LIB. II. directum erunt sita. Quo igitur his casibus natura Curvæ penitius perspiciatur, substitutio $t = \frac{-Ar + Bs}{\sqrt{(AA+BB)}}$ & $u = \frac{-As - Br}{\sqrt{(AA+BB)}}$, etiam in terminis $Ft^3 + Gttu + Htuu + Iu^3$ est instituenda. Cum autem præ termino primo $r\sqrt{(A^2+B^2)}$ omnes termini sequentes, qui r continent, evanescant, his terminis rejectis, atque substitutione per totam æquationem facta, obtinebitur ejusmodi æquatio

$$r\sqrt{(A^2+B^2)} = \alpha ss + \beta s^3 + \gamma s^4 + \delta s^5 + \&c.$$

321. Ex hac æquatione jam statim colligitur, ut supra, radius osculi $= \frac{\sqrt{(AA+BB)}}{2\alpha}$; sin autem sit $\alpha = 0$, quo casu radius osculi fit infinitus, ad Curvæ naturam exactius cognoscendam, sumi debet terminus sequens βs^3, ita ut sit $r\sqrt{(A^2+B^2)} = \beta s^3$ nisi enim sit $\beta = 0$, termini sequentes γs^4, δs^5, &c., omnes præ hoc evanescunt. Curvam ergo hoc casu in M osculabitur Curva hac æquatione $r\sqrt{(A^2+B^2)} = \beta s^3$ expressa, ex qua simul figura Curvæ circa punctum M cognoscetur. Cum igitur Abscissæ r negative sumtæ negativus valor Applicatæ s respondeat, Curva circa M figuram habebit anguineam $mM\mu$, ideoque in M habebit punctum flexus contrarii. TAB. XVI. Fig. 61.

322. Quod, si præter α etiam fiat $\beta = 0$, tum natura Curvæ circa M exprimetur hac æquatione $r\sqrt{(A^2+B^2)} = \gamma s^4$, ex qua cum unicuique Abscissæ r duplex Applicata s respondeat, altera affirmativa, altera negativa, neque Abscissa r utrinque sumi queat, utraque Curvæ portio Mm & $M\mu$ ad eandem Tangentis partem erit posita. TAB. XVI. Fig. 62. At si, ob α, β, & γ evanescentes, natura Curvæ circa M exprimatur æquatione $r\sqrt{(A^2+B^2)} = \delta s^5$, tum Curva ad M iterum habebit punctum flexus contrarii uti in *Figura* 61. Sin autem fuerit etiam $\delta = 0$, ut fiat $r\sqrt{(A^2+B^2)} = \varepsilon s^6$, tum Curva iterum TAB. XVI.

iterum

iterum puncto flexus contrarii destituetur, uti *Figura 62*. Atque generaliter, si exponens ipsius s fuerit numerus impar, Curva in M habebit punctum flexus contrarii; sin autem exponens ipsius s fuerit numerus par, Curva carebit puncto flexus contrarii uti *Figura 62*. CAP. XIV. TAB. XVI.

323. Hæc igitur sunt Curvarum phænomena, si punctum M fuerit simplex, seu si in æquatione

$$0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + \&c.,$$

non uterque coëfficiens A & B simul evanescat. Quod si autem fuerit & $A = 0$, & $B = 0$, Curvaque habuerit duos pluresve ramos se in puncto M intersecantes, uniuscujusque rami curvatura & indoles in M investigabitur seorsim, ut ante. Sit enim pro Tangente cujusvis rami $mt + nu = 0$, & quæratur æquatio pro hoc ramo inter Coordinatas r & s, quarum illa r in normali MN capiatur, ut sit r infinities minor quam s. Poni ergo debebit $t = \frac{-mr + ns}{\sqrt{(m^2 + n^2)}}$ & $u = \frac{-ms - nr}{\sqrt{(m^2 + n^2)}}$; quo facto & neglectis terminis ob infinitam parvitatem præ reliquis evanescentibus, prodibit, si M fuerit punctum duplex, hujusmodi æquatio $rs = \alpha s^3 + \beta s^4 + \gamma s^5 + \delta s^6 + \&c.$: sin autem M fuerit punctum triplex, talis $rss = \alpha s^4 + \beta s^5 + \gamma s^6 + \&c.$, & ita porro: quæ æquationes omnes reducuntur ad hanc formam TAB. XV. Fig. 56. TAB. XV. Fig. 55.

$$r = \alpha ss + \beta s^3 + \gamma s^4 + \delta s^5 + \&c.$$

324. Ex hac æquatione intelligitur istius Curvæ rami, quem consideramus, in M esse radium osculi $= \frac{1}{2\alpha}$, qui, si $\alpha = 0$, fiet $= \infty$. Hoc ergo casu natura Curvæ exprimetur vel hac æquatione $r = \beta s^3$, vel $r = \gamma s^4$, vel $r = \delta s^5$, &c.; ex quibus, ut ante, colligetur Curvæ ramum in M vel punctum flexus contrarii habere, vel tali carere. Prius scilicet evenit, si exponens ipsius s fuerit numerus impar, posterius si sit nume-

LIB. II. rus par. Hoc ergo modo judicandum erit de quovis ramo per punctum M transeunte seorsim, cum reperta fuerit ejus Tangens, ejusque Tangens discrepet a Tangentibus reliquorum ramorum sese in eodem puncto M intersecantium.

325. Aliud autem judicium erit ferendum, si duorum pluriumve ramorum Tangentes in puncto M coincidant. Sint enim, evanescentibus A & B in æquatione $0 = Ctt + Dtu + Euu + Ft^3 + Gt^2u +$ &c., primi membri $Ctt + Dtu + Euu$, ambo Factores simplices æquales, seu ambo rami se in puncto

TAB. XV. Fig. 55. M decussantes communem habeant Tangentem. Sit ergo $Ctt + Dtu + Euu = (mt + nu)^2$, atque æquatione ad Coordinatas $Mr = r$, & $rm = s$ translata, ponendo $t = \frac{-mr + ns}{\surd(m^2 + n^2)}$ & $u = \frac{-ms - nr}{\surd(m^2 + n^2)}$; hujusmodi prodibit æquatio $rr = \alpha rss + \beta s^3 + \gamma rs^3 + \delta s^4 + \varepsilon rs^4 + \zeta s^5 +$ &c.: termini enim, in quibus r habet duas pluresve dimensiones præ primo rr evanescunt.

326. Hic primum spectandus est terminus βs^3, qui si adfuerit, præ eo reliqui omnes evanescunt, propterea quod r infinities minus est quam s. Nisi ergo fuerit $\beta = 0$, natura Curvæ circa M exprimetur hac æquatione $rr = \beta s^3$; ex qua, cum sit $r = s\surd\beta s = ss\surd\frac{\beta}{s}$, intelligitur radium osculi in M esse $= \frac{1}{2}\surd\frac{s}{\beta}$; seu, ob s evanescens in M, radium osculi quoque fieri $= 0$. Erit ergo curvatura in M infinite magna seu Elementum Curvæ in M erit portio Circuli infi-

TAB. XVI. Fig. 63. nite parvi. Quoniam porro Applicata s eundem obtinet valorem, sive Abscissa r sumatur affirmativa sive negativa, patet Curvam in M habere Cuspidem, atque in duos ramos Mm, $M\mu$ divaricari se mutuo in M contingentes atque Tangenti Mt convexitatem obvertentes.

327. Sit $\beta = 0$; adsit autem terminus δs^4, præ quo γrs^3 evanescit, atque natura Curvæ circa M exprimetur æquatione $rr = \alpha rss + \delta s^4$; quæ, si fuerit $\alpha\alpha$ minor quam -4δ, ob Factores

ctores imaginarios, punctum conjugatum in M indicat; sin autem $\alpha\alpha$ major quam -4δ, tum in duas æquationes hujusmodi $r = fss$ & $r = gss$ dispescitur. Quare in M duo Curvæ rami se mutuo contingent, quorum alterius in M radius osculi est $= \frac{1}{2f}$, alterius $= \frac{1}{2g}$. Si ergo hi duo rami concavitatem in eandem plagam vertant, figura erit duorum Arcuum circularium se intus Tangentium; sin autem concavitates in plagas opositas dirigantur, figura erit duorum Arcuum circularium se extus Tangentium. CAP. XIV. TAB. XVI. *Fig.* 64. *Fig.* 65.

328. Sin etiam δ evanescat, tum æquatio vel in duas æquationes erit resolubilis, vel secus, priori casu duo oriuntur rami se in puncto M tangentes, quorum utriusque natura exprimetur hujusmodi æquatione $r = \alpha s^m$; prodibunt ergo tot diversæ figuræ, quot dantur combinationes binorum ramorum, qui in M punctum simplex constituunt, quos vocemus *ramos primi ordinis*, qui omnes in æquatione $r = \alpha s^m$, continentur. Posteriori autem casu quo æquatio in duas alias se resolvi non patitur, natura Curvæ exprimetur æquatione vel $rr = \alpha s^5$, vel $rr = \alpha s^7$, vel $rr = \alpha s^9$, &c.; quos ramos cum eo, quem supra invenimus $rr = \alpha s^3$, *ramos secundi ordinis* appellabimus, quia vicem tenent duorum ramorum primi ordinis se in M tangentium. Hi autem rami secundi ordinis omnes in M habebunt Cuspidem, uti præbuit æquatio $rr = \alpha s^3$; hoc tamen discrimine, quod, cum radius osculi in M pro æquatione $rr = \alpha s^3$ esset infinite parvus, idem pro reliquis æquationibus prodeat infinite magnus. Cum enim ex æquatione $rr = \alpha s^5$ sit $r = ss\sqrt{\alpha s}$, erit radius osculi in $M = \frac{1}{2\sqrt{\alpha s}}$, hoc est, ob $s = 0$, infinitus. TAB. XVI. *Fig.* 63.

329. Si tres Tangentes ramorum se in M decussantium in se invicem incidant; tum vel tres rami primi ordinis se in eodem puncto M contingent, vel in M erit contactus unius

LIB. II. rami ſecundi ordinis cum uno ramo primi ordinis, vel unicus per M tranſibit *ramus tertii ordinis*. Ramorum autem tertii ordinis natura exprimetur hujuſmodi æquationibus $r^3 = \alpha s^4$; $r^3 = \alpha s^5$; $r^3 = \alpha s^7$; $r^3 = \alpha s^8$; &c., ſeu hac generali $r^3 = \alpha s^n$, exiſtente n numero quocunque integro ternario majore neque per ternarium diviſibili. Horum ramorum autem figura ita erit comparata, ut in M ſit punctum flexus contrarii, ſi n fuerit numerus impar; flexus vero non contrarius ſeu
TAB. XVI. continuus (ut in *Figura* 62.) adſit, ſi n fuerit numerus par. Ceterum in his Curvis radius oſculi in M erit infinite parvus ſi n minor quam 6, at infinite magnus ſit n major quam 6.

330. Simili modo ſi quatuor Tangentes ramorum ſe in M decuſſantium congruant, tum vel quatuor rami primi ordinis, vel duo primi & unus ſecundi, vel duo rami ſecundi ordinis, vel unus primi & unus tertii ordinis ſe in eodem puncto M contingent, vel denique unicus *ramus quarti ordinis* per M tranſibit. Ramorum autem quarti ordinis natura continetur hac æquatione generali $r^4 = \alpha s^n$, exiſtente n numero integro
TAB. XVI. Fig. 63. impari majore quam 4. Hæ autem æquationes omnes præbent Cuſpidem, uti rami ſecundi ordinis. At in M erit radius oſculi infinite parvus ſi n minor quam 8, infinite magnus autem ſi n major quam 8.

331. Eodem modo ramorum *quinti* ſuperiorumve ordinum natura evolvetur; ratione figuræ autem rami quinti, ſeptimi, noni, omniumque imparium ordinum conveniunt cum ramis primi ordinis, quorum duplex eſt figura, vel cum puncto flexus contrarii, vel ſine eo. Rami autem ſexti, octavi, & omnium parium ordinum conveniunt ratione figuræ cum ramis ſecundi & quarti ordinis, omnes ſcilicet habebunt Cuſpidem in M uti *Figura* 63. exhibet. Quod autem ad radium oſculi attinet, quoniam horum Arcuum natura exprimitur hac æquatione $r^m = \alpha s^n$, exiſtente n numero majore quam m; per-

ſpicuum