465. Sit una Curva Parabola, cujus natura hac exprimatur æquatione $yy - 2xy + xx - 2ax = 0$; altera vero ſit Circulus æquatione $yy + xx - cc = 0$, expreſſus. Ad y elimininandum ſubtrahatur primum prior æquatio a poſteriori, ac remanebit

$$2xy + 2ax - cc = 0, \text{ unde fit } y = \frac{cc - 2ax}{2x}$$

ex qua jam patet, quicunque valores pro x reſultent, iis ſemper valores ipſius y reales repertum iri. Subſtituatur ergo iſte valor pro y inventus in altera æquatione, ac prodibit

$$c^4 - 4accx + 4(aa - cc)xx + 4x^4 = 0,$$

cujus adeo æquationis ſingulæ radices reales præbebunt interſectiones veras. Ponamus eſſe $c = 2a$ ideoque

$$4a^4 - 4a^3x - 3aaxx + x^4 = 0,$$

cujus æquationis una radix eſt $x = 2a$, qua extracta remanebit hæc æquatio

$$x^3 + 2axx + aax - 2a^3 = 0,$$

quæ unam adhuc præbet radicem realem; utrique autem Applicata conveniens invenitur ex hac æquatione $y = \frac{2aa - ax}{x}$, priori ſcilicet $x = 2a$, reſpondebit $y = 0$, ita ut interſectio in ipſo fiat Axe.

466. Hinc intelligitur quoties ambæ æquationes inter x & y ita fuerint comparatæ, ut in negotio eliminationis ipſius y inveniatur Functio rationalis ipſius x quæ æqualis ſit ipſi y; tum unamquamque radicem realem ipſius x, quam ultima æquatio, (poſtquam y penitus eſt eliminata,) præbebit, exhibituram eſſe interſectionem veram. Verum, ſi inter eliminandum nulla inveniatur Functio rationalis ipſius x, quæ æqualis ſit ipſi y; tum evenire poteſt, ut non omnes radices reales ex ultima

LIB. II. æquatione erutæ præbeant interſectiones veras. Tantus enim ſubinde valor pro x prodire poteſt, cui in neutra Curva Applicata realis reſpondeat; neque tamen hoc caſu calculus erroris eſt arguendus. Cum enim hujuſmodi Abſciſſæ pro utraque Curva Applicata imaginaria reſpondeat, in imaginariis autem æqualitas & inæqualitas æque locum habeat atque in realibus; nihil impedit, quo minus Applicatæ illæ imaginariæ inter ſe ſint æquales, ideoque interſectionem mentiantur.

TAB. XXIII. Fig. 96. 467. Ad hoc clarius oſtendendum, deſcribantur ſuper eodem Axe BAE Parabola EM Parametri $= 2a$, & extra eam Circulus AmB Radii $= c$; exiſtente intervallo $AE = b$; ita ut certum ſit nullam prorſus dari interſectionem. Sumatur A pro Abſciſſarum initio, quæ verſus E affirmativæ, retro autem verſus B negativæ ſtatuantur; atque, pro Parabola habebitur hæc æquatio $yy = 2ax - 2ab$; pro Circulo vero hæc $yy = -2cx - xx$. Quod, ſi jam, quaſi interſectionem indagare velimus, eliminemus y, ſtatim habebimus $xx + 2(a+c)x - 2ab = 0$, ex qua duo pro x valores reales reperiuntur, nempe

$$x = -a - c \pm \sqrt{((a+c)^2 + 2ab)},$$

alter affirmativus, alter negativus; cum tamen nulla exiſtat interſectio. Pro his ſcilicet duabus Abſciſſis tam Parabola quam Circulus exhibebit Applicatas imaginarias, quæ, utut imaginariæ, tamen inter ſe erunt æquales: fiet autem hoc ipſius x valore ſubſtituto

$$y = \sqrt{(-2aa - 2ac - 2ab \pm 2a\sqrt{(aa + 2ac + cc + 2ab)})}$$

quæ expreſſio utique eſt imaginaria.

468. Ex hoc exemplo intelligitur dari etiam Curvarum interſectiones imaginarias; quæ, etiamſi ſint nullæ, tamen per calculum æque indicentur ac reales. Atque hanc ob rem ex numero radicum realium ipſius x, quas ultima æquatio continet, non ſemper interſectionum numerus recte concludetur; fieri enim poteſt ut plures radices reales adſint quam interſectiones,

sectiones, atque etiam nulla omnino existat intersectio; cum tamen duæ pluresve radices reales ipsius x resultent. Interim tamen quælibet intersectio semper unam inducet radicem realem ipsius x in æquationem ultimam; & hanc ob rem semper tot, ad minimum, erunt radices reales ipsius x, quot sunt intersectiones, etiamsi interdum plures radices reales affuerint. Utrum autem unicuique radici reali ipsius x intersectio realis respondeat facile perspicietur, si valor ipsius y respondens quæratur, qui si prodeat realis, intersectio erit realis, sin sit imaginarius, intersectio quoque erit imaginaria vel nulla.

469. Hæc igitur exceptio seu differentia inter radicum realium ipsius x & intersectionum numerum tantum locum habet, si vel in utraque æquatione Applicata y pares tantum ubique habeat dimensiones, atque adeo Axis principalis simul sit utriusque Curvæ Diameter; vel si ambæ æquationes ita fuerint comparatæ, ut, dum eliminatur yy, simul y ex calculo excedat; sicque y per Functionem rationalem ipsius x exprimi nequeat. Sic, si altera æquatio fuerit $yy - xy = aa$, altera vero $y^4 - 2xy^3 + x^3y = bbxx$; cum ex priori sit $(yy - xy)^2 = a^4$, seu $y^4 - 2xy^3 = a^4 - xxyy$, substituatur hic valor in altera, eritque $a^4 - xxyy + x^3y = bbxx$, seu $yy - xy = \frac{a^4 - bbxx}{xx} = aa$: unde fit $xx = \frac{a^4}{aa + bb}$ ideoque $x = \frac{\pm aa}{\sqrt{(aa + bb)}}$. Videtur ergo dari duplex intersectio, sed an utraque sit realis ex valore ipsius y colligi debet, quem hæc æquatio $yy - xy = aa$ suppeditat. Erit ergo

$$yy = \frac{\pm aay}{\sqrt{(aa + bb)}} + aa,$$ cujus cum omnes radices sint reales, patet quatuor dari intersectiones, ita ut utrique Abscissæ $x = \frac{\pm aa}{\sqrt{(aa + bb)}}$ binæ intersectiones reales respondeant.

470. Quando autem neque Axis utriusque Curvæ Diameter existit, neque iste casus locum habet, ut dum altiores ipsius y potestates eliminantur, simul y prorsus eliminetur; tum,

LIB. II. quia ad Functionem rationalem ipsius x pervenietur ipsi y æqualem, singulæ radices reales ultimæ æquationis totidem indicabunt intersectiones veras, ita ut his casibus nulla cautione sit opus. Evenit hoc, si altera Curva abeat in rectam, uti ante vidimus, vel, si ejus Applicata exprimatur per Functionem uniformem ipsius x; tum enim nulli Abscissæ respondebit Applicata imaginaria; ideoque singulæ radices ipsius x exhibebunt intersectiones veras. Plerumque autem, etiamsi y in utraque æquatione plures obtineat dimensiones, tamen inter eliminationem ipsius y, perveniri solet ad æquationem, qua valor ipsius y per Functionem rationalem, ideoque uniformem, ipsius x exprimitur.

471. Quoties autem accidit, ut aliquot intersectiones quas calculus exhibet, sint imaginariæ, id non solum iis evenit casibus, quando neutra Curva habet Applicatam realem illi Abscissæ inventæ respondentem; quod quidem factum est in superiori Circuli & Parabolæ exemplo. Sed etiam ejusmodi casus exhiberi possunt, quibus una Curva pro omnibus Abscissis præbet Applicatas reales, neque tamen singulis radicibus realibus ipsius x intersectiones respondeant. Hujusmodi exemplum præbet Linea tertii ordinis, hac æquatione expressa

$$y^3 - 3ayy + 2aay - 6axx = 0,$$

quæ pro omnibus Abscissis reales præbet Applicatas; & quidem ternas si fuerit x minor quam $\frac{a}{3}\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$. Quod, si cum hac Curva combinetur Parabola æquatione $yy - 2ax = 0$, contenta, cujus nulla datur Applicata realis, si x sit negativum, ideoque Abscissis x negativis nulla intersectio convenire potest.

472. Eliminetur jam y: &, cum sit ex æquatione posteriori $yy = 2ax$, prior æquatio abibit in hanc

$$2axy - 6aax + 2aay - 6axx = 0, \text{ unde fit}$$

$y =$