ratione ea quae ad illas spectant plerumque sponte sequuntur. Infra autem docebimus, quamlibet classem improprie primitiuam simili modo quasi associatam esse aut vnicae classi proprie primitiuae aut tribus (eiusdem determinantis). Porro pro determinantibus negatiuis classes negatiuas praeterire licebit, quippe quibus singulis certae classes positiuae semper respondent. Vt itaque naturam classium proprie primitiuarum profundius penetremus, ante omnia differentiam certam essentialem explicabimus, secundum quam totus ordo classium propriarum in plura *genera* subdiuidi potest. Quoniam hoc argumentum grauissimum hactenus nondum attigimus, res ab integro nobis erit repetenda.

228. Theorema. *Per formam quamcunque proprie primitiuam $F$ repraesentari possunt infinite multi numeri per numerum primum quemcunque datum $p$ non diuisibiles.*

*Dem.* Si forma $F = axx + 2bxy + cyy$, manifestum est, $p$ omnes tres numeros $a$, $2b$, $c$ simul metiri non posse. Iam quando $a$ per $p$ non est diuisibilis, patet, si pro $x$ assumatur numerus quicunque per $p$ non diuisibilis, pro $y$ vero numerus per $p$ diuisibilis, valorem formae $F$ fieri non diuisibilem per $p$; quando $c$ per $p$ non est diuisibilis, idem obtinetur tribuendo ipsi $x$ valorem diuisibilem ipsique $y$ valorem non diuisibilem; denique quando tum $a$ tum $c$ per $p$ sunt diuisibiles, adeoque $2b$ non diuisibilis, forma $F$ valorem per $p$ non diuisibilem induet tribuendo tum ipsi $x$ tum ipsi $y$ valores quoscunque per $p$ non diuisibiles. *Q. E. D.*

Manifestum est, theorema etiam pro formis *improprie primitiuis* locum habere, si modo non fuerit $p = 2$.

Quoniam plures huiusmodi conditiones simul consistere possunt, vt idem numerus per quosdam numeros primos datos diuisibilis sit, per alios non diuisibilis (v. art. 32.): facile perspicitur, numeros $x$, $y$ infinite multis modis ita determinari posse, vt forma primitiua $axx + 2bxy + cyy$ valorem per quotcunque numeros primos datos non diuisibilem adipiscatur, a quibus vnice excludendus est 2 quoties forma est improprie primitiua. Hinc patet, theorema generalius ita proponi posse: *Per formam quamcunque primitiuam repraesentari possunt infinite multi numeri, qui ad numerum quemcunque datum (imparem, quando forma est improprie primitiua) sint primi.*

229. Theorema. *Sit $F$ forma primitiua determinantis $D$, $p$ numerus primus ipsum $D$ metiens: tum numeri per $p$ non diuisibiles qui per formam $F$ repraesentari possunt in eo conuenient, vt vel omnes sint residua quadratica ipsius $p$, vel omnes non residua.*

*Dem.* Sit $F = (a, b, c)$; $m$, $m'$ duo numeri quicunque per $p$ non diuisibiles qui per formam $F$ repraesentari possunt, scilicet $m = agg + 2bgh + chh$, $m' = ag'g' + 2bg'h' + ch'h'$. Tum erit $mm' = (agg' + b(gh' + hg') + chh')^2 - D(gh' - hg')^2$; quare $mm'$ quadrato congruus erit secundum modulum $D$, adeoque etiam secundum $p$, i. e. $mm'$ erit residuum quadraticum ipsius $p$. Hinc sequitur, aut vtrumque

$m$, $m'$ esse residuum quadraticum ipsius $p$, aut vtrumque non-residuum. *Q. E. D.*

Simili modo probatur, quando determinans $D$ per 4 sit diuisibilis, omnes numeros impares per $F$ repraesentabiles vel esse $\equiv 1$, vel omnes $\equiv 3$ (mod. 4). Scilicet productum e duobus numeris talibus in hoc casu semper erit residuum quadr. ipsius 4, adeoque $\equiv 1$ (mod. 4); quare vel vterque erit $\equiv 1$, vel vterque $\equiv 3$.

Denique quando $D$ per 8 est diuisibilis, productum e duobus numeris quibuscunque imparibus, qui per $F$ repraesentari possunt, erit R. Q. ipsius 8 et proin $\equiv 1$ (mod. 8). Quare in hoc casu omnes numeri impares per $F$ repraesentabiles vel erunt $\equiv 1$, vel omnes $\equiv 3$, vel omnes $\equiv 5$, vel omnes $\equiv 7$ (mod. 8).

Ita e. g. quum per formam $(10, 3, 17)$ repraesentari possit numerus 10 qui est N. R. ipsius 7: omnes numeri per 7 non diuisibiles, qui per formam illam repraesentari possunt, non-residua ipsius 7 erunt. — Quum $-3$ per formam $(-5, 1, 49)$ repraesentabilis et sec. mod. 4 sit $\equiv 1$, omnes numeri impares per formam hanc repraesentabiles perinde se habebunt.

Ceterum, si ad proprositum praesens necessarium esset, facile demonstrare possemus, numeros per formam $F$ repraesentabiles ad nullum numerum primum qui ipsum $D$ non metiatur, talem relationem fixam habere, sed promiscue tum residua tum non-residua numeri cuiusuis primi ipsum $D$ non metientis per formam $F$ re-