Tunc productum ex (f, λ) *in* (f, μ) *erit aggregatum f periodorum similium puta* $= (f, \lambda + \mu) + (f, \lambda' + \mu) + (f, \lambda'' + \mu) +$ *etc.* $= W$.

Dem. Sit vt supra $n - 1 = ef$; g radix primitiua pro modulo n, atque $h = g^e$, vnde per praecedentia erit $(f, \lambda) = (f, \lambda g) = (f, \lambda hh)$ etc. Hinc productum quaesitum erit $= [\mu].(f, \lambda) + [\mu h].(f, \lambda h) + [\mu hh].(f, \lambda hh) +$ etc. adeoque $=$

$$\begin{array}{llll} [\lambda + \mu] & + [\lambda h + \mu] \ldots & + [\lambda h^{f-1} + \mu] \\ + [\lambda h + \mu h] & + [\lambda hh + \mu h] \ldots & + [\lambda h^f + \mu h] \\ + [\lambda hh + \mu hh] & + [\lambda h^3 + \mu hh] \ldots & + [\lambda h^{f+1} + \mu hh] \\ \quad \text{etc.} \end{array}$$

quae expressio omnino ff radices continet. Quodsi hic singulae columnae verticales seorsim in summam colliguntur, manifesto prodit $(f, \lambda + \mu) + (f, \lambda h + \mu) \ldots + (f, \lambda h^{f-1} + \mu)$, quam expressionem cum W conuenire nullo negotio perspicitur, quum numeri λ, λ', λ'' etc. per hyp. ipsis λ, λh, $\lambda hh \ldots \lambda h^{f-1}$ secundum modulum n congrui esse debeant (quonam ordine hic nihil interest), adeoque etiam $\lambda + \mu$, $\lambda' + \mu$, $\lambda'' + \mu$ etc. ipsis $\lambda + \mu$, $\lambda h + \mu$, $\lambda hh + \mu \ldots \lambda h^{f-1} + \mu$. *Q. E. D.*

Huic theorematì adiungimus corollaria sequentia:

I. Designante k integrum quemcunque, productum ex $(f, k\lambda)$ in $(f, k\mu)$ erit $= (f, k(\lambda + \mu)) + (f, k(\lambda' + \mu)) + (f, k(\lambda'' + \mu)) +$ etc.

II. Quum singulae partes, e quibus W constat, vel cum aggregato $(f, 0)$, quod est $=$

f, vel cum aliquo ex his $(f, 1)$, (f, g), (f, gg) $\ldots (f, g^{e-1})$ conueniant, W ad formam sequentem reduci poterit $W = af + b(f, 1) + b'(f, g) + b''(f, gg) \ldots + b^{\varepsilon}(f, g^{e-1})$, vbi coëfficientes a, b, b' etc. erunt integri positiui (siue etiam quidam $= 0$): porro patet, productnm ex $(f, k\lambda)$ in $(f, k\mu)$ tunc fieri $= af + b(f, k) + b(f, k) + b'(f, kg) \ldots + b^{\varepsilon}(f, kg^{e-1})$. — Ita e. g. pro $n = 19$ productum ex aggregato $(6, 1)$ in se ipsum, siue quadratum huius aggregati fit $= (6, 2) + (6, 8) + (6, 9) + (6, 12) + (6, 13) + (6, 19) = 6 + 2(6, 1) + (6, 2) + 2(6, 4)$.

III. Quum productum ex singulis partibus ipsius W in periodum similem (f, ν) ad formam analogam reduci possit, manifestum est, etiam productum e tribus periodis $(f, \lambda).(f, \mu).(f, \nu)$ per $cf + d(f, g) \ldots + d^{\varepsilon}(f, g^{e-1})$ exhiberi posse, et coëfficientes c, d etc. integros ac positiuos (siue $= 0$) euadere, insuperque pro valore quocunque integro ipsius k fieri $(f, k\lambda).(f, k\mu).(f, k\nu) = cf + d(f, k) + d'(f, kg) +$ etc. Perinde hoc theorema ad producta e periodis similibus quotcunque extenditur, nihilque interest, siue hae periodi omnes diuersae sint, siue partim aut cunctae identicae.

IV. Hinc colligitur, si in functione quacunque algebraica rationali integra $F = \Phi(t, u, v \ldots)$ pro indeterminatis t, u, v etc. resp. substituantur periodi similes (f, λ), (f, μ), (f, ν) etc., eius valorem ad formam $A + B(f, 1) + B'(f, g) + B''(f, gg) \ldots + B^{\varepsilon}(f, g^{e-1})$ reducibilem esse, coëfficientesque A, B, B' etc. omnes integros fieri, si omnes coëfficientes determinati in F sint integri; si vero postea pro t, u, v etc. resp. substituantur $(f, k\lambda)$, $(f, k\mu)$, $(f, k\nu)$ etc., valorem ipsius F reduci ad $A + B(f, k) + B'(f, kg) +$ etc.

346. Theorema. *Supponendo, λ esse numerum per n non diuisibilem, et scribendo breuitatis ergo p pro (f, λ), quaeuis alia similis periodus (f, μ), vbi etiam μ per n non diuisibilis supponitur, reduci poterit sub formam talem $\alpha + \beta p + \gamma pp \ldots + \theta p^{e-1}$, ita vt coëfficientes α, β etc. sint quantitates determinatae rationales.*

Dem. Designentur ad abbreuiandum periodi $(f, \lambda g)$, $(f, \lambda gg)$, $(f, \lambda g^3)$ etc. vsque ad $(f, \lambda g^{e-1})$, quarum multitudo est $e - 1$, et cum quarum aliqua (f, μ) necessario conueniet, per p', p'', p''' etc. Habetur itaque statim aequatio $0 = 1 + p + p' + p'' + p'''$ etc. ... I); euoluendo autem secundum praecepta art. praec. valores potestatum ipsius p vsque ad $e - 1^{\text{tam}}$, $e - 2$ aliae tales promanabunt:

$$0 = pp + A + ap + a'p' + a''p'' + a'''p''' + \text{etc. (II)}$$
$$0 = p^3 + B + bp + b'p' + b''p'' + b'''p''' + \text{etc. (III)}$$
$$0 = p^4 + C + cp + c'p' + c''p'' + c'''p''' + \text{etc. (IV)}$$
$$\text{etc.}$$

vbi omnes coëfficientes A, a, a' etc. B, b, b' etc. etc. erunt integri, atque, quod probe notandum est et ex art. praec. sponte sequitur, a λ omnino independentes; i. e. eaedem aequationes etiamnum valebunt, quicunque alius valor ipsi λ tribuatur; haec annotatio manifesto etiam ad aequ. I extenditur, si modo λ per n non diuisibilis accipiatur. — Supponamus $(f, \mu) = p'$; facillime