posset, reliqui ita reducuntur. Sit D numerus repraesentandus per formam $\begin{pmatrix} g, g', g'' \\ h, h', h'' \end{pmatrix}$, cuius determinans Δ, et cui adiuncta est forma $\begin{pmatrix} G, G', G'' \\ H, H', H'' \end{pmatrix} = f$. Tunc huic rursus adiuncta erit $\begin{pmatrix} \Delta g, \Delta g', \Delta g'' \\ \Delta h, \Delta h', \Delta h'' \end{pmatrix} = F$, patetque, repraesentationes numeri ΔD per F (quarum inuestigatio a praecc. pendet) omnino identicas esse cum repraesentationibus numeri D per formam propositam. — Ceterum quando omnes coëfficientes formae f diuisorem communem μ habent, perspicuum est, omnes coëfficientes formae F diuisibiles esse per $\mu\mu$, quocirca etiam ΔD per $\mu\mu$ diuisibilis esse debebit (alioquin nullae repraesentationes darentur); repraesentationesque numeri D per formam propositam coincident cum repraesentationibus numeri $\frac{\Delta D}{\mu\mu}$ per formam quae oritur ex F, diuidendo singulos coëfficientes per $\mu\mu$, cui formae adiuncta erit ea, quae oritur ex f, diuidendo singulos coëfficientes per μ.

Denique obseruamus, hanc problematis primi solutionem in vnico casu, vbi $D = 0$, non esse applicabilem; hic enim omnes formae binariae determinantis D in multitudinem finitam classium non distribuuntur; infra autem hunc casum ex aliis principiis soluemus.

282. Inuestigatio repraesentationum formae binariae datae cuius determinans non $= 0$ *) per

*) Hunc casum per methodum aliquantum diuersam tractandum hoc loco breuitatis caussa praeterimus.

ternariam datam pendet ab obseruationibus sequentibus:

I. Ex quauis repraesentatione propria formae binariae $(p, q, r) = \varphi$ determinantis D per ternariam f determinantis Δ deduci possunt integri B, B' tales vt sit $BB \equiv \Delta p$, $BB' \equiv -\Delta q$, $B'B' \equiv \Delta q$ (mod. D), i. e. valor expressionis $\sqrt{\Delta}\,(p, -q, r)$ (mod. D). Habeatur repraesentatio propria formae φ per f haec $x = \alpha t + \beta u$, $x' = \alpha' t + \beta' u$, $x'' = \alpha'' t + \beta'' u$, (designantibus x, x', x''; t, u indeterminatas formarum f, φ); accipiantur integri γ, γ', γ'' ita vt $(\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')\gamma + (\alpha\beta'' - \alpha''\beta)\gamma' + (\alpha\beta' - \alpha'\beta)\gamma'' = k$ fiat vel $= +1$ vel $= -1$, transeatque f per substitutionem

$$\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{matrix}$$

in formam $\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix} = g$, cui adiuncta sit $\begin{pmatrix} A, & A', & A'' \\ B, & B', & B'' \end{pmatrix} = G$. Tunc manifestum est, fore $a = p$, $b'' = q$, $a' = r$, $A'' = D$, atque Δ determinantem formae g; vnde $BB = \Delta p + A'D$, $BB' = -\Delta q + B''D$, $B'B' = \Delta r + AD$. — Ita e. g. forma $19tt + 6tu + 41uu$ repraesentatur per $xx + x'x' + x''x''$ ponendo $x = 3t + 5u$, $x' = 3t - 4u$, $x'' = t$; vnde statuendo $\gamma = -1$, $\gamma' = 1$, $\gamma'' = 0$, eruitur $B = -171$, $B' = 27$, siue valor $(-171, 27)$ expr. $\sqrt{-1}\,(19, -3, 41)$ (mod. 770).

Hinc iam sequitur, si $\Delta(p, -q, r)$ non sit residuum quadratum ipsius D, φ per nullam formam ternariam determinantis Δ proprie repraesentabilem esse posse; in eo itaque casu vbi Δ, D inter se primi sunt, Δ numerus characteristicus formae φ esse debebit.

II. Quum γ, γ', γ'' infinite multis modis diuersis determinari possint, etiam alii atque alii valores ipsorum B, B' inde prodibunt, qui quem nexum inter se habeant videamus. Ponamus, etiam δ, δ', δ'' ita comparatos esse, vt $(\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')\delta + (\alpha''\beta - \alpha\beta'')\delta' + (\alpha\beta' - \alpha'\beta)\delta'' = \mathfrak{k}$ fiat vel vel $= +1$ vel $= -1$, formamque f transire per substitutionem

$$\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \delta \\ \alpha', & \beta', & \delta' \\ \alpha'', & \beta'', & \delta'' \end{matrix}$$

in $\begin{pmatrix} \mathfrak{a}, & \mathfrak{a}', & \mathfrak{a}'' \\ \mathfrak{b}, & \mathfrak{b}', & \mathfrak{b}'' \end{pmatrix} = \mathfrak{g}$, cui adiuncta $\begin{pmatrix} \mathfrak{A}, & \mathfrak{A}', & \mathfrak{A}'' \\ \mathfrak{B}, & \mathfrak{B}', & \mathfrak{B}'' \end{pmatrix} = \mathfrak{G}$. Tunc g, $\mathfrak{g}$ erunt aequiualentes, adeoque etiam G et $\mathfrak{G}$, et per applicationem praeceptorum in artt. 269, 270 traditorum *) inuenitur, si statuatur $(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma')\delta + (\beta''\gamma - \beta\gamma'')\delta' + (\beta\gamma' - \beta'\gamma)\delta'' = \zeta$, $(\gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha')\delta + (\gamma''\alpha - \gamma\alpha'')\delta' + (\gamma\alpha' - \gamma'\alpha)\delta'' = \eta$, formam $\mathfrak{G}$ transire in G per substitutionem

$$\begin{matrix} k, & 0, & 0 \\ 0, & k, & 0 \\ \zeta, & \eta, & \mathfrak{k} \end{matrix}$$

*) Eruendo ex transf. formae f in g, transformationem formae g in f; ex hac atque transf. formae f in $\mathfrak{g}$, transf. formae g in $\mathfrak{g}$; denique ex hac, per transpositionem, transf. formae $\mathfrak{G}$ in G.