$\Phi, \Phi', \Phi'' \ldots \Phi^n$ per $\Psi, \Psi', \Psi'' \ldots \Psi^n$ resp. *). Tum in progressione $\varphi, \varphi', \varphi'' \ldots f, f', f'' \ldots f^{m-1}, \Psi^{n-1}, \Psi^{n-2} \ldots \Psi, \Phi$ quaeuis forma praecedenti ab vltima parte contigua erit, vnde per art. 177 inueniri poterit transformatio propria primae φ in vltimam Φ. Illud autem de formis reliquis progressionis nullo negotio perspicitur; de his f^{m-1}, Ψ^{n-1} sic probatur: Sit $f^{m-1} = (g, h, i)$; f^m siue $\Phi^n = (g', h', i')$; $\Phi^{n-1} = (g'', h'', i'')$. Forma (g', h', i') tum formae (g, h, i) tum formae (g'', h'', i'') ab vltima parte contigua erit; hinc $i = g' = i''$, et $-h \equiv h' \equiv -h''$ (mod. i vel g' vel i''). Vnde manifestum est formam $(i'', -h'', g'')$, i. e. formam Ψ^{n-1} formae (g, h, i), i. e. formae f^{m-1} ab vltima parte contiguam esse.

Si formae Φ, φ improprie aequiualentes sunt: forma φ proprie aequiualebit formae cui opposita est Φ. Inueniri poterit itaque transformatio propria formae φ in formam cui Φ est opposita; quae si supponitur fieri per substitutionem $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, facile perspicitur, φ improprie transformari in ipsam Φ per substitutionem $\alpha, -\beta, \gamma, -\delta$.

Hinc etiam perspicuum est, si formae Φ, φ tum proprie tum improprie aequiualentes sint, inueniri posse *duas* transformationes, propriam et impropriam.

Ex. Quaeritur transformatio impropria formae (129, 92, 65) in formam (42, 59, 81), quam

*) Ita vt ψ oriatur ex ϕ commutando terminum primum et vltimum tribuendoque medio signum oppositum, similiterque de reliquis.

illi improprie aequiualere in art. praec. inuenimus. Inuestiganda erit itaque primo transformatio propria formae (129, 92, 65) in formam (42, — 59, 81). Ad hunc finem euoluitur progressio formarum haec: (129, 92, 65), (65, — 27, 10), (10, 7, — 3), (— 3, 8, 5), (5, 22, 81), (81, 59, 42), (42, — 59, 81). Hinc deducitur transformatio propria — 47, 56, 73, — 87, per quam (129, 92, 65) transit in (42, — 59, 81); quare per impropriam — 47, — 56, 73, 87 transibit in (42, 59, 81).

197. Si transformatio vna formae alicuius $(a, b, c) \therefore \varphi$ in aequiualentem Φ habetur: ex hac *omnes* transformationes similes formae φ in Φ deduci poterunt, si modo omnes solutiones aequationis indeterminatae $tt - Duu = mm$ assignari possunt, designante D determinantem formarum Φ, φ; m diuisorem communem maximum numerorum $a, 2b, c$ (art. 162). Hoc igitur problema, quod pro valore negatiuo ipsius D iam supra soluimus, nunc pro positiuo aggrediemur. Quia vero manifesto quiuis valor ipsius t aequationi satisfaciens etiamnum mutato signo satisfacit, similiterque quiuis valor ipsius u: sufficiet si omnes valores *positiuos* ipsorum t, u assignare possimus, fungeturque quaelibet solutio per valores positiuos, quatuor solutionum vice. Hoc negotium ita absoluemus, vt *primo* valores *minimos* ipsorum t, u (praeter hos per se obuios $t = m$, $u = 0$) inuenire, *tum* ex his omnes reliquos deriuare doceamus.

198. Problema. *Inuenire numeros minimos t, u aequationi indeterminatae $tt - Duu = mm$ satisfacientes, siquidem forma aliqua (M, N, P) datur, cuius de-*

terminans est D, numerorumque M, $2N$, P diuisor communis maximus m.

Sol. Accipiatur ad lubitum forma reducta $(a, b, -a') \ldots f$, determinantis D, vbi diuisor communis maximus numerorum a, $2b$, a' sit m, qualem dari vel inde manifestum est, quod forma reducta formae (M, N, P) aequiualens inueniri potest, quae per art. 161 hac proprietate erit praedita: sed ad propositum praesens quaeuis forma reducta in qua conditio haec locum habet poterit adhiberi. Euoluatur periodus formae f, quam ex n formis constare supponemus. Retentis omnibus signis quibus in art. 188 vsi sumus, f^n erit $(+a^n, b^n, -a^{n+1})$, quia n par, et in hanc formam transibit f per substitutionem propriam α^n, β^n, γ^n, δ^n. Quia vero f et f^n sunt identicae: f transibit in f^n etiam per substitutionem propriam $1, 0, 0, 1$. Ex his duabus transformationibus similibus formae f in f^n per art. 162 deduci poterit solutio aequationis $tt - Duu = mm$ *in integris*, scilicet $t = \frac{1}{2}(\alpha^n + \delta^n)m$ (aequ. 18 art. 162), $u = \frac{\gamma^n m}{a}$ (aequ. 19) *). Designentur hi valores positiue accepti si forte nondum sunt per T, U, eruntque hi T, U valores minimi ipsorum t, u, praeter hos $t = m$, $u = 0$ (a quibus necessario erunt diuersi, quia manifesto γ^n non poterit esse $= 0$).

Supponamus enim dari adhuc minores valores ipsorum t, u puta $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{u}$ qui sint positiui et $\mathfrak{u}$

*) Quae in art. 162 erant $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$; A, B, C; A', B', C'; e, hic sunt $1, 0, 0, 1$; $\alpha^m, \beta^m, \gamma^m, \delta^m$; $a, b, -a'$; $a, b, -a'$; 1.