62, 25), (25, 12, 7), (7, 2, 5), (5, — 2, 7). Vltima est quaesita. — Eodem modo formae (121, 49, 20), cuius determinans = — 19, aequiualentes inueniuntur: (20, — 9, 5), (5, — 1, 4), (4, 1, 5): quare (4, 1, 5) erit forma quaesita.

Tales formas (A, B, C), quarum determinans est negatiuus et in quibus A non $> \sqrt{\frac{4}{3}D}$, B non $> \frac{1}{2}A$, A non $> C$, *formas reductas* vocabimus. Quare cuiuis formae determinantis negatiui, forma reducta proprie aequiualens inueniri poterit.

172. Problema. *Inuenire conditiones, sub quibus duae formae reductae non identicae, eiusdem determinantis, —* D, (a, b, c), (a', b', c') *proprie aequiualentes esse possint.*

Sol. Supponamus, id quod licet, a' esse non $>$ a, formamque $axx + 2bxy + cyy$ transire in $a'x'x' + 2b'x'y' + c'y'y'$ per substitutionem propriam $x = \alpha x' + \beta y'$, $y = \gamma x' + \delta y'$. Tum habebuntur aequationes

$$a\alpha\alpha + 2b\alpha\gamma + c\gamma\gamma = a' \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; [1]$$
$$a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta = b' \;\ldots\ldots\; [2]$$
$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; [3]$$

Ex [1] sequitur $aa' = (a\alpha + b\gamma)^2 + D\gamma\gamma$; quare aa' erit positiuus; et quum $ac = D + bb$, $a'c' = D + b'b'$, etiam ac, $a'c'$ positiui erunt: quare a, a', c, c' omnes eadem signa habebunt. Sed tum a tum a' non $> \sqrt{\frac{4D}{3}}$, adeoque aa' non $> \frac{4D}{3}$; quare multo minus $D\gamma\gamma$ ($= aa' - (a\alpha + b\gamma)^2$) maior quam $\frac{4}{3}D$ esse poterit. Hinc γ erit aut $= 0$, aut $= \pm 1$.

I. Si $\gamma = 0$, ex [3] sequitur esse aut $\alpha = 1, \delta = 1$, aut $\alpha = -1, \delta = -1$. In vtroque casu fit ex [1] $a' = a$, et ex [2] $b' - b = \pm \beta a$. Sed b non $> \frac{1}{2}a$, et b' non $> \frac{1}{2}a'$ proin etiam non $> \frac{1}{2}a$. Quare aequatio $b' - b = \pm \beta a$, consistere nequit nisi fuerit

aut $b = b'$, vnde sequeretur $c' = \frac{b'b' + D}{a'} = \frac{bb + D}{a} = c$, quare formae (a, b, c), (a', b', c') identicae essent contra hyp.

aut $b = -b' = \pm \frac{1}{2}a$. In hoc etiam casu erit $c' = c$ formaque (a', b', c') erit $(a, -b, c)$ i. e. formae $(a, b, c,)$ opposita. Simul patet formas has esse ancipites propter $2b = + a$.

II. Si $\gamma = \pm 1$, fit ex [1] $a\alpha\alpha + c - a' = \pm 2b\alpha$. Sed c non minor quam a, adeoque non minor quam a': hinc $a\alpha\alpha + c - a'$ siue $2b\alpha$ certo non minor quam $a\alpha\alpha$. Quare quum $2b$ non sit maior quam a, erit α non minor quam $\alpha\alpha$; vnde necessario aut $\alpha = 0$, aut $= \pm 1$.

1) Si $\alpha = 0$, fit ex [1], $a' = c$, et quoniam a neque maior quam c, neque minor quam a', erit necessario $a' = a = c$. Porro ex [3] fit $\beta\gamma = -1$, vnde ex [2] $b + b' = \pm \delta c = \pm \delta a$. Hinc simili modo vt in (I) sequitur esse

aut $b = b'$, in quo casu formae (a, b, c) $(a' b', c')$ forent identicae, contra hyp.

aut $b = -b'$, in quo casu formae (a, b, c), (a', b', c') erunt oppositae.

2) Si $\alpha = \pm 1$, ex [1] sequitur $\mp 2b = a + c - a'$. Quare quum neque a, neque c $< a'$, erit $2b$ non $< a$, et non $< c$. Sed $2b$ etiam non $> a$, neque $> c$, vnde necessario $\pm 2b = a = c$, et hinc ex aequ. $\mp 2b = a + c - a'$, etiam $= a'$. Fit igitur ex [2] $b' = a(\alpha\beta + \gamma\delta) + b(\alpha\delta + \beta\gamma)$, siue, propter $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, $b' - b = a(\alpha\beta + \gamma\delta) + 2b\gamma = a(\alpha\beta + \gamma\delta \pm \beta\gamma)$, quare necessario, vt ante

aut $b = b'$, vnde formae (a, b, c), (a', b', c') identicae, contra hyp.

aut $b = -b'$, adeoque formae illae oppositae. Simul in hoc casu propter $a = \pm 2b$, formae erunt ancipites.

Ex his omnibus colligitur, formas (a, b, c) (a', b', c') proprie aequiualentes esse non posse nisi fuerint oppositae, simulque *aut* ancipites, *aut* $a = c = a' = c'$. In hisce casibus formas (a, b, c), (a', b', c') proprie aequiualere, vel a priori facile praeuideri potuit; si enim formae sunt oppositae, improprie, et si insuper ancipites, etiam poprie aequiualentes esse debent; si vero $a = c$, forma $\left(\frac{D + (a - b)^2}{a}, a - b, a\right)$ formae (a, b, c) contigua et proin aequiualens erit; sed propter $D + bb = ac = aa$ fit $\frac{D + (a - b)^2}{a}$