bus valoribus positiuis expr. $\sqrt{D}$ (mod. a) inter $\sqrt{D}$ et $\sqrt{D} \mp a$ iacentibus, c vero pro singulis valoribus determinatis ipsorum a, b, ponatur $= \frac{bb - D}{a}$. Si quae formae hoc modo oriuntur, in quibus $\pm a$ extra $\sqrt{D} + b$ et $\sqrt{D} - b$ situs est, reiiciendae sunt.

Methodus secunda. Accipiantur pro b omnes numeri positiui minores quam $\sqrt{D}$, pro singulis b resoluatur $bb - D$ omnibus quibus fieri potest modis in binos factores qui neglecto signo inter $\sqrt{D} + b$ et $\sqrt{D} - b$ iaceant, ponaturque alter $= a$, alter $= c$. Manifestum est, singulas resolutiones in factores praebere binas formas, quia vterque factor tum $= a$, tum $= c$ poni debet.

Ex. Sit $D = 79$ eruntque valores ipsius a viginti duo $\mp$ 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 13, 10, 15. Vnde inueniuntur formae vndeuiginti: (1, 8, — 15), (2, 7, — 15), (3, 8, — 5), (3, 7, — 10), (5, 8, — 3), (5, 7, — 6), (6, 7, — 5), (6, 5, — 9), (7, 4, — 9), (7, 3, — 10), (9, 5, — 6), (9, 4, — 7), (10, 7, — 3), (10, 3, — 7), (13, 1, — 6), (14, 3, — 5), (15, 8, — 1), (15, 7, — 2), (15, 2, — 5), totidemque aliae quae fiunt ex his si terminorum exterorum signa commutantur, puta (— 1, 8, 25), (— 2, 7, 15) etc. ita vt omnes triginta octo sint. Sed ex his reiiciendae sex ($\pm$ 13, 1, $\mp$ 6), ($\pm$ 14, 3, $\pm$ 5), ($\mp$ 15, 2, $\pm$ 5); reliquae triginta duae omnes reductas amplectuntur. Per methodum secundam eaedem forma prodeunt sequenti ordine*): $(\pm 7, 3, \mp 10)$, $(\pm 10, 3, \mp 7)$, $(\pm 7, 4, \mp 9)$, $(\pm 9, 4, \mp 7)$, $(\pm 6, 5, \mp 9)$, $(\pm 9, 5, \mp 6)$, $(\pm 2, 7, \mp 15)$, $(\pm 3, 7, \mp 10)$, $(\pm 5, 7, \mp 6)$, $(\pm 6, 7, \mp 5)$, $(\pm 10, 7, \mp 3)$ $(\pm 15, 7, \mp 2)$, $(\pm 1, 8, \mp 15)$, $(\pm 3, 8, \mp 5)$, $(\pm 5, 8, \mp 3)$, $(\pm 15, 8, \mp 1)$.

186. Sit F forma reducta determinantis D, ipsique ab vltimo parte contigua forma reducta F'; huic iterum ab vltima parte contigua reducta F''; reducta F''' ipsi F'' contigua ab vltima parte etc. Tum patet, omnes formas F', F'', F''' etc. esse prorsus determinatas, et tum inter se tum formae F proprie aequiualentes. Quoniam vero multitudo omnium formarum reductarum determinantis dati est finita, manifestum est, omnes formas in progressione infinita F, F', F'' etc. diuersas esse non posse. Ponamns F^m et F^{m+n} esse identicas, eruntque F^{m-1}, F^{m+n-1} reductae, eidem formae reductae a parte prima contiguae, adeoque identicae; hinc eodem modo F^{m-2} et F^{m+n-2} etc. tandemque F et F^n identicae erunt. Quare in progressione F, F', F'' etc., si modo satis longe continuatur, necessario tandem forma prima F recurret; et si supponimus F^n esse primam identicam cum F, siue omnes F', F''... F^{n-1} a forma F diuersas: facile perspicitur, omnes formas F, F', F''.... F^{n-1} diuersas fore.

*) Pro $b = 1$, — 78 in duos factores qui neglecto signo inter $\sqrt{79} + 1$ et $\sqrt{79} - 1$ iaceant, resolui nequit; quare hic valor est praetereundus, ex eademque ratione valores 2 et 6.

Complexum harum formarum vocabimus *periodum formae F*. Si igitur progressio vltra vltimam periodi formam producitur, eaedem formae F, F', F'' etc. iterum prodibunt, progressioque tota infinita F, F', F'' etc. constituta erit ex hac periodo formae F infinities repetita.

Progressio F, F', F'' etc. etiam retro continuari potest, praeponendo formae F reductam $'F$, quae ipsi a parte prima est contigua; huic iterum reductam $''F$, quae ipsi a prima parte contigua etc. Hoc modo habebitur progressio formarum *vtrimque* infinita

$$\ldots\, '''F,\ ''F,\ 'F,\ F,\ F',\ F'',\ F'''\ldots$$

perspicieturque facile, $'F$ identicam fore cum F^{n-1}, $''F$ cum F^{n-2} etc. adeoque progressionem etiam a laeua parte e periodo formae F, infinities repetita, esse constitutam.

Si formis F, F', F'', etc. $'F$, $''F$ etc. tribuuntur indices 0, 1, 2 etc., -1, -2 etc. generaliterque formae F^m index m, formae ${}^mF$ index $-m$, patet, *formas quascunque seriei identicas fore vel diuersas, prout ipsarum indices congrui sint vel incongrui secundum modulum n.*

Ex. Periodus formae $(3, 8, -5)$ cuius determinans $= 79$, inuenitur haec: $(3, 8 -5)$ $(-5, 7, 6)$, $(6, 5, -9)$, $(-9, 4, 7)$, $(7, 3, -10)$, $(-10, 7, 3)$. Post vltimam iterum prodit $(3, 8, -5)$. Hic itaque $n = 6$.

187. Ecce quasdam obseruationes generales circa has periodos.