Ponamus Φ esse $(M; K)$, atque $e = MN$ ita vt f in Φ per substitutionem propriam M, K, o, N transeat. Porro designentur omnes transformationes propriae formae Φ in F indefinite per $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$. Tum manifesto f transibit in Φ per substitutionem propriam $M\mathfrak{a} + K\mathfrak{c}$, $M\mathfrak{b} + K\mathfrak{d}$, $N\mathfrak{c}$, $N\mathfrak{d}$, et hoc modo ex quauis transformatione propria formae Φ in F sequetur transformatio propria formae f in F. — Eodem modo tractandae sunt formae reliquae Φ', Φ'' etc., quarum singulae transformationes propriae in F transformationem propriam formae f in F praebebunt.

Vt appareat hanc solutionem ex omni parte completam esse, ostendendum erit

I. *Hoc modo omnes transformationes proprias possibiles formae f in F obtineri.* Sit transformatio quaecunque propria formae f in F haec α, β, γ, δ atque vt in art. praec. II, n diuisor communis maximus numerorum γ, δ; numeri m, g, h, k autem eodem modo vt illic determinati. Tunc forma $(m; k)$ erit inter formas Φ, Φ' etc., et $\frac{\gamma}{n} \cdot \frac{\alpha\gamma + \beta h - k}{m} + h$, $\frac{\delta}{n} \cdot \frac{\alpha\gamma + \beta h - k}{m} - g$, $\frac{\gamma}{n}$, $\frac{\delta}{n}$ aliqua ex transformationibus propriis huius formae in F; ex hac vero per regulam modo traditam obtinetur transformatio α, β, γ, δ; haec omnia in art. praec. sunt demonstrata.

II. *Omnes transformationes hoc modo prodeuntes inter se diuersas esse, seu nullam bis obtineri.* Nullo quidem negotio perspicitur, plures transformationes diuersas eiusdem formae Φ, vel Φ' etc. in F eandem transformationem formae f in F producere non posse; quod vero etiam formae diuersae e. g. Φ et Φ' eandem transformationem suppeditare nequeant, ita demonstratur. Supponamus, transformationem propriam $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ formae f in F obtineri *tum* ex transformatione propria $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ formae Φ in F, *tum* ex transformatione propria $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$ formae Φ' in F. Sit $\Phi = (M; K)$, $\Phi' = (M'; K')$, $e = MN = M'N'$. Habebuntur itaque aequationes $\alpha = M\mathfrak{a} + K\mathfrak{c} = M'\mathfrak{a}' + K'\mathfrak{c}'$ ... [1], $\beta = M\mathfrak{b} + K\mathfrak{d} = M'\mathfrak{b}' + K'\mathfrak{d}'$ ... [2], $\gamma = N\mathfrak{c} = N'\mathfrak{c}'$ ... [3], $\delta = N\mathfrak{d} = N'\mathfrak{d}'$ ... [4], $\mathfrak{a}\mathfrak{d} - \mathfrak{b}\mathfrak{c} = \mathfrak{a}'\mathfrak{d}' - \mathfrak{b}'\mathfrak{c}' = 1$ ... [5]. Ex $\mathfrak{a}[4] - \mathfrak{b}[3]$ sequitur adiumento aequ. [5], $N = N'(\mathfrak{a}\mathfrak{d}' - \mathfrak{b}\mathfrak{c}')$, quare N' metietur ipsum N; similiter ex $\mathfrak{a}'[4] - \mathfrak{b}'[3]$ fit $N(\mathfrak{a}'\mathfrak{d} - \mathfrak{b}'\mathfrak{c}) = N'$, quare N metietur ipsum N', vnde, quia tum N tum N' supponuntur esse positiui, erit necessario $N = N'$, et $M = M'$, et hinc ex 3 et 4, $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}'$. Porro fit ex $\mathfrak{a}[2] - \mathfrak{b}[1]$, $K = M'(\mathfrak{a}\mathfrak{b}' - \mathfrak{b}\mathfrak{a}') + K'(\mathfrak{a}\mathfrak{d}' - \mathfrak{b}\mathfrak{c}') = M(\mathfrak{a}\mathfrak{b}' - \mathfrak{b}\mathfrak{a}') + K'$, hinc $K \equiv K'$ (mod. M) quod fieri nequit nisi $K = K'$, quia tum K tum K' iacent inter limites 0 et $M - 1$. Quamobrem formae Φ, Φ' non sunt diuersae, contra hyp.

Ceterum patet, si D fuerit negatiuus vel positiuus quadratus, per methodum hanc omnes transformationes proprias formae f in F reuera inueniri posse; si vero D positiuus non-quadratus, formulae certae generales assignari poterunt in quibus omnes transformationes propriae (quarum multitudo infinita) contentae erunt.

Denique, si forma F improprie sub forma f contenta est, omnes transformationes impropriae illius in hanc per methodum traditam facile exhiberi poterunt. Scilicet si α, β, γ, δ indefinite omnes transformationes proprias formae f in formam quae formae F opposita est, designare supponitur: omnes transf. impropriae formae f in F exhibebuntur per $\alpha, -\beta, \gamma, -\delta$.

Ex. Desiderantur omnes transformationes formae $(2, 5, 7)$ in $(275, 0-1)$, quae sub illa tum proprie tum improprie contenta est. Complexum formarum Ω pro hoc casu iam in art. praec. tradidimus; examine instituto inuenitur, tum $(5; 1)$ tum $(5; 4)$ formae $(275, 0, -1)$ proprie aequiualere. Omnes transformationes propriae formae $(5; 1)$ *i. e.* $(50, 35, 19)$ in $(275, 0, -1)$ per theoriam nostram supra explicatam inueniuntur contineri sub formula generali $16t - 275u, -t + 16u, -15t + 275u, t - 15u$, vbi t, u designant indefinite omnes numeros integros aequationi $tt - 275uu = 1$ satisfacientes; quare omnes transformationes propriae formae $(2, 5, 7)$ in $(275, 0, -1)$ hinc oriundae contentae erunt sub formula generali $65t - 1100u, -4t + 65u, -15t + 275u, t - 15u$. Simili modo omnes transformationes propriae formae $(5; 4)$ *i. e.* $(50, 65, 79)$ in $(275, 0, -1)$ continentur sub formula generali $14t + 275u, t + 14u, -15t - 275u, -t - 15u$, adeoque omnes transformationes propriae formae $(2, 5, 7)$ in $(275, 0, -1)$ hinc oriundae sub hac $10t + 275u, t + 10u, -15t - 275u, -t - 15u$. Hae duae formulae igitur omnes