implicabunt, adeoque F ipsam F'', tum hae illas. Quare F, F'' aequiualentes erunt. Ex praec. vero sequitur, F ipsam F'' proprie vel improprie implicare, prout F ipsi F' et F' ipsi F'' eodem modo vel diuerso sint aequiualentes, vt et F'' ipsam F: quare in priori casu F, F'' proprie, in posteriori improprie aequiualentes erunt.

Formae $(a, -b, c)$, (c, b, a), $(c, -b, a)$ *formae* (a, b, c) *aequiualent, et quidem duae priores, improprie; vltima, proprie.*

Nam $axx + 2bxy + cyy$, transit in $ax'x' - 2bx'y' + cy'y'$, ponendo $x = x' + oy'$, $y = ox' + y'$, quae transformatio est impropria propter $1 \times -1 - o.\,o = -1$; in formam $cx'x' + 2bx'y' + ay'y'$ vero per transformationem impropriam $x = ox' + y'$, $y = x' + o.\,y$; et in formam $cx'x' - 2bx'y' + ay'y'$ per propriam $x = o.\,x - y'$, $y = x' + o.\,y'$.

Hinc manifestum est, quamuis formam, formae (a, b, c) aequiualentem, vel ipsi, vel formae $(a, -b, c)$ *proprie* aequiualere; similiterque, si qua forma formam (a, b, c) implicet aut sub ipsa contineatur, eam vel formam (a, b, c) vel formam $(a, -b, c)$ proprie implicare, aut sub alterutra proprie contineri. Formas (a, b, c), $(a -b, c)$ *oppositas* vocabimus.

160. Si formae (a, b, c), (a', b', c') eundem determinantem habent, insuperque est $c = a'$ et $b \equiv -b'$ (mod. c), siue $b + b' \equiv o$

(mod. c). formas has *contiguas* dicemus, et quidem, quando determinatione accuratiori opus est, priorem posteriori *a parte prima*, posteriorem priori *a parte vltima* contiguam dicemus.

Ita ex. gr. forma (7, 3, 2), formae (3, 4, 7) a parte vltima contigua, forma (3, 1, 3) oppositae suae (3, — 1, 3) ab vtraque parte.

Formae contiguae semper sunt proprie aequiualentes. Nam forma $axx + 2bxy + cyy$ transit in formam contiguam $cx'x' + 2b'x'y' + c'y'y'$ per substitutionem $x = -y'$, $y = x' + \frac{b+b'}{c} y'$ (quae est propria ob $0 \times \frac{b+b'}{c} - 1 \times -1 = 1$), vti per euolutionem adiumento aequationis $bb - ac = b'b' - cc'$ facile probatur; $\frac{b+b'}{c}$ vero per hyp. est integer. — Ceterum hae difinitiones et conclusiones locum non habent, si $c = a' = 0$. Hic vero casus occurrere nequit, nisi in formis quarum determinans est numerus quadratus.

Formae (a, b, c), (a', b', c') proprie aequiualentes sunt, si $a = a'$, $b \equiv b'$ (mod. a). Forma enim (a, b, c) formae $(c, -b, a)$ proprie aequiualet (art praec.), haec vero formae $(a' b', c')$ a parte prima contigua erit.

161. *Si forma (a, b, c) formam $(a' b', c')$ implicat, quiuis diuisor communis numerorum a, b, c etiam numeros a', b', c' metietur, et quiuis diuisor communis numerorum a, $2b$, c ipsos a', $2b'$, c'.*

Si enim forma $axx + 2bxy + cyy$ per substitutiones $x = \alpha x' + \beta y'$, $y = \gamma x' + \delta y'$ in formam $a'x'x' + 2b'x'y' + c'y'y'$ transit: habebuntur hae aequationes:

$$a\alpha\alpha + 2b\alpha\gamma + c\gamma\gamma = a'$$
$$a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta = b'$$
$$a\beta\beta + 2b\beta\delta + c\delta\delta = c'$$

vnde propositio statim sequitur (pro parte secunda propos. loco aequationis secundae hanc adhibendo $2a\alpha\beta + 2b(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2c\gamma\delta = 2b'$).

Hinc sequitur maximum diuisorem communem numerorum a, b ($2b$), c simul metiri diuisorem communem maximum numerorum a', b' ($2b'$), c'. Quodsi igitur insuper forma (a', b', c') formam (a, b, c) implicat, i. e. formae sunt aequiualentes, diuisor communis maximus numerorum a, b ($2b$), c, diuisori communi maximo numerorum a', b' ($2b'$), c' aequalis erit, quoniam tum ille hunc metiri debet, tum hic illum. Si itaque, in hoc casu, a, b ($2b$), c diuisorem communem non habent, i. e. si maximus $= 1$, etiam a', b'($2b'$), c' diuisorem communem non habebunt.

162. Problema. *Si forma $AXX + 2BXY + CYY \ldots F$, formam $axx + 2bxy + cyy \ldots f$, implicat, atque transformatio aliqua illius in hanc est data: ex hac omnes reliquas transformationes ipsi similes deducere.*

Solutio. Sit transformatio data haec $X = \alpha x + \beta y$, $Y = \gamma x + \delta y$, ponamusque primo