

LIB. II. $y.\cos.\alpha$. Deinde, ob $OP = a + \frac{A}{\tan.\alpha} - x$, erit $ps = a.\sin.\alpha + A.\cos.\alpha - x.\sin.\alpha$, & $Op - Ps = a.\cos.\alpha + \frac{A.\cos.\alpha}{\tan.\alpha} - x.\cos.\alpha$. Hinc erit $Op = a.\cos.\alpha + \frac{A.\cos.\alpha}{\tan.\alpha} - x.\cos.\alpha + y.\sin.\alpha = \frac{A}{\sin.\alpha} - t$; ideoque $t = A.\sin.\alpha - a.\cos.\alpha + x.\cos.\alpha - y.\sin.\alpha$, & $u = -a.\sin.\alpha - A.\cos.\alpha + x.\sin.\alpha + y.\cos.\alpha$. Quam ob rem, si in æquatione inter t & u data substituatur,

$$t = (x - a).\cos.\alpha - (y - A).\sin.\alpha$$

&

$$u = (x - a).\sin.\alpha + (y - A).\cos.\alpha$$

oriatur æquatio quæsitæ inter x & y . Quacunque ergo lege eadem Curva amb in plano infinites describatur, hoc modo inveniatur æquatio generalis istas Curva omnes simul in se continens.

455. Hoc igitur modo in æquationem includuntur Curvæ numero infinitæ eadem, tantum ratione situs a se invicem discrepantes; si quidem æquatio, quæ inter t & u datur, fuerit invariabilis, neque constantem mutabilem a in se contineat. Quod si autem una pluresve constantes, quæ in æquatione inter t & u insunt, simul ab a pendere assumantur, tum obtinebuntur infinitæ Curvæ diversæ, five similes five dissimiles, eadem pariter æquatione contentæ: Similes scilicet erunt omnes Curvæ, si æquatio inter t & u ita fuerit comparata ut u æquetur Functioni cuicunque homogeneæ unius dimensionis ipsarum t & f , existente f quantitate utcunque ab a pendente; sin secus accadat, Curvæ erunt dissimiles.

TAB. 456. Ut hoc argumentum Curvarum diversarum exemplo
XXII. illustremus, ponamus infinitos describi Circulos AB , aB ,
Fig. 93. amb per datum punctum B transeuntes, qui omnes Centra sua habeant sita in recta AE , cujusmodi Circulis in mappis geographicis meridiani præsentari solent. Demittatur ex B perpen-

perpendicularum in rectam AC , sitque $BC = c$, quod intervallum est invariabile. Tum consideretur Circulus infinitorum descriptorum quicunque amB ; unde una demissa Applicata mP , sit $CP = x$, & $Pm = y$, radius porro hujus Circuli, qui, etsi respectu ejusdem Circuli est constans, tamen respectu omnium est mutabilis, ponatur $aE = BE = a$: erit $CE = \sqrt{(aa - cc)}$ & $PE = x + \sqrt{(aa - cc)}$. Cum igitur sit $PE^2 + Pm^2 = aa$, erit $y^2 + x^2 + 2x\sqrt{(aa - cc)} + aa - cc = aa$; seu $yy = cc - 2x\sqrt{(aa - cc)} - xx$: sin autem intervallum CE loco constantis variabilis in æquationem introducatur, ponaturque $CE = a$, habebitur hæc æquatio aliquanto simplicior $yy = cc - 2ax - xx$, quæ, ob mutabilitatem ipsius a , omnes omnino Circulos per B ductos & Centra in recta AE habentes exhibebit. Simili vero modo Curvæ quæcunque infinitæ certa quadam lege dispositæ ad unam æquationem revocabuntur, dummodo discrimen inter constantes variables & invariables probe observetur.

CAP.
XVIII.

CAPUT XIX.

De intersectione Curvarum.

457. **Q**Uemadmodum Lineæ curvæ a rectis intersecuntur, in præcedentibus Capitibus jam sæpius vidimus, ubi ostendimus Lineas secundi ordinis a rectis in pluribus quam duobus punctis secari non posse, Lineas autem tertii ordinis plures quam tres intersectiones, & quarti ordinis plures quam quatuor & ita porro non admittere. Cum igitur in hoc Capite constituerim intersectiones, quas duæ quævis Curvæ inter se faciunt, definire, oportebit hanc tractationem a Lineis rectis inchoare, atque ipsa illa puncta indagare, in quibus recta quæpiam datam Curvam datam trajicit. Hoc enim modo via parabitur ad intersectiones mutuas Linearum curvarum

LIB. II. rum determinandas, quod argumentum maximum usum habere
 solet in construendis æquationibus altiorum graduum, qua de
 re in sequenti Capite fusius tractabo.

TAB. 458. Sit igitur proposita Curva quæcunque AMm , cujus
XXIII. natura data sit per æquationem inter Coordinatas orthogonales
Fig. 94. $AP = x$, $PM = y$. Dacatur jam recta quæcunque BMm ,
 quæ quot & quibusque in punctis sectura sit Curvam AMm
 definiri oporteat. Ad hoc quærat æquatio pro Linea recta
 pariter inter Coordinatas orthogonales x & y ad eundem A-
 xem AP idemque Abscissarum initium A relata. Æquatio
 ergo pro Linea recta erit hujusmodi $\alpha x + \beta y = \gamma$; qua in-
 dicatur, posito $x = 0$, fore $y = AD = \frac{\gamma}{\beta}$, posito autem
 $y = 0$, fore $x = -AB = \frac{\gamma}{\alpha}$; unde, concursus B hujus
 rectæ cum Axe, pariterque angulus ad B , cujus tangens est
 $= \frac{AD}{AB} = -\frac{\alpha}{\beta}$, innotescit. Sic igitur tam Curva quam
 Recta proposita per æquationes inter communes Coordinatas
 x & y exprimuntur.

459. Quod si in utraque æquatione Abscissas x perpetuo
 æquales assumamus, Applicatæ y , si sint diversæ, ostendent,
 quantum Curvæ & rectæ puncta eidem Abscissæ respondentia
 a se invicem distent. Si igitur ex utraque æquatione æqualis
 prodeat valor Applicatæ y , tum ibi Curva & Recta commune
 habebunt punctum, ideoque eo in loco dabitur intersectio.
 Ad intersectiones ergo inveniendas in utraque æquatione,
 præter Abscissas x , quoque Applicatæ y æquales sunt consti-
 tuendæ; sicque habebuntur duæ æquationes duas quantitates
 incognitas x & y evolventes, ex quarum resolutione vel Ab-
 scissæ x , quibus intersectiones respondent, vel Applicatæ y re-
 perientur. Scilicet, si ex istis duabus æquationibus eliminetur
 incognita y , æquatio nascetur solam incognitam x comple-
 tens, cujus valores exhibebunt Abscissas AP , Ap unde Ap
 applicatæ PM , $p m$ educæ per intersectionum puncta M & m
 transibunt.

460. Cum

460. Cum æquatio pro recta BMm sit $\alpha x + \beta y = \gamma$,
ex ea fiet $y = \frac{\gamma - \alpha x}{\beta}$; qui valor si in æquatione pro Cur-

va loco y substituatur, orietur æquatio tantum x continens, cujus radices reales præbebunt omnes Abscissas, quibus intersectiones respondent; ideoque intersectionum numerus colligitur ex numero radicum realium ipsius x , quas æquatio inventa suppeditat. Quoniam vero in valore ipsius $y = \frac{\gamma - \alpha x}{\beta}$, incognita x unicam tenet dimensionem, post substitutionem emerget æquatio, in qua x non plures habebit dimensiones, quam antea in æquatione pro Curva ambæ x & y conjunctim tenebant. Habebit ergo x vel totidem dimensiones vel pauciores, si quidem per substitutionem summæ ipsius x potestates tollantur.

461. Inventis hoc modo Abscissis AP , Ap , quæ intersectionibus respondent, ex iis ipsa intersectionum puncta M & m facile definientur. Cum enim Applicatæ in punctis P & p erectæ per intersectiones transcant, ea tantum puncta erunt notanda, ubi hæ Applicatæ rectam BMm secant. Notari quoque possent puncta, quibus istæ Applicatæ Curvæ AMm occurrunt; cum autem sæpenumero una Applicata Curvæ in pluribus punctis occurrat, incertum foret quodnam Curvæ punctum simul intersectionem sit præbiturum. Hoc autem incommodum usu non venit, si intersectiones ex recta BMm æstimentur; quippe a qua unaquæque Applicata non nisi in unico puncto secari potest. Quod si autem eveniat, ut duo ipsius x valores fiant inter se æquales, tum duo intersectionum puncta M & m in unum coalescent; quo ergo casu vel recta BM Curvam tanget, vel eam in puncto duplici secabit.

462. Si, eliminata incognita y , æquatio resultans qua x definitur, nullam habeat radicem realem, tum hoc erit indicium Curvam nusquam a recta BMm secari vel tangi; radices autem reales (quotquot fuerint) illius æquationis ostendent totidem intersectiones; quia unicuique Abscissæ reali una rectæ BMm Applicata realis responderet; cui cum sit æqualis Ap-

LIB. II. plicata Curvæ, fieri non potest, quin ibi nulla existat interseccio. Hæc ideo isto loco probe sunt notanda, quod in interseccione Linearum curvarum non semper singulæ radices totidem intersecciones indicent; cujus ratio mox fiet manifesta, cum duas Lineas curvas contemplabimur, earumque intersecciones investigabimus.

T A B.
XXIII.
Fig. 95. 463. Sint igitur descriptæ duæ Curvæ quæcunque ME_m , MF_m , quæ se mutuo interfecerint; ad quarum intersecciones definiendas, natura utriusque exprimatur per æquationem inter Coordinatas orthogonales x & y ad eundem communem Axem AB idemque Abscissarum initium A relatas. Sumtis ergo pro utraque Curva Abscissis x æqualibus, ubi dantur intersecciones, ibidem Applicatæ y convenient. Quocirca, si ex duabus Curvarum æquationibus propositis, eliminando y , formetur nova æquatio solam x tanquam incognitam involvens, intersecciones omnes M , m , m , quotquot fuerint, indicabuntur per radices reales istius æquationis; scilicet, Abscissæ AP , Ap , Ap , &c. quæ interseccionibus M , m , m , &c. respondent, erunt valores ipsius x convenientes pro illa æquatione.

464. Inventis autem Abscissis his AP , Ap &c., quæ interseccionibus conveniunt, non tam facile erit ipsa interseccionum puncta definire. Si enim pro utraque Curva eidem Abscissæ AP plures Applicatæ respondeant, quod evenit, si pro utraque Curva fuerit y Functio multiformis ipsius x , tum ex hac duplici Applicatarum multitudine eas, quæ sint inter se æquales, eligi oportet: quæ investigatio eo erit molestior, quo plures valores Applicata y in utraque Curva obtineat. Hic tamen difficultati facile occurreretur, si, dum ex binis æquationibus propositis Applicata y eliminatur, ea æquatio in subsidium vocetur, qua y per x definitur; ex hac enim æquatione pro quovis ipsius x valore invento cognoscetur magnitudo Applicatæ ex puncto P ad interseccionem usque pertinentis; neque ad hoc opus erit, naturam alterutrius vel adeo utriusque Curvæ perpendisse.