$GH = f.\sin.\theta$; $CH = f.\cos.\theta$; $DH = \frac{f.\cos.\theta}{\cos.\Phi}$, & $CD = \frac{f\cos.\theta.\sin.\Phi}{\cos.\Phi}$. Hinc, ob triangulum DCG ad C rectangulum, erit $DG = \frac{f.\sqrt{(1+\sin.\theta^2\,\sin.\Phi^2)}}{\cos.\Phi}$, & anguli DGH sinus $= \frac{\cos\theta}{\sqrt{(1+\sin.\theta^2.\sin.\Phi^2)}}$, cosinus $= \frac{\sin.\theta.\cos.\Phi}{\sqrt{(1+\sin.\theta^2.\sin.\Phi^2)}}$ & tangens $= \frac{\cos.\theta}{\sin.\theta.\cos.\Phi}$. CAP. III.

66. Jam, ex sectionis quæsitæ puncto quovis M in Basin demittatur perpendicularis MQ; ductaque Applicata QP, sit $CP = x$, $PQ = y$, erit $aacc = aayy + ccxx$. Ducatur QT ipsi CG parallela, in eamque ex G normalis GR; erit $GR = y$, & $QR = f - x$. Quoniam igitur angulus $TGR = GCH = \theta$, erit $GT = \frac{y}{\cos.\theta}$ & $TR = \frac{y.\sin.\theta}{\cos.\theta}$: unde fit $QT = f - x + \frac{y.\sin.\theta}{\cos.\theta}$. Ideoque, ob triangula CDG & QMT similia, erit $CG : DG = QT : TM$, & $CG : CG - QT = DG : DS$, ducta MS parallela GT. Hinc erit $DS = \frac{(x.\cos.\theta - y.\sin.\theta)\sqrt{(1+\sin\theta^2.\sin.\Phi^2)}}{\cos.\theta.\cos.\Phi}$. Positis ergo $DS = t$, $MS = u$, erit $x.\cos.\theta - y.\sin.\theta = \frac{t.\cos.\theta.\cos.\Phi}{\sqrt{(1+\sin.\theta^2.\sin.\Phi^2)}}$; $y = u.\cos\theta$; unde æquatio inter t & u reperietur, quæ adhuc erit satis complicata.

67. Quod si autem, loco Axium principalium Basis, ducatur Diameter EF intersectioni TH parallela, ad eamque Diameter conjugata AB, quæ producta ipsi TH occurrat in G. Tum vero maneant eadem, quæ ante posuimus $CG = f$; $GCH = \theta$; $CHD = \Phi$, $CA = CB = m$, $CE = CF = n$; fueritque ducta QP Diametro EF parallela, & positis $CP = x$, $PQ = y$, ut sit $m^2n^2 = m^2y^2 + n^2x^2$, erit $GT = MS = y$; & $DS = \frac{DG.x}{CG} = \frac{x\sqrt{(1+\sin\theta^2.\sin.\Phi^2)}}{\cos.\Phi}$. Quare, positis $DS = t$

 &

APPEND. & $MS = u$, fiet $x = \frac{t.\cos.\Phi}{\sqrt{(1 + \sin.\theta^2.\sin\Phi^2)}}$ & $y = u$, erit vero $\frac{CG}{DG}$ cosinus anguli CGD; unde, si ponatur angulus $CGD = \eta$, erit $x = t.\cos.\eta$; ideoque pro sectione quaesita erit $mmnn = mmuu + nntt.\cos.\eta^2$, ad Diametros conjugatas, Centro existente in D; eritque semidiameter in directione $DS = \frac{m}{\cos.\eta}$ & alter $= n$. Anguli vero, quo hae Diametri invicem inclinantur GSM, tangens erit $= \frac{\cos.\theta}{\sin.\theta.\cos\Phi}$ & cosinus $= \frac{\sin.\theta.\cos.\Phi}{\sqrt{(1 + \sin.\theta^2.\sin.\Phi^2)}} = \sin.\theta\cos.\eta$. Hocque pacto natura sectionis facillime cognoscitur.

TAB. XXXV. Fig. 134. 68. Expositis ergo sectionibus Cylindri, ad Conum progrediamur, sive rectum sive scalenum: eo vero tantum Conum scalenum a recto differre considero, quod in scaleno sectiones ad Axem Coni normales sint Ellipses sua Centra in Axe Coni habentes; dum in recto hae sectiones sunt Circuli. Sit igitur $OaebfO$ Conus quicunque Verticem in O & Axem Oc habens; quem ad planum tabulae pono normalem, ita ut tabula repraesentet planum per Coni Verticem O ductum & ad Axem Coni Oc normale. Ducantur per O in plano tabulae rectae AB, EF Axibus ab & ef cujusque sectionis Axi normalis parallelae. Quod si ergo ex sectionis $aebf$ puncto quocunque M ad planum tabulae demittatur normalis MQ, & ex Q ad AB perpendiculum PQ; si ponantur $OP = x$, $PQ = y$, $QM = z$, erit quoque sectionis Abscissa $cp = x$, Applicata $pM = y$: unde, cum Axes ab, ef ad $Oc = QM = z$, constantem teneant rationem, si ponatur $ac = bc = mz$ & $ec = fc = nz$, erit $m^2n^2zz = mmyy + nnxx$; quae est aequatio naturam Superficiei Conicae exprimens, inter tres variabiles x, y & z.

69. Cum igitur omnes sectiones Axi Oc normales sint Ellipses, uti ex aequatione $m^2n^2z^2 = m^2y^2 + n^2x^2$ (tribuendo ipsi

ipsi z valorem constantem) apparet; simili modo facile cognoscentur sectiones, quæ vel ad rectam AB vel EF erunt normales. Si enim iste Conus secetur plano ad AB normali & per punctum P transeunte, posito $OP = a$, ista pro sectione habebitur æquatio $m^2n^2z^2 = m^2y^2 + n^2a^2$; inter Coordinatas $Pp = z$, & $pM = y$; quam propterea patet esse Hyperbolam Centrum in P habentem, cujus semiaxis transversus erit $= \frac{a}{m}$, & semiaxis conjugatus $= \frac{na}{m}$. Pari modo, si y ponatur constans, sectio rectæ EF normalis intelligetur esse Hyperbola Centrum habens in ipsa recta EF. Cap. III.

70. Si planum, quo Conus secatur, sit quidem perpendiculare ad planum $AEBF$, at vero ad neutram Linearum AB, EF normale, facile quoque sectio Coni definitur. Secet enim hoc planum Basin $AEBF$ recta BE, ac vocetur $OB = a$, $OE = b$. Jam, ex puncto sectionis quovis M demittatur normalis MQ, & ex Q Applicata QP, ut sit $OP = x$, $PQ = y$, & $QM = z$; atque, ex natura Coni, $m^2n^2z^2 = m^2y^2 + n^2x^2$. Erit ergo $a : b = a - x : y$, seu $y = b - \frac{bx}{a}$. Ponantur sectionis Coordinatæ $BQ = t$, & $QM = z$: erit $b : \sqrt{(aa+bb)} = y : t$; ideoque $y = \frac{bt}{\sqrt{(aa+bb)}}$, & $a - x = \frac{at}{\sqrt{(aa+bb)}}$. Sit $\sqrt{(aa+bb)} = c$; erit $y = \frac{bt}{c}$; $x = a - \frac{at}{c}$, atque prodibit inter t & z sequens æquatio Tab. XXXVI. Fig. 135.

$$m^2n^2c^2z^2 = m^2b^2tt + n^2a^2cc - 2nnaact + nnaatt.$$

Fiat $t - \frac{nnaac}{m^2b^2 + n^2a^2} = GQ = u$, existente $BG = \frac{nnaac}{m^2b^2 + n^2a^2}$, & erit $m^2n^2c^2z^2 = (m^2b^2 + n^2a^2)uu + \frac{m^2n^2a^2b^2c^2}{m^2b^2 + n^2a^2}$.

71. Erit ergo hæc Coni sectio Hyperbola Centrum habens in

APPEND. in puncto G, cujus semiaxis transversus erit $Ga = \frac{ab}{\sqrt{(m^2b^2+n^2a^2)}}$; & semiaxis conjugatus $= \frac{mnabc}{m^2b^2+n^2a^2}$. Asymtotæ vero hujus Hyperbolæ, quæ Axem Ga in Centro G decussabunt, cum Axe Ga facient angulum, cujus tangens est $= \frac{mnc}{\sqrt{(m^2b^2+n^2a^2)}}$. Quo ergo sectio fiat Hyperbola æquilatera, oportet esse $m^2n^2aa + m^2n^2b^2 = m^2b + n^2a^2$, seu $\frac{b}{a} = tang.\, OBE = \frac{n\sqrt{(mm-1)}}{m\sqrt{(1-nn)}}$. Nisi ergo sit $\frac{mm-1}{1-nn}$ major nihilo, Hyperbola æquilatera hoc modo oriri nequit. In Cono recto, quidem ubi est $m = n$, anguli, quem Asymtotæ cum Axe sectionis constituunt, tangens erit $= m$, & angulus = angulo aOc.

TAB. XXXV. Fig. 134.

TAB. XXXVI. Fig. 136.

72. Sit nunc sectio obliqua, ita tamen ut ejus intersectio BT cum plano $AEBF$ sit normalis ad rectam AB. Ponatur $OB = f$, & angulus inclinationis plani ad planum Basis, seu angulus $OBC = \Phi$, ita ut hoc planum secans Axem Coni OC in puncto C trajiciat; erit $BC = \frac{f}{cos.\,\Phi}$; & $OC = \frac{f.sin.\Phi}{cos.\,\Phi}$. Ex sectionis quæsitæ puncto quovis M ad BT ducatur perpendicularis MT; tum vero ad planum Basis perpendiculum MQ: & ex Q ad OB normalis QP: ita ut, positis $OP = x$, $PQ = y$, & $QM = z$, habeatur $m^2n^2z^2 = m^2y^2 + n^2x^2$. Ponantur pro sectione Coordinatæ $BT = t$, $TM = u$; erit, ob angulum $QTM = \Phi$, $QM = z = u.sin.\Phi$; $TQ = u.cos.\Phi = f - x$; unde fit $y = t$; $z = u\, sin.\Phi$; & $x = f - u.\,cos.\,\Phi$; ideoque

$$m^2n^2u^2.sin.\,\Phi^2 = m^2t^2 + n^2(f - u.\,cos.\,\Phi)^2.$$

73. Ponatur $BC = \frac{f}{cos.\,\Phi} = g$, ut fiat $f = g.\,cos.\,\Phi$, erit $x = (g - u).\,cos.\,\Phi$; atque pro sectione erit

m^2

$m^2n^2u^2.\sin.\Phi^2 = m^2t^2 + n^2g^2.\cos.\Phi^2 - 2n^2gu.\cos.\Phi^2 + n^2u^2.\cos.\Phi^2.$ CAP. III.

Statuatur $u - \frac{g.\cos.\Phi^2}{\cos.\Phi^2 - m^2.\sin.\Phi^2} = SG = s$, ducta MS parallela ipsi BT, sumtaque $BG = \frac{g.\cos.\Phi^2}{\cos\Phi^2 - m^2.\sin.\Phi^2} = \frac{f.\cos.\Phi}{\cos.\Phi^2 - m^2.\sin.\Phi^2} = \frac{f.\cos.\Phi}{1 - (1+m^2).\sin.\Phi^2}$; ita ut Coordinatæ sint $GS = s$ & $SM = t$, atque nascetur hæc æquatio
$m^2tt + nn(\cos.\Phi^2 - m^2.\sin.\Phi^2)ss - \frac{mmnnff\sin\Phi^2}{(\cos.\Phi^2 - m^2.\sin.\Phi^2)} = 0.$
Erit ergo Curva Sectio conica Centrum habens in G. Eritque ergo Parabola si Centrum G in infinitum abit, quod fit si $tang.\Phi = \frac{1}{m}$; seu, si recta BC fuerit lateri Coni Oa parallela. Hoc vero casu erit $mmtt + nnff - 2nnfu.\cos.\Phi = 0$: Vertex Parabolæ erit in G, sumta $BG = \frac{f}{2\cos\Phi}$; & Latus rectum erit $= \frac{2nnf.\cos.\Phi}{mm}$. TAB. XXXV. Fig. 134. TAB. XXXVI. Fig. 136.

74. Quoniam sectio est Parabola, si fuerit $\cos.\Phi^2 - m^2.\sin.\Phi^2 = 0$; manifestum est eam fore Ellipsin, si sit $\cos.\Phi^2$ major quam $m^2.\sin.\Phi^2$, seu $tang.\Phi$ major quam $\frac{1}{m}$, quo quidem casu recta BC sursum converget cum latere Coni opposito Oa. Cum igitur sit $BG = \frac{g}{1 - m^2.tang.\Phi^2}$, erit BG major quam BC, existente G sectionis quæsitæ Centro. Erit ergo sectionis quæsitæ semiaxis in directione BC positus $= \frac{mf.\sin.\Phi}{\cos.\Phi^2 - m^2.\sin.\Phi^2}$, alter vero semiaxis conjugatus $= \frac{nf.\sin.\Phi}{\sqrt{(\cos.\Phi^2 - m^2.\sin.\Phi^2)}}$, & semilatus rectum $= \frac{nn}{m}f.\sin.\Phi$. Unde sectio erit Circulus, si fuerit $m = n\sqrt{(\cos.\Phi^2 - m^2.\sin.\Phi^2)}$ seu $mm = nn - nn(1+mm).\sin.\Phi$; hincque fit $\sin.\Phi = \frac{\sqrt{nn - mm)}}{n\sqrt{(1+mm)}} = \sin.OBC$, & $\cos.\Phi = \frac{m\sqrt{(1+nn)}}{n\sqrt{(1+mm)}}$. Nisi ergo sit n major quam m, nulla hujusmodi sectio esse poterit Circulus.