Forma f^{IV} per reductionem primam vel secundam vlterius deprimi nequit.

274. Quando forma ternaria habetur, cuius coëfficiens primus, atque formae adiunctae tertius, quantum fieri potest per methodos praecedentes sunt depressi: methodus sequens reductionem vlteriorem suppeditat.

Adhibendo signa eadem vt in art. 272, et ponendo $\alpha = 1$, $\alpha' = 0$, $\beta' = 1$, $\alpha'' = 0$, $\beta'' = 0$, $\gamma'' = 1$, i. e. adhibendo substitutionem

$$\begin{matrix} 1, & \beta, & \gamma \\ 0, & 1, & \gamma' \\ 0, & 0, & 1 \end{matrix}$$

erit $m = a$, $m' = a' + 2b''\beta + a\beta\beta$, $m'' = a'' + 2b\gamma' + 2b'\gamma + a\gamma\gamma + 2b''\gamma\gamma' + a'\gamma'\gamma'$, $n = b + a'\gamma' + b'\beta + b''(\gamma + \beta\gamma') + a\beta\gamma$, $n' = b' + a\gamma + b''\gamma'$, $n'' = b'' + a\beta$; praeterea $M'' = A''$, $N = B - A''\gamma'$, $N' = B' - N\beta - A''\gamma$. Per talem itaque substitutionem coëfficientes a, A'', qui per reductiones praecedentes diminuti sunt, non mutantur; quamobrem negotium in eo versatur, vt per idoneam determinationem ipsorum β, γ, γ' depressiones in coëfficientibus reliquis obtineantur. Ad hunc finem obseruamus primo, si fuerit $A'' = 0$, supponi posse, esse etiam $a = 0$; si enim a non $= 0$, reductio prima adhuc semel applicabilis foret, quum cuiuis formae binariae determinantis 0 aequiualeat forma talis $(0, 0, h)$, siue cuius terminus primus $= 0$ (V. art. 215). Prorsus simili ratione supponere licet, esse etiam $A'' = 0$, si fuerit $a = 0$, ita vt vel neuter numerorum a, A'' sit 0 vel vterque.

In casu priori manifestum est, ipsos β, γ, γ' ita determinari posse, vt sine respectu signi n'', N, N' resp. non sint maiores quam $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}A''$, $\frac{1}{2}A''$. Ita in exemplo primo art. praec. transibit forma postrema $\begin{pmatrix} 1, & 257, & 2 \\ 1, & 0, & 16 \end{pmatrix}$, cui adiuncta est $\begin{pmatrix} -513, & -2, & -1 \\ 1, & -16, & 32 \end{pmatrix}$, per substitutionem

$$\begin{matrix} 1, & -16, & 16 \\ 0, & 1, & -1 \\ 0, & 0, & 1 \end{matrix}$$

in hanc $\begin{pmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} \ldots f^{IV}$, cui adiuncta est $\begin{pmatrix} -1, & -1, & -1 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$.

In casu posteriori, vbi $a = A'' = 0$, adeoque etiam $b'' = 0$, erit $m = 0$, $m' = a'$, $m'' = a'' + 2b\gamma' + 2b'\gamma + a'\gamma'\gamma'$, $n = b + a'\gamma' + b'\beta$, $n' = b'$, $n'' = 0$. Erit itaque $D = -a'b'b' = -m'n'n'$; perspicieturque facile, β et γ' ita determinari posse, vt n fiat aequalis residuo absolute minimo ipsius b secundum modulum qui est diuisor communis maximus ipsorum a', b', i. e. vt n fiat non maior quam semissis huius diuisoris sine respectu signi, adeoque $n = 0$, quoties a', b' inter se sunt primi. Ipsis β, γ' in hunc modum determinatis, valor ipsius γ ita accipi poterit, vt m'' non sit maior quam b' sine respectu signi; hoc quidem impossibile esset quando $b' = 0$; tunc vero foret $D = 0$, quem casum exclusimus. Ita fit pro forma postrema in ex. 2 art. praec. $n = -2 - \beta + 2\gamma'$, vnde statuendo $\beta = -2$, $\gamma' = 0$, fit $n = 0$, porro $m'' = 2 - 2\gamma$, et ponendo $\gamma = 1$, $m'' = 0$. Habemus itaque substitutionem

$$\begin{matrix} 1, & -2, & 1 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{matrix}$$

per quam forma illa transit in $\begin{pmatrix} 0, & 2, & 0 \\ 0, & -1, & 0 \end{pmatrix} \ldots f^{\mathrm{v}}$.

275. Si habetur series formarum ternariarum aequiualentium f, f', f'', f'''. etc., atque transformationes cuiusuis harum formarum in sequentem: ex transformationibus formae f in f', formaeque f' in f'' per art. 270 deducitur transformatio formae f in f''; ex hac atque transf. formae f'' in f''' sequitur transf. formae f in f''' etc., manifestoque hoc pacto transformatio formae f in quamcunque aliam seriei inueniri poterit. Et quum ex transformatione formae f in quamcunque aliam aequiualentem g deduci possit transformatio formae g in f (S'' ex S artt. 268, 269), hoc modo erui poterit transformatio cuiuslibet formae seriei f', f'' etc. in primam f. — Ita pro formis exempli primi art. praec inueniuntur substitutiones

$$\begin{matrix} 13, & 4, & 0 \\ 6, & 2, & -7 \\ -9, & -3, & 11 \end{matrix} \;\Bigg|\; \begin{matrix} 13, & 188, & -4 \\ 6, & 87, & -2 \\ -9, & -130, & 3 \end{matrix} \;\Bigg|\; \begin{matrix} 13, & -20, & 16 \\ 6, & -9, & 7 \\ -9, & 14, & -11 \end{matrix}$$