Ex praecedentibus colligitur, si omnes solutiones aequationis $tt - Duu = mm$ habeantur, omnes transformationes formae $(A\ B,\ C)$ in (a, b, c) transf. datae similes inde deriuari. Illas vero in sequentibus inuenire docebimus. Hic tantummodo obseruamus multitudinem solutionum semper esse finitam quando D sit negatiuus, aut positiuus simulque quadratus: quando vero D positiuus non quadratus, infinitam. Quando hic casus locum habet, simulque D non $= d$ (supra 3°), disquiri insuper deberet, quomodo ii valores ipsorum t, u, qui substitutiones a fractionibus liberas, ab iis, qui fractas producunt, a priori dignosci possint. Sed pro hocce casu infra aliam methodum ab hoc incommodo liberam exponemus (art. 214).

Ex. Forma $xx + 2yy$ per substitutionem propriam $x = 2x' + 7y'$, $y = x' + 5y'$ transit in formam (6, 24, 99): desiderantur *omnes* transformationes propriae formae illius in hanc. Hic $D = -2$, $m = 3$, adeoque aequatio soluenda haec: $tt + 2uu = 9$. Huic sex modis diuersis satisfit ponendo scilicet $t = 3, -3, 1, -1, 1, -1$; $u = 0, 0, 2, 2, -2, -2$, resp. Solutio tertia et sexta dant substitutiones in fractis, adeoque sunt reiiciendae: ex reliquis sequuntur quatuor substitutiones:

$$x = \begin{cases} 2x' + 7y' \\ -2x' + 7y' \\ 2x' + 9y' \\ -2x' + 9y' \end{cases} \quad y = \begin{cases} x' + 5y' \\ -x' + 5y' \\ x' + 3y' \\ -x' + 3y' \end{cases}$$

(quarum prima est proposita).

163. Iam supra obiter diximus fieri posse vt forma aliqua, F, aliam, F', tam proprie quam improprie implicet. Perspicuum est hoc euenire, si inter formas F, F' alia G interponi possit, ita vt F ipsam G, G ipsam F' implicet, formaque G ita sit comparata, vt sibi ipsa sit improprie aequiualens. Si enim F ipsam G proprie vel improprie implicare supponitur: quum G ipsam G improprie implicet, F ipsam G improprie vel proprie (resp.) implicabit, adeoque, in vtroque casu, tam proprie quam improprie. (art. 159). Eodem modo hinc deducitur, quomodocunque G ipsam F' implicare supponatur, F semper ipsam F' tum proprie tum improprie implicare debere. — Tales vero formas dari, quae sibi ipsae sint improprie aequiualentes, videtur in casu maxime obuio, vbi formae terminus medius $= 0$. Talis enim forma sibi ipsa erit opposita (art. 159) adeoque improprie aequiualens. Generalius quaeuis forma, (a, b, c), hac proprietate est praedita, in qua $2b$ per a est diuisibilis. Huic enim forma (c, b, a) a parte prima erit contigua (art. 160) adeoque proprie aequiualens: sed (c, b, a) per art. 159 formae (a, b, c) improprie aequiualet: quare (a, b, c) sibi ipsa improprie aequiualebit. Tales formas (a, b, c) in quibus $2b$ per a est diuisibilis, *ancipites* vocabimus. Habebimus itaque theorema hoc:

Forma F, aliam formam F' tum proprie tum improprie implicabit, si forma anceps inuenire potest sub F contenta ipsam F vero implicans. Sed haec propositio etiam conuerti potest: scilicet

164. THEOREMA. *Si forma* $Axx + 2Bxy + Cyy \ldots (F)$ *formam* $A'x'x' + 2B'x'y' + C'x'y' \ldots (F')$ *tum proprie tum improprie implicat: forma anceps inueniri potest, sub F contenta formamque F' implicans.*

Ponamus, formam F transire in formam F' tum per substitionem $x = \alpha x' + \beta y'$, $y = \gamma x' + \delta y'$, tum per hanc illi dissimilem, $x = \alpha' x' + \beta' x'$, $y = \gamma' x' + \delta' y'$. Tum designatis numeris $\alpha\delta - \beta\gamma$, $\alpha'\delta' - \beta'\gamma'$ per e, e', erit $B'B' - A'C' = ee(BB - AC) = e'e'(BB - AC)$; hinc $ee = e'e'$, et, quia per hyp. e, e' signa opposita habent, $e = -e'$ siue $e + e' = 0$. Iam patet si in F' pro x' substituatur $\delta' x'' - \beta' y''$, et pro y', $-\gamma' x'' + \alpha' y''$, eandem formam esse prodituram ac si in F scribatur *aut* 1) pro x, $\alpha(\delta' x'' - \beta' y'') + \beta(-\gamma' x'' + \alpha' y'')$ i. e. $(\alpha\delta' - \beta\gamma')x'' + (\beta\alpha' - \alpha\beta')y''$, et pro y, $\gamma(\delta' x'' - \beta' y'') + \delta(-\gamma' x'' + \alpha' y'')$ i. e. $(\gamma\delta' - \delta\gamma')x'' + (\delta\alpha' - \gamma\beta')y''$; *aut* 2) pro x, $\alpha'(\delta' x'' - \beta' y'') + \beta'(-\gamma' x'' + \alpha' y'')$ i. e. $e' x''$, et pro y, $\gamma'(\delta' x'' - \beta' y'') + \delta'(-\gamma' x'' + \alpha' y'')$ i. e. $e' y''$. Designatis itaque numeris $\alpha\delta' - \beta\gamma'$, $\beta\alpha' - \alpha\beta'$, $\gamma\delta' - \delta\gamma'$, $\delta\alpha' - \gamma\beta'$ per a, b, c, d: forma F per duas substitutiones $x = ax'' + by''$, $y = cx'' + dy''$; $x = e'x''$, $y = e'y''$ in eandem formam transmutabitur, vnde obtinemus tres aequationes sequentes:

$$Aaa + 2Bac + Ccc = Ae'e' \ldots\ldots\ldots [1]$$
$$Aab + B(ad + bc) + Ccd = Be'e' \ldots\ldots [2]$$
$$Abb + 2Bbd + Cdd = Ce'e' \ldots\ldots\ldots [3]$$

Ex valoribus ipsorum a, b, c, d autem inuenitur

$$ad - bc = ee' = -ee = -e'e' \ldots\ldots [4]$$