

est $= 2^{n+2}h$, quum in numero 3 duae exceptiones sese compensent.

292. Discerptiones numerorum (vt formarum binariarum supra) in tria quadrata a repraesentationibus per formam $xx + yy + zz$ ita distinguimus, vt in illis ad solam quadratorum magnitudinem, in his vero insuper ad ipsorum ordinem radicumque signa respiciamus, adeoque repraesentationes $x = a, y = b, z = c$, et $x = a', y = b', z = c'$ pro diuersis habeamus nisi simul $a = a', b = b', c = c'$; discerptiones autem in $aa + bb + cc$ et in $a'a' + b'b' + c'c'$ pro vna, si nullo ordinis respectu habito haec quadrata illis aequalia sunt. Hinc patet,

I. Discerptionem numeri M in quadrata $aa + bb + cc$ aequipollere 48 repraesentationibus, si nullum sit $= 0$ omniaque inaequalia; 24 autem, si *vel* vnum $= 0$ reliqua inaequalia, *vel* nullum $= 0$ atque duo inter se aequalia. Si vero in discerptione numeri dati in tria quadrata duo ex his sunt $= 0$, *aut* vnum $= 0$ reliqua aequalia, *aut* omnia aequalia, repraesentationibus 6, *aut* 8, *aut* 12 aequiualens erit; sed haec euenire nequeunt nisi in casibus singularibus vbi $M = 1$ aut 2 aut 3 resp., siquidem repraesentationes esse debent propriae. His exclusis supponamus, multitudinem omnium discerptionum numeri M in terna quadrata (diuisoris communis expertia) esse E , atque inter has reperiri e in quibus vnum quadratum 0, et e' in quibus duo quadrata aequalia; illae etiam tamquam discerptiones in bina quadrata, hae tamquam discerptio-

nes in quadratum et quadratum duplum spectari possunt. Tunc multitudo omnium repraesentationum propriarum numeri M per $xx + yy + zz$ erit $= 24 (e + e') + 48 (E - e - e') = 48 E - 24 (e + e')$. At e theoria formarum binariarum facile deducitur, e fore vel $= 0$ vel $= 2^{\mu-1}$, prout -1 sit non-residuum vel residuum quadraticum ipsius M , nec non $e' = 0$ vel $= 2^{\mu-1}$, prout -2 non-residuum vel residuum ipsius M , denotante μ multitudinem factorum primorum (imparium) ipsius M (v. art. 182; expositionem vberiter hic supprimimus). Hinc facile colligitur, fore $E = 2^{\mu-2}k$, si tum -1 tum -2 sit N.R. ipsius M ; $E = 2^{\mu-2}(k+2)$, si vterque numerus sit residuum; denique $E = 2^{\mu-2}(k+1)$, si alter residuum sit alter non-residuum. In casibus exclusis $M = 1$ et $M = 2$, haec formula praeberet $E = \frac{3}{4}$, quum esse debeat $E = 1$; pro $M = 3$ autem recte prouenit $E = 1$, exceptionibus se mutuo compensantibus.

Si itaque M est numerus primus, fit $\mu = 1$, adeoque $E = \frac{1}{2}(k+2)$ quando $M \equiv 1 \pmod{8}$; $E = \frac{1}{2}(k+1)$ quando $M \equiv 3$ aut $\equiv 5$. Haecce theorematata specialia ab ill. Le Gendre per inductionem dedecta et in commentatione egregia iam saepius laudata *Hist. de l'Ac. de Paris* 1785 p. 530 sqq. prolata fuerunt, etsi sub forma aliquantum diuersa, cuius rei ratio imprimis in eo est sita, quod aequiualentiam propriam ab impropria non distinxit, et proin classes oppositas commiscuit.

II. Ad inuentionem omnium discriptionum numeri M in terna quadrata (sine diu. comm.)

non opus est, omnes repraesentationes proprias omnium formarum ϕ, ϕ', ϕ'' eruere. Primo enim facile confirmatur, omnes (48) repraesentationes formae ϕ ad eundem valorem expr. $\sqrt{-(p, -q, r)}$ pertinentes (statuendo $\phi = (p, q, r)$) discriptionem eandem numeri M praebere, adeoque sufficere, si vna ex illis habeatur, siue quod eodem redit, si tantummodo omnes diuersae discriptiones *) formae ϕ in terna quadrata conscriptae sint, et perinde de reliquis ϕ', ϕ'' etc. Dein si ϕ est e classe non ancipite, eam formam quae e classe opposita electa est omnino praeterire licebit, siue e binis classibus oppositis vnicam considerare sufficit. Quum enim prorsus arbitrium sit, quaenam forma e singulis classibus eligatur, supponamus e classe opposita ei in qua est ϕ eligi formam ipsi ϕ oppositam, quae sit $= \phi'$. Tunc nullo negotio perspicitur, si discriptiones propriae formae ϕ indefinite exhibeantur per $(gt + hu)^2 + (g't + h'u)^2 + (g''t + h''u)^2$, omnes discriptiones formae ϕ' expressum iri per $(gt - hu)^2 + (g't - h'u)^2 + (g''t - h''u)^2$, nec non ex his easdem discriptiones numeri M deriuari vt ex illis. Denique pro eo casu vbi ϕ est forma e classe ancipite, attamen neque e classe principali neque formae $(2, 0, \frac{1}{2}M)$ aut $(2, 1, \frac{1}{2}(M + 1))$ aequiualens (prout M par aut impar), e valoribus expr. $\sqrt{-(p, -q, r)}$ semissem omittere licet; sed breuitatis caussa hocce compendium fusius hic non explicamus. — Ceterum iisdem compendiis etiam vti possumus,

*) Semper subintelligendum *propriae*, si hanc expressionem a repraesentationibus ad discriptiones transferre lubet,