— Classes formarum determinantis 79 (vtpote numeri formae $4n+3$) omnes sunt propriae.

Si forma (a, b, c) est deriuata, et quidem e primitiua $\left(\frac{a}{m}, \frac{b}{m}, \frac{c}{m}\right)$, haec aut proprie primitiua aut improprie esse poterit. In casu priori m erit diuisor communis maximus etiam numerorum $a, 2b, c$; in posteriori horum numerorum diu. comm. max. erit $2m$. Hinc intelligitur distinctio inter *formam e forma proprie primitiua deriuatam*, et *formam ex improprie primitiua deriuatam*; nec non (quoniam propter art. 161 omnes formae eiusdem classis hoc respectu perinde se habent) inter *classem deriuatam e classe proprie primitiua* et *classem ex improprie primitiua deriuatam.*

Per has distinctiones fundamentum primum nacti sumus, cui distributionem omnium classium formarum determinantes dati in varios *ordines* superstruere possumus. Classes duas, quarum repraesentantes sunt formae (a, b, c), (a', b', c') in *eundem ordinem* coniiciemus, *tum* si numeri a, b, c eundem diuisorem communem maximum habent vt a', b', c', *tum* $a, 2b, c$ eundem vt a', b', c'; si vero aut alterutra aut vtraque harum conditionum locum non habet, classes ad *ordines diuersos* referentur. Hinc statim patet, omnes classes proprie primitiuas vnum ordinem constituere; omnes classes improprie primitiuas, alium; si mm est quadratum determinantem D metiens classes deriuatae e classibus proprie primitiuis determinantis $\frac{D}{mm}$ formabunt ordinem peculiarem, aliumque classes deriuatae e classibus improprie primitiuis determinantis $\frac{D}{mm}$ etc. Si forte D per nullum quadratum (praeter 1) diuisibilis est, ordines classium deriuatarum non aderunt adeoque aut vnus tantum ordo dabitur (quando $D \equiv 2$ vel 3 secundum mod. 4) puta ordo classium proprie primitiuarum, aut duo quando $D \equiv 1$ (mod. 4)) scilicet O. classium proprie primitiuarum et O. cl. impr. primitiuarum. Per principia calculi combinationum haud difficile conditur regula sequens generalis: Si supponitur $D = D' \, 2^{2\mu} \, a^{2\alpha} \, b^{2\beta} \, c^{2\gamma} \ldots$ ita vt D' nullum factorem quadraticum implicet, et a, b, c etc. sint numeri primi impares diuersi (ad quam formam quiuis numerus redigi potest faciendo $\mu = 0$ quando D per 4 non est diuisibilis; et α, β, γ etc. omnes $= 0$ siue quod eodem redit omittendo factores $a^{2\alpha}$, $b^{2\beta}$, $c^{2\gamma}$ etc. quando D per nullum quadratum impar diuidi potest): habebuntur aut ordines $(\mu + 1)(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)\ldots$ nempe quando $D' \equiv 2$ vel 3 (mod. 4); aut ordines $(\mu + 2)(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)\ldots$, quando $D' \equiv 1$ (mod. 4). Sed demonstrationem huius regulae supprimimus, quoniam neque difficilis neque hic adeo necessaria est.

Ex. 1. Pro $D = 45 = 5 \cdot 3^2$ habentur sex classes, quarum repraesentantes $(1, 0, -45)$, $(-1, 0, 45)$, $(2, 1, -22)$, $(-2, 1, 22)$, $(3, 0, -15)$, $(6, 3, -6)$. Hae distribuuntur in quatuor ordines, scilicet O. I comprehendet duas classes proprias quarum repr. $(1, 0, -45)$, $(-1, 0, 45)$; O. II continebit duas classes improprias, quarum repr. $(2, 1, -22)$, $(-2, 1, 22)$; O. III continebit vnam classem deriuatam e propria determinantis 9, puta cuius repr. $(3, 0, -15)$; O. IV constabit ex vna classe deriuata ex impropria det. 9, puta cuius repr. $(6, 3, -6)$.

Ex. 2. Classes positiuae determinantis $-99 = -11.3^2$ inter quatuor ordines distribuentur: O. I complectetur classes proprie primitiuas sequentes *): $(1, 0, 99)$, $(4, 1, 25)$, $(4, -1, 25)$, $(5, 1, 20)$, $(5, -1, 20)$, $(9, 0, 11)$; O. II continebit classes improprias $(2, 1, 50)$, $(10, 1, 10)$; O. III classes deriuatas e propriis determinantis -11, $(3, 0, 33)$, $(9, 3, 12)$, $(9, -3, 12)$; O. IV classem vnicam deriuatam ex impropria det. -11, $(6, 3, 18)$. — Classes negatiuae huius determinantis prorsus eodem modo in ordines distribui poterunt.

Obseruamus, *classes oppositas semper ad eundem ordinem referri*, cuius theorematis ratio nullo negotio perspicitur.

227. Ex his diuersis ordinibus imprimis ordo classium proprie primitiuarum maximam attentionem meretur. Nam singulae classes deriuatae a certis classibus primitiuis (determinantis minoris) originem trahunt, ex quarum conside-

*) Adhibendo breuitatis caussa formas repraesentantes pro classibus ipsis quarum vice funguntur.