et ex tribus aequ. primis Ψ' valores ipsorum $a\mathfrak{A}'$, $a\mathfrak{B}'$, $a\mathfrak{C}'$ facile confirmatur fore $a(\mathfrak{A}\alpha\alpha + 2\mathfrak{B}\alpha\gamma + \mathfrak{C}\gamma\gamma) = a\mathfrak{A}'$, $a(\mathfrak{A}\alpha\beta + \mathfrak{B}(\alpha\delta + \beta\gamma) + \mathfrak{C}\gamma\delta) = n\mathfrak{B}'$, $a(\mathfrak{A}\beta\beta + 2\mathfrak{B}\beta\delta + \mathfrak{C}\delta\delta) = a\mathfrak{C}'$, vnde, nisi $a = 0$, manifesto sequitur, formam $\mathfrak{F}$ transire in $\mathfrak{F}'$ per substitutionem propriam α, β, γ, δ. — Adhibendo autem loco trium aequationum primarum in Ψ et Ψ' tres sequentes, facile confirmabuntur tres aequationes modo traditis omnino similes, in quibus loco factoris a vbique inuenitur b; vnde patet, eandem conclusionem etiamnum valere si modo non sit $b = 0$. Denique adhibendo tres vltimas aequationes Ψ, Ψ' inuenietur eodem modo, conclusionem veram esse nisi $c = 0$. Quocirca, quum certo omnes a, b, c simul $= 0$ esse nequeant, necessario forma $\mathfrak{F}$ per subst. α, β, γ, δ transibit in $\mathfrak{F}'$, adeoque huic formae proprie aequiualebit. *Q. E. D.*

241. Talem formam vt $\mathfrak{F}$ vel $\mathfrak{F}'$, quae oritur, si vna trium formarum datarum componitur cum ea quae ex compositione duarum reliquarum resultat, *ex his tribus formas compositam* vocabimus, patetque ex art. praec., nihil hic interesse quonam ordine tres formae componantur. Simili modo propositis quotcunque formis f, f', f'', f''' etc. (quarum determinantes rationem quadratorum inter se habere debent), si forma f componitur cum f', resultans cum f'', quae hinc oritur cum f''' etc.: forma quae ad finem huius operationis prodit *ex omnibus formis* f, f', f'', f''' etc. *composita* dicetur. Facile vero demonstratur, etiam hic arbitrarium esse quonam ordine formae componantur; *i. e.* quocun-

que ordine hae formae componantur, formas ex compositione oriundas semper proprie aequiualentes esse. — Porro manifestum est, si formis f, f', f'' etc. proprie aequiualeant formae g, g', g'' etc. resp., formam compositam ex his proprie aequiualentem fore formae ex illis compositae.

242. Propositiones praecedentes formarum compositionem maxima vniuersalitate complectuntur; progredimur iam ad applicationes magis particulares, per quas illarum ordinem interrumpere noluimus. Ac primo quidem resumemus problema art. 236, quod per conditiones sequentes limitabimus: *primo* vt formae componendae eundem determinantem habeant, siue sit $d = d'$; *secundo* vt m, m' sint inter se primi; *tertio* vt forma quaesita directe ex vtraque f, f' composita sit. Hinc etiam mm, $m'm'$ inter se primi erunt; quare diuisor communis maximus numerorum $dm'm'$, $d'mm$ i. e. D fiet $= d = d'$, atque $n = n' = 1$. Quatuor quantitates $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}'$, $\mathfrak{Q}''$, $\mathfrak{Q}'''$, quae ad libitum assumi possunt, statuemus $= -1, 0, 0, 0$ resp., quod semper licebit vnico casu excepto vbi a, a', $b + b'$ simul sunt $= 0$, ad quem igitur hic non respiciemus; manifesto autem hic casus occurrere nequit nisi in formis determinantis positiui quadrati. Tunc patet, μ fieri diuisorem communem maximum numerorum a, a', $b + b'$; numeros $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$, $\mathfrak{P}'''$ ita accipi debere vt fiat $\mathfrak{P}'a + \mathfrak{P}''a' + \mathfrak{P}'''(b + b') = \mu$; ipsum $\mathfrak{P}$ vero omnino arbitrarium esse. Hinc prouenit, substituendo l. c. pro p, q, p', q' etc. valores suos: $A = \frac{aa'}{\mu\mu}$, $B =$

$\frac{1}{\mu}(\mathfrak{P}aa' + \mathfrak{P}'ab' + \mathfrak{P}''a'b + p'''(bb' + D))$; C autem per aequationem $AC = BB - D$ poterit determinari, si modo non simul a et $a' = 0$.

In hac igitur solutione valor ipsius A non pendet a valoribus ipsorum $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$, $\mathfrak{P}'''$ (qui infinitis modis diuersis determinari possunt); B autem alios valores obtinebit tribuendo his numeris alios valores, operaeque pretium est inuestigare, quomodo omnes valores ipsius B inter se connexi sint. Ad hunc finem obseruamus

I. Quomodocunque determinentur $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$, $\mathfrak{P}'''$, valores ipsius B inde prodeuntes omnes congruos esse secundum modulum A. Ponamus, si statuatur $\mathfrak{P} = \mathfrak{p}$, $\mathfrak{P}' = \mathfrak{p}'$, $\mathfrak{P}'' = \mathfrak{p}''$, $\mathfrak{P}''' = \mathfrak{p}'''$, fieri $B = \mathfrak{B}$; faciendo autem $\mathfrak{P} = \mathfrak{p} + \mathfrak{d}$, $\mathfrak{P}' = \mathfrak{p}' + \mathfrak{d}'$, $\mathfrak{P}'' = \mathfrak{p}'' + \mathfrak{d}''$, $\mathfrak{P}''' = \mathfrak{p}''' + \mathfrak{d}'''$, prodire $B = \mathfrak{B} + \mathfrak{D}$. Tunc igitur erit $a\mathfrak{d}' + a'\mathfrak{d}'' + (b + b')\mathfrak{d}''' = 0$, $aa'\mathfrak{d} + ab'\mathfrak{d}' + a'b\mathfrak{d}'' + (bb' + D)\mathfrak{d}''' = \mu\mathfrak{D}$. Multiplicando aequationis posterioris partem primam per $a\mathfrak{p}' + a'\mathfrak{p}'' + (b + b')\mathfrak{p}'''$ secundam per μ, et subtrahendo a producto primo quantitatem $(ab'\mathfrak{p}' + a'b\mathfrak{p}'' + (bb' + D)\mathfrak{p}''')(a\mathfrak{d}' + a'\mathfrak{d}'' + (b + b)\mathfrak{d}''')$, quae propter aequationem priorem manifesto erit $= 0$, habebitur euolutione facta et sublatis quae se destruunt $aa'(\mu\mathfrak{d} + ((b' - b)\mathfrak{p}'' + c'\mathfrak{p}''')\mathfrak{d}' + ((b - b')\mathfrak{p}' + c\mathfrak{p}''')\mathfrak{d}'' - (c'\mathfrak{p}' + c\mathfrak{p}'')\mathfrak{d}''') = \mu\mu\mathfrak{D}$, vnde manifesto $\mu\mu\mathfrak{D}$ per aa', siue $\mathfrak{D}$ per $\frac{aa'}{\mu\mu}$ i. e. per A diuisibilis erit, atque $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{B} + \mathfrak{D}$ (mod. A).