Primo eruantur omnes formae binariae determinantis $\frac{D}{ee}$, quae in formam ϕ transeunt per substitutionem propriam talem $T = \varkappa t + \lambda u$, $U = \mu u$, designantibus T, U indeterminatas talis formae; t, u indet. formae ϕ; $\varkappa$, μ integros positiuos (quorum productum itaque $= e$); λ integrum positiuum minorem quam μ (siue etiam cifram). Hae formae, cum transformationibus respondentibus, ita inueniuntur:

Aequetur $\varkappa$ successiue singulis diuisoribus ipsius e positiue acceptis (inclusis etiam 1 et e), fiatque $\mu = \frac{e}{\varkappa}$; pro singulis valoribus determinatis ipsorum $\varkappa$, μ tribuantur ipsi λ omnes valores integri a 0 vsque ad $\mu - 1$, quo pacto omnes transformationes certo habebuntur. Iam forma, quae per quamuis substitutionem $T = \varkappa t + \lambda u$, $U = \mu u$ in ϕ transit, inuenitur inuestigando formam in quam ϕ transit per hanc $t = \frac{1}{\varkappa} T - \frac{\lambda}{e} U$, $u = \frac{1}{\mu} U$; sic formae singulis transformationibus respondentes obtinebuntur; sed ex omnibus his formis eae tantum retinendae sunt, in quibus omnes tres coëfficientes euadunt integri *).

*) Si de hoc problemate fusius agere hic liceret, solutionem admodum contrahere possemus. Id statim obuium est, pro $\varkappa$ alios diuisores ipsius e accipere non esse necessarium, nisi quorum quadratum metiatur coëfficientem primum formae ϕ. Ceterum hoc problema, ex qua etiam solutiones simpliciores probl. artt. 213, 214 deduci possunt, alia occasione idonea resumere nobis reseruamus.

Secundo ponamus Φ esse aliquam ex hisce formis, quae in φ transeat per subst. $T = \varkappa t + \lambda u$, $U = \mu u$; inuestigentur omnes repraesentationes *propriae* formae Φ per f (si quae dantur), exhibeanturque indefinite per $x = \mathfrak{A}T + \mathfrak{B}U$, $x' = \mathfrak{A}'T + \mathfrak{B}'U$, $x'' = \mathfrak{A}''T + \mathfrak{B}''U \ldots (\mathfrak{R})$; denique ex singulis $(\mathfrak{R})$ deducatur repraesentatio $(\varrho) \ldots x = \alpha t + \beta u$, $x' = \alpha' t + \beta' u$, $x'' = \alpha'' t + \beta'' u$ per aequationes $(R) \ldots \alpha = \varkappa\mathfrak{A}$, $\alpha' = \varkappa\mathfrak{A}'$, $\alpha'' = \varkappa\mathfrak{A}''$, $\beta = \lambda\mathfrak{A} + \mu\mathfrak{B}$, $\beta' = \lambda\mathfrak{A}' + \mu\mathfrak{B}'$, $\beta'' = \lambda\mathfrak{A}'' + \mu\mathfrak{B}''$. Eodem prorsus modo, vt forma Φ, tractentur formae reliquae per regulam primam inuentae (si plures adsunt), ita vt ex singulis cuiusque repraesentationibus propriis aliae repraesentationes deriuentur, dicoque, hoc modo prodire cunctas repraesentationes formae φ ad diuisorem ee pertinentes, et quidem quamlibet semel tantum.

Dem. I. Formam ternariam f per quamuis substitutionem (ϱ) reuera transire in φ, tam obuium est, vt explicatione ampliori non opus sit; quamlibet autem repr. (ϱ) esse impropriam et ad diuisorem ee pertinere, inde patet, quod numeri $\alpha'\beta'' - \alpha''\beta'$, $\alpha''\beta - \alpha\beta''$, $\alpha\beta' - \alpha'\beta$ resp. fiunt $= e(\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'' - \mathfrak{A}''\mathfrak{B}')$, $e(\mathfrak{A}''\mathfrak{B} - \mathfrak{A}\mathfrak{B}'')$, $e(\mathfrak{A}\mathfrak{B}' - \mathfrak{A}'\mathfrak{B})$, vnde illorum diuisor comm. max. manifesto erit e (quoniam $\mathfrak{R}$ est repraesentatio propria).

II. Ostendemus, ex quauis repraesentatione data (ϱ) formae φ, inueniri posse repraesentationem propriam formae determinantis $\frac{D}{ee}$, inter formas per regulam primam inuentas contentae, siue ex valoribus datis ipsorum $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta''$ deduci posse valores integros ipsorum $\varkappa, \lambda, \mu$, conditionibus praescriptis, atque valores ipsorum $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{A}'', \mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \mathfrak{B}''$, aequationibus (R) satisfacientes, et quidem vnico tantum modo. Primo statim patet ex tribus aequ. primis in (R), pro $\varkappa$ accipi debere diuisorem communem maximum ipsorum $\alpha, \alpha', \alpha''$ signo positiuo (quum enim $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'' - \mathfrak{A}''\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{A}''\mathfrak{B} - \mathfrak{A}\mathfrak{B}''$, $\mathfrak{A}\mathfrak{B}' - \mathfrak{A}'\mathfrak{B}$ diuisorem communem non habere debeant, etiam $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{A}''$ diu. comm. habere nequeunt); hinc etiam $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{A}''$ determinati erunt, nec non $\mu = \frac{e}{\varkappa}$ (quem necessario integrum fieri facile perspicitur). Ponamus, tres integros a, a', a'' ita acceptos esse, vt fiat $a\mathfrak{A} + a'\mathfrak{A}' + a''\mathfrak{A}'' = 1$, scribamusque breuitatis caussa k pro $a\mathfrak{B} + a'\mathfrak{B}' + a''\mathfrak{B}''$. Tunc ex tribus vltimis aeq. (R) sequitur, esse debere $a\beta + a'\beta' + a''\beta'' = \lambda + \mu k$, vnde statim patet pro λ vnicum tantummodo valorem inter limites 0 et $\mu - 1$ situm dari. Quo facto quum etiam $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \mathfrak{B}''$ valores determinatos nanciscantur, nihil superest, nisi vt demonstremus hos semper hinc integros euadere. Fiet autem $\mathfrak{B} = \frac{1}{\mu}(\beta - \lambda\mathfrak{A}) = \frac{1}{\mu}(\beta(1 - a\mathfrak{A}) - \mathfrak{A}(a'\beta' + a''\beta''))$ $- \mathfrak{A}k = \frac{1}{\mu}(a''(\mathfrak{A}''\beta - \mathfrak{A}\beta'') - a'(\mathfrak{A}\beta' - \mathfrak{A}'\beta))$ $- \mathfrak{A}k = \frac{1}{e}(a''(\alpha''\beta - \alpha\beta'') - a'(\alpha\beta' - \alpha'\beta)) -$ $\mathfrak{A}k$, eritque adeo manifesto integer, similiterque facile confirmatur, etiam ipsos $\mathfrak{B}', \mathfrak{B}''$ valores integros nancisci. — Ex his ratiociniis colligitur, nullam repraesentationem impropriam formae ϕ per f, ad diuisorem ee pertinentem, exstare posse,