Simili modo intelligi debet, si theoremata artt. 131, 132, 133 vsque ad aliquem terminum vera esse dicemus. Facile vero perspicitur, si de veritate theorematis fundamentalis vsque ad aliquem terminum constet, has propositiones vsque ad eundum terminum locum esse habituras.

136. Theorema fundamentale pro numeris paruis verum esse per inductionem facile confirmari, atque sic limes determinari potest vsque ad quem certo loco teneat. Hanc inductionem institutam esse postulamus: prorsus autem indifferens est quousque eam persequuti simus; sufficeret adeo, si tantummodo vsque ad numerum 5 eam confirmauissemus, hoc autem per vnicam obseruationem absoluitur, quod est $+ 5N3$, $\pm 3N5$.

Iam si theorema fundamentale generaliter verum non est, dabitur limes aliquis, T, vsque ad quem valebit, ita tamen vt vsque ad numerum proxime maiorem, $T + 1$, non amplius valeat. Hoc autem idem est ac si dicamus, dari duos numeros primos quorum maior sit $T + 1$, et qui inter se comparati theorematì fundamentali repugnent, binos autem alios numeros primos quoscunque, si modo ambo ipso $T + 1$ sint minores, huic theoremati esse consentaneos. Vnde sequitur, propositiones artt. 131, 132, 133 vsque ad T etiam locum habituras. Hanc vero suppositionem consistere non posse nunc ostendemus. Erunt autem secundum formas diuersas, quas tum

$T + 1$, tum numerus primus ipso $T + 1$ minor, quem cum $T + 1$ comparatum theoremati repugnare supposuimus, habere possunt, casus sequentes distinguendi. Numerum istum primum per p designamus.

Quando tum $T + 1$ tum p sunt formae $4n + 1$, theorema fundamentale duobus modis falsum esse posset, scilicet si simul esset, *vel* $\pm pR(T + 1)$ et $\pm(T + 1)Np$, *vel simul* $\pm pN(T + 1)$ et $\pm(T + 1)Rp$.

Quando tum $T + 1$ tum p sunt formae $4n + 3$, theor. fund. falsum erit, si simul fuerit *vel* $+ pR(T + 1)$, et $-(T + 1)Np$ (siue quod eodem redit $- pN(T + 1)$ et $+(T+1)Rp$); *vel* $+ pN(T + 1)$ et $-(T + 1)Rp$ (siue $- pR(T + 1)$ et $+(T + 1)Np$).

Quando $T + 1$ est formae $4n + 1$, p vero formae $4n + 3$, theor. fund. falsum erit, si fuerit *vel* $\pm pR(T + 1)$ et $+(T + 1)Np$ (siue $-(T + 1)Rp$); *vel* $\pm pN(T + 1)$ et $-(T + 1)Np$ (siue $+(T + 1)Rp$).

Quando $T + 1$ est formae $4n + 3$, p vero formae $4n + 1$, theor. fund. falsum erit, si fuerit *vel* $+ pR(T + 1)$, (siue $- pN(T+1)$) et $\pm(T + 1)Np$, *vel* $+ pN(T + 1)$(siue $- pR(T+1)$), et $\pm(T + 1)Rp$.

Si demonstrari poterit, nullum horum octo casuum locum habere posse, simul certum erit, theorematis fundamentalis veritatem nullis limitibus circumscriptam esse. Hoc itaque negotium nunc aggredimur: at quoniam alii horum casuum ab aliis sunt dependentes, eundum ordinem, quo eos hic enumerauimus seruare non licebit.

137. *Casus primus. Quando* $T + 1$ *est formae* $4n + 1$, $(= a)$, *atque* p *eiusdem formae; insuper vero* $\pm\, pRa$, *non potest esse* $\pm\, aNp$. Hic casus supra fuit primus.

Sit $+p \equiv e^2$ (mod. a), atque e par et $< a$, (quod semper obtineri potest). Iam duo casus sunt distinguendi.

I. Quando e per p non est diuisibilis. Ponatur $e^2 = p + af$, eritque f positiuus, formae $4n + 3$ (siue formae B), $< a$, et per p non diuisibilis. Porro erit $e^2 \equiv p$ (mod. f), i. e. pRf adeoque ex prop. 11 art. 132 $\pm\, fRp$ (quia enim p, f $< a$, pro his propositiones istae valebunt). At est etiam $af\,Rp$, quare fiet quoque $\pm\, a\,Rp$.

II. quando e per p est diuisibilis, ponatur $e = gp$, atque $e^2 \equiv p + aph$, siue $pg^2 = 1 + ah$. Tum erit h formae $4n + 3$ (B), atque ad p et g^2 primus. Porro erit $pg^2\,Rh$, adeoque etiam $p\,Rh$, hinc (prop. 11 art. 132), $\pm\, h\;Rp$. At est etiam $-\,ah\;Rp$, quia $-\,ah \equiv 1$ (mod. p); quare fiet etiam $\mp\, aRp$.

138. *Casus secundus. Quando* $T + 1$ *est formae* $4n + 1$, $(= a)$, p *formae* $4n + 3$, *atque*