APPEND. conſtituunt, nobis ſuppeditat eſſentialem characterem naturæ iſtius Superficiei; propterea quod, utcunque poſitio Coordinatarum varietur, perpetuo tamen idem dimenſionum numerus emergit. Similis ſcilicet hic ratio circa Superficies obſervatur, quam ſupra in Lineis curvis deprehendimus; unde eas in certos ordines diviſimus. Eodem ergo modo conveniet Superficies ſecundum dimenſiones Coordinatarum in ordines diſponere: eritque nobis Superficies ordinis primi, cujus æquatio unicam tantum dimenſionem complectitur: ad ordinem ſecundum Superficiem referemus, in cujus æquatione Coordinatæ ad duas dimenſiones aſſurgunt; atque ita porro ex dimenſionum numero ſequentes ordines conſtituentur.

95. Si jam cum his conferantur ea, quæ ſupra de inventione ſectionum planarum cujuſque Superficiei tradita ſunt, ordinem ſectionum perpetuo cum ordine ad quem Superficies pertinet, congruere deprehendemus. Sit enim æquatio pro Superficie quacunque propoſita inter Coordinatas x, y, & z, ad ordinem n pertinens, ſectionis autem ejus cujuſvis Coordinatæ normales ſint t & u. Atque ſupra, §. 85, vidimus æquationem inter t & u inveniri, ſi in æquatione pro Superficie ſequentes valores ſubſtituantur

$$x = f + t.\cos.\theta - u.\sin.\theta.\cos.\phi$$
&
$$y = t.\sin.\theta + u.\cos.\theta.\cos.\phi$$
atque
$$z = u.\sin.\phi.$$

Manifeſtum igitur eſt æquationem pro ſectione plures dimenſiones aſſequi non poſſe, quam habebat æquatio inter x, y, & z; ſed perpetuo totidem prodituras eſſe dimenſiones.

96. Superficies ergo primi ordinis alias ſectiones a plano factas habere nequit præter Lineas primi ordinis, ſeu rectas. Deinde, ex ſectione Superficiei ſecundi ordinis aliæ Lineæ non oriuntur niſi ſecundi ordinis, ſeu Sectiones conicæ; eſt enim

enim Superficies conica quoque ſecundi ordinis, cum ejus æquatio ſit

$$zz = \alpha xx + \beta yy.$$

Simili modo, ex Superficie tertii ordinis per ſectiones planas prodibunt Lineæ tertii ordinis, atque ita porro. Fieri tamen quandoque poteſt, ut æquatio pro ſectione quapiam diviſores admittat; quo caſu ſectio erit compoſita ex duabus pluribuſve Lineis inferiorum ordinum. Sic, ſectio Coni per Verticem facta conſtabit ex duabus Lineis rectis, quæ tamen conjunctim Lineam ſecundi ordinis mentiuntur, uti ſupra annotavimus.

97. Conſtitutis igitur Superficierum ordinibus, inveſtigemus præ reliquis eas Superficies, quæ ad ordinem primum pertinent. Æquatio ergo earum naturam exprimens erit $\alpha x + \beta y + \gamma z = a$, cujus cum omnes ſectiones plano factæ ſint Lineæ rectæ, perſpicuum eſt has Superficies non planas eſſe non poſſe: ſi enim haberent convexitatem vel concavitatem, neceſſario daretur ſectio curvilinea. Quanquam enim in reliquis ordinibus dantur ejuſmodi Superficies, quarum certæ quædam ſectiones ſunt Lineæ rectæ, (uti in Cylindro, Cono, aliiſque, uſu venire vidimus,) tamen in iis ſectiones curvilineæ non excluduntur. Similis ſcilicet hic occurrit ratio, qualem in Lineis obſervavimus: quemadmodum enim Linea, quæ a Linea recta in pluribus uno punctis nullo modo ſecari poteſt, eſt neceſſario recta; ita Superficies quæ a plano ſecta ſemper dat Lineam rectam, neceſſario ipſa plana eſſe colligitur.

98. Ex æquatione autem generaliſſima iſta indoles clariſſime poteſt demonſtrari. Formetur enim ex æquatione $\alpha x + \beta y + \gamma z = a$ æquatio generaliſſima inter Coordinatas p, q, & r, ſecundum §. 91. Et, quoniam ſex novæ conſtantes arbitrariæ inducuntur, nil obſtat, quo minus eæ ita determinentur, ut binarum Coordinatarum p, & q coëfficientes evaneſcant, atque hujuſmodi æquatio $r = f$ remaneat, ejuſdem Superficiei naram exprimens. Hæc autem æquatio $r = f$ oſtendet Superficiem propoſitam eſſe plano, in quo binæ Coordinatæ p & q

 exiſtunt,

Append. exiſtunt, parallelam; ideoque ipſam planam: Effici quoque poteſt, ut fiat $r = 0$; ſicque evidens erit, ipſum planum, in quo p & q aſſumuntur, eſſe Superficiem quæſitam.

Tab. XXXVIII. Fig. 142. 99. Cum igitur conſtet Superficiem æquatione $\alpha x + \beta y + \gamma z = a$ expreſſam eſſe planam, opus eſt ut ejus poſitionem reſpectu plani, in quo Coordinatæ x & y aſſumuntur, definiamus. Sit igitur M punctum quodcunque hujus Superficiei; atque tres Coordinatæ $AP = x$, $PQ = y$, & $QM = z$. Ponatur primum $z = 0$, atque orietur æquatio $\alpha x + \beta y = a$, quæ exprimet interſectionem Superficiei quæſitæ cum plano APQ, quam patet eſſe Lineam rectam BCR, cujus poſitio reſpectu Axis AP talis erit, ut ſit recta AB ad Axem AP in plano APQ normalis $= \frac{a}{\beta}$, & $AC = \frac{a}{\alpha}$: unde anguli ACB tangens erit $= \frac{\alpha}{\beta}$: ideoque ſinus $= \frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}}$, & coſinus $= \frac{\beta}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}}$. Tum, producatur QP uſque ad occurſum rectæ BC in R: atque, ob $CP = x - \frac{a}{\alpha}$, erit $CR = \frac{x\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}}{\beta} - \frac{a\sqrt{(\alpha^2 + \beta^3)}}{\alpha\beta}$; & $PR = \frac{\alpha x}{\beta} - \frac{a}{\beta}$.

100. Demittatur ex Q ad BC normalis QS: junctaque MS, patebit angulum MSQ metiri inclinationem Superficiei propoſitæ ad planum APQ. Cum igitur ſit $PR = \frac{\alpha x - a}{\beta}$, erit $QR = \frac{\alpha x + \beta y - a}{\beta} = \frac{-\gamma z}{\beta}$: &, ob angulum $RQS = ACB$, erit $QS = \frac{-\gamma z}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}}$: unde fit anguli QSM tangens $= \frac{-\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}}{\gamma}$; & propterea coſinus $= \frac{\gamma}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}}$. Superficies ergo quæſita ad planum, in quo verſantur x & y, inclinatur angulo, cujus tangens eſt $= \frac{-\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}}{\gamma}$:

pari

pari vero modo eadem Superficies ad planum Coordinatarum
x & z inclinabitur angulo cujus tangens est $= \frac{-\sqrt{(\alpha^2+\gamma^2)}}{\beta}$, atque ad planum Coordinatarum y & z angulo cujus tangens est $= \frac{-\sqrt{(\beta^2+\gamma^2)}}{\alpha}$.

CAPUT V.

De Superficiebus secundi ordinis.

101. Constitutis ergo Superficierum ordinibus secundum numerum dimensionum, quas summæ trium Coordinatarum x, y, z potestates in æquatione junctim sumtæ adimplent; si proponatur pro Superficie æquatio algebraïca, statim assignari potest ordo, ad quem illa Superficies referri debet. Cum igitur omnis Superficies primi ordinis ostensa sit esse plana, in hoc Capite Superficies secundi ordinis examini subjiciam. In iis autem major statim deprehenditur diversitas, quam in Lineis secundi gradus, quod quidem cuique attendenti facile patebit. Operam igitur dabo ut hæc diversa genera distincte exponam. In ordinibus vero altioribus tantopere multitudo generum increscit, ut ab iis evolvendis prorsus abstinere debeamus.

102. Quoniam natura Superficierum secundi ordinis exprimitur æquatione, in qua variabiles x, y & z ad duas dimensiones assurgunt, Cylindrus & Conus, tam rectus quam scalenus, & Globus, quorum proprietates jam decripsimus, in hoc secundo ordine continentur. Omnes vero Superficies ad hunc ordinem pertinentes comprehenduntur in hac æquatione generali

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx + \eta z + \theta y + \iota x + \varkappa = 0.$$

Utcunque enim tres Coordinatæ accipiantur, æquatio semper

 in

APPEND. in hac forma continebitur. Varia ergo Superficierum huc pertinentium genera a diverſa coëfficientium relatione mutua pendebunt, qui, etſi eadem Superficies infinitis æquationibus exprimatur, tamen infinitam variarum Superficierum multitudinem ſuppeditabunt.

103. Quemadmodum in Lineis curvis planis præcipuam diviſionem inde deſumſimus, quod vel in infinitum extendantur, vel in ſpatio finito includantur; ita ſimili modo omnes Superficies ad quemcunque ordinem pertinentes in duas claſſes dividentur; ad quarum alteram referemus eas, quæ in infinitum abeunt, ad alteram vero, quæ in ſpatio finito continentur. Ita Cylindrus & Conus priori claſſi; Globus vero poſteriori annumerabitur. Poſterioris quidem claſſis nulla dabitur Superficies in ordinibus imparibus: cum enim quælibet Superficies imparis ordinis habeat ſectiones planas ejuſdem ordinis, curvæ autem imparium ordinum omnes in infinitum extendantur, neceſſe eſt, ut etiam ipſæ Superficies iſtorum ordinum in infinitum porrigantur.

104. Quoties autem quæpiam Superficies in infinitum extenditur, neceſſe eſt ut, ad minimum, una trium variabilium x, y & z, in infinitum abeat. Quare, cum perinde ſit quænam hoc caſu infinita fieri aſſumatur, ponamus z fieri infinitam, ſi quidem Superficies in infinitum porrigatur. Naturam ergo hujus partis in infinitum abeuntis inveſtigaturi ponamus eſſe $z = \infty$: atque nunc potiſſimum ſpectari debet terminus primus αzz, utrum is adſit an vero deficiat. Adſit ergo primum iſte terminus in æquatione: atque præ eo termini ηz & $\varkappa$ evaneſcent, habebiturque pro parte in infinitum excurrente hæc æquatio

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx + \theta y + \iota x = 0,$$

ex qua porro omnes termini, qui non ſunt infiniti, vel infinities minores ſaltem quam αzz, evaneſcunt.

105. Statuamus omnes terminos, in quibus variabiles duas tenent