LIB. II. in priori contineri, quia nihilum quemcunque Factorem agnoſcit. Primum itaque non ſit Q per $ay - bx$ diviſibile. Et, cum Q ſit Functio $n - 1$ dimenſionum, M vero Functio $n - 3$ dimenſionum, erit $\frac{Q}{(ax+by)^2 M}$ Functio nullius dimenſionis, ideoque poſito $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$, abibit in quantitatem conſtantem, quæ ſit $= A$, eritque $(ay - bx)^3 + A(ax+by)^2 = 0$, ſequentia enim membra præbebunt terminos, qui in infinito præ $A(ax+by)^2$ evaneſcunt.

187. Linea igitur curva, quæ hac æquatione exprimitur, ita erit comparata, ut in infinitum producta cum Linea curva æquatione $P + Q + R + S +$ &c., expreſſa congruat. Ad illam autem propius cognoſcendam, eam ad alium Axem referamus, in quo ſit Abſciſſa $t = \frac{ax+by}{g}$ & Applicata $u = \frac{ay-bx}{g}$ poſito $\sqrt{(aa+bb)} = g$, eritque $u^3 + \frac{Att}{g} = 0$, quæ æquatio, ſi ponatur $t = \infty$, dabit partem Curvæ quæſitæ $P + Q + R +$ &c. $= 0$, in infinito exiſtentem. Quare, ſi figura Curvæ $u^3 + \frac{Att}{g} = 0$, cognita fuerit, ſimul Curvæ $P + Q + R +$ &c. $= 0$, portionis infinitæ figura erit cognita. In Capite autem ſequente has Lineas curvas Aſymtotas data opera evolvemus.

188. Quod ſi membrum ſecundum Q Factorem habeat $ay - bx$; vel ſimul erit diviſibile per $(ay - bx)^2$, vel ſecus. Ponamus non eſſe diviſibile per $(ay - bx)^2$, ac ſumatur iſta Functio nullius dimenſionis $\frac{Q}{(ay-bx)(ax+by)M}$, quæ, poſito $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$, præbeat iſtam quantitatem conſtantem A, eritque $(ay - bx)^3 + A(ay - bx)(ax+by) + \frac{R}{M} + \frac{S}{M} +$ &c $= 0$. Hic erit $\frac{R}{M}$, poſito $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$ vel $B(ay - bx)$ vel $B(ax+$

$B(ax+by)$, prout R fuerit per $ay - bx$ divisibile vel minus; verum $\frac{S}{M}$ erit quantitas constans C. Hinc, ista æquatione ad alium Axem relata, inter Coordinatas t & u, ut ante fecimus, ea erit vel $u^3 + \frac{Atu}{g} + \frac{Bu}{gg} + \frac{C}{g^3} = 0$, vel $u^3 + \frac{Atu}{g} + \frac{Bt}{g^2} + \frac{C}{g^3} = 0$. Quia autem tantum casus huc spectat cum $t = \infty$, termini ultimi evanescunt. Eritque ergo priori casu $u^3 + \frac{Atu}{g} + \frac{Bu}{gg} = 0$, quæ duplicem præbet Asymtotam nempe & $u = 0$, & $uu + \frac{At}{g} = 0$, alteram rectam, alteram Parabolam. Posteriori casu quoque, existente $t = \infty$, vel u habebit valorem finitum, eritque, ob finita præ infinitis evanescentia, $\frac{Atu}{g} + \frac{Bt}{g^2} = 0$, ideoque $u = -\frac{B}{Ag}$ pro Linea recta. Præterea vero u valorem infinitum habere poterit; sicque, evanescente termino tertio, fiet $u^2 + \frac{At}{g} = 0$, pro Parabola. Quare utroque casu duplex prodit Asymtota, altera recta altera Parabola, ex quo hos casus a se distingui non opus est. Cap. VII.

189. Sit Q etiam per $(ay - bx)^2$ divisibile, atque prout R per $(ay - bx)$ fuerit divisibile vel secus, iisdem, quibus ante, operationibus institutis, prodibunt inter t & u hæ æquationes: vel $u^3 + \frac{Au^2}{g} + \frac{Bu}{g^2} + \frac{C}{g^3} = 0$, vel $u^3 + \frac{Au^2}{g} + \frac{Bt}{g^2} = 0$. Prior casus est pro tribus Lineis rectis inter se parallelis, si quidem omnes æquationis $u^3 + \frac{Au^2}{g} + \frac{Bu}{g^2} + \frac{C}{g^3} = 0$ radices fuerint reales, vel pro unica recta Asymtota, si duæ radices fuerint imaginariæ. Hinc vero varietates nascuntur prout trium istarum Asymtotarum inter se parallelarum vel bi-

LIB. II. næ vel omnes coincidunt. Poſterior autem caſus $u^3 + \frac{Au^2}{g} + \frac{Bt}{g^2} = 0$, poſito $t = \infty$, locum habere nequit niſi u ſit infinitum, ideoque terminus $\frac{Au^2}{g}$ præ primo u^3 evaneſcet, eritque $u^3 + \frac{Bt}{g^2} = 0$, æquatio pro Aſymtota curvilinea ordinis tertii.

190. Sin autem fuerit $A = 0$, $B = 0$, & $C = 0$, tum recurrendum eſt ad terminos æquationis $P + Q + R + S +$ &c. $= 0$ ſequentes, qui præbebunt hujuſmodi æquationem $u^3 + \frac{D}{g^4 t} + \frac{E}{g^5 t^2} + \frac{F}{g^6 t^3} +$ &c. $= 0$, in qua, niſi ſit $D = 0$, tertius cum ſequentibus evaneſcit, ut ſit $u^3 + \frac{D}{g^4 t} = 0$; ſin & $D = 0$, erit $u^3 + \frac{E}{g^5 t^2} = 0$; &, ſi etiam $E = 0$, erit $u^3 + \frac{F}{g^6 t^3} = 0$, &c., quæ æquationes Lineas curvas denotant, quæ, poſito $t = \infty$, cum Curva in æquatione $P + Q + R +$ &c. $= 0$, contenta congruant. Iſtæ autem æquationes, quia ineſt poteſtas impar u^3, ſemper ſunt reales, ideoque certo ramos in infinitum excurrentes, declarant. Interim tamen pro his iiſdem caſibus Linea recta æquatione $u = 0$, expreſſa quoque erit Aſymtota, quia eſt Aſymtota Curvarum $u^3 + \frac{D}{g^4 t} = 0$, $u^3 + \frac{E}{g^5 t^2} = 0$ &c.

191. Cum igitur rami Curvarum ad Aſymtotam rectam convergentes tantopere diſcrepare queant, convenit hanc diverſitatem diligentius perpendere, quod fiet, ſi Linea curva ſimpliciſſima definiatur, quæ ad eandem Aſymtotam rectam relata cum Curva propoſita confundatur. Sic, etſi æquatio $u^3 + \frac{Au^2}{g} + \frac{Bu}{g^2} + \frac{C}{g^3} = 0$, ſi radices omnes habeat reales, tres oſtendit Aſymtotas rectas inter ſe parallelas, tamen nondum

patet

patet utrum crura Curvæ in infinitum extenſa ſint Hyperbolica, hoc eſt æquatione $u = \frac{C}{t}$ expreſſa, an alius generis, veluti æquatione $u = \frac{C}{tt}$, vel $u = \frac{C}{t^3}$ &c., expreſſa. Ad hoc cognoſcendum ſumatur ſequens proximus terminus quem æquatio ſuggerit, nempe $\frac{D}{g^4 t}$, vel, ſi hic deſit, $\frac{E}{g^5 t^2}$, vel etiam, hoc deficiente, $\frac{F}{g^6 t^3}$. Sumamus, ut rem generaliter abſolvamus, terminum ſequentem eſſe $\frac{K}{t^k}$: atque ex natura æquationis $P + Q + R +$ &c. $= 0$, quæ eſt n dimenſionum, patet k non poſſe eſſe numerum majorem quam $n - 3$. Sint æquationis $u^3 + \frac{Au^2}{g} + \frac{Bu}{g^2} + \frac{C}{g^3} = 0$, radices ſeu Factores $(u - \alpha)(u - \beta)(u - \gamma)$, eritque $(u - \alpha)(u - \beta)(u - \gamma) - \frac{K}{t^k} = 0$. Sit $u - \alpha = \frac{I}{t^\mu}$, quæ æquatio exprimet naturam unius Aſymtotæ, eritque $\frac{I}{t^\mu}(\alpha - \beta + \frac{I}{t^\mu})(\alpha - \gamma + \frac{I}{t^\mu}) = \frac{K}{t^k}$; &, poſito t infinito, fit $\frac{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) I}{t^\mu} = \frac{K}{t^k}$.

192. Æquatio hæc obtinet, ſi radix α fuerit inæqualis reliquis radicibus β & γ, hocque caſu fiet $I = \frac{K}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}$ & $\mu = k$, unde radix $u = \alpha$ ſuppeditabit iſtam Aſymtotam Curvilineam $u - \alpha = \frac{K}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) t^k}$. Si ergo omnes tres radices fuerint inter ſe inæquales, ſingulæ hujuſmodi Aſymtotas præbebunt. Sin autem duæ radices ſint æquales, puta

LIB. II. puta $\beta = \alpha$, binæ Asymtotæ coalescent in unam, eritque $\frac{I^2(\alpha - \gamma)}{t^{2\mu}} = \frac{K}{t^k}$, unde fit $I^2 = \frac{K}{\alpha - \gamma}$ & $2\mu = k$. Quare hujus duplicis Asymtotæ natura exprimetur hac æquatione $(u - \alpha)^2 = \frac{K}{(\alpha - \gamma)t^k}$. Si omnes tres radices fuerint æquales, ideoque tres Asymtotæ in unam concrescant, ejus natura exprimetur hac æquatione $(u - \alpha)^3 = \frac{K}{t^k}$.

193. Quod si æquationis $P + Q + R + S +$ &c., supremum membrum P quatuor habeat Factores simplices reales, si ii fuerint vel omnes inæquales inter se, vel bini æquales, vel etiam tres æquales, ex antecedentibus natura ramorum in infinitum excurrentium una cum Asymtotis colligetur. Unicus ergo casus, quo omnes radices sunt inter se æquales, explanatione indiget. Sit igitur $P = (ay - bx)^4 M$, ut sit M Functio $n - 4$ dimensionum; atque, si in Functionibus nullius dimensionis, uti supra, ponatur $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$, ut præbeant quantitates constantes, simulque ponatur, mutato Axe, $t = \frac{ax + by}{g}$ & $u = \frac{ay - bx}{g}$, existente $g = \sqrt{(aa + bb)}$, pro Lineis Asymtotis sequentes inter t & u orientur æquationes. Primum scilicet, si Q non fuerit divisibile per $ay - bx$, habebitur $u^4 + \frac{At^3}{g} = 0$.

194. Deinde, si Q sit divisibile quidem per $ay - bx$ at non per $(ay - bx)^2$, prodibit $u^4 + \frac{Attu}{g} + \frac{Btt}{gg} = 0$, in qua, posita $t = \infty$, Applicata u potest esse vel quantitas finita vel infinita, ergo duplex prodit Asymtota, recta scilicet $u + \frac{B}{gA} = 0$, & Curva $u^3 + \frac{Att}{g} = 0$. Quod ad rectam attinet, ad eam propius cognoscendam sumatur terminus sequens proximus,