$\frac{CC}{16EE}$ & $h = \frac{C}{4E}$; unde fit $c = \frac{CC - 4BE}{4CE}$, & porro $k = i = \frac{CC - 4BE}{4CE}$; $a = \frac{2EE}{C}$ & $f = 0$. CAP. XX.

II.

Sit autem D quantitas negativa, puta $D = -EE$, ut construi debeat hæc æquatio

$$x^4 * + Bx^2 - Cx - EE = 0,$$

fiet $64cch^4 = CC + 4hh(4hh - B)^2 + 16EEhh$; quæ æquatio realem pro c valorem præbet, quicquid pro h assumatur: fiet enim $c = \frac{\sqrt{(CC + 4hh(4hh - B)^2 + 16EEhh)}}{8hh}$, atque h pro lubitu assumi potest; quovis igitur casu ita assumatur, ut facillima ipsius c constructio inde consequatur. Quo facto erit, ut ante, $AE = f = 0$, $CD + EF = k = \frac{4hh - B}{4h}$ & $AD = a = \frac{C}{8hh}$. Si ponatur $E = 0$, orietur constructio æquationis cubicæ

$$x^3 * + Bx - C = 0.$$

Hacque constructione nititur regula BACKERI vulgo satis nota.

496. Si sumantur duæ quæcunque Lineæ secundi ordinis seu Sectiones conicæ, quarum æquationes ad communem Axem idemque Abscissarum initium relatæ sint

$$ayy + byx + cxx + dy + ex + f = 0$$
&
$$\alpha yy + \beta yx + \gamma xx + \delta y + \epsilon x + \zeta = 0.$$

Ex quibus, si methodo supra tradita y eliminetur, quod fiet istas æquationes comparando cum illis in §. 479. tractatis, scilicet

$$P + Qy + Ryy = 0$$
$$\&$$
$$p + qy + ryy = 0,$$

fient P & p Functiones secundi ordinis ipsius x, Q & q Functiones primi ordinis, & R & r erunt constantes, unde colligitur æquatio resultans fore biquadratica. Atque adeo per intersectiones duarum quarumvis Sectionum conicarum altioris gradus æquationes construi nequeunt, quam biquadraticæ, quas autem per Circulum & Parabolam construi posse vidimus. Hoc idem vero intelligere licet ex natura Linearum secundi ordinis, quæ a recta Linea in duobus punctis secari possunt; unde duæ rectæ quatuor intersectiones formare poterunt, at duæ Lineæ rectæ junctim consideratæ speciem constituunt Linearum secundi ordinis; unde patet duas Lineas secundi ordinis se mutuo in quatuor punctis intersecare posse.

497. Adhibeantur ad intersectiones efficiendas duæ Lineæ, altera secundi, altera vero tertii ordinis, quæ exprimantur his æquationibus

$$P + Qy + Ryy = 0$$
$$\&$$
$$p + qy + ryy + sy^3 = 0.$$

Erit ergo P Functio duarum dimensionum ipsius x, Q Functio unius dimensionis, & R constans; tum vero p Functio trium dimensionum, q duarum, r unius dimensionis & s constans. Quarum ratio si in æquatione post eliminationem ipsius y orta (480.) habeatur, patebit eam fore ordinis sexti; quare per intersectiones Lineæ tertii ordinis cum Sectione conica altiores æquationes, quam sextæ potestatis construi non poterunt: quod idem ex natura utriusque ordinis patet, cum enim Lineæ tertii ordinis a Linea recta in tribus punctis intersecentur, eædem a duabus rectis, quæ junctim sumptæ speciem Linearum secundi ordinis constituunt, in sex punctis intersecabuntur

498. Si

498. Si tam eliminationes ſupra expoſitas, quam hoc ratiocinium ab interſectione rectarum petitum, ad altiores ordines transferamus, patebit per interſectiones duarum Linearum tertii ordinis conſtrui poſſe æquationes nonæ poteſtatis; per interſectiones duarum Linearum quarti ordinis autem æquationes poteſtatem ſextam decimam non ſuperantes. Atque in genere per duarum Linearum curvarum interſectiones, quarum altera ſit ordinis m altera ordinis n, conſtrui poterunt omnes æquationes poteſtatem mn non excedentes. Sic ad æquationem centeſimæ poteſtatis conſtruendam opus erit vel duabus Lineis decimi ordinis, vel duabus, quarum altera ſit quinti altera viceſimi ordinis, & ita porro; reſolvendo numerum 100. in duos Factores. Quod ſi autem æquationis conſtruendæ maxima poteſtas exponatur numero primo, vel alio commodos Factores non admittente, tum in ejus locum alius numerus major Factores habens idoneos ſubſtituatur; quibus enim binis Curvis æquationes majoris poteſtatis conſtrui poſſunt, iiſdem quoque æquationes inferioris cujuſque gradus conſtruentur. Sic ad æquationem gradus triceſimi noni adhiberi poterunt duæ Curvæ, altera ſexti altera ſeptimi ordinis; quia duabus hujuſmodi Curvis æquatio quadrageſimi ſecundi gradus conſtrui poteſt, hæcque conſtructio ſimplicior eſt cenſenda, quam ſi altera Curva ordinis tertii, altera decimi tertii aſſumeretur.

499. Ex his igitur perſpicuum eſt unamquamque æquationem pluribus, imo innumerabilibus, modis per interſectiones duarum Curvarum ita conſtrui poſſe, ut ejus radices reales aſſignentur. Ex quibus infinitis modis eum potiſſimum eligi conveniet, qui abſolvitur Lineis curvis cum ſimpliciſſimis tum deſcriptu facillimis; imprimis vero in id erit incumbendum, ut per interſectiones omnes radices reales exhibeantur; quod obtinetur, ſi ejuſmodi Curvæ aſſumantur, quæ interſectionibus imaginariis careant. Supra autem vidimus hujuſmodi interſectionibus imaginariis nullum relinqui locum, ſi in æquatione pro altera Curva Applicata y æquetur Functioni uniformi ipſius

x;

x; tum enim, quia hæc Curva nullas habet Applicatas imaginarias, fieri nequit ut interſectiones imaginariæ oriantur, quotcunque etiam Applicatis imaginariis altera Curva inquinetur. In hoc ergo conſtructionis negotio alteram Curvam perpetuo ita aſſumamus, ut ejus æquatio in hac forma $P + Qy = 0$, contineatur, denotantibus P & Q Functiones ipſius x.

500. Propoſita ergo quacunque æquatione eligatur una quædam conveniens Curva in æquatione $P + Qy = 0$. Et, quoniam æquatio pro altera Curva ita debet eſſe comparata, ut, ſi in ea loco y ſubſtituatur valor $\frac{-P}{Q}$, ipſa æquatio propoſita reſultet; ex ipſa propoſita viciſſim efformari poterit æquatio pro altera Curva, introducendo y loco $\frac{-P}{Q}$. Uti, ſi propoſita fuerit hæc æquatio $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$, ſumatur Parabola pro altera Curva æquatione $ay = xx + bx$ contenta; ex qua, cum ſit $xx = ay - bx$, ſubſtituatur iſte valor in æquatione propoſita, quoties lubet; erit

$$\begin{aligned} x^4 &= aayy - 2abxy + bbxx \\ Ax^3 &= + Aaxy - Abxx \end{aligned}$$

ideoque obtinebitur hujuſmodi æquatio ſecundi ordinis

$$aayy + a(A - 2b)xy + (B - Ab + bb)xx + Cx + D = 0,$$

cujus adeo interſectiones cum Curva $ay = xx + bx$ indicabunt radices æquationis propoſitæ.

501. Quemadmodum hæ Curvæ ambæ determinandis pro arbitrio conſtantibus a & b infinitis modis variari poſſunt, ita multo major adhuc varietas induci poteſt. Cum enim ex æquatione priori ſit $xx - ay + bx = 0$; erit quoque $acxx - aacy + abcx = 0$, quæ ſi addatur ad poſteriorem æquationem, multo latius patens orietur æquatio pro Linea ſecundi ordinis, cujus interſectiones cum priori radices æquationis propoſitæ æque indicabunt. Ambæ ſcilicet iſtæ Curvæ conſtructioni inſervientes erunt

I.

$$ay = xx + bx$$

II.

$$aayy + a(A - 2b)xy + (B - Ab + bb + ac)xx - aacy + (C + abc)x + D = 0,$$

hæcque poſterior æquatio ita adornari poteſt, ut quamvis Sectionem conicam in ſe complectatur; attendendum ſcilicet eſt ad hanc quantitatem

$$AA - 4B - 4ac,$$

quæ ſi fuerit affirmativa, Curva erit Hyperbola; ſi fuerit $= 0$, Curva erit Parabola; ſin autem ſit quantitas negativa, Curva erit Ellipſis. Circulus vero erit hæc altera Curva ſi fuerit $b = \frac{1}{2}A$, & $aa = B - \frac{1}{4}AA + ac$, ſeu $c = a + \frac{AA}{4a} - \frac{B}{a}$: tum enim æquatio pro eo erit

$$aayy + aaxx - (a^3 + \frac{AAa}{4} - Ba)y + (C + \frac{Aaa}{2} + \frac{A^3}{8} - \frac{AB}{2})x + D = 0,$$

ſeu

$$(y - \frac{a}{2} - \frac{AA}{8a} + \frac{B}{2a})^2 + (x + \frac{C}{2aa} + \frac{A}{4} + \frac{A^3}{16aa} - \frac{AB}{4aa})^2 =$$
$$(\frac{a}{2} + \frac{AA}{8a} + \frac{B}{2a})^2 + (\frac{C}{2aa} + \frac{A}{4} + \frac{A^3}{16aa} - \frac{AB}{4aa})^2 - \frac{D}{aa},$$

ubi hoc membrum eſt quadratum Radii Circuli.

502. Sic igitur ex ſolis Sectionibus conicis habentur innumerabiles Curvæ, quæ cum Parabola $ay = xx + bx$ deſcriptæ, interſectionibus ſuis radices æquationis propoſitæ præbebunt. Harum ergo Curvarum quæcunque ſumatur, Parabola in iiſdem ſemper punctis interſecabitur; atque ideo illæ Curvæ omnes ſe mutuo in iiſdem punctis ſecabunt. Quocirca ex his Curvis infinitis duas quaſcunque aſſumere licebit, (prætermiſſa Parabola primum aſſumta,) quæ ſi ſuper communi Axe deſcribantur, per interſectiones ſuas radices æquationis propoſitæ ſemper indicabunt. Hocque adeo modo iſta æquatio conſtrui