LIBER SECUNDUS.

CAPUT I.

De lineis curvis in genere.

1. QUoniam quantitas variabilis eſt magnitudo in genere conſiderata omnes quantitates determinatas in ſe complectens, in Geometria hujuſmodi quantitas variabilis convenientiſſime repræſentabitur per lineam rectam indefinitam RS. Cum enim in linea indefinita magnitudinem quamcunque determinatam abſcindere liceat, ea pariter ac quantitas variabilis eandem quantitatis ideam menti offert. Primum igitur, in linea indefinita RS punctum aſſumi debet A, unde magnitudines determinatæ abſcindendæ initium ſumere cenſeantur; ſicque portio determinata AP repræſentabit valorem determinatum in quantitate variabili comprehenſum. Tab. I. Fig. 1.

2. Sit igitur x quantitas variabilis, quæ per rectam indefi-

LIB. II. nitam RS repræſentetur, atque manifeſtum eſt omnes valores determinatos ipſius x, qui quidem ſint reales, per portiones in recta RS abſcindendas repræſentari poſſe. Scilicet, ſi punctum P in ipſo puncto A capiatur, intervallum AP evaneſcens exhibebit valorem $x = 0$; quo magis autem punctum P ab A removetur, eo major valor determinatus ipſius x intervallo AP repræſentabitur.

Vocantur autem hæc intervalla AP, ABSCISSÆ.

Atque ideo Abſciſſæ exhibent variabilis x valores determinatos.

3. Quia vero recta RS indefinita utrinque ab A in infinitum excurrit, utrinque etiam omnes ipſius x valores abſcindi poterunt. Quod ſi autem valores affirmativos ipſius x ab A dextrorſum progrediendo abſcindamus, intervalla Ap ſiniſtrorſum abſciſſa valores ipſius x negativos exhibebunt. Cum enim, quo longius punctum P dextrorſum ab A diſtat, intervallum AP eo majorem valorem ipſius x ſignificet; ſic viciſſim, quo magis punctum P ſiniſtrorſum removetur, eo magis valor ipſius x diminuetur; atque, ſi P ad A perveniat, omnino fiet $x = 0$. Hanc ob rem ſi P ulterius ſiniſtrorſum removeatur, valores ipſius x nihilo minores, hoc eſt negativi, denotabuntur, atque ideo intervalla Ap ab A ſiniſtrorſum abſciſſa valores ipſius x negativos exhibebunt, ſi quidem intervalla AP dextrorſum ſumta valores affirmativos præbere cenſeantur. Arbitrarium autem eſt utra plaga ad valores affirmativos ipſius x deſignandos eligatur: ſemper enim oppoſita valores ipſius x negativos continebit.

TAB. I. Fig. 2. 4. Cum igitur linea recta indefinita quantitatem variabilem x exhibeat, videamus quomodo Functio ipſius x quæcunque quam-commodiſſime geometrice repræſentari queat. Sit y Functio quæcunque ipſius x; quæ ergo valorem determinatum induat, ſi pro x valor determinatus ſubſtituatur. Sumta recta indefinita RAS ad valores ipſius x denotandos, cuilibet valori ipſius x determinato AP normaliter applicetur recta PM valori ipſius y reſpondenti æqualis. Scilicet, ſi valor

valor ipſius y prodeat affirmativus, is ſupra rectam RS conſtituatur, ſin autem valor ipſius y negativus oriatur, is infra rectam RS normaliter applicetur. Sumtis enim valoribus ipſius y affirmativis ſupra rectam RS, evaneſcentes in ipſam RS & negativi infra eam cadent.

5. Figura ergo ejuſmodi Functionem ipſius x, pro y exhibet, quæ, poſito $x = o$, induat valorem affirmativum $= AB$, ſin capiatur $x = AP$, fit $y = PM$; ſi $x = AD$, fit $y = o$, &, ſi ſumatur $x = AP$, Functio y accipit valorem negativum, ideoque normaliter applicata PM infra rectam RS cadit. Simili modo valores ipſius y, qui valoribus negativis ipſius x reſpondent, repræſentantur per applicatas ſupra RS poſitas, ſi ſint affirmativi; contra autem infra rectam RS conſtitui debent, ut pm: ſin autem, pro quopiam ipſius x valore, ut $-x = AE$, fiat $y = o$, tum ibi longitudo Applicatæ evaneſcit.

6. Si igitur hoc modo pro omnibus valoribus determinatis ipſius x definiantur valores ipſius y reſpondentes, ad ſingula rectæ RS puncta P conſtituentur rectæ normaliter applicatæ PM valores Functionis y exprimentes, harumque Applicatarum PM alteri termini P in rectam RS incident, alteri vero M vel ſupra RS erunt poſiti, ſi valores ipſius y fuerint affirmativi; vel infra, ſi ſint negativi; vel etiam in ipſam rectam RS incident, ſi evaneſcant, uti evenit in punctis D & E. Singulæ ergo Applicatarum extremitates M repræſentabunt lineam quampiam, ſive rectam, ſive curvam; quæ igitur hoc modo per Functionem y determinabitur. Quare, quælibet ipſius x Functio, hoc modo ad Geometriam translata, certam determinabit lineam, ſive rectam ſive curvam, cujus natura a natura Functionis y pendebit.

7. Hoc autem modo linea curva, quæ ex Functione y reſultat, perfecte cognoſcitur; quoniam omnia ejus puncta ex Functione y determinantur; in ſingulis enim punctis P conſtat longitudo Applicatæ normalis PM, cujus extremum punctum M in linea curva ſit poſitum, ſicque omnia lineæ curvæ puncta inveniuntur. Quomodocunque autem linea curva fuerit com-

 parata, ex ejus ſingulis punctis rectæ normales ad rectam RS duci poſſunt, ſicque obtinentur intervalla AP, quæ valores variabilis x exhibent, & longitudines Applicatarum PM, quæ valores Functionis y repræſentant. Hinc nullum curvæ extabit punctum, quod non hac ratione per Functionem y definiatur.

8. Quanquam complures lineæ curvæ per motum puncti continuum mechanice deſcribi poſſunt, quo pacto tota linea curva ſimul oculis offertur, tamen hanc linearum curvarum ex Functionibus originem hic potiſſimum contemplabimur, tanquam magis analyticam latiuſque patentem, atque ad calculum magis accommodatam. Quælibet ergo Functio ipſius x ſuppeditabit lineam quandam, ſive rectam ſive curvam, unde viciſſim lineas curvas ad Functiones revocare licebit. Cujuſque ergo lineæ curvæ natura exprimetur per ejuſmodi Functionem ipſius x, quæ, dum intervalla AP ad quæ perpendicula MP ex ſingulis curvæ punctis M in rectam RS demittuntur, per variabilem x indicantur, exhibeat ſemper veram iſtius Applicatæ MP longitudinem.

9. Ex hac linearum curvarum idea ſtatim ſequitur earum diviſio in *continuas*, & *diſcontinuas* ſeu *mixtas*. Linea ſcilicet curva *continua* ita eſt comparata, ut ejus natura per unam ipſius x Functionem definitam exprimatur. Quod ſi autem linea curva ita ſit comparata, ut variæ ejus portiones BM, MD, DM &c., per varias ipſius x Functiones exprimantur; ita ut, poſtquam ex una Functione portio BM fuerit definita, tum ex alia Functione portio MD deſcribatur; hujuſmodi lineas curvas *diſcontinuas* ſeu *mixtas* & *irregulares* appellamus: propterea quod non ſecundum unam legem conſtantem formantur, atque ex portionibus variarum curvarum continuarum componuntur.

10. De curvis autem continuis in Geometria potiſſimum eſt ſermo, atque infra oſtendetur, quæ curvæ motu uniformi ſecundum regulam quandam conſtantem mechanice deſcribuntur, eaſdem quoque per unicam Functionem exprimi, atque ideo eſſe