fieri poterunt. Per substitutionem $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ transeat forma (a, b, c) in (a', b', c'), quae igitur illi proprie aequiualens erit. Habebitur autem $b' = a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta = (h - b)\alpha\delta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) - (h + b)\beta\gamma = h(\alpha\delta - \beta\gamma) = h$; $c' = a\beta\beta + 2b\beta\delta + c\delta\delta = (h - b)\beta\delta + 2b\beta\delta - (h + b)\beta\delta = 0$. Quodsi itaque insuper a' inter limites 0 et $2h - 1$ iam est situs, forma (a', b', c') omnibus conditionibus satisfaciet.

II. Si vero a' extra limites 0 et $2h - 1$ iacet, sit A residuum minimum positiuum ipsius a' secundum modulum $2h$, quod manifesto inter hos limites situm erit, ponaturque $A - a' = 2hk$. Tum forma (a', b', c') i. e. $(a', h, 0)$ per substitutionem $1, 0, k, 1$ transibit in formam $(A, h, 0)$, quae formis (a', b', c'), (a, b, c) proprie aequiualens erit omnibusque conditionibus satisfaciet. — Ceterum perspicuum est, formam (a, b, c) transire in formam $(A, h, 0)$ per substitutionem $\alpha + \beta k, \beta, \gamma + \delta k, \delta$.

Ex. Proposita sit forma $(27, 15, 8)$ cuius determinans $= 9$. Hic $h = r$; rationibus $-12 : 27 = 8 : -18$ in numeris minimis aequalis est ratio $4 : -9$. Positis itaque $\beta = 4$, $\delta = -9$, $\alpha = -1$, $\gamma = 2$, forma (a', b', c') fit $(-1, 3, 0)$, quae transit in formam $(5, 3, 0)$ per substitutionem $1, 0, 1, 1$. Haec igitur est forma quaesita, transitque in eam proposita per substitutionem propriam $3, 4, -7, -9$.

Tales formas (A, B, C) in quibus $C = 0$, $B = h$, A inter limites 0 et $2h - 1$ situs, *formas reductas* vocabimus, quae igitur a formis reductis determinantis negatiui, vel positiui non-quadrati, probe sunt distinguendae.

207. Theorema. *Duae formae reductae* (a, h, o), (a', h, o), *non identicae proprie aequiualentes esse non possunt.*

Dem. Si enim proprie aequiualere supponuntur, transeat prior in posteriorem per substitutionem propriam $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, habebunturque quatuor aequationes: $a\alpha\alpha + 2h\alpha\gamma = a'$ ... [1], $a\alpha\beta + h\,(\alpha\delta + \beta\gamma) = h$ ... [2], $a\beta\beta + 2h\beta\delta = o$ ... [3], $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ ... [4]. Multiplicando aequationem secundam per β, tertiam per α et subtrahendo fit $-h\,(\alpha\delta - \beta\gamma)\beta = \beta h$, siue, propter [4], $-\beta h = \beta h$, vnde necessario $\beta = o$. Quare ex [4], $\alpha\delta = 1$, et $\alpha = \pm 1$. Hinc ex [1], $a \pm 2\gamma h = a'$, quae aequatio consistere nequit, nisi $\gamma = o$ (quoniam tum a tum a' per hyp. inter o et $2h - 1$ iacent) *i. e.* nisi $a = a'$, siue formae (a, h, o), (a', h, o) identicae, contra hyp.

Hinc sequentia problemata, quae pro determinantibus non-quadratis multo maiorem difficultatem facessebant, nullo negotio solui poterunt.

I. *Propositis duabus formis F, F' eiusdem determinantis quadrati, inuestigare an proprie aequiualeant.* Quaerantur duae formae reductae formis F, F' resp. proprie aequiualentes; quae si identicae sunt, propositae proprie aequiualentes erunt, sin minus, non erunt.

II. *Iisdem positis inuestigare an improprie aequiualeant.* Sit forma alterutri propositarum *e. g.* formae F opposita, G; quae si formae F' proprie aequiualet, F et F' improprie aequiualebunt, et contra.

208. Problema. *Propositis duabus formis F, F' determinantis hh proprie aequiualentibus: inuenire transformationem propriam alterius in alteram.*

Sol. Formae F proprie aequiualeat forma reducta Φ, quae itaque per hyp. etiam formae F' proprie aequiualebit. Quaeratur per art. 206 transformatio propria formae F in Φ, quae sit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; nec non transformatio propria formae F' in Φ, quae sit $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$. Tunc Φ transformabitur in F' per substitutionem propriam $\delta', -\beta', -\gamma', \alpha'$ et hinc F in F' per substitutionem propriam $\alpha\delta' - \beta\gamma'$, $\beta\alpha' - \alpha\beta'$, $\gamma\delta' - \delta\gamma'$, $\delta\alpha' - \gamma\beta'$.

Operae pretium est, aliam formulam pro hac transformatione formae F in F' euoluere, ad quam formam reductam Φ ipsam nouisse ne opus quidem sit. Ponamus formam F esse (a', b', c), $F' = (a', b', c')$, $\Phi = (A, h, o)$. Quoniam rationibus $h - b : a$ vel $c : -(h+b)$ in numeris minimis aequalis est ratio $\beta : \delta$, facile perspicitur $\frac{h-b}{\beta} = \frac{a}{\delta}$ fore *integrum*, qui sit f; nec non $\frac{c}{\beta} = \frac{-h-b}{\delta}$ integrum fore qui ponatur $= g$. Habebitur autem $A = a\alpha\alpha + 2b\alpha\gamma + c\gamma\gamma$ adeoque $\beta A = u\alpha\alpha\beta + 2b\alpha\beta\gamma + c\beta\gamma\gamma$, siue (substitutis pro $a\beta$, $\delta(h-b)$, pro c, βg,) $\beta A = \alpha\alpha\delta h + b(2\beta\gamma - \alpha\delta)\alpha + \beta\beta\gamma\gamma g$ siue (propter $b = -h - \delta g$), $\beta A = 2\alpha(\alpha\delta - \beta\gamma)h + (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 g = 2\alpha h + g$. Simili modo $\delta A = a\alpha\alpha\delta + 2b\alpha\beta\delta + c\gamma\gamma\delta = \alpha\alpha\delta\delta f + b(2\alpha\delta - \beta\gamma\gamma) - \beta\gamma\gamma h = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 f + 2\gamma(\alpha\delta - \beta\gamma)h = 2\gamma h + f$. Quare $\alpha = \frac{\beta A - g}{2h}$, $\gamma = \frac{\delta A - f}{2h}$.