendas ponatur $x = \frac{X}{m}$ & $y = \frac{Y}{n}$, prodibitque $\frac{Y^2}{nn} = \frac{2cX}{m} - \frac{XX}{mm}$, ſeu $m^2Y^2 = 2mn^2cX - nnXX$, quæ eſt æquatio generalis pro Ellipſi ad alterum Axem principalem relata; unde intelligitur omnes Ellipſes eſſe Lineas curvas Circulo affines. Quare, omnes Ellipſes ſunt quoque Curvæ inter ſe affines. Simili autem modo intelligetur, omnes Hyperbolas eſſe Curvas inter ſe affines. Ellipſes autem, atque etiam Hyperbolæ, in quibus eadem ratio inter binos Axes principales intercedit, Curvæ erunt inter ſe ſimiles.

446. Quod ad Parabolam æquatione $yy = cx$ expreſſam attinet, perſpicuum quidem eſt omnes Curvas ipſi ſimiles quoque eſſe Parabolas, atque adeo omnes Parabolas eſſe Curvas inter ſe ſimiles. Quod ſi autem ad Curvas Parabolæ affines ſpectemus, poſito $y = \frac{Y}{n}$ & $x = \frac{X}{m}$, prodibit æquatio $Y^2 = \frac{n^2c}{m}X$, quæ cum etiam ſit pro Parabolis, manifeſtum eſt,