$-(A''x' - Bx'')^2 + Dax''x'' = 0$, designando per D determinantem formae f siue per Da numerum $BB - A'A''$. Quando $D = 0$, solutio simili modo se habebit vt in fine casus praec.; scilicet si A' est quadratum $= kk$, aequ. prop. reducitur ad has $kax + (kb'' - A'')x' + (kb' + B)x'' = 0$, $kax + (kb'' + A'')x' + (kb'' - B)x'' = 0$; si vero A' est non quadratus, fieri debet $ax + b''x' + b'x'' = 0$, $A''x' - Bx'' = 0$. Quando autem D non $= 0$, reducti sumus ad aequationem $A'tt - uu + Davv = 0$, cuius possibilitas per art. praec. diiudicari potest. Quodsi haec aliter resolui nequit, quam per $t = 0$, $u = 0$, $v = 0$, manifesto etiam proposita aliam solutionem non admittet, quam hanc $x = 0$, $x' = 0$, $x'' = 0$; si vero illa aliter solubilis est, e valoribus integris quibusuis ipsorum t, u, v deriuabuntur, per aequationes $ax + b''x' + b'x'' = t$, $A''x' - Bx'' = u$, $x'' = v$, saltem valores rationales ipsorum x, x', x'', e quibus si fractiones inuoluunt per idoneum multiplicatorem integri elici poterunt.

Quamprimum autem *vna* solutio aequationis $f = 0$ in integris inuenta est, problema ad casum I reduci, et perinde ac illic solutiones omnes exhiberi poterunt sequenti modo. Satisfaciant aequationi $f = 0$ valores ipsorum x, x', x'' hi α, α', α'', quos a factoribus communibus liberos supponimus, accipiantur (per artt. 40, 279) integri β, β', β'', γ, γ', γ'' tales vt sit $\alpha(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma') + \alpha'(\beta''\gamma - \beta\gamma'') + \alpha''(\beta\gamma' - \beta'\gamma) = 1$, transeatque f per substitutionem (S) ... $x = \alpha y + \beta y' + \gamma y''$, $x' = \alpha' y + \beta' y' + \gamma' y''$, $x'' = \alpha'' y + \beta'' y' + \gamma'' y''$

in $g = cyy + c'y'y' + c''y''y'' + 2dy'y'' + 2d'yy'' + 2d''yy'$. Tunc manifesto erit $c = 0$, atque g ipsi f aequiualens, vnde facile concluditur, ex omnibus solutionibus aequationis $g = 0$ deriuari (per S) omnes solutiones aequationis $f = 0$ in integris. Iam ex I sequitur, omnes solutiones aequ. $g = 0$ contineri sub formulis $y = -z(c'pp + 2dpq + c''qq)$, $y' = 2z(d''pp + d'pq)$, $y'' = 2z(d''dq + d'qq)$, designantibus p, q integros indefinitos, z numerum indefinitum pro quo etiam fractiones accipi possunt, modo ita vt y, y', y'' integri maneant. His valoribus ipsorum y, y', y'' in (S) substitutis, omnes solutiones aequ. $f = 0$ in integris habebuntur. — Ita *e. g.* si $f = xx + x'x' + x''x'' - 4x'x'' + 2xx'' + 8xx'$, atque vna solutio aequationis $f = 0$ habetur $x = 1$, $x' = -2$, $x'' = 1$: faciendo $\beta, \beta', \beta'', \gamma, \gamma', \gamma'' = 0, 1, 0, 0, 0, 1$ prodit $g = y'y' + y''y'' - 4y'y'' + 12yy''$. Hinc omnes solutiones aequ. $g = 0$ in integris contenti erunt sub formula $y = -z(pp - 4pq + qq)$, $y' = 12zpq$, $y'' = 12zqq$; et proin omnes solutiones aequ. $f = 0$ sub hac $x = -z(pp - 4pq + qq)$, $x' = 2z(pp + 2pq + qq)$, $x'' = -z(pp - 4pq - 11qq)$.

300. E problemate art. praec. sponte defluit solutio aequationis indeterminatae $axx + 2bxy + cyy + 2dx + 2ey + f = 0$, si valores tantummodo rationales desiderantur, quam, si integri postulantur, supra (art. 216 sqq.) iam absoluimus. Nam omnes valores rationales ipsorum x, y exhiberi possunt per $\frac{t}{v}, \frac{u}{v}$, ita vt $t, u,$

v sint integri, vnde patet, solutionem illius aequationis per numeros rationales identicam esse cum solutione aequationis $att + 2btu + cuu + 2dtv + 2euv + fvv = 0$ per numeros integros; haec vero conuenit cum aequ. in art. praec. tractata. Excludi debent eae solae solutiones vbi $v = 0$; tales autem prouenire nequeunt, quando $bb - ac$ est numerus non-quadratus. Ita e. g. omnes solutiones aequationis (in art. 221 per integros generaliter solutae) $xx + 8xy + yy + 2x - 4y + 1 = 0$ per numeros rationales contentae erunt sub formula

$$x = \frac{pp - 4pq + qq}{pp - 4pq + 11qq},\quad y = -\frac{2pp + 4pq + 2qq}{pp - 4pq + 11qq}$$

designantibus p, q integros quoscunque. — Ceterum de his duobus problematibus arctissimo nexu coniunctis breuiter tantummodo hic egimus, multasque obseruationes huc pertinentes suppressimus, tum ne nimis prolixi fieremus, tum quod solutionem aliam probl. art. praec. habemus, principiis generalioribus innixam, cuius expositionem, quia penitiorum formarum ternariarum disquisitionem postulat, ad aliam occasionem nobis reseruare debemus.

301. Reuertimus ad formas binarias, de quibus adhuc plures proprietates singulares recensere oportet. Et primo quasdam obseruationes circa multitudinem generum et classium in ordine proprie primitiuo (positiuo pro det. neg.) adiicemus, ad quem breuitatis caussa disquisitionem restringimus.