ire in F per substitutionem $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, facile perspicietur, F' per substitutionem $\alpha p + \beta q$, $\alpha p' + \beta q'$, $\alpha p'' + \beta q''$, $\alpha p''' + \beta q'''$; $\gamma p + \delta q$, $\gamma p' + \delta q'$, $\gamma p'' + \delta q''$, $\gamma p''' + \delta q'''$, idem fieri quod F per substitutionem p, p', p'', p'''; q, q', q'', q''', adeoque F' per substitutionem illam transire in ff'. *Q. E. D.*

Praeterea per similem calculum vt in art. praec. facile confirmatur, F' eodem modo in ff' transformabilem fore vt F, quando F' ipsam F proprie implicet; quando vero F improprie sub F' contenta sit, transformationes formae F in ff' et formae F' in ff' oppositas fore respectu vtriusque formae f, f', scilicet quae ex his formis in alteram transformationem directe ingrediatur, in altera accipi inuerse.

Ex combinatione theorematis praesentis cum theor. art. praec. obtinemus sequens generalius: *Si forma F in productum ff' est transformabilis, atque formae f, f' resp. implicant formas g, g', forma F vero sub forma F' contenta est: G in productum gg' transformabilis erit.* Nam per theor. art. praes. G, transformabilis erit in ff', hinc per theor. art. praec. in fg' et per idem theor. etiam in gg'. Porro patet, si omnes tres formae f, f', G formas g, g', F proprie implicent, G eodem modo in gg' transformabilem fore respectu formarum g, g' vt F in ff' respectu formarum f, f'; idem euenire, si illae tres implicationes omnes sint impropriae; denique aeque facile determinari poterit, *quomodo* G in gg' transformabilis sit, si ex illis implicationibus aliqua duabus reliquis sit dissimilis.

Si formae F, f, f' formis G, g, g' resp. sunt aequiualentes, hae eosdem determinantes habebunt vt illae, et quod pro formis f, f' sunt numeri m, m', idem erunt pro formis g, g' (art. 161). Hinc nullo negotio per conclus. quartam art. 235 deducitur, in hocce casu G ex g, g' *compositam* fore, si F ex f, f' composita sit, et quidem formam g in compositionem illam eodem modo ingredi vt f in hanc, quando F ipsi G eodem modo aequiualeat vt f ipsi g, et contra; similiterque g' in compositione priori vel eodem modo vel opposito accipiendam vt f' in posteriori, prout aequiualentia formarum f', g' aequiualentiae formarum F, G similis sit vel dissimilis.

239. Theorema. *Si forma F ex formis f, f' composita est: quaeuis alia forma in productum ff' eodem modo transformabilis vt F, ipsam F proprie implicabit.*

Dem. Retentis pro F, f, f' omnibus signis art. 235, aequationes Ω etiam hic locum habebunt. Ponamus formam $F' = (A', B', C')$, cuius determinans $= D'$, transire in productum ff' per substitutionem $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$, $\mathfrak{p}'''$; $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$, $\mathfrak{q}'''$ designemusque numeros $\mathfrak{pq}' - \mathfrak{qp}'$, $\mathfrak{pq}'' - \mathfrak{qp}''$, $\mathfrak{pq}''' - \mathfrak{qp}'''$, $\mathfrak{p}'\mathfrak{q}'' - \mathfrak{q}'\mathfrak{p}''$, $\mathfrak{p}'\mathfrak{q}''' - \mathfrak{q}'\mathfrak{p}'''$, $\mathfrak{p}''\mathfrak{q}''' - \mathfrak{q}''\mathfrak{p}'''$ resp. per P', Q', R', S', T', U'. Tunc habebuntur nouem aequationes ipsis Ω omnino similes puta $P' = a\mathfrak{n}'$, $R' - S' = 2b\mathfrak{n}'$, $U' =$

$c\mathfrak{n}'$, $Q' = a'\mathfrak{n}$, $R' + S' = 2b'\mathfrak{n}$, $T' = c'\mathfrak{n}$, $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}'' - \mathfrak{q}\mathfrak{q}''' = A'\mathfrak{n}\mathfrak{n}'$, $\mathfrak{p}\mathfrak{q}''' + \mathfrak{q}\mathfrak{p}''' - \mathfrak{p}'\mathfrak{q}'' - \mathfrak{q}'\mathfrak{p}'' = 2B'\mathfrak{n}\mathfrak{n}'$, $\mathfrak{p}'\mathfrak{p}'' - \mathfrak{p}\mathfrak{p}''' = C'\mathfrak{n}\mathfrak{n}'$, quas per Ω' designabimus. Quantitates $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}'$ hic erunt radices quadratae ex $\frac{d}{D'}$, $\frac{d'}{D'}$ et quidem iisdem signis resp. affectae vt n, n'; si igitur radix quadrata ex $\frac{D}{D'}$ positiue accepta (quae erit numerus integer) statuitur $= k$, erit $\mathfrak{n} = kn$, $\mathfrak{n}' = kn'$. Hinc et ex aequatt. senis prioribus in Ω et Ω' manifestum est, fore $P' = kP$, $Q' = kQ$, $R' = kR$, $S' = kS$, $T' = kT$, $U' = kU$. Quare per lemma art. 234 determinari poterunt quatuor numeri integri α, β, γ, δ tales vt fiat $\alpha p + \beta q = \mathfrak{p}$, $\gamma p + \delta q = \mathfrak{q}$; $\alpha p' + \beta q' = \mathfrak{p}'$, $\gamma p' + \delta q' = \mathfrak{q}'$ etc., atque $\alpha\delta - \beta\gamma = k$. Substitutis his valoribus ipsorum $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{q}'$ etc. in aequatt. tribus vltimis Ω', facile confirmatur adiumento aequationum $\mathfrak{n} = kn$, $\mathfrak{n}' = kn'$ triumque vltimarum Ω, fore $A'\alpha\alpha + 2B'\alpha\gamma + C'\gamma\gamma = A$, $A'\alpha\beta + B'(\alpha\delta + \beta\gamma) + C'\gamma\delta = B$, $A'\beta\beta + 2B'\beta\delta + C'\delta\delta = C$, quapropter forma F' per substitutionem α, β, γ, δ (quae propria erit, quoniam $\alpha\delta - \beta\delta = k$ est positiuus) transibit in F, i. e. formam F proprie implicabit. *Q. E. D.*

Si itaque F' e formis f, f' etiam composita est (eodem modo vt F ex iisdem), formae F, F' eundem determinantem habebunt, eruntque adeo proprie aequiualentes. Generalius, si forma G e formis g, g' eodem modo composita est vt F ex f, f' resp., formaeque g, g' ipsis f, f' proprie aequiualent: formae F, G proprie aequiualebunt.