

L I B . II. $y \cdot \cos \alpha$. Deinde, ob $OP = a + \frac{A}{\tan \alpha} - x$, erit $ps = a \cdot \sin \alpha + A \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha$, & $Op - Ps = a \cdot \cos \alpha + \frac{A \cdot \cos \alpha}{\tan \alpha} - x \cdot \cos \alpha$. Hinc erit $Op = a \cdot \cos \alpha + \frac{A \cdot \cos \alpha}{\tan \alpha} - x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha = \frac{A}{\sin \alpha} - t$; ideoque $t = A \cdot \sin \alpha - a \cdot \cos \alpha + x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha$, & $u = -a \cdot \sin \alpha - A \cdot \cos \alpha + x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha$. Quam ob rem, si in æquatione inter t & u data substituantur,

$$\begin{aligned} t &= (x - a) \cdot \cos \alpha - (y - A) \cdot \sin \alpha \\ &\quad \& \\ u &= (x - a) \cdot \sin \alpha + (y - A) \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

orientur æquatio quæsita inter x & y . Quacunque ergo lege eadem Curva amb in plano infinites describatur, hoc modo invenietur æquatio generalis istas Curva omnes simul in se continens.

455. Hoc igitur modo in æquationem includuntur Curvæ numero infinitæ cædem, tantum ratione situs a se invicem discrepantes; si quidem æquatio, quæ inter t & u datur, fuerit invariabilis, neque constantem mutabilem a in se contineat. Quod si autem una pluresve constantes, quæ in æquatione inter t & u insunt, simul ab a pendere assumentur, tum obtinebuntur infinitæ Curvæ diversæ, sive similes sive dissimiles, eadem pariter æquatione contentæ: Similes scilicet erunt omnes Curvæ, si æquatio inter t & u ita fuerit comparata ut u æquetur Functioni cuicunque homogeneæ unius dimensionis ipsarum t & f , existente f quantitate utcunq; ab a pendente; sin secus accidat, Curvæ erunt dissimiles.

T A B . XXII. 456. Ut hoc argumentum Curvarum diversarum exemplo illustremus, ponamus infinitos describi Circulos AB , aB , amb per datum punctum B transeuntes, qui omnes Centra sua habeant sita in recta AE , cuiusmodi Circulis in mappis geographicis meridiani repræsentari solent. Demittatur ex B perpen-

Fig. 93.

perpendiculum in rectam AC , sitque $BC = c$, quod intervallum est invariabile. Tum consideretur Circulus infinitorum descriptorum quicunque amB ; unde una demissa Applicata mP , sit $CP = x$, & $Pm = y$. radius porro hujus Circuli, qui, et si respectu ejusdem Circuli est constans, tamen respectu omnium est mutabilis, ponatur $aE = BE = a$: erit $CE = \sqrt{(aa - cc)}$ & $PE = x + \sqrt{(aa - cc)}$. Cum igitur sit $PE^2 + Pm^2 = aa$, erit $y^2 + x^2 + 2x\sqrt{(aa - cc)} + aa - cc = aa$; seu $yy = cc - 2x\sqrt{(aa - cc)} - xx$: sin autem intervallum CE loco constantis variabilis in æquationem introducatur, ponaturque $CE = a$, habebitur hæc æquatio aliquanto simplicior $yy = cc - 2ax - xx$, quæ, ob mutabilitatem ipsius a , omnes omnino Circulos per B ductos & Centra in recta AE habentes exhibebit. Simili vero modo Curvæ quæcunque infinitæ certa quadam lege dispositæ ad unam æquationem revocabuntur, dummodo discriben inter constantes variabiles & invariabiles probe observetur.

C A P U T X I X.

De intersectione Curvarum.

457. **Q**uemadmodum Lineæ curvæ a rectis intersecantur, in præcedentibus Capitibus jam sèpius vidimus, ubi ostendimus Lineas secundi ordinis a rectis in pluribus quam duobus punctis secari non posse, Lineas autem tertii ordinis plures quam tres intersectiones, & quarti ordinis plures quam quatuor & ita porro non admittere. Cum igitur in hoc Capite constituerim intersectiones, quas duæ quævis Curvæ inter se faciunt, definire, oportet hanc tractationem a Lineis rectis inchoare, atque ipsa illa puncta indagare, in quibus recta quæpiam data Curvam datam trajicit. Hoc enim modo via parabitur ad intersectiones mutuas Linearum curvarum

L I B . II. rum determinandas, quod argumentum maximum usum habere solet in construendis æquationibus altiorum graduum, qua de re in sequenti Capite fusijs tractabo.

T A B . 458. Sit igitur proposita Curva quæcunque AMm , cuius XXIII. natura data sit per æquationem inter Coordinatas orthogonales

F i g . 94. $AP = x$, $PM = y$. Ducatur jam recta quæcunque BMm , quæ quot & quibusque in punctis sectura sit Curvam AMm definiri oporteat. Ad hoc queratur æquatio pro Linea recta pariter inter Coordinatas orthogonales x & y ad eundem Axe AP idemque Abscissarum initium A relata. Æquatio ergo pro Linea recta erit hujusmodi $\alpha x + \beta y = y$; qua indicatur, posito $x = 0$, fore $y = AD = \frac{\gamma}{\beta}$, posito autem

$y = 0$, fore $x = -AB = \frac{\gamma}{\alpha}$; unde, concursus B hujus rectæ cum Axe, pariterque angulus ad B , cuius tangens est $= \frac{AD}{AB} = \frac{\alpha}{\beta}$, innotescit. Sic igitur tam Curva quam Recta proposita per æquationes inter communes Coordinatas x & y exprimuntur.

459. Quod si in utraque æquatione Abscissas x perpetuo æquales assūmamus, Applicatæ y , si sint diversæ, ostendent, quantum Curvæ & rectæ puncta eidem Abscissæ respondentia a se invicem distent. Si igitur ex utraque æquatione æqualis prodeat valor Applicatæ y , tum ibi Curva & Recta commune habebunt punctum, ideoque eo in loco dabitur intersectio. Ad intersectiones ergo inveniendas in utraque æquatione, præter Abscissas x , quoque Applicatæ y æquales sunt constitutæ; sicque habebuntur duæ æquationes duas quantitates incognitas x & y evolentes, ex quarum resolutione vel Abscissæ x , quibus intersectiones respondent, vel Applicatæ y reperientur. Scilicet, si ex istis duabus æquationibus eliminetur incognita y , æquatio nascetur solam incognitam x complectens, cuius valores exhibebunt Abscissas AP , Ap unde Applicatæ PM , pm educatæ per intersectionum puncta M & m transibunt.

460. Cum

460. Cum æquatio pro recta BMm sit $\alpha x + \beta y = \gamma$, ex ea fiet $y = \frac{\gamma - \alpha x}{\beta}$; qui valor si in æquatione pro Curva loco y substituatur, orietur æquatio tantum x continens, cujus radices reales præbebunt omnes Abscissas, quibus intersectiones respondent; ideoque intersectionum numerus colligitur ex numero radicum realium ipsius x , quas æquatio inventa suffeditat. Quoniam vero in valore ipsius $y = \frac{\gamma - \alpha x}{\beta}$, incognita x unicam tenet dimensionem, post substitutionem e-merget æquatio, in qua x non plures habebit dimensiones, quam antea in æquatione pro Curva ambæ x & y conjunctim tenuerant. Habebit ergo x vel totidem dimensiones vel pauciores, si quidem per substitutionem summæ ipsius x potestates tollantur.

461. Inventis hoc modo Abscissis AP , Ap , quæ intersectionibus respondent, ex iis ipsa intersectionum puncta M & m facile definientur. Cum enim Applicatae in punctis P & p erectæ per intersectiones transeant, ea tantum puncta erunt notanda, ubi haæ Applicatae rectam BMm secant. Notari quoque possent puncta, quibus istæ Applicatae Curvæ AMm occur- runt; cum autem sèpenumero una Applicata Curvæ in pluribus punctis occurrat, incertum foret quodnam Curvæ punctum simul intersectionem sit præbiturum. Hoc autem incommodum usu non venit, si intersectiones ex recta BMm aestimentur; quippe a qua unaquæque Applicata non nisi in unico punto secari potest. Quod si autem eveniat, ut duo ipsius x valores siant inter se æquales, tum duo intersectionum puncta M & m in unum coalescent; quo ergo casu vel recta BM Curvam tanget, vel eam in punto duplice secabit.

462. Si, eliminata incognita y , æquatio resultans qua x definitur, nullam habeat radicem realem, tum hoc erit indi- cium Curvam nusquam a recta BMm secari vel tangi; radices autem reales (quotquot fuerint) illius æquationis ostendent totidem intersectiones; quia unicuique Abscisse reali una rectæ BMm Applicata realis responder; cui cum sit æqualis Ap-

L I B . II. plicata Curvæ, fieri non potest, quin ibi nulla existat intersection. Hęc ideo isto loco probe sunt notanda, quod in intersectione Linearum curvarum non semper singulæ radices totidem intersectiones indicent; cuius ratio mox fiet manifesta, cum duas Lineas curvas contemplabimur, earumque intersectiones investigabimus.

T A B . XXIII. 463. Sint igitur descriptæ duæ Curvæ quæcunque MEm , MFm , quæ se mutuo intersecent; ad quarum intersectiones definiendas, natura utriusque exprimatur per æquationem inter Coordinatas orthogonales x & y ad eundem communem Axem AB idemque Abscissarum initium A relatas. Sumtis ergo pro utraque Curva Abscissis x æqualibus, ubi dantur intersectiones, ibidem Applicatae y convenient. Quocirca, si ex duabus Curvarum æquationibus propositis, eliminando y , forinetur nova æquatio solam x tanquam incognitam involvens, intersectiones oīnnes M , m , m , quotquot fuerint, indicabuntur per radices reales istius æquationis; scilicet, Abscisse AP , Ap , Ap , &c. quæ intersectionibus M , m , m , &c. respondent, erunt valores ipsius x convenientes pro illa æquatione.

464. Inventis autem Abscissis his AP , Ap &c., quæ intersectionibus convenient, non tam facile erit ipsa intersectionum puncta definire. Si enim pro utraque Curva eidem Abscissæ AP plures Applicatae respondeant, quod evenit, si pro utraque Curva fuerit y Functio multiformis ipsius x , tum ex hac dupli Applicatarum multitudine eas, quæ sint inter se æquales, eligi oportet: quæ investigatio eo erit molestior, quo plures valores Applicata y in utraque Curva obtineat. Hic tamen difficultati facile occurretur, si, dum ex binis æquationibus propositis Applicata y eliminatur, ea æquatio in libidiam vocetur, qua y per x definitur; ex hac enim æquatione pro quovis ipsius x valore invento cognoscetur magnitudo Applicatae ex punto P ad intersectionem usque pertingentis; neque ad hoc opus erit, naturam alterutrius vel adeo utriusque Curvæ perpendisse.