LIB. II. in æquatione ſubſtitutis, diſtantia CM infinitos diverſos obtinebit valores, ideoque recta CM producta Curvam in infinitis punctis ſecabit, niſi ex his valoribus quantitas z fiat imaginaria. Incipiamus ergo a caſu ſimpliciſſimo, quo eſt $y = as$; eruntque pro eadem rectæ CM poſitione valores ipſius y iſti $a(2\pi + s)$, $a(4\pi + s)$, $a(6\pi + s)$ &c., itemque $-a(2\pi - s)$, $-a(4\pi - s)$, $-a(6\pi - s)$, &c. Quin etiam ſi pro s ponatur $\pi + s$, eadem rectæ CM manebit poſitio, præterquam quod valor ipſius z capi debeat negative: hinc ad valores ipſius z aſſignatos, addi oportet hos $-a(\pi + s)$, $-a(3\pi + s)$, $-a(5\pi + s)$, &c.: prætereaque iſtos $a(\pi - s)$; $a(3\pi - s)$; $a(5\pi - s)$, &c. Curvæ ergo hujus forma erit talis, qualis in figura ad marginem allegata repræſentatur; rectam ſcilicet AC in C tangit, hincque duobus ramis, utrinque infinitis gyris Centrum C ambientibus & ſe mutuo in recta BC ad AC normali perpetuo decuſſantibus, in infinitum extenditur; eritque recta BCB ejus Diameter. Vocari autem hæc Curva ab inventore ſolet *Spiralis Archimedea*; atque, ſi ſemel eſt exacte deſcripta, inſervit ad quemvis angulum in quotcunque partes ſecandum, uti ex ejus æquatione $z = as$ ſponte patet.

TAB. XXVII. *Fig.* 109.

527. Quemadmodum æquatio $z = as$, quæ, ſi z & s eſſent Coordinatæ orthogonales, foret pro Linea recta, præbuit Spiralem Archimedeam; ita ſi aliæ æquationes algebraïcæ inter z & s accipiantur, infinitæ aliæ prodibunt Lineæ ſpirales, ſi quidem æquatio ita ſit comparata, ut ſingulis ipſius s valoribus reſpondeant valores reales ipſius z. Ita, hæc æquatio $z = \frac{a}{s}$, quæ ſimilis eſt æquationi pro Hyperbola ad Aſymtotas relata, præbet ſpiralem, quæ a Cel. *Johanne* BERNOULLIO vocata eſt Spiralis Hyperbolica; atque, poſtquam ex Centro C infinitis gyris exiiſſet, tandem in diſtantia infinita ad rectam AA tanquam Aſymtotam accedit. Quod ſi proponatur æquatio $z = a\sqrt{s}$; angulis s negative ſumtis nulla reſpondebit diſtantia realis z; valoribus autem affirmativis ſingulis

gulis ipsius s gemini valores ipsius z respondebunt, alter affirmativus alter negativus: spiræ tamen circa C absolventur infinitæ. Sin autem æquatio inter z & s fuerit hujusmodi $z = a\sqrt{(nn - ss)}$, variabilis z nullum habebit valorem realem nisi s contineatur intra hos limites $+n$ & $-n$; ideoque hoc casu Curva erit finita. Scilicet, si ad Axem ACB per Centrum C utrinque inclinentur rectæ EF, EF, cum Axe angulum $= n$ constituentes, hæ erunt Curvæ sese in C decussantis tangentes, ipsaque Curva habebit Lemniscatæ formam $ACBCA$. Simili autem modo innumerabiles aliæ obtinebuntur Linearum transcendentium formæ, quas evolvere nimis foret prolixum.

Cap. XXI.

Tab. XXVII. Fig. 110.

528. Hæc tractatio porro in immensum amplificari posset, si inter z & s non æquationes algebraïcæ sed adeo transcendentes accipiantur. Ex quo genere præ reliquis notari meretur ea Linea curva, quæ hac æquatione $s = n\,l.\,\frac{z}{a}$ exprimitur; in qua scilicet anguli s sunt Logarithmis distantiarum z proportionales; ob quam causam hæc Curva *Spiralis Logarithmica* appellatur, atque ob plurimas insignes proprietates maxime est nota. Hujus Curvæ primaria proprietas est, quod omnes rectæ ex Centro C eductæ Curvam sub æqualibus angulis intersecent. Ad eam ex æquatione educendam, sit angulus $ACM = s$, & recta $CM = z$, eritque $s = n\,l.\,\frac{z}{a}$ & $z = ae^{\frac{s}{n}}$; tum capiatur angulus major $ACN = s + v$, erit recta $CN = ae^{\frac{s}{n}}e^{\frac{v}{n}}$, ideoque Centro C descripto Arcu ML, qui erit $= zv$, fiet $LN = ae^{\frac{s}{n}}(e^{\frac{v}{n}} - 1) = ae^{\frac{s}{n}}(\frac{v}{n} + \frac{v^2}{2n^2} + \frac{v^3}{6n^3} + \&c.)$. Hinc erit, $\frac{ML}{LN} =$

Tab. XXVII. Fig. 111.

$$\frac{v}{\frac{v}{n}+\frac{v^2}{2n^2}+\frac{v^3}{6n^3}+\&c.} = \frac{n}{1+\frac{v}{2n}+\frac{v^2}{6nn}+\&c.}$$ At evanescente angulorum differentia $MCN = v$, fiet $\frac{ML}{LN}$ tangens anguli, quem Radius CM cum Curva constituit; unde, facto $v = 0$, istius anguli AMC tangens erit $= n$, ideoque iste angulus constans. Si fuerit $n = 1$, iste angulus erit semirectus, hocque casu Spiralis logarithmica vocatur semirectangula.

CAPUT XXII.

Solutio nonnullorum problematum ad Circulum pertinentium.

529. POsito Radio Circuli $= 1$, supra vidimus fore semicircumferentiam π, seu Arcum 180 graduum, $=$ 3,14159265358979323846264338, cujus numeri Logarithmus decimalis seu vulgaris est 0,497149872694133854351268288; qui si multiplicetur per 2, 30258 &c, prodibit ejusdem numeri Logarithmus hyperbolicus, qui erit $=$ 1, 144729885849400174143427. Cum igitur longitudo Arcus 180 graduum sit cognita, inde cujusvis Arcus in gradibus dati longitudo poterit assignari. Propositus sit Arcus n graduum, cujus longitudo, quæ quæritur, sit $= z$; erit $180 : n = \pi : z$, ideoque $z = \frac{\pi n}{180}$: hinc Logarithmus ipsius z reperitur, si a Logarithmo numeri n subtrahatur iste Logarithmus 1,7581226324091722154525264I3. Quod si autem Arcus propositus detur in minutis primis, ut sit n'; tum a Logarithmo ipsius n subtrahi debebit iste Logarithmus 3,536273882792815847961293211. Sin autem Arcus propositus

positus detur in minutis secundis ut sit $= n''$, tum longitudinis istius Arcus Logarithmus reperietur, si a Logarithmo numeri n subtrahatur iste Logarithmus 5,3144251331764594804700600009, vel, si ad Logarithmum numeri n addatur 4,6855748668235405195299399990, & a characteristica summæ 10 subtrahantur. Cap. XXII.

530. Ex his ergo vicissim Radius & ejus partes quæcunque, cujusmodi sunt Sinus, Tangentes, & Secantes in Arcus converti, hique Arcus more solito secundum gradus, minuta & secunda exprimi possunt. Sit z hujusmodi Linea per Radium 1 ejusque partes decimales expressa; sumatur ejus Logarithmus, ejusque characteristica denario augeatur, quemadmodum in tabulis Logarithmi Sinuum, Tangentium & Secantium repræsentari solent; quo facto vel subtrahatur ab isto Logarithmo 4,6855748668235405195299399990, vel ad eundem Logarithmum addatur 5,3144251331764594804700600009; utroque casu prodibit Logarithmus, cujus numerus respondens præbebit Arcum in minutis secundis expressum. Posteriori quidem casu characteristica denario minui debet. Quod si autem quæratur Arcus ipsi radio æqualis; hic sine Logarithmis facilius per regulam auream invenitur, cum sit π ad $180°$ ut 1 ad Arcum radio æqualem; hinc autem reperitur iste Arcus in gradibus expressus $57°$, 2957795130823208767 98, idem vero Arcus in minutis primis expressus erit $3437'$, 74677078493925260788; in minutis vero secundis erit idem Arcus $= 206264''$, 8062470963551564728. Consueto autem more hic Arcus expressus continebit

$$57°,\ 17',\ 44'',\ 48''',\ 22'''',\ 29''''',\ 21'''''',$$

Hujus Arcus per series in Sectione superiori exhibitas reperitur

Sinus $= 0,841470984 80514$

&

Cosinus $= 0,5403023058 4341$

quorum numerorum ille per hunc divisus dabit Tangentem anguli $57°, 17', 44'', 48''', 22'''', 29''''', 21''''''$, &c.

LIB. II. 531. His igitur præmiſſis, quibus Arcus circulares cum Sinibus & Tangentibus comparari poſſunt, plurimas quæſtiones ad naturam Circuli ſpectantes reſolvere poterimus. Ac primo quidem, patet omnem Arcum Sinu ſuo eſſe majorem, niſi ſit evaneſcens; aliter autem ratio Coſinuum eſt comparata, quoniam anguli evaneſcentis Coſinus eſt $= 1$, ideoque Arcu major, anguli vero recti Coſinus eſt $= 0$, ideoque Arcu eſt minor: ex quo patet intra limites $0°$ & $90°$ dari Arcum, qui ſit ſuo Coſinui æqualis, quem ſequente problemate inveſtigemus.

PROBLEMA I.

Invenire Arcum Circuli, qui ſit ſuo Coſinui æqualis.

SOLUTIO.

Sit s iſte Arcus quæſitus; eritque $s = cos.\,s$; ex qua æquatione valor ipſius s commodius quam per regulam *falſi* dictam vix inveniri poterit. Ad hoc autem jam propemodum valorem ipſius s noſſe oportet, quod vel levi conjectura aſſequi licet: niſi autem hoc pateat, tres pluresve valores loco s ſubſtituantur, & Coſinus pariter ad eandem unitatem revocetur. Ponamus $s = 30°$, quem Arcum ad partes radii revocemus regula ſupra data

$$\begin{array}{rl} l.\,30 = & 1,4771213 \\ \text{ſubtrahe} & \underline{1,7581226} \\ l.\,Arc.\,30° & 9,7189987 \\ & \text{at eſt} \\ l.\,cos.\,30 = & 9,9375306 \end{array}$$

unde patet Coſinum $30°$ multo eſſe majorem Arcu ideoque Arcum quæſitum majorem eſſe $30°$, Fingamus ergo

$s =$