cunque ipſarum x & y, tum iſta æquatio exhibebit Superficiem quampiam, cujus natura ex ipſa illa æquatione innoteſcet. Subſtituendis enim pro x & y omnibus, quos recipere poſſunt, valoribus, tam affirmativis quam negativis, omnia plani aſſumti puncta Q obtinebuntur: tum vero ex æquatione ipſius z per x & y conſtabit ubique longitudo perpendiculi $QM = z$, donec ad Superficiem pertingat: qui ipſius z valor ſi fuerit affirmativus, punctum Superficiei M ſupra planum APQ, erit ſitum; ſin autem ſit negativus, infra hoc planum cadet; ſi evaneſcat, punctum Superficiei M in hoc ipſo plano reperietur; at, ſi fuerit imaginarius, tum puncto Q nullum prorſus Superficiei punctum M reſpondebit. Quod ſi autem eveniat, ut z habeat plures valores reales, tum recta ad planum normalis per punctum Q ducta Superficiem in pluribus punctis M trajiciet. CAP. I.

6. Quod igitur ad varias Superficierum naturas attinet, hic ſtatim ſe offert diſtinctio in continuas ſeu regulares, & diſcontinuas ſeu irregulares. Superficies ſcilicet continua erit, cujus omnia puncta per eandem æquationem inter z & x & y exprimuntur; ſeu, ubi z eſt eadem Functio ipſarum x & y pro omnibus Superficiei punctis. Superficies autem irregularis eſt cujus variæ partes per diverſas Functiones exhibentur; uti, ſi propoſita fuerit Superficies, quæ in uno loco ſit ſphærica, in alio conica, ſeu cylindrica, ſeu plana. Hic autem Superficies irregulares penitus excludimus, atque ad ſolas regulares, quarum natura una quadam conſtanti æquatione contineatur, reſpiciemus. His enim pertractatis, quoniam Superficies irregulares ex partibus variarum regularium ſunt conflatæ, etiam iſtas facile dijudicare licebit.

7. Superficierum autem regularium primaria diviſio inſtituitur in algebraïcas & tranſcendentes. Superficies autem algebraïca vocatur, cujus natura exprimitur per æquationem algebraïcam inter Coordinatas x, y & z; ſeu, quando z æqualis eſt Functioni algebraïcæ ipſarum x & y. Contra igitur, ſi z non fuerit Functio algebraïca ipſarum x & y; ſeu, ſi in æqua-

 tione

APPEND. tione inter x, y, & z insint quantitates transcendentes, veluti a Logarithmis & Arcubus circularibus pendentes, tum Superficies, cujus natura hujusmodi æquatione exprimitur, erit transcendens. Talis erit Superficies, si fuerit $z = x.l.y$; seu $z = y^x$; seu $z = y.\mathit{fin}.x$. Facile autem intelligitur Superficies algebraïcas ante tractari oportere, quam ad transcendentes progrediamur.

8. Deinde ad naturam Superficiei cognoscendam, imprimis attendendum est, qualis sit Functio z ipsarum x & y, ratione numeri valorum, quos continet. Hic igitur primum occurrunt eæ Superficies, pro quibus z æquatur Functioni uniformi ipsarum x & y. Sit P hujusmodi Functio uniformis, seu rationalis, ipsarum x & y; atque, si fuerit $z = P$, singulis punctis plani Q totidem respondebunt Superficiei puncta; seu, quælibet recta ad planum APQ normalis Superficiem in unico puncto trajiciet. Neque vero hoc casu usquam valor rectæ QM fieri poterit imaginarius; sed omnes istiusmodi rectæ puncta Superficiei realia præbebunt. Interim tamen ista Functionum diversitas non essentialem varietatem inter Superficies producit; pendet enim a situ plani APQ, qui, perinde ac Axis, est arbitrarius; ita ut, si Superficies eadem ad aliud planum referatur, Functio z quæ erat uniformis, evadere possit utcunque multiformis.

9. Sint P & Q Functiones quæcunque uniformes ipsarum x & y; atque, si fuerit $zz - Pz + Q = 0$, tum rectæ per singula plani puncta Q normaliter ductæ Superficiem, vel in duobus punctis secabunt, vel nusquam: habebit enim z duos valores, qui vel ambo erunt reales, vel ambo imaginarii. Simili modo si, denotantibus P, Q & R Functiones uniformes ipsarum x & y, fuerit $z^3 - Pz^2 + Qz - R = 0$; tum erit z Functio triformis, & quælibet recta QM Superficiem secabit vel in tribus punctis, si omnes radices æquationis fuerint reales; vel tantum in unico, si scilicet binæ radices fuerint imaginariæ. Similique modo erit judicandum,

si

ſi z definiatur per æquationem, in qua plures obtineat dimenſiones. Quam multiformis igitur futura ſit Functio z facillime cognoſcetur, ſi æquatio inter x & y & z, ad rationalitatem perducatur. Cap. I.

10. De cetero, ſicuti in æquationibus pro Lineis curvis binas Coordinatas inter ſe permutari poſſe vidimus, ita in æquatione quavis pro Superficie tres Coordinatæ x, y, & z inter ſe ſunt permutabiles. Primo enim, ſi in plano APQ altera recta Ap ad AP normalis pro Axe aſſumatur, erit nunc $Ap = y$, & $pQ = x$; ſicque binæ x & y inter ſe ſunt permutatæ. Reliquæ permutationes omnes intelligentur complendo parallelepipedon rectangulum $ApQM\xi\pi qPA$; in quo primum ſpectanda veniunt tria plana fixa inter ſe normalia $APQp$, $APq\pi$, & $Ap\xi\pi$; ad quæ ſingula, quemadmodum referatur Superficies propoſita cujus punctum eſt M, eadem æquatio inter x, y, & z declarat. In unoquoque autem plano duplex datur Axis, uterque initium habens in puncto A, unde ſex diverſæ relationes inter tres Coordinatas reſultant.

Coordinatæ erunt

$$\text{Pro plano } APQp \quad \begin{array}{l} \text{vel} \left\{ \begin{array}{l} AP = x \\ PQ = y \\ QM = z \end{array} \right. \\ \\ \text{vel} \left\{ \begin{array}{l} Ap = y \\ pQ = x \\ QM = z \end{array} \right. \end{array}$$

$$\text{Pro plano } APq\pi \quad \begin{array}{l} \text{vel} \left\{ \begin{array}{l} AP = x \\ Pq = z \\ qM = y \end{array} \right. \\ \\ \text{vel} \left\{ \begin{array}{l} A\pi = z \\ \varpi q = x \\ qM = y \end{array} \right. \end{array}$$

Pro

APPEND.

$$\text{Pro plano } Ap\xi\pi \quad \text{vel} \begin{cases} Ap = y \\ p\xi = z \\ \xi M = x \end{cases} \quad \text{vel} \begin{cases} A\pi = z \\ \pi\xi = y \\ \xi M = x \end{cases}$$

Quod ſi autem a puncto fixo A ad punctum Superficiei M ducatur recta AM, erit ea $= \surd(xx+yy+zz)$.

11. Eadem ergo æquatio inter Coordinatas x, y, & z cognitionem Superficiei ad tria plana exhibet, quæ inter ſe ſunt normalia atque ſe invicem in puncto A decuſſant. Quemadmodum ſcilicet variabilis z diſtantiam cujuſque Superficiei puncti M a plano APQ exhibet, ita variabilis y ejuſdem puncti M diſtantiam a plano APq, & variabilis x a plano $Ap\xi$ præbet. Quod ſi autem noverimus, quantis intervallis punctum M diſtet ab unoquoque horum trium planorum, tum ſimul ejus verus ſitus innoteſcit. Hæc igitur tria plana, ad quæ Superficies quævis per æquationem trium variabilium x, y & z refertur, imprimis notari debent; quorum ſi unum, uti APQ, fuerit horizontale, duo reliqua erunt verticalia, alterum ſcilicet horizontali ſecundum rectam AP alterum ſecundum rectam Ap inſiſtet.

12. Conſtitutis ergo his tribus planis inter ſe normalibus, ad quæ Superficies propoſita referatur, ex ſingulis ejus punctis M ad iſta plana APQ, APq, & $A\pi\xi$ ducantur rectæ normales MQ, Mq, & $M\xi$, quæ erunt $MQ=z$, $Mq=y$, & $M\xi=x$. Deinde, completo parallelepipedo, habebuntur tres rectæ iſtis æquales, quæ ex puncto fixo A egrediantur, ſcilicet $AP=x$, $Ap=y$, & $A\pi=z$, ex quibus cognitis ſitus puncti M determinatur. Manifeſtum autem eſt, ſi iſtæ variabiles x, y, & z, dum in plagas, quas Figura indicat, vergunt, affirmativæ cenſeantur, tum earum valores, ſi in plagas contrarias dirigantur, negativos cenſeri oportere.

13. Si

13. Si in æquatione inter tres variabiles x, y & z, ea quæ ad planum APQ eſt normalis, nempe z, ubique pares habeat dimenſiones, tum geminos habebit valores æquales, alterum affirmativum alterum negativum. Superficies igitur ita erit comparata, ut ad utramque plani APQ partem ſit ſui ſimilis & æqualis, atque adeo Corpus, quod iſta Superficie terminatur, ſectione ſecundum planum APQ facta, in duas partes ſimiles & æquales dividetur. Quemadmodum ergo in Figuris planis ea Linea recta, qua Figura in duas partes ſimiles & æquales dirimebatur, Diameter eſt appellata; ita in ſolidis id planum, quo Corpus in duas partes ſimiles dividitur, *Diametrale* vocemus. Quare, ſi variabilis z in æquatione ubique pares habeat dimenſiones, tum planum APQ, erit diametrale. CAP. I.

14. Simili modo intelligitur, ſi in æquatione pro Superficie variabilis y, quæ ad planum APq eſt normalis, ubique pares habeat dimenſiones, tum planum APq fore diametrale. Sin autem variabilis x pares ubique habeat dimenſiones, tum planum $Ap\xi$ erit diametrale. Ex æquatione ergo pro quavis Superficie inter tres variabiles x, y, & z data ſtatim apparet, utrum ex tribus planis APQ, APq, $Ap\xi$, ſit diametrale an ſecus. Fieri autem poteſt, ut duo, imo omnia tria hæc plana, ſint diametralia. Scilicet, pro Globo, cujus Centrum ſit in A, ob radium $AM = \surd(xx + yy + zz) = a$, erit $xx + yy + zz = aa$, unde ſingulis hiſce tribus planis Globus in duas partes ſimiles & æquales diſpertietur.

15. Ad Figuram Superficiei, quæ in propoſita æquatione continetur, cognoſcendam, ad tria illa plana inter ſe normalia imprimis attendi oportet, quæ in Figura repræſentantur per $QQ^1Q^2Q^3$, & $TT^1T^2T^3$, atque $VV^1V^2V^3$, atque ſe mutuo in puncto A interſecant. Hæc tria plana, ſi in infinitum quaquaverſus producta concipiantur, univerſum ſpatium divident in octo regiones, quæ in Figura exhibentur litteris AX, AX^1, AX^2, AX^3, AX^4, AX^5, AX^6, & AX^7. Quod, ſi jam in prima regione AX variabiles x, y, & z TAB. XXX. *Fig.* 120.