et sex posteriori similes, quae ex his nascuntur ponendo pro α, β, γ, δ hos α', β', γ', δ'.

Quod vero in hoc casu semper F, f vtroque modo aequiualent, ita demonstramus. Formae $(\frac{2A}{m}, \frac{2B}{m}, \frac{2C}{m})$ determinans erit $= -\frac{4D}{mm} = -3$, adeoque (art. 176) aut formae $(\pm 1, 0, \pm 3)$ aut huic $(2, 1, 2)$ aequiualens. Vnde facile perspicitur, formam (A, B, C) aut formae $(\pm\frac{1}{2}m, 0, \pm\frac{3}{2}m)$ aut huic $(\pm m, \frac{1}{2}m, \pm m)$*) quae ambae sunt ancipites, aequiualere adeoque, cuiuis aequiualenti, vtroque modo.

4) Si supponitur $\frac{4D}{mm} = 1$, fit $(\frac{2B}{mm})^2 = 4\frac{AC}{mm} - 2$, adeoque $\equiv 2 \pmod{4}$. Sed quum nullum quadratum esse possit $\equiv 2 \pmod{4}$ hic casus locum habere nequit.

5) Supponendo $\frac{4D}{mm} = 1$, fit $(\frac{2B}{m})^2 = 4\frac{AC}{mm} - 1 \equiv -1 \pmod{4}$. Quod quum impossibile sit, etiam hic casus nequit locum habere.

Ceterum quum D neque $= 0$, neque negatiuus sit, alii casus praeter enumeratos dari non possunt.

180. Problema. *Inuenire omnes repraesentationes numeri dati M per formam $axx + 2bxy + cyy$ ... F, determinantis negatiui $-D$, in quibus x, y valores inter se primos nanciscuntur.*

*) Demonstrari potest, formam (A, B, C) necessario posteriori aequiualere: sed hoc hic non necessarium.

Sol. Ex art. 154 patet, M eo quo requiritur modo repraesentari non posse, nisi $-D$ sit resid. quadr. ipsius M. Inuestigentur itaque primo omnes valores diuersi (*i. e.* incongrui) expr. $\sqrt{-D} (\text{mod. } M)$, qui sint $N, -N, N' N', N'', -N''$ etc.; quo simplicior euadat calculus, omnes N, N' etc. ita determinari possunt, vt non sint $> \frac{1}{2}M$. Iam quoniam quaeuis repraesentatio ad aliquem horum valorum pertinere debet singuli seorsim considerentur.

Si formae F, $(M, N, \frac{D+NN}{M})$ non sunt proprie aequiualentes, nulla repraesentatio ipsius M ad valorem N pertinens dari potest (art. 168). Si vero sunt, inuestigetur transformatio propria formae F in $Mx'x' + 2Nx'y' + \frac{D+NN}{M}y'y'$ quae sit $x = \alpha x' + \beta y'$, $y = \gamma x' + \delta y'$, eritque $x = \alpha$, $y = \gamma$ repraesentatio numeri M per F ad N pertinens. Sit diu. comm. max. numerorum A, $2B$, C, $= m$ distinguanturque tres casus (art. praec.):

1) Si $\frac{4D}{mm} > 4$, aliae repraesentationes ad N pertinentes quam hae *duae* $x = \alpha$, $y = \gamma$; $x = -\alpha$, $y = -\gamma$ non dabuntur (artt. 169, 180).

2) Si $\frac{4D}{mm} = 4$, habebuntur *quatuor* repraesentationes $x = \pm\alpha$, $y = \pm\gamma$; $x = \mp\frac{\alpha B + \gamma C}{m}$, $y = \pm\frac{\alpha A + \gamma B}{m}$.

3) Si $\frac{4D}{mm} = 3$, habebuntur *sex* repraesentationes, $x = \pm \alpha$, $y = \pm \gamma$; $x = \pm (\frac{1}{2}\alpha - \frac{\alpha B + \gamma C}{m})$, $y = \pm (\frac{1}{2}\gamma + \frac{\alpha A + \gamma B}{m})$; $x = \pm (\frac{1}{2}\alpha + \frac{\alpha B + \gamma C}{m})$, $y = \pm (\frac{1}{2}\gamma - \frac{\alpha A + \gamma B}{m})$.

Eodem modo quaerendae sunt repraesensentationes ad valores $-N$, N', $-N'$ etc. pertinentes.

181. Inuestigatio repraesentationum numeri M per formam F in quibus x, y valores inter se non primos habent, ad casum iam consideratum facile reduci potest. Fiat talis repraesentatio ponendo $x = \mu e$, $y = \mu f$, ita vt μ sit diu. comm. max. ipsorum μe, μf, siue e, f inter se primi. Tum erit $M = \mu\mu(Aee + 2Bef + Cff)$ adeoque per $\mu\mu$ diuisibilis; substitutio vero $x = e$, $y = f$ erit repraesentatio numeri $\frac{M}{\mu\mu}$ per formam F, in qua x, y valores inter se primos habent. Si itaque M per nullum quadratum (praeter 1) diuisibilis est, *e. g.* si est numerus primus: tales repraesentationes ipsius M non dabuntur. Si vero A diuisores quadraticos implicat, sint hi $\mu\mu$, $\nu\nu$, $\pi\pi$ etc. Quaerantur primo omnes repraesentationes numeri $\frac{M}{\mu\mu}$ per formam (A, B, C), in quibus x, y valores inter se primos habent, qui valores si per μ multiplicantur praebebunt omnes repraesentationes ipsius M, in quibus diu. comm. max. numerorum x, y est μ. Simili modo omnes repraesentationes ipsius $\frac{M}{\nu\nu}$ in quibus valores