expreſſio continens exponentes imaginarios valorem realem atque determinatum exhibeat. Hujus rei exempla ſupra jam occurrerunt; unde hic ſufficiat unum exemplum attuliſſe hoc Cap. XXI.

$$2y = x^{+\sqrt{-1}} + x^{-\sqrt{-1}},$$

in quo, etiamſi utrumque membrum $x^{+\sqrt{-1}}$ & $x^{-\sqrt{-1}}$ ſit quantitas imaginaria, tamen ſumma amborum valorem habet realem. Sit enim $lx = v$, ſumto e pro numero, cujus Logarithmus hyperbolicus eſt $= 1$, erit $x = e^v$, quo valore loco x ſubſtituto, erit $2y = e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}$. Vidimus autem in Sectione ſuperiori §. 138. eſſe

$$\frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2} = cof.\,A.\,v,$$

unde fiet $y = cof.\,A.\,v = cof.\,A.\,lx$. Scilicet, propoſito quocunque ipſius x valore in numeris, ſumatur ejus Logarithmus hyperbolicus, tum in Circulo, cujus radius $= 1$, abſcindatur Arcus iſti Logarithmo æqualis, hujuſque Arcus coſinus dabit valorem Applicatæ y. Sic, ſi ſumatur $x = 2$, ut ſit $2y = 2^{+\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}$, erit $y = cof.\,A.\,l2 = cof.\,A.\,0,693147180559$. Iſte autem Arcus ipſi $l2$ æqualis, cum Arcus $= 3,1415926535$ &c., contineat $180°$, per regulam auream invenietur fore $39°, 42', 51'', 52''', 9''''$, cujus coſinus eſt $0,76923890135408$, hicque numerus dat valorem Applicatæ y reſpondentem Abſciſſæ $x = 2$. Cum igitur hujuſmodi expreſſiones & Logarithmos & Arcus circulares involvant, jure ad tranſcendentes referuntur.

512. Inter Curvas ergo tranſcendentes primum locum tenent, quarum æquationes, præter quantitates algebraicas, Loga-

LIB. II. Logarithmos involvunt, atque ſimpliciſſima harum erit quæ continetur hac æquatione $l\frac{y}{a} = \frac{x}{b}$, ſeu $x = bl\frac{y}{a}$, ubi perinde eſt cujuſnam generis Logarithmi accipiantur, quia multiplicatione conſtantis b omnia Logarithmorum ſyſtemata ad idem revocantur. Denotet ergo character l Logarithmos hyperbolicos, atque Curva æquatione $x = bl\frac{y}{a}$ contenta ſub nomine LOGARITHMICÆ vulgo eſt nota. Sit e numerus, cujus Logarithmus eſt $= 1$, ita ut ſit $e = 2,718281828459045235360 28$, fietque $e^{x:b} = \frac{y}{a}$; ſeu $y = ae^{x:b}$, ex qua æquatione natura Curvæ logarithmicæ facillime cognoſcitur. Si enim loco x ſucceſſive ſubſtituantur valores in arithmetica progreſſione procedentes, Applicatæ y valores tenebunt inter ſe progreſſionem geometricam. Quæ quo facilius ad conſtructionem accommodetur, ponatur $e = m^n$, & $b = nc$, eritque $y = am^{x:c}$, ubi m numerum quemcunque affirmativum unitate majorem ſignificare poteſt. Si igitur ſit

$$x = 0,\ c,\ 2c,\ 3c,\ 4c,\ 5c,\ 6c, \text{ \&c.}$$

erit

$$y = a,\ am,\ am^2,\ am^3,\ am^4,\ am^5,\ am^6, \text{ \&c.};$$

&, tribuendis ipſi x valoribus negativis, ſi ponatur

$$x = -c,\ -2c,\ -3c,\ -4c,\ -5c, \text{ \&c.}$$

erit

$$y = \frac{a}{m},\ \frac{a}{m^2},\ \frac{a}{m^3},\ \frac{a}{m^4},\ \frac{a}{m^5}, \text{ \&c.}$$

TAB. XXIV. Fig. 101. 513. Hinc patet Applicatas y ubique valores habere affirmativos, & quidem in infinitum creſcentes, auctis Abſciſſis x affirmative in infinitum; ex altera autem Axis parte in infinitum

nitum decrescentes, ita ut hinc Axis sit Curvæ Asymtota Ap. Sumto scilicet A pro Abscissarum initio, erit hoc loco Applicata $AB = a$: &, sumta Abscissa $AP = x$, erit Applicata $PM = y = am^{x:c} = ae^{x:b}$: ideoque $l. \frac{y}{a} = \frac{x}{b}$. Unde Abscissa AP per constantem b divisa exprimit Logarithmum rationis $\frac{PM}{AB}$. Si Abscissarum initium in alio quocunque Axis puncto a statuatur, æquatio similis manet. Sit enim $Aa = f$, ac posita $aP = t$, ob $x = t - f$, erit $y = ae^{(t-f):b} = ae^{t:b} : e^{f:b}$. Vocetur constans $a : e^{f:b} = g$, erit $y = ge^{t:b}$. Hinc, ob $ab = g$, intelligitur fore $\frac{aP}{b} = l. \frac{PM}{ab}$; ideoque ductis duabus quibusvis Applicatis PM & pm, intervallo Pp a se invicem distantibus, erit $\frac{Pp}{b} = l. \frac{PM}{pm}$, & constans b, a qua ista relatio pendet, erit instar Parametri Logarithmicæ. CAP. XXI.

514. Tangens hujus Curvæ logarithmicæ in quovis puncto M etiam facile poterit definiri. Cum enim, posita $AP = x$, sit $PM = ae^{x:b}$, ducatur alia quæcunque Applicata QN, a priori intervallo $PQ = u$ dissita, eritque $QN = ae^{(x+u):b} = ae^{x:b} . e^{u:b}$; &, ducta ML Axi parallela, erit $LN = (QN - PM) = ae^{x:b}(e^{u:b} - 1)$. Per puncta M & N ducatur recta NMT Axi occurrens in puncto T, erit $LN : ML = PM : PT$, hincque $PT = u : (e^{u:b} - 1)$. Verum, uti in Sectione superiori ostendimus, per Seriem infinitam est $e^{u:b} = 1 + \frac{u}{b} + \frac{u^2}{2b^2} + \frac{u^3}{6b^3} +$ &c.: ideoque $PT =$

LIB. II. $\frac{1}{\frac{1}{b}+\frac{u}{2b^2}+\frac{uu}{6b^3}+\&c.}$. Evanescat jam intervallum $PQ = u$; &, ob puncta M & N coincidentia, recta NMT fiet Curvæ Tangens, eritque tum Subtangens $PT = b$, ideoque constans; quæ est proprietas palmaria Curvæ logarithmicæ. Parameter ergo Logarithmicæ b simul ejusdem est Subtangens constantis ubique magnitudinis.

515. Quæstio hic oritur, utrum hoc modo tota Curva logarithmica sit descripta; & an ea, præter hunc ramum MBm utrinque in infinitum excurrentem, nullas alias habeat partes. Vidimus enim supra nullam dari Asymtotam, ad quam non duo rami convergant. Statuerunt ergo nonnulli, Logarithmicam ex duabus constare partibus similibus ad utramque Axis partem sitis, ita ut Asymtota simul futura sit Diameter. Verum æquatio $y = a e^{x:b}$ hanc proprietatem minime ostendit; quoties enim est $\frac{x}{b}$ vel numerus integer, vel fractio denominatorem habens imparem, tum y unicum habet valorem realem eumque affirmativum. Quod si autem fractio $\frac{x}{b}$ habeat denominatorem parem, tum Applicata y geminum induet valorem, alterum affirmativum alterum negativum, hicque Curvæ punctum ad alteram Asymtotæ partem exhibebit: ex quo Logarithmica infra Asymtotam innumerabilia habebit puncta discreta, quæ Curvam continuam non constituunt, etiamsi ob intervalla infinite parva Curvam continuam mentiantur; quod est paradoxon in Lineis algebraïcis locum nullum inveniens. Hinc etiam aliud oritur paradoxon multo magis mirandum. Cum enim numerorum negativorum Logarithmi sint imaginarii, (quod tum per se patet, tum inde intelligitur quod *log.* -1 ad $\sqrt{-1}$ rationem habeat finitam) erit $l. -n$, quantitas imaginaria, quæ sit $= i$: at, cum Logarithmus quadrati æquetur duplo Logarithmo radicis, erit $l.(-n)^2 = l.n^2 =$

2 i,

$2i$. At, $log. n^2$ est quantitas realis, $= 2 l. n$: unde sequitur, & quantitatem realem $l. n$ & imaginariam i fore semissem ejusdem quantitatis realis $l. n^2$. Hinc porro quilibet numerus duplicem habiturus esset semissem, alteram realem alteram imaginariam; similiterque cujusque numeri triplex daretur triens, quadruplex quadrans, & ita porro, quarum tamen partium, unica tantum sit realis, quæ quomodo cum solita quantitatum notione conciliari queant, non liquet.

CAP. XXI.

516. Concessis ergo his quæ assumsimus, sequeretur numeri a semissem fore æque $\frac{a}{2} + l. -1$, ac $\frac{a}{2}$: illius enim duplum est $a + 2l - 1 = a + l. (-1)^2 = a + l. 1 = a$: ubi notandum est esse $+ l. -1 = - l. -1$, etiamsi non sit $l. -1 = 0$: cum enim sit $-1 = \frac{+1}{-1}$, erit $l. -1 = l. +1 - l. -1 = - l. -1$. Simili modo, cum sit $\sqrt[3]{1}$ non solum 1 sed etiam $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$, erit $3 l. \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = l. 1 = 0$, ideoque ejusdem quantitatis a trientes erunt $\frac{a}{3}$; $\frac{a}{3} + l. \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$, & $\frac{a}{3} + l. \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$; tripla enim harum singularum expressionum producunt eandem quantitatem a. Ad hæc dubia solvenda, quæ nullo modo admitti posse videntur, aliud statui oportet paradoxon: scilicet, cujusque numeri infinitos dari Logarithmos, inter quos plus uno reali non detur. Sic, etsi Logarithmus unitatis est $= 0$, tamen præterea innumerabiles alii unitatis dantur Logarithmi imaginarii: qui sunt $2 l. -1$, $3 l. \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$, $4 l. -1$; & $4 l. \pm \sqrt{-1}$, innumerabilesque alii, quos extractio radicum monstrat. Hæc autem sententia multo est verisimilior, quam superior: posito enim $x = l. a$, erit $a = e^x$; ideoque $a = 1 + x + \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \&c.$; quæ, cum sit æquatio

 infinita-