manifestum est ejusdem Curvæ curvaturam in M convenire cum curvatura Circuli, cujus radius sit $= \frac{(A^2 + B^2)\sqrt{(A^2 + B^2)}}{2(A^2E - ABD + B^2C)}$. Cap. XIV.

Hæc ergo expressio dat radium Circuli osculatoris, atque iste radius quoque vocari solet *Radius osculi*; sæpe etiam *radius curvedinis* seu *curvaturæ* appellatur. Ex æquatione ergo inter t & u, quam ex æquatione inter x & y proposita elicuimus, statim definiri potest radius osculi Curvæ in puncto M, seu radius Circuli osculantis Curvam in M. In æquatione enim inter t & u rejiciantur termini, in quibus t & u plures duabus dimensiones obtinent, atque ex æquatione, quæ erit hujus formæ

$$0 = At + Bu + Ctt + Dtu + Euu,$$

invenietur radius osculi $= \frac{(A^2 + B^2)\sqrt{(A^2 + B^2)}}{2(A^2E - ABD + B^2C)}$.

311. Quoniam vero signum radicale $\sqrt{(A^2 + B^2)}$ ambiguitatem signi involvit, incertum est utrum ista expressio sit affirmativa an negativa, scilicet utrum concavitas Curvæ punctum N respiciat, an convexitas. Ad hoc dubium tollendum quæri debet utrum Curvæ punctum m intra Tangentem $M\mu$ versus Axem AN sit positum, an vero extra Tangentem cadat. Priori casu Curva versus N erit concava, atque Centrum Circuli osculantis in rectæ MN portionem versus Axem protensam incidet; posteriori casu vero in portionem rectæ NM ultra M productam. Omnis ergo dubitatio evanescet si inquiratur, utrum qm sit minor quam $q\mu$, an major; priori enim casu Curva versus N erit concava, posteriori vero convexa.

312. Est vero $q\mu = \frac{-At}{B}$, & $qm = u$, quare videndum est utrum sit $\frac{-At}{B}$, major minorve quam u. Quia igitur $m\mu$ est Lineola quam minima, ponatur $m\mu = w$, erit-

LIB. II. que $u = \frac{-At}{B} - w$; unde, facta substitutione, fit $o =$ $-Bw + Ctt - \frac{ADtt}{B} - Dtw + \frac{A^2Ett}{BB} + \frac{2AEtw}{B} + Ew^2$; ubi, ob w præ t minimum, termini tw & w^2 evanescunt. Hinc fit $w = \frac{(B^2C - ABD + A^2E)tt}{B^3}$. Quod si ergo w fuerit quantitas affirmativa, quod evenit si $\frac{B^2C - ABD + A^2E}{B^3}$, seu $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{B}$ fuerit quantitas affirmativa, tum Curva erit concava versus N; sin autem $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{B}$ fuerit quantitas negativa, Curvæ convexitas punctum N respiciet.

TAB. XV. Fig. 57. 313. Quo hæc clariora reddantur, diversi casus qui occurrere possunt, seorsim sunt evolvendi. Sit igitur primum $B = o$, quo casu ipsa Applicata PM erit Tangens Curvæ Mm, & radius osculi erit $= \frac{A}{2E}$. Utrum autem Curva sit concava versus R, uti Figura præsentat, an convexa, ex æquatione $o = At + Ctt + Dtu + Euu$ intelligitur. Cum enim sit $Mq = t$ & $qm = u$, ob t infinities minus quam u, termini tt & tu præ uu evanescent, eritque $At + Euu = o$; ex qua æquatione intelligitur, si coëfficientes A & E habeant contraria signa, seu si $\frac{E}{A}$ fuerit quantitas negativa, tum Curvam fore concavam versus R. At, si coëfficientes A & E habeant paria signa, & $\frac{E}{A}$ fuerit quantitas affirmativa, tum Curva ad alteram Tangentis partem erit sita; Abscissa enim Mq statui debet negativa quo Applicata qm respondeat realis.

TAB. XV. Fig. 55. 314. Sit nunc Tangens $M\mu$ inclinata ad Axem AP seu ipsi parallelam, ita ut angulus $RM\mu$ sit acutus, & normalis MN Axem in N ultra P secet: quo casu Abscissis t respondebunt Applicatæ u affirmativæ; unde coëfficientes A & B signa

signa habebunt disparia, & fractio $\frac{A}{B}$ erit negativa. De hoc casu jam ante vidimus Curvam fore concavam versus N, si fuerit $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{B}$ quantitas affirmativa; vel, cum $\frac{B}{A}$ sit quantitas negativa, si fuerit $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{A}$ quantitas negativa. Sin autem fuerit $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{B}$ quantitas negativa, seu $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{A}$ quantitas affirmativa, tum Curva versus N convexitatem obvertet. Utroque vero casu radius osculi erit $= \frac{(A^2 + B^2)\sqrt{(A^2 + B^2)}}{2(A^2E - ABD + B^2C)}$. Cap. XIV.

315. Sit nunc $A = 0$, quo casu recta MR Axi parallela simul erit Curvæ Tangens, & u infinities minor quam t; unde erit $0 = Bu + Ctt$. Quare, si B & C habeant æqualia signa, seu si BC fuerit quantitas affirmativa, tum u habere debet valorem negativum; ideoque Curva erit concava versus punctum P, in quod N incidit, quod ipsum regula superior, facto $A = 0$, ostendit; radius osculi vero erit $= \frac{B}{2C}$. Hæc autem eadem regula, quæ supra est data, valet, si Tangens MT ultra P cum Axe concurrat; tum enim pariter Curva versus N erit vel concava vel convexa, prout hæc expressio $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{B}$, fuerit vel affirmativa vel negativa, eritque radius osculi ut ante $= \frac{(A^2 + B^2)\sqrt{(A^2 + B^2)}}{2(A^2E - ABD + B^2C)}$. Tab. XV. Fig. 58. Tab. XV. Fig. 59.

316. Sit proposita Ellipsis, seu saltem ejus quadrans DMC, cujus Centrum A, alter semiaxis transversus $AD = a$, alter semiaxis conjugatus $AC = b$. Sumtis ergo Abscissis x in Axe AD a Centro A, habebibur hæc æquatio pro Ellipsi $aayy + bbxx = aabb$. Sumta jam quapiam Abscissa $AP = p$, & posita Applicata $PM = q$, erit $aaqq + bbpp = aabb$. Ponatur jam $x = p + t$, & $y = q + u$, erit $aaqq + 2aaqu +$ Tab. XV. Fig. 60.

LIB. II. $aauu + bbpp + 2bbpt + bbtt = aabb$, seu $2bbpt + 2aaqu + bbtt + aauu = 0$. Primum ergo, ob coëfficientes ipsarum t & u, normalis MN citra P cum Axe concurrit: eritque $PM : PN = B : A = aaq : bbp$ & $PN = \frac{bbp}{aa}$, ob $A = 2bbp$ & $B = aaq$. Præterea vero, ob $C = bb$, $D = 0$ & $E = aa$, erit $\frac{AAE - ABD + B^2C}{B} = \frac{4aabb(aaqq + bbpp)}{2aaq} = \frac{4a^4b^4}{2aaq}$; ideoque quantitas affirmativa, qua indicatur Curvam versus N esse concavam.

317. Ad ipsum jam radium osculi inveniendum, est $A^2 + B^2 = 4(a^4qq + b^4pp)$, & $A^2E - ABD + B^2C = 4a^4b^4$; unde radius osculi erit $= \frac{(a^4qq + b^4pp)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$. At est $MN = \sqrt{(qq + \frac{b^4pp}{a^4})}$, unde $\sqrt{(a^4qq + b^4pp)} = aa.MN$, ideoque radius osculi $= \frac{a^2.MN^3}{b^4}$. Si in normalem MN productam ex Centro A ducatur perpendiculum AO, erit, ob $AN = p - \frac{bbp}{aa}$ & triangula MNP & ANO similia, $NO = \frac{aabbpp - b^4pp}{a^4.MN}$ & $MO = NO + MN = \frac{aaqq + bbpp}{aa.MN} = \frac{bb}{MN}$; unde $MN = \frac{bb}{MO}$, hincque radius osculi $= \frac{aabb}{MO^3}$, quæ expressio ad utrumque Axem AD & AC æque est accommodata.

318. Invento autem pro quovis Curvæ loco radio osculi, natura Curvæ satis clare perspicitur. Si enim portio Curvæ in partes plurimas quam minimas dividatur, unaquæque particula haberi potest pro Arculo Circuli, cujus radius erit ipse radius osculi in eo loco. Hinc vero etiam descriptio Curvæ per plurima puncta multo accuratius absolvetur. Postquam enim

enim plura notata fuerint puncta, per quæ Curva transeat, si pro his singulis punctis primo quærantur Tangentes, hincque porro normales, atque tum radii osculi, portiunculæ Curvæ intra puncta inventa sitæ ope circini poterunt describi. Hocque modo eo accuratius vera Curvæ figura exprimetur, quo propiora fuerint puncta primum notata. Cap. XIV.

319. Quoniam igitur portiuncula Curvæ ad M cum Arculo Circuli radio osculi descripti congruit, non solum elementum Mm, sed etiam præcedens Mn eadem curvatura erit præditum. Cum enim natura minimæ Curvæ portionis Mm exprimatur hujusmodi æquatione, $ss = \alpha r$ inter Coordinatas $Mr = r$ & $rm = s$, unicuique Abscissæ minimæ $Mr = r$, ex æquatione duplex respondebit Applicata s altera affirmativa, altera negativa: ideoque Curva versus n æque ac versus m continuabitur. Ubicunque ergo radius osculi, qui est $= \frac{1}{2}\alpha$, finitam habet magnitudinem, ibi curvatura utrinque saltem per minimum spatiolum erit uniformis. Neque ergo his casibus Curva ex M subito, formata Cuspide, reflectetur, neque mutata curvatura, portio Mn convexitatem versus N obvertere poterit, dum altera Mm est concava versus N; cujusmodi curvaturæ immutatio vocari solet INFLEXIO, vel *punctum* FLEXUS CONTRARII: Quare, ubi radius osculi est finitus, ibi neque Cuspis, neque punctum flexus contrarii locum habere potest. Tab. XV. Fig. 55.

320. Cum igitur ex æquatione inter t & u

$$0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Euu + Ft^3 + Gttu + Htu^2 + \&c.,$$

inventus sit radius osculi $= \frac{(A^2 + B^2)\sqrt{(A^2 + B^2)}}{2(A^2E - ABD + B^2C)}$, manifestum est, si fuerit $A^2E - ABD + B^2C = 0$, tum radium osculi fieri infinite magnum, ideoque Circulum osculantem in Lineam rectam abire. Ubi ergo hoc evenit, ibi Linea curva curvatura destituitur, atque duo Curvæ elementa quasi in

 directum