Prorsus eodem modo positis $\frac{h-b'}{\beta'} = \frac{a'}{\delta'} = f'$, $\frac{c'}{\beta'} = \frac{-h-b'}{\delta'} = g'$ fit $\alpha' = \frac{\beta' A - g'}{2h}$, $\gamma' = \frac{\delta' A - f'}{2h}$. Quibus valoribus ipsorum $\alpha, \gamma, \alpha'\ \gamma'$ in formula modo tradita pro transformatione formae F in F' substitutis, transit in hanc:

$$\frac{\beta f' - \delta' g}{2h},\ \frac{\beta' g - \beta g'}{2h},\ \frac{\delta f' - \delta' f}{2h},\ \frac{\beta' f - \delta g'}{2h},$$ ex qua A omnino abiit.

Si duae formae F, F' improprie aequiualentes proponuntur, et transformatio impropria alterius in alteram quaeritur, sit forma G opposita forma F, et transformatio propria formae G in F' haec $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Tunc manifestum est $\alpha, \beta, -\gamma, -\delta$ fore transformationem impropriam formae F in F'.

Denique patet, si formae propositae et proprie et improprie aequiualentes sint, hoc modo inuenire posse transformationes duas alteram propriam alteram impropriam.

209. Nihil itaque iam superest quam vt ex vna transformatione omnes reliquas similes deducere doceamus. Hoc vero pendet a solutione aequationis indeterminatae $tt - hhuu = mm$, designante m diuisorem communem maximum numerorum a, $2b$, c, si (a, b, c) est alterutra formarum aequiualentium. Sed haec aequatio semper duobus tantum modis solui potest, nempe ponendo aut $t = m$, $u = 0$, aut $t = -m$, $u = 0$. Ponamus

enim dari adhuc aliam solutionem $t = T$, $u = U$, ita vt U non $= 0$. Quia mm ipsum $4hh$ certo metitur, erit $\frac{4TT}{mm} = \frac{4hhUU}{mm} = 4$, atque tum $\frac{4TT}{mm}$ tum $\frac{4hhUU}{mm}$ quadrata integra. Sed nullo negotio perspicitur, numerum 4 duorum quadratorum integrorum differentiam esse non posse, nisi quadratum minus sit 0 i. e. $U = 0$, contra hyp. — Si itaque forma F in formam F' per substitutionem $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ transit, alia transformatio huic similis non dabitur praeter transformationem $-\alpha, -\beta, -\gamma, -\delta$. Quare si duae formae aut proprie tantum, aut improprie tantum aequiualent, *duae* tantum transformationes dabuntur; si vero tum proprie tum improprie, *quatuor*, nempe duae propriae duaeque impropriae.

210. Theorema. *Si duae formae reductae* (a, h, o), (a', h, o) *improprie sunt aequiualentes, erit* $aa' \equiv mm$ (*mod.* $2mh$), *designante m diuisorem communem maximum numerorum* a, $2h$, *vel* a', $2h$; *et vice versa, si* a, $2h$; a', $2h$ *eundem diuisorem communem maximum m habent, atque est* $aa' \equiv mm$ (*mod.* $2mh$), *formae* (a, h, o), (a', h, o) *improprie aequiualentes erunt.*

Dem. I. Transeat forma (a, h, o) in formam (a', h, o) per substitutionem impropriam $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ita vt habeantur quatuor aequationes $a\alpha\alpha + 2h\alpha\gamma = a'$ ... [1]; $a\alpha\beta + h(\alpha\delta + \beta\gamma) = h$ ... [2]; $a\beta\beta + 2h\beta\delta = 0$ ... [3]; $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$ ... [4]. Hinc sequitur, multiplicando [4] per h et subtrahendo a [2], quod ita exprimimus [2] $- h$ [4], ... $(a\alpha + 2h\gamma)\beta = 2h$ ... [5]; similiter ex $\gamma\delta$ [2] —

$\gamma\gamma$ [3] $-(a + a\alpha\gamma + h\gamma\delta)$ [4] deletis quae sese destruunt ... $-a\alpha\delta = a + 2h\gamma\delta$, siue $-(a\alpha + 2h\gamma)\delta = a$ ... [6]; denique ex a [1] ... $a\alpha(a\alpha + 2h\gamma) = aa'$, siue $(a\alpha + 2h\gamma)^2 - aa' = 2h\gamma(a\alpha + 2h\gamma)$ siue $(a\alpha + 2h\gamma)^2 \equiv aa'$ (mod. $2h(a\alpha + 2h\gamma)$) ... [7]. Iam ex [5] et [6] sequitur $a\alpha + 2h\gamma$ metiri ipsos $2h$ et a, adeoque etiam ipsum m, qui est diuisor communis maximus ipsorum a, $2h$; manifesto autem m metietur etiam ipsum $a\alpha + 2h\gamma$; quare necessario $a\alpha + 2h\gamma$ erit aut $= +m$ aut $= -m$. Hinc statim sequitur ex [7], $mm \equiv aa'$ (mod. $2mh$). *Q. E. P.*

II. Si a, $2h$; a', $2h$ eundem diuisorem communem maximum m habent, insuperque est $aa' \equiv mm$ (mod. $2mh$), $\frac{a}{m}$, $\frac{2h}{m}$, $\frac{a'}{m}$, $\frac{aa'-mm}{2mh}$ erunt integri. Facile vero confirmatur, formam (a, h, o) transire in (a', h, o) per substitutionem $-\frac{a'}{m}$, $-\frac{2h}{m}$, $\frac{aa'-mm}{2mh}$, $\frac{a}{m}$; nec non hanc transformationem esse impropriam. Quare formae illae erunt improprie aequiualentes. *Q. E. S.*

Hinc etiam statim diiudicari potest, an forma aliqua reducta data (a, h, o) sibi ipsi improprie aequiualens sit. Scilicet designato diuisore communi maximo numerorum a, $2h$ per m, esse debebit $aa \equiv mm$ (mod. $2mh$).

211. Omnes formae reductae determinantis dati hh obtinentur, si in forma indefinita (A, h, a) pro A omnes numeri a o vsque ad $2h - 1$ incl. substituuntur, quarum itaque multitudo erit $2h$. Perspicuum est omnes formas determinantis hh