mum membrum P duos habere Factores simplices reales $ay-bx$ Cap.VII. & $cy-dx$, ita ut sit $P=(ay-bx)(cy-dx)M$, erit M Functio homogenea $n-2$ dimensionum. Duo autem casus hic perpendendi veniunt, prout isti bini Factores fuerint inter se æquales vel inæquales.

176. Sint hi Factores inter se inæquales; atque manifestum est æquationem $(ay-bx)(cy-dx)M+Q+R+S+$ &c. $=0$, duplici modo subsistere posse, pro Abscissis vel Applicatis infinitis, vel si $ay-bx$ vel si $cy-dx$ æquetur quantitati finitæ. Sit igitur $ay-bx=p$; &, cum p sit quantitas finita, in infinito erit $\frac{y}{x}=\frac{b}{a}$, atque ut ante fiet $p=\frac{-Q-R-S-\text{\&c.}}{(cy-dx)M}=\frac{-Q}{(cy-dx)M}$, quæ est Functio nullius dimensionis ipsarum x & y; quare, si ponatur $\frac{y}{x}=\frac{b}{a}$, vel, quod eodem redit, si ubique scribatur b loco y & a loco x, verus prodibit valor constantis quæsitæ p. Erit ergo $p=\frac{-Q}{(bc-ad)M}$, &, ob Factores inæquales, $bc-ad$ non erit $=0$, neque etiam M, quia nullum omnino Factorem realem simplicem complectitur, in nihilum abire potest; unde valor pro p oritur finitus, vel etiam $=0$, quod evenit, si vel membrum Q prorsus desit, vel Factorem habeat $ay-bx$.

177. Ob supremi ergo membri P Factorem realem simplicem $ay-bx$, Curva, uti in priori casu, unam habebit Asymtotam, cujus positio indicatur æquatione $ay-bx=p$. Simili vero modo, ob alterum Factorem $cy-dx$, quoque habebit Asymtotam, quam præbebit æquatio hæc: $cy-dx=q$, existente $q=\frac{-Q}{(ay-bx)M}$, postquam ubique loco y & x hi valores determinati d & c fuerint substituti. Quocirca Linea curva omnino duas habebit Asymtotas, ideoque quatuor ramos in infinitum extensos, qui cum illis rectis tandem congruant. Hic ipse autem casus locum supra invenit in Hyperbola.

LIB. II. perbola: quare, si in æquatione pro Lineis secundi ordinis $\alpha yy + \beta xy + \gamma xx + \delta y + \varepsilon x + \zeta = 0$ supremum membrum $\alpha yy + \beta xy + \gamma xx$ duos habeat Factores simplices inæquales reales, quod evenit si $\beta\beta$ superet $4\alpha\gamma$, tum Curva erit Hyperbola.

178. Sint ambo Factores $ay - bx$ & $cy - dx$ inter se æquales ita ut sit $P = (ay - bx)^2 M$. Cum igitur sit $P + Q + R + S +$ &c. $= 0$, erit $(ay - bx)^2 = \frac{-Q - R - S \text{ \&c.}}{M}$. Quia autem est Q Functio $n - 1$; R $n - 2$; & S Functio $n - 3$ dimensionum, ob M Functionem $n - 2$ dimensionum erit, casu infiniti, $\frac{S}{M} = 0$, ideoque $(ay - bx)^2 = \frac{-Q}{M} - \frac{R}{M} = \frac{-Q}{M(\mu y + \nu x)}(\mu y + \nu x) - \frac{R}{M}$. At est $\frac{Q}{M(\mu y + \nu x)}$ & $\frac{R}{M}$ Functio nullius dimensionis ipsarum x & y. Quare, cum in infinito sit $y : x = b : a$, si hæc ratio $\frac{b}{a}$ pro $\frac{y}{x}$ seu b pro y & a pro x substituatur, utraque illa Functio abibit in quantitatem constantem.

179. Fiat ergo, facta hac substitutione, $\frac{Q}{M(\mu y + \nu x)} = A$ & $\frac{R}{M} = B$; eritque $(ay - bx)^2 = -A(\mu y + \nu x) - B$, quæ est æquatio pro Linea curva cum qua Linea curva æquatione $P + Q + R + S +$ &c. $= 0$ expressa, postquam in infinitum processerit, confundetur. Verum, quia quantitates μ & ν sunt arbitrariæ, sumatur $\mu = b$ & $\nu = a$, ac, immutandis Coordinatis, fiat $ay - bx = u\sqrt{(aa + bb)}$ & $by + ax = t\sqrt{(aa + bb)}$, eritque pro eadem illa Curva ista æquatio $uu + \frac{At}{\sqrt{(aa + bb)}} + \frac{B}{aa + bb} = 0$, quam patet esse pro Parabola. Curva ergo quæsita ita erit comparata, ut in infinitum protensa cum Parabola confundatur. Habebit ergo duos tantum

ramos

ramos in infinitum excurrentes, quorum Aſymtota non erit Linea recta, ſed Parabola ſuperiore æquatione expreſſa. CAP. VII.

180. Evenit hoc ſi non fuerit $A = 0$: at ſi ſit $A = 0$ (quod evenit ſi membrum ſecundum Q vel deſit vel diviſibile fuerit per $ay - bx$,) tum æquatio ceſſat eſſe pro Parabola, eritque $uu + \frac{B}{aa + bb} = 0$, cujus tres caſus erunt evolvendi. Primo ſcilicet, ſi B fuerit quantitas negativa, puta $\frac{B}{aa + bb} = -ff$, æquatio $uu - ff = 0$ duas in ſe complectetur æquationes $u - f = 0$ & $u + f = 0$, quæ erunt pro duabus Lineis rectis inter ſe parallelis, quarum utraque erit Curvæ Aſymtota, uti caſu primo: atque ideo Curva quatuor habebit ramos in infinitum excurrentes qui cum iſtis duabus rectis confundentur.

181. Secundus caſus eſt quod ſit B quantitas affirmativa, puta $+ff$. Quia vero hoc caſu æquatio $uu + ff = 0$ eſt impoſſibilis, Curva nullum habebit ramum in infinitum excurrentem, ſed tota in ſpatio finito continebitur. Non ſolum igitur Curva, quæ hac æquatione $P + Q + R + S +$ &c. $= 0$, continetur, nullum habebit ramum in infinitum extenſum, ſi membrum ſupremum P nullum habeat Factorem ſimplicem realem, ſed etiam idem uſu venire poteſt, quamvis P habeat Factores, uti modo vidimus. Plures autem hujuſmodi caſus adhuc occurrent.

182. Tertius caſus eſt quo ſit etiam $B = 0$, in quem uterque præcedentium incidere poteſt, ex quo ambiguum eſt, quomodo Curva futura ſit comparata. Hinc ad figuram Curvæ definiendam ſequentes termini ſpectari debebunt. Scilicet, cum ſit $P + Q + R + S +$ &c. $= 0$, atque $P = (ay - bx)^2 M$, in infinito erit $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$; & $(ay - bx)^2 + \frac{Q}{M} + \frac{R}{M} + \frac{S}{M} + \frac{T}{M} +$ &c.. Ponatur ergo, ut ante, facta ſubſtitutione $\frac{y}{x} =$

LIB. II. $\frac{b}{a}$, $\frac{Q}{M} = A(by + ax)$, $\frac{R}{M} = B$; tum vero cum S, T, V, &c., ſint Functiones $(n - 2)$, $(n - 3)$, &c. dimenſionum, exiſtente M Functione $(n - 1)$ dimenſionum, $\frac{S(by + ax)}{M} = C$; $\frac{T(by + ax)^2}{M} = D$; $\frac{V(by + ax)^3}{M} = E$ &c., erit $(ay - bx)^2 + A(by + ax) + B + \frac{C}{by + ax} + \frac{D}{(by + ax)^2} + \frac{E}{(by + ax)^3} +$ &c. $= 0$. Hæc ergo æquatio exprimit naturam curvæ Lineæ, cujus portio in infinitum diſtans, quæ prodit ſi $by + ax$ ponatur infinitum, conveniet cum Curva in æquatione $P + Q + R + S +$ &c. $= 0$, contenta. Quamvis enim, Curva in infinitum excurrente, $(ay - bx)^2$ valorem obtineat vel finitum vel infinitum ordinis tamen inferioris quam ∞^2, tamen $by + ax$ valorem habebit infinitum.

183. Mutemus autem Axem, ad quem Lineam iſtam Aſymtotam inventam referamus, ac in eo ponamus Abſciſſam $\frac{ax + by}{\sqrt{(aa + bb)}} = t$, & Applicatam, $\frac{ay - bx}{\sqrt{(aa + bb)}} = u$; ſitque, brevitatis gratia, $\sqrt{(aa + bb)} = g$, atque erit æquatio $uu + \frac{At}{g} + \frac{B}{gg} + \frac{C}{g^3 t} + \frac{D}{g^4 tt} + \frac{E}{g^5 t^3} +$ &c. $= 0$. Cum igitur in caſu, quem evolvere debemus, ſit $A = 0$, & $B = 0$, fiet $uu + \frac{C}{g^3 t} + \frac{D}{g^4 tt} + \frac{E}{g^5 t^3} +$ &c. $= 0$. Quod, ſi jam non fuerit $C = 0$, poſito t infinito, termini $\frac{D}{g^4 tt} + \frac{E}{g^5 t^3} +$ &c., præ $\frac{C}{g^3 t}$ evaneſcent, eritque $uu + \frac{C}{g^3 t} = 0$; qua æquatione natura Lineæ curvæ continetur, quæ, poſito $t = \infty$, cum Curva quæſita confundetur. Quare, cum hinc ſit $u = \pm \sqrt{\frac{-C}{g^3 t}}$ Curva duos habebit ramos ad eamdem Axis partem utrinque convergentes.

184. Quod ſi inſuper fuerit $C = 0$, tum ſumenda eſt iſta æquatio

æquatio $uu + \frac{D}{g^4 tt} = 0$, ubi iterum tres caſus occurrunt prout D fuerit quantitas affirmativa, vel negativa, vel nulla. Primo caſu, ob æquationem impoſſibilem, Curva nullum habebit ramum in infinitum excurrentem, ſed tota continebitur in ſpatio finito. Secundo caſu, ſi $\frac{D}{g^4} = -ff$ ob $uu = \frac{ff}{tt}$; quia poſito tam $t = +\infty$ quam $t = -\infty$, Applicata u duplicem obtinet valorem evaneſcentem, affirmativum & negativum,. Curva habebit quatuor ramos ad Axem utrinque ad utramque partem convergentes. Tertio autem caſu, quo $D = 0$, ſumenda eſt æquatio $uu + \frac{E}{g^5 t^3} = 0$, cujus par eſt ratio, atque in §. præcedente: ſicque conſideratio continuari debebit, quoad æquatio $P + Q + R + S +$ &c., terminos ulteriores ſuppeditat.

185. Ponamus nunc membrum ſupremum P æquationis $P + Q + R + S +$ &c. $= 0$, tres habere Factores ſimplices reales; atque manifeſtum eſt, ſi iſti Factores fuerint inter ſe inæquales, tum de unoquoque valere ea, quæ ſupra de unico Factore reali ſunt expoſita; quo ergo caſu Curva habebit ſex ramos in infinitum excurrentes, ad tres Lineas rectas Aſymtotas convergentes. Si bini Factores fuerint æquales, tum de tertio inæquali idem erit tenendum, quod ante: at de duobus æqualibus eadem præcepta ſunt notanda, quæ ante dedimus. Tantum ergo ſupereſt caſus tertius evolvendus, quo omnes tres Factores ſunt inter ſe æquales. Sit igitur $P = (ay - bx)^3 M$. Et, quia æquatio $P + Q + R + S +$ &c. $= 0$, ſubſiſtere non poteſt in infinito, niſi $(ay - bx)^3$ habeat valorem vel finitum, vel infinitum quidem at ordinis inferioris quam ∞^3, quo poteſtas infiniti, in quam membrum ſupremum P abit, fiat minor quam ∞^n; erit utique in infinito $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$.

186. Ad hunc caſum exponendum primum ſpectari oportet membrum ſecundum Q, utrum id Factorem habeat eundem $ay - bx$ an ſecus: ubi notandum eſt ſi omnino deſit, tum