 mus aliquot insignes proprietates Curvarum continuarum & regularium, unde eas a Curvis discontinuis & irregularibus discernere licet.

CAPUT II.

De Coordinatarum permutatione.

Tab. I. Fig. 2.

23. Quemadmodum ex æquatione inter Coordinatas x & y, quarum illa Abscissam, hæc Applicatam denotat, data Curva describitur super Axe RS, initio Abscissarum A alicubi pro lubitu assumto, ita vicissim, si jam descripta fuerit linea curva ejus natura exprimi poterit per æquationem inter Coordinatas. Hic autem quamvis Curva sit data, duæ tamen res in arbitrio nostro relinquuntur, positio scilicet Axis RS, & principium Abscissarum A. Quæ cum infinitis modis variari queant, etiam pro eadem linea Curva innumerabiles æquationes exhiberi poterunt, hancque ob causam ex æquationum diversitate non semper ad diversitatem linearum curvarum, quæ illis æquationibus exprimantur concludere licet, etiamsi diversæ Curvæ perpetuo diversas præbeant æquationes.

24. Cum igitur, variato tam Axe quam Abscissarum initio, innumerabiles oriantur æquationes ejusdem Curvæ naturam exprimentes, hæ omnes ita inter se erunt comparatæ, ut ex data æquatione una reliquæ omnes inveni queant. Ex data enim æquatione inter Coordinatas ipsa linea curva determinatur, hac autem cognita, si quæcunque linea recta pro Axe, & in ea punctum pro Abscissarum principio assumatur, æquatio inter Coordinatas orthogonales definietur. Hoc igitur Capite methodum trademus, cujus ope, si æquatio pro Curva fuerit data, ad alium Axem quemcunque, & Abscissarum initium quodcunque æquatio inter Coordinatas inveniri queat, quæ ejusdem Curvæ naturam exprimat. Atque hoc modo reperientur omnes

omnes omnino æquationes, quæ ejuſdem Curvæ naturam comprehendant, ſicque facilius diverſitas linearum curvarum ex æquationum diverſitate dijudicari poterit. CAP. II.

25. Sit igitur data æquatio quæcunque inter x & y, ex qua ſumta recta RS pro Axe, & puncto A pro initio Abſciſſarum, ita ut x denotet Abſciſſam AP & y Applicatam PM, producatur linea curva CBM, cujus ergo natura per æquationem datam exprimitur. Retineamus jam primum eundem Axem RS, at aliud punctum in eo D pro initio Abſciſſarum aſſumamus, ita ut nunc puncto curvæ M reſpondeat Abſciſſa DP, quæ ponatur $= t$, Applicata vero MP manebit eadem $= y$, quæ ante: quæramus igitur æquationum inter t & y, qua ejuſdem Curvæ CBM natura exprimatur. Ponatur intervallum $AD = f$, quod ab A ſiniſtrorſum in regionem Abſciſſarum negativarum cadat, eritque $DP = t = f + x$, ideoque $x = t - f$. Quare ſi in æquatione inter x & y data ubique loco x ſubſtituatur $t - f$, prodibit æquatio inter t & y, quæ eandem lineam curvam CBM exhibebit. Cum igitur magnitudo $AD = f$ ab arbitrio noſtro pendeat, jam innumerabiles diverſas adepti ſumus æquationes, quæ omnes eandem lineam curvam exprimant. TAB. II. Fig. 7.

26. Si Curva alicubi Axem RS trajiciat, uti in C, tum ſumto hoc puncto C pro initio Abſciſſarum, ejuſmodi obtinebitur æquatio, quæ, poſita Abſciſſa $CP = 0$, ſimul Applicatam PM evaneſcentem ſit præbitura; ſi quidem unica tantum Applicata puncto Axis C reſpondeat. Interſectio autem C, ſi ulla pluresve dentur, invenietur ex æquatione primum propoſita inter x & y, ponendo $y = 0$, & ex æquatione quærendo valorem vel valores ipſius x. Ubi enim Curva in Axem incidit, ibi fit $y = 0$, facto ergo viciſſim $y = 0$, omnes illæ Abſciſſæ ſeu valores ipſius x elicientur, ubi Curva in Axem incidit.

27. Initium ergo Abſciſſarum, retento Axe, mutabitur ſi Abſciſſa x data quantitate ſive augeatur ſive minuatur; hoc eſt, ſi loco x ponatur $t - f$: ubi f erit quantitas affirmativa, ſi

LIB. II. novum Abſciſſarum initium D ſiniſtrorſum ab A fuerit remotum; erit vero f quantitas negativa, ſi punctum D ad dextram ab A fuerit ſitum.

TAB. II. Fig. 8. Ponamus nunc deſcripta Curva LBM ex data æquatione inter $AP = x$ & $PM = y$, alium aſſumi Axem rs priori parallelum in eoque punctum D pro Abſciſſarum initio: cadat autem iſte Axis in regionem Applicatarum negativarum, ſitque ejus a priori Axe diſtantia $AF = g$, atque ponatur intervallum $DF = AG = f$. Sit igitur in hoc novo Axe Abſciſſa puncto Curvæ M reſpondens, $DQ = t$, & Applicata $QM = u$, eritque $t = DF + FQ = f + x$, & $u = PM + PQ = g + y$, unde fit $x = t - f$ & $y = u - g$. Quare ſi in æquatione inter x & y data ſubſtituatur ubique $t - f$ loco x, & $u - g$ loco y, orietur æquatio inter t & u, qua ejuſdem lineæ curvæ natura exprimetur.

28. Cum igitur magnitudines f & g ab arbitrio noſtro pendeant, hincque infinitis modis definiri queant, infinities plures diverſæ formari poterunt æquationes quam priori caſu, quæ tamen omnes ad eandem lineam curvam pertineant. Quod ſi ergo duæ æquationes altera inter x & y, & altera inter t & u, hoc tantum a ſe invicem diſcrepent, ut altera in alteram transformetur, ſi Coordinatæ unius datis quantitatibus ſive augeantur ſive minuantur, tum ambæ æquationes licet diverſæ tamen eandem lineam curvam exhibebunt. Hinc igitur facile innumerabiles formabuntur æquationes diverſæ, quæ tamen omnes ejuſdem lineæ curvæ naturam exprimant.

TAB. II. Fig. 9. 29. Statuatur novus Axis rs normalis ad priorem RS, ſecanſque ipſum in principio Abſciſſarum A, ita ut pro utroque Axe idem ſit Abſciſſarum initium A. Quoniam pro Axe RS datur æquatio ad Curvam LM inter Abſciſſam $AP = x$, & Applicatam $PM = y$, ducatur ex Curvæ puncto M in novum Axem rs perpendicularis MQ & vocetur Abſciſſa nova $AQ = t$, Applicata nova $QM = u$, eritque ob $APMQ$ parallelogrammum rectangulum, $t = y$ & $u = x$. Hinc, ex æquatione inter x & y data, formabitur æquatio inter t & u, ponendo

ponendo u loco x & t loco y. Prior ergo Abſciſſa x nunc abit in Applicatam $QM = u$, & prior Applicata y nunc abit in Abſciſſam $AQ = t$, pro iſto itaque novo Axe nulla alia æquationi variatio inducitur niſi, quod Coordinatæ x & y inter ſe commutentur: hancque ob rationem Abſciſſa & Applicata ſimul Coordinatæ vocari ſolent, nullo facto diſcrimine, utra pro Abſciſſa Applicatave accipiatur. Propoſita enim æquatione inter duas Coordinatas x & y, eadem Curva emergit, ſive x ſive y ad Abſciſſam indicandam accipiatur. CAP. II.

30. Poſuimus hic novi Axis rs portionem As exhibere Abſciſſas affirmativas, atque ad dextram Axis rs ſtatui regionem Applicatarum affirmativarum, quæ cum ab arbitrio pendeant, pro lubitu immutari poterunt. Scilicet ſi Axis portio Ar Abſciſſis affirmativis deſtinetur, erit utique $AQ = -t$, ſicque in æquatione inter x & y loco y poni debet $-t$. Deinde ſi ad dextram Axis rs regio Applicatarum negativarum ſtatuatur, fiet $QM = -u$, atque pro x ſcribi debebit $-u$. Atque hinc intelligitur naturam lineæ curvæ non mutari etiamſi in æquatione inter Coordinatas vel alterutra vel utraque negativa ſtatuatur; id quod in omnibus æquationis tranſmutationibus eſt tenendum.

31. Secet nunc novus Axis rs priorem RS ſub angulo quocunque SAs; fiatque interſectio in ipſo Abſciſſarum initio A, quod punctum in utroque Axe initium Abſciſſarum conſtituat. Data ergo ſit pro Axe RS æquatio quæcunque pro Curva LM inter Abſciſſam $AP = x$ & Applicatam $PM = y$, ex qua reperiri debeat æquatio ad eandem Curvam pro novo Axe rs, ſeu ex Curvæ puncto M ad novum Axem demiſſo perpendiculo MQ, inter Abſciſſam novam $AQ = t$, & Applicatam $MQ = u$. Sit angulus $SAs = q$; ejus Sinus $= m$, & Coſinus $= n$, ſumta unitate pro Sinu toto ut ſit $mm + nn = 1$. Ex P ducantur normales Pp & Pq in novas Coordinatas, eritque ob $AP = x$, $Pp = x.\sin.q$; $Ap = x.\cos.q$, deinde quia angulus $PMQ = PAQ = q$, erit ob $PM = y$, $Pq = Qp = y.\sin.q$; $Mq = y.\cos.q$. Ex his ergo fiet $AQ = t =$ TAB. II Fig. 10.

$Ap -$

LIB. II. $Ap - Qp = x.\cos.q - y.\sin.q$, & $QM = u = Mq + Pp = x.\sin.q + y.\cos.q$.

32. Cum autem ſit $\sin.q = m$, $\cos.q = n$, erit $t = nx - my$ & $u = mx + ny$, hinc fiet $nt + mu = nnx + mmx = x$, & $nu - mt = nny + mmy = y$. Æquatio ergo quæſita inter t & u reperietur, ſi in æquatione inter x & y propoſita ubique loco x ſcribatur $mu + nt$ & $nu - mt$ loco y, ſi quidem Axis portio As contineat Abſciſſas affirmativas, & Applicatæ affirmativæ in regionem QM cadant. Poſuimus hic etiam angulum SAs in regionem Applicatarum negativarum cadere; quod ſi autem As ſupra AS caderet, in calculo angulus $SAs = q$ negativus, ac propterea ejus Sinus m negative accipi deberet.

TAB. III. Fig. 11. 33. Tribuatur nunc novo Axi rs poſitio quæcunque, in eoque ſumatur punctum quodvis D pro Abſciſſarum initio. Sit RS Axis prior, pro quo habetur æquatio inter Abſciſſam $AP = x$ & Applicatam $PM = y$, qua natura Curvæ LM exprimitur; unde æquatio inter alias Coordinatas t & u ad novum Axem rs relatas exhiberi debet. Demiſſo ſcilicet ex quovis Curvæ puncto M in novum Axem rs perpendiculo MQ vocetur Abſciſſa $DQ = t$, & Applicata $QM = u$. Inter quas ut æquatio inveniatur, ex novo Abſciſſarum initio D in Axem priorem RS ducatur perpendicularis DG, ac ponatur $AG = f$ & $DG = g$, tum per D priori Axi RS producatur parallela DO, cui prior Applicata PM producta occurrat in O, eritque $MO = y + g$, & $DO = GP = x + f$. Denique ponatur angulus $ODQ = q$, cujus Sinus ſit $= m$, & Coſinus $= n$, poſito ſemper Sinu toto $= 1$, ut ſit $mm + nn + = 1$.

34. Jam ex puncto O ducantur tam in novum Axem DQ quam in Applicatam MQ normales Op & Oq, atque, ob angulum $OMQ = ODQ$ & $DO = x + f$, ac $MO = y + g$, erit $Op = Qq = (x + f).\sin.q = mx + mf$ & $Dp = (x + f).\cos.q = nx + nf$. Porroque $Oq = Qp = (y + g).\sin.q = my + mg$ & $Mq = (y + g).\cos.q = ny + ng$.

Ex