non $= 0$. Tum per art. 162 forma f per substitutionem propriam $\frac{1}{m}(t - bu)$, $\frac{1}{m}a'u$, $\frac{1}{m}au$, $\frac{1}{m}(t + bu)$ transformabitur in formam cum ipsa identicam. Iam ex art. 193, II sequitur, *aut* $\frac{1}{m}(t - bu)$ *aut* $-\frac{1}{m}(t - bu)$ alicui numerorum α^{II}, α^{III}, α^{IV} etc. aequalem esse debere, puta $= \alpha^{\mu}$ (quia enim $tt = Duu + mm = bbuu + a'uu + mm$, erit $tt > bbuu$, adeoque $t - bu$ positiuus; hinc fractio $\frac{t - bu}{au}$, quae respondet fractioni $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}}$ in art. 193, idem signum habebit vt a vel a'); atque in casu priori $\frac{1}{m}a'u$, $\frac{1}{m}au$, $\frac{1}{m}(t + bu)$, in posteriori easdem quantitates mutatis signis, resp. $= \beta^{\mu}$, γ^{μ}, δ^{m}. Sed quum sit $u < U$ i. e. $u < \frac{\gamma^{n} m}{a}$ et > 0: erit $\gamma^{\mu} < \gamma^{n}$ et > 0; quocirca quum progressio γ, γ', γ'' etc. continuo crescat, necessario μ iacebit inter 0 et n excl. Forma vero respondens, f^{μ}, identica erit cum forma f, *Q.E.A*, quum omnes formae f, f', f'', etc. vsque ad f^{n-1} diuersae esse supponantur. Ex his colligitur, minimos valores ipsorum t, u (exceptis valoribus m, 0) esse T, U.

Ex. Si $D = 79$, $m = 1$: adhiberi poterit forma $(3, 8, -5)$, pro qua $n = 6$, atque $\alpha^{n} = -8$, $\gamma^{n} = -27$, $\delta^{n} = -152$ (art. 188). Hinc $T = 80$, $U = 9$, qui sunt valores minimi numerorum t, u, aequationi $tt - 79uu = 1$ satisfacientes.

199. Ad praxin formulae adhuc commodiores erui possunt. Erit nimirum $2b\gamma^n = -a(\alpha^n - \delta^n)$, quod facile ex art. 162 deducitur, multiplicando aequ. [19] per $2b$, [20] per a et mutando characteres illic adhibitos in praesentes. Hinc fit $\alpha^n + \delta^n = 2\delta^n - \frac{2b}{a}\gamma^n$, adeoque

$$\pm T = m\left(\delta^n - \frac{b}{a}\gamma^n\right), \pm U = \frac{\gamma^n m}{a}.$$

Per similem methodum hos valores obtinemus

$$\pm T = m\left(\alpha^n + \frac{b}{a'}\varepsilon^n\right), \pm U = \frac{\varepsilon^n m}{a'}.$$

Tum hae tum illae formulae perquam commodae euadunt, propter $\gamma^n = \delta^{n-1}$, $\alpha^n = \varepsilon^{n-1}$, ita vt si hac vteris, solam progressionem ε', ε'', ε''' ... ε^n, si illa vti mauis, solam hanc δ', δ'', δ''' etc. supputauisse sufficiat. Praeterea ex art. 189, 3 facile deducitur, quum n necessario sit par, α^n et $\frac{b}{a'}\varepsilon^n$ eadem signa habere; neque minus δ^n et $\frac{b}{a}\gamma^n$, ita vt in formula priori pro T differentia absoluta, in posteriori summa absoluta accipi debeat, neque adeo ad signa respicere omnino opus sit. Receptis signis in art. 189, 4 adhibitis erit ex formula priori

$$T = m\,[k', k'', k''' \ldots\ldots k^n] - \frac{mb}{a}[k', k'', k''' \ldots\ldots k^n - 1]; \quad U = \frac{m}{a'}[k', k'', k''' \ldots\ldots k^n - 1];$$

ex posteriori

$$T = m\,[k'', k''' \ldots\ldots k^n - 1] + \frac{mb}{a'}[k'', k''' \ldots\ldots k^n];$$

$$U = \frac{m}{a}[k'', k''' \ldots\ldots k^n];$$

vbi pro valore ipsius T etiam $m\,[k'', k''' \ldots k^n, \frac{b}{a'}]$ scribi poterit.

Ex. Pro $D = 61$, $m = 2$ adhiberi potest forma $(2, 7, -6)$, pro qua eruitur $n = 6$; k^{I}, k^{II}, k^{III}, k^{IV}, k^{V}, k^{VI} resp. $= 2, 2, 7, 2, 2, 7$. Hinc fit $T = 2\,[2, 2, 7, 2, 2, 7] - 7\,[2, 2, 7, 2, 2] = 2888 - 1365 = 1523$, ex formula prima; idem prouenit ex secunda $T = 2\,[2, 7, 2, 2] + \frac{7}{3}\,[2, 7, 2, 2, 7]$. U vero fit $= \frac{1}{3}\,[2, 2, 7, 2, 2] = [2, 7, 2, 2, 7] = 195$.

Ceterum plura artificia adhuc dantur, per quae calculus contrahi potest, sed de his fusius hic loqui breuitas non permittit.

200. Vt ex valoribus minimis ipsorum t, u *omnes* obtineamus, aequationem $TT - DUU = mm$ ita exhibemus $(\frac{T}{m} + \frac{U}{m}\sqrt{D})(\frac{T}{m} - \frac{U}{m}\sqrt{D}) = 1$, vnde etiam erit $(\frac{T}{m} + \frac{U}{m}\sqrt{D})^e\,(\frac{T}{m} - \frac{U}{m}\sqrt{D})^e = 1 \ldots [1]$, denotante e numerum quemcunque. Iam designabimus breuitatis caussa valores quantitatum

$$\frac{m}{2}(\frac{T}{m} + \frac{U}{m}\sqrt{D})^e + \frac{m}{2}(\frac{T}{m} - \frac{U}{m}\sqrt{D})^e,$$

$$\frac{m}{2\sqrt{D}}(\frac{T}{m} + \frac{U}{m}\sqrt{D})^e - \frac{m}{2\sqrt{D}}(T - \frac{U}{m}\sqrt{D})^e\,*)$$

generaliter per t^e, u^e resp. *i. e.* illarum valores pro

*) In his solis quatuor expressionibus et in aequ. [1] e denotat *exponentem* potestatis; in reliquis literae apici adscriptae semper *indicem* designant.

$e = o$, per t^o, u^o (qui erunt m, o); pro $e = 1$ per t', u' (qui fiunt T, U); pro $e = 2$ per t'', u''; pro $t = 3$ per t''', u''' etc. — demonstrabimusque, si pro e accipiantur omnes numeri integri non negatiui i. e. o, omnesque positiui ab 1 vsque ad ∞, expressiones illas exhibere omnes valores positiuos ipsorum t, u: scilicet I) omnes valores illarum expressionum esse reuera valores ipsorum t, u; II) omnes valores illos esse numeros integros; III) nullos valores positiuos ipsorum t, u dari qui sub formulis illis non contineantur.

I. Substitutis pro t^e, u^e valoribus suis nullo negotio aduimento aequ. [1] confirmatur, esse $(t^e + u^e \sqrt{D})\ (t^e - u^e \sqrt{D}) = mm$; i. e. $t^e\, t^e - D\, u^e\, u^e = mm$.

II. Eodem modo facile confirmatur, esse generaliter $t^{e+1} + t^{e-1} = \frac{2T}{m} t^e$, $u^{e+1} + u^{e-1} = \frac{2T}{m} u^e$. Hinc manifestum est duas progressiones t^o, t', t'', t''' etc., u^o, u', u'', u''' etc. esse recurrentes, et vtriusque scalam relationis $\frac{2T}{m}$, -1, scilicet $t'' = \frac{2T}{m} t' - t^o$, $t''' = \frac{2T}{m} t'' - t'$ etc. $u'' = \frac{2T}{m} u'$ etc.

Iam quoniam per hyp. forma aliqua datur, (M, N, P), determinantis D, in qua M, $2N$, P per m sunt diuisibiles: habebitur $TT = (NN - MP)\, UU + mm$, eritque adeo manifesto $4TT$ per mm diuisibilis. Hinc $\frac{2T}{m}$ erit numerus integer et