44. Si in æquatione pro Superficie duæ variabiles y & z ubique eundem dimensionum numerum constituant, tum omnes sectiones ad Axem AP normales erunt figuræ rectilineæ. Posito enim pro x valore quocunque constante, prodibit æquatio inter y & z homogenea, quæ unam pluresve Lineas rectas indicat. Cum igitur numerus dimensionum, qui a binis y & z constituitur, ubique sit idem, vel par erit vel impar; & hanc ob rem, uti supra §. 20. ostensum est, hujusmodi Corpora binas habebunt partes inter se æquales. Scilicet portiones in regionibus prima & quinta inter se erunt similes, tum vero etiam in regione secunda & tertia, & ita de ceteris, uti Tabella loco citato indicat. CAP. II.

45. Jam plures hic contemplati sumus Corporum species, in quibus dantur infinitæ sectiones rectilineæ; veluti hanc ultimo pertractatam, & cylindricas atque conicas. Hæ vero ita sunt comparatæ ut sectiones per Axem AP factæ sint rectilineæ; hoc autem genus latius patet. Sit enim $AKMP$, sectio Corporis per Axem AP facta, ad angulum $MPV = \phi$; positis $AP = x$, $PQ = y$, & $QM = z$, erit $\frac{z}{y}$ Tangens anguli ϕ; & recta $PM = \frac{z}{\text{fin.}\,\phi}$. Quod si jam Linea KM sit recta, debebit esse $\frac{z}{\text{fin.}\,\phi} = \alpha x + \beta$; ubi α & β erunt constantes ab angulo ϕ pendentes: ideoque erunt Functiones nullius dimensionis ipsarum y & z. Sint R & S hujusmodi Functiones: eritque $x = \text{R}z + \text{S}$; seu $x = \text{R}y + \text{S}$. Vel, denotante T Functionem unius dimensionis, & S nullius dimensionis ipsarum y & z, omnia hujusmodi Corpora continebuntur in hac æquatione generali $x = \text{T} + \text{S}$. TAB. XXXII. *Fig.* 127.

46. Quæcunque autem fuerit proposita Superficies, cujus natura per æquationem inter tres variabiles x, y, & z definiatur, facile erit ejus sectionem quamvis secundum Axem AP factam determinare. Sit enim angulus VPM, quo ista

APPEND. ſectio $AKMP$ ad planum $ACVP$ inclinatur, $= \Phi$; & ponatur recta $PM = v$, quæ erit Applicata ſectionis quæſitæ; quo facto habebitur $QM = z = v.\sin.\Phi$, & $PQ = y = v.\cos.\Phi$. Quod ſi ergo in æquatione pro Superficie loco variabilium y & z iſti valores $v.\cos.\Phi$ & $v.\sin.\Phi$ ſubſtituantur, orietur æquatio inter duas variabiles x & v, qua natura ſectionis $AKMP$ exprimetur. Simili vero modo omnes quoque ſectiones, quæ fiunt ſecundum alterutrum binorum reliquorum Axium principalium AQ vel AR, invenientur. Tres enim iſti Axes AP, AQ & AR, a quibus tres variabiles x, y & z pendent, ita inter ſe ſunt permutabiles, ut perpetuo, quicquid de eorum uno docetur, ad binos reliquos transferatur.

TAB. XXXI. Fig. 121.

47. Samto ergo plano APQ pro norma, ad quod omnes ſectiones Superficiei referantur; ſectio quæcunque plano facta vel erit parallela huic plano, vel ad id erit inclinata; hocque caſu planum ſectionis continuatum alicubi interſecabit planum APQ, atque interſectio iſtorum planorum erit Linea recta. Priori quidem caſu, quo planum ſectionis parallelum eſt plano APQ, natura ſectionis innoteſcet tribuendo quantitati z valorem conſtantem. Poſteriori vero caſu, quo planum ſectionis ad planum APQ inclinatur, naturam ſectionis adhuc tantum definire licet, ſi vel recta AP vel recta AQ fuerit interſectio plani ſecantis cum plano APQ. Ad omnes ergo omnino ſectiones eruendas ſupereſt, ut quaſcunque alias binorum illorum planorum interſectiones contemplemur.

TAB. XXXIII. Fig. 128.

48. Sit recta ES, Axi AP parallela, interſectio plani ſecantis cum plano APQ: angulusque inclinationis QSM, quo planum ſecans ESM ad planum APQ inclinatur, ponatur $= \Phi$, & diſtantia AE vocetur $= f$. Cum jam ſit $AP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$; erit $ES = x$, & $QS = y + f$. Quod ſi ergo ſectio ad rectam ES tanquam Axem referatur, erit Abſciſſa $ES = x$, Applicata vero SM ponatur $= v$; unde, ob angulum $QSM = \Phi$, obtinebitur $QM = z = v \sin \Phi$, & $SQ = y + f = v.\cos.\Phi$, hincque $y = v.\cos.\Phi - f$. Quare, ſi in æquatione pro Superficie inter

inter x, y, & z, ſubſtituatur $y = v.cof.\phi - f$ & $z = v.fin.\phi$, CAP. II.
orietur æquatio inter Coordinatas x & v ſectionis ESM quæſitæ. Si interſectio ES eſſet normalis ad Axem AP; tum, quia foret parallela alteri Axi principali in plano APQ exiſtenti, permutandis variabilibus x & y, ſectio eodem modo invenietur.

49. Habeat jam interſectio ES in plano APQ poſitionem quamcunque; cui recta AE, ad Axem AP normalis, occurrat in puncto E. Tum ducatur ETX Axi AP parallela, & ponatur $AE = f$, & angulus $TES = \theta$. Sumtis porro tribus variabilibus $AP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$; ex Q ad ES ducatur normalis QS, & jungatur, recta MS, erit angulus QSM inclinatio plani ſecantis ad planum APQ, qui ponatur $= \phi$. Deinde vero ſint ſectionis quæſitæ Coordinatæ $ES = t$ & $SM = v$. Ex S ad EX & QP productam ducantur perpendicula ST & SV; eritque $QM = z = v.fin.\phi$; $QS = v.cof.\phi$; $SV = v.cof.\phi.fin.\theta$, & $QV = v.cof.\phi.cof.\theta$. Poſtea vero, erit $ST = VX = t.fin.\theta$, & $ET = t.cof.\theta$. Ex his colligitur tandem $AP = x = t.cof.\theta + v.cof.\phi.fin.\theta$, & $PQ = y = v.cof.\phi.cof.\theta - t.fin.\theta - f$; qui valores, ſi loco x, y & z ſubſtituantur, dabunt æquationem pro ſectione quæſita.

TAB. XXXIII. Fig. 129.

50. Data ergo æquatione pro Solido quocunque, ex ea facile elici poteſt æquatio pro Sectione ejus quacunque plana. Ac primo quidem perſpicuum eſt, ſi æquatio pro Solido inter tres Coordinatas x, y & z, fuerit algebraïca, tum quoque omnes ejus ſectiones fore Curvas algebraïcas. Deinde vero, cum æquatio inter Coordinatas ſectionis t & v oriatur, ponendo in æquatione pro Solido $z = v.fin.\phi$, $x = t.cof.\theta + v.cof.\phi.fin.\theta$, & $y = v.cof.\phi.cof.\theta - t.fin.\theta - f$, manifeſtum eſt in æquatione pro quavis ſectione Coordinatas t & v plures dimenſiones obtinere non poſſe, quam in æquatione pro Solido tres Coordinatæ x, y & z conſtituant. Fieri tamen quandoque poteſt ut æquatio pro ſectione ad ordinem

 inferiorem

APPEND. inferiorem referatur; ſupremis ſcilicet membris, poſt ſubſtitutionem, ſe ſe tollentibus.

51. Si igitur in æquatione pro Superficie tres variabiles x, y & z unicam tantum conſtituant dimenſionem, ita ut æquatio ſit hujuſmodi $\alpha x + \beta y + \gamma z = a$; tum omnes hujus Superficiei ſectiones erunt Lineæ rectæ. Erit autem hoc caſu Superficies plana; uti, cum attendenti facile patebit, tum infra clarius oſtendetur: atqui ex Elementis notum eſt ſectionem duorum planorum Lineam rectam eſſe oportere. Simili modo hinc intelligitur omnium Solidorum, quorum natura hac generali æquatione contineatur

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta xy + \varepsilon xz + \zeta yz + ax + by + cz + ee = 0;$$

ſingulas ſectiones, niſi ſint Lineæ rectæ, Lineas ſecundi ordinis eſſe debere, neque ullam dari ſectionem, cujus natura per æquationem ſecundi gradus exprimi nequeat.

CAPUT III.

De ſectionibus Cylindri, Coni & Globi.

52. Quoniam hæc Corpora in Elementis Stereometriæ conſiderari ſolent, eorum ſectiones hic antea inveſtigari conveniet, quam ad Solida alia minus nota progrediamur. Primum igitur, Cylindrorum duæ occurrunt ſpecies in Elementis, *rectorum* ſcilicet ac *ſcalenorum*. Cylindrus *rectus* vocatur, cujus omnes ſectiones ad Axem normales ſint Circuli inter ſe æquales, atque Centra in eadem Linea recta diſpoſita habentes. Cylindrus autem *ſcalenus* ſectiones ad Axem, non normales ſed ſub dato angulo inclinatas, habet circulares; quæ affectio commodius ita exprimetur, ut dicamus Cylindrum obliquum ſeu ſcalenum eſſe cujus omnes ſectiones ad

ad Axem normales ſint Ellipſes æquales, quarum Centra in eadem Linea recta, quæ Axis Cylindri vocatur, ſint poſita. Cap. III.

53. Sit igitur Cylindrus, ſive rectus ſive ſcalenus, cujus Axis CD perpendiculariter inſiſtat plano tabulæ; ſitque ejus Baſis $AEBF$, ſeu ſectio a plano tabulæ formata, vel Circulus vel Ellipſis. Aſſumam vero hanc Baſin eſſe Ellipſin quamcunque, Centrum in C & Axes conjugatos AB & EF habentem; quoniam, quæ de Cylindro ſcaleno tradentur, facillime ad rectum accommodabuntur. Ponatur ergo alter ſemiaxis $AC = BC = a$, alter vero $CE = CF = c$; poſitis nunc tribus Coordinatis $CP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$; erit, ex natura Ellipſis, $aacc = aayy + ccxx$; quæ eadem æquatio exprimet naturam Cylindri, cum tertia variabilis z, ob omnes ſectiones plano CPQ parallelas inter ſe æquales, in æquationem non ingrediatur. Tab. XXXIII. Fig. 130.

54. Hujus ergo Cylindri omnes ſectiones Baſi parallelæ eidem erunt ſimiles & æquales. Scilicet Circuli in Cylindro recto & Ellipſes in ſcaleno. Tum vero ſectiones, quæ fiunt ſecundum plana ad APQ normalia, erunt Lineæ rectæ, binæ inter ſe parallelæ, quæ, ubi Cylindrus tangetur a plano, in unum coaleſcent; atque adeo imaginariæ evadunt, ſi planum Cylindro prorſus non occurrat. Hoc ipſum ex æquatione ſponte ſequitur; ſi enim vel x vel y vel $x \pm \alpha y$ ponatur conſtans ad denotandam interſectionem plani ſecantis & Baſis, tum æquatio duas habebit radices ſimplices. Sicque determinavimus jam ſectiones omnes, quæ fiunt per plana, uni trium planorum principalium parallela.

55. Ad naturam reliquarum ſectionum indagandam, ponamus planum ſecans cum plano Baſis interſectionem conſtituere rectam Lineam GT, quæ primo ſit parallela alteri Axi conjugato EF, ſeu ad alterum AB productum in G normalis. Hoc poſito, ſit diſtantia $CG = f$, & inclinatio plani ſecantis GTM ad Baſim menſuretur angulo $= \phi$. Occurrat planum ſecans GTM Axi Cylindri in D; &, ducta recta DG, erit