LIB. II. bus Lineis ſecundi ordinis complexæ, vel ex Linea ſecundi ordinis una & duabus rectis vel denique ex quatuor Lineis rectis complexæ erunt. Similiter ratio Linearum complexarum ordinis quinti altiorumque ordinum eſt comparata parique modo enumerari poterit. Ex quo patet in quovis Linearum ordine ſimul omnes Lineas ordinum inferiorum comprehendi, neque vero ſimpliciter, ſed quælibet ordinum inferiorum complexa cum Linea vel Lineis rectis, vel cum Lineis ſecundi, tertii, ſequentiumve ordinum, ita tamen, ut ſi numeri ſingulorum ordinum ad quos Lineæ ſimplices pertinent in unam ſummam addantur, prodeat numerus, quo ordo Lineæ complexæ indicatur.

CAPUT IV.

De Linearum cujuſque ordinis præcipuis proprietatibus.

66. INter præcipuas proprietates Linearum cujuſque ordinis primum locum tenet earum concurſus cum Linea recta, ſeu interſectionum multitudo, quas Linea recta cum Lineis cujuſque ordinis facere poteſt. Cum enim Linea primi ordinis, ſeu recta, ab alia Linea recta nonniſi in unico puncto ſecari poſſit, Lineæ curvæ autem in pluribus punctis a Linea recta ſecari queant; merito ergo quæri ſolet in quot punctis Linea curva cujuſque ordinis ſecari poſſit a Linea recta utcunque ducta: ex ipſa enim hac quæſtione natura Linearum curvarum ad varios ordines pertinentium melius cognoſcetur. Reperietur autem Linea ſecundi ordinis a recta in pluribus quam duobus punctis ſecari non poſſe: Linea autem tertii ordinis a recta in pluribus quam tribus punctis ſecari nequit, & ita porro.

67. Supra jam mentionem fecimus modi, quo determinari poteſt in quot punctis Axis cujuſque Curvæ ab ipſa Curva ſecetur. Data enim æquatione inter Abſciſſam x & Applicatam

Cap. IV.

Tab. IV. *Fig.* 16.

catam y, quia ubi Curvæ punctum in Axem incidit, ibi Applicata y fit $=0$, ponatur in æquatione $y=0$, atque æquatio reſultans, quæ tantum x continebit, monſtrabit valores ipſius x, hincque Axis puncta, ubi Curva ipſum ſecabit. Ita in æquatione pro Circulo, quam ſupra invenimus, $yy = 2ax - xx$, ſi ponamus $y=0$, fit $0 = 2ax - xx$, unde duo valores ipſius x reſultant, $x=0$ & $x=2a$, qui indicant Axem RS primo in ipſo Abſciſſarum initio A, tum vero in puncto B, exiſtente $AB=2a$, a Circulo interſecari. Similique modo in aliis Lineis curvis, poſito in æquatione $y=0$, radices ipſius x indicabunt interſectiones Curvæ cum Axe.

68. Quoniam in æquatione generali pro quavis Curva, Linea recta quæcunque vicem Axis ſuſtinet, ſi in æquatione generali ponatur Applicata $y=0$, æquatio remanens indicabit in quot punctis Linea curva a recta quacunque trajiciatur. Prodibit autem æquatio Abſciſſam ſolam x, tanquam incognitam, complectens, cujus ſingulæ radices oſtendent interſectiones Curvæ cum Axe. Pendebit ergo interſectionum numerus a maxima ipſius x in æquatione poteſtate, hincque major eſſe non poterit quam exponens ſummæ ipſius x poteſtatis. Tot vero erunt interſectiones, quot exponens maximæ poteſtatis ipſius x continet unitates, ſi omnes radices æquationis fuerint reales, ſin autem aliquot radices fuerint imaginariæ, interſectionum numerus tanto erit minor.

69. Cum igitur pro quovis Linearum ordine æquationes generaliſſimas exhibuerimus; ex iis, modo expoſito, invenire poterimus, in quot punctis Lineæ cujuſque ordinis a recta quacunque ſecari queant. Sumamus ergo æquationem pro Lineis primi ordinis ſeu pro Linea recta generalem, $0 = \alpha + \beta x + \gamma y$, ex qua, poſito $y=0$, fit $0 = \alpha + \beta x$, quæ æquatio plus una radice habere nequit, unde patet Lineam rectam ab alia recta in unico puncto ſecari. Sin autem ſit $\beta = 0$, æquatio $0 = \alpha$ impoſſibilis indicat hoc caſu Axem a Linea recta nuſquam ſecari, erunt enim ambæ hæ Lineæ rectæ inter ſe parallelæ, uti patet ex æquatione $0 = \alpha + \gamma y$, quæ oritur ſi $\beta = 0$.

LIB. II. 70. Si in æquatione generali pro Lineis ſecundi ordinis

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta xx + \varepsilon xy + \zeta yy$$

ponamus $y = 0$, prodibit hæc æquatio

$$0 = \alpha + \beta x + \delta xx,$$

quæ æquatio vel duas habet radices reales, vel nullam, vel etiam unicam ſi $\delta = 0$. Hinc Linea ſecundi ordinis a Linea recta vel in duobus punctis ſecabitur, vel in unico, vel nuſquam. Qui caſus omnes ſic in unum comprehendi poſſunt, ut dicamus Lineam ſecundi ordinis a Linea recta pluſquam in duobus punctis ſecari non poſſe.

71. Si in æquatione generali pro Lineis tertii ordinis ponamus $y = 0$, prodibit hujuſmodi æquatio

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma xx + \delta x^3,$$

quæ cum plures tribus radicibus habere nequeat, perſpicuum eſt Lineas tertii ordinis a Linea recta in pluribus quam tribus punctis ſecari non poſſe. Fieri vero poteſt ut Linea tertii ordinis a Linea recta in paucioribus punctis ſecetur, nempe vel in duobus, ſi $\delta = 0$, & æquationis $0 = \alpha + \beta x + \gamma xx$ ambæ radices fuerint reales; vel in unico ſi ſuperioris æquationis duæ radices fuerint imaginariæ, aut ſi ſit & $\delta = 0$ & $\gamma = 0$; vel etiam nuſquam ſi $\delta = 0$ & reliquæ æquationis ambæ radices fuerint imaginariæ, quod idem evenit ſi β, γ, & δ evaneſcant, at α fuerit quantitas non æqualis nihilo.

72. Simili modo colligetur Lineas quarti ordinis a recta in pluribus quam quatuor punctis ſecari non poſſe; hæcque proprietas ad omnes Linearum ordines ita extendetur, ut Lineæ ordinis n a Linea recta in pluribus quam n punctis ſecari nequeant. Neque vero hinc ſequitur omnem Lineam ordinis n a quavis Linea recta in n punctis ſecari, ſed utique fieri poteſt ut numerus interſectionum ſit minor, imo ſubinde prorſus nullus, uti de Lineis ſecundi & tertii ordinis annotavimus. In

hoc

hoc ergo tantum propoſitionis vis eſt poſita, quod interſectionum numerus major nunquam eſſe poſſit, quam exponens ordinis ad quem Linea curva refertur.

73. Ex numero igitur interſectionum, quas Linea recta quæcunque cum data Linea curva facit, ordo ad quem Linea curva pertineat, definiri non poterit. Si enim interſectionum numerus ſit $= n$, non ſequitur Curvam ad ordinem Linearum n pertinere, ſed ad quemvis ordinem ſuperiorem æque referri poterit: quin etiam fieri poteſt ut Curva ne quidem ſit algebraïca ſed tranſcendens. Excludendo autem ſemper tuto affirmari poteſt, Lineam curvam, quæ a recta in n punctis ſecetur, ad nullum Linearum ordinem inferiorem pertinere poſſe. Sic, ſi propoſita Linea curva a recta in quatuor punctis ſecetur, certum eſt, eam neque ad ordinem ſecundum, neque tertium referri; utrum autem in ordine quarto, aut ſuperiori quopiam contineatur, an ſit tranſcendens, hinc dijudicari non poteſt.

74. Æquationes generales, quas pro Lineis cujuſque ordinis exhibuimus, plures continent quantitates conſtantes arbitrarias, quibus ſi valores determinati tribuantur, Lineæ curvæ penitus determinabuntur, atque ad datum Axem ita deſcribentur, ut reliquæ Lineæ curvæ omnes, quæ quidem in eadem æquatione generali continebantur, excludantur. Ita, quamvis in æquatione primi ordinis $0 = \alpha + \beta x + \gamma y$ ſola Linea recta contineatur; tamen ejus poſito reſpectu Axis infinitis modis variari poteſt, pro diverſis infinitis valoribus quantitatum conſtantium α, β, γ. Quamprimum autem his quantitatibus conſtantibus definiti valores tribuuntur, poſitio Lineæ rectæ determinatur, ut præter hanc nulla alia æquationi ſatisfacere queat.

75. Hæc igitur æquatio $0 = \alpha + \beta x + \gamma y$ tres determinationes admittere videri poſſet, ob tres conſtantes arbitrarias α, β, & γ. Verum ex natura æquationum intelligitur æquationem jam determinari, ſi tantum ratio inter has conſtantes definiatur, ſcilicet ratio binarum ad unam; ex quo iſta æquatio duas tantum admittet determinationes. Si enim β & γ

 per

LIB. II. per α ita determinentur ut ſit $\beta = -\alpha$ & $\gamma = 2\alpha$, æquatio —— $0 = \alpha - \alpha x + 2\alpha y$, quia α per diviſionem exit, jam prorſus erit determinata. Similem ob rationem æquatio generalis pro Lineis ſecundi ordinis, quæ ſex continet conſtantes arbitrarias, quinque tantum admittit determinationes, æquatio generalis pro Lineis tertii ordinis novem; & generaliter æquatio generalis pro Lineis ordinis n patietur $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$ determinationes.

76. Semper autem iſtæ conſtantes arbitrariæ ita definiri poſſunt ut Linea curva per datum punctum tranſeat, hocque TAB. IV. modo una determinatio orietur. Sit enim propoſita æquatio *Fig.* 17. generalis pro quovis ordine Linearum, quæ ita definiri debeat, ut Linea curva per datum punctum B tranſeat. Sumto pro lubitu Axe, in eoque Abſciſſarum initio A, demittatur ex puncto B in Axem perpendicularis Bb, atque manifeſtum eſt, ſi Curva tranſeat per punctum B, tum poſito intervallo Ab pro x, perpendicularem Bb præbere valorem Applicatæ y. Quare in æquatione generali propoſita, loco x ſubſtituatur Ab, & Bb loco y, ſicque orietur æquatio, ex qua una quantitatum conſtantium $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$, &c., definiri poterit; quo facto omnes Curvæ, quæ in æquatione generali hoc modo determinata continentur, per punctum datum B tranſibunt.

77. Si Linea curva inſuper per punctum C tranſire debeat, inde ad Axem perpendiculo Cc demiſſo, & in æquatione poſito $x = Ac$ & $y = Cc$, nova orietur æquatio ex qua pariter una ex quantitatibus conſtantibus $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c., definietur. Eodem modo intelligitur ſi tria puncta B, C, D præſcribantur, per quæ Linea curva tranſire debeat, inde tres conſtantes definiri; ex quatuor autem punctis B, C, D, E quatuor litteras conſtantes determinationem accipere. Quod ſi ergo tot puncta, per quæ Linea curva tranſeat, proponantur quot determinationes æquatio generalis admittit, tum Linea curva penitus erit determinata, ideoque unica, quæ quidem per omnia puncta propoſita tranſeat.

78. Cum