Cap. VI.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{aa-ff+m(aa+ff)-(1+m)(1+n)yy\pm}{(1+m)^2}\\ \dfrac{2f}{(1+m)^2}\sqrt{(m(1+m)aa-mff+(n-m)(1+m)yy}\end{array}\right\}=x^2.$$

146. Ut igitur æquatio inventa habeat Factores, oportet esse vel $ff=(1+n)aa$ vel $ff=(1+m)aa$. Priori casu fit

$$yy=\frac{naa-(1+m)xx}{1+n}\pm\frac{2fx\sqrt{(m-n)}}{(1+n)\sqrt{(1+n)}},$$

unde, si sit m minor quam n, necesse est ut sit $x=0$ & $y=\pm a\sqrt{\frac{n}{1+n}}$, & $z=\frac{a}{\sqrt{(1+n)}}$. Dantur ergo duo puncta contactus ab Axe Coni utrinque æqualiter distantia. Sin autem fuerit m major quam n, sumi debet altera æquatio

$$xx=\frac{maa-(1+n)yy}{1+m}\pm\frac{2fy\sqrt{(n-m)}}{(1+m)\sqrt{(1+m)}},$$

quæ realis esse nequit, nisi sit $y=0$; quo casu fit $x=\pm a\sqrt{\frac{m}{1+m}}$; & $z=\frac{a}{\sqrt{(1+m)}}$. Hocque ergo casu dabuntur duo alia contactus puncta; contactus enim existet in ea Coni parte, ubi est arctissimus. Simili itaque modo in singulis casibus contactus judicari debebit.

Tab. XL. Fig. 149.

147. Modus autem longe facilior determinandi plana tangentia quarumcunque Superficierum deduci potest ex methodo inveniendi tangentes Linearum curvarum supra tradita. Sit natura Superficiei, cujus plana tangentia quærimus, expressa æquatione inter tres Coordinatas $AP=x$, $PQ=y$, & $QM=z$, ex qua definiri oportet positionem plani Superficiem in puncto M tangentis. Primum igitur consideramus si Superficies secetur plano quocunque per punctum M transeunte, sectionis inde ortæ tangentem in puncto M sitam fore in plano tangente. Quare, si duarum hujusmodi sectionum tangentes

 in

APPEND. in puncto M invenerimus, planum quod his duabus rectis tangentibus definitur, ipsam Superficiem in puncto M contingere debere.

148. Secetur ergo primum Superficies plano ad planum APQ normali, secundum rectam QS parallelam Axi AP. Tum simili modo fiat sectio per punctum M pariter normalis ad planum APQ, sed secundum rectam QP Axi AP normalem; seu, prior sectio sit normalis ad Axem AB, posterior vero ad Axem AP. Sit Curva EM prior sectio, cujus quæratur tangens MS rectæ QS in puncto S occurrens, ita ut sit QS subtangens. Sectio posterior sit Linea curva FM, cujus tangens sit recta MT & subtangens QT. Quibus inventis planum SMT Superficiem in puncto M tanget. Ducta ergo ST dabit intersectionem plani tangentis cum plano APQ; atque, si ex Q ad ST normalis ducatur QR, tum erit QR ad QS uti sinus totus ad tangentem anguli MRQ, quo planum tangens ad planum APQ inclinatur.

149. Ponamus per methodum Tangentium supra traditam inventas esse subtangentes $QS = s$ & $QT = t$; erit $PT = t - y$, & $PX = s - \frac{sy}{t}$; unde fit $AX = x + \frac{sy}{t} - s$. Innotescit ergo hinc punctum X, in quo recta ST Axem AP trajicit: &, quia angulus $AXS = TSQ$, erit hujus anguli tangens $= \frac{t}{s}$, ex quo positio intersectionis plani tangentis cum plano APQ cognoscitur. Deinde, ob $ST = \surd(ss + tt)$, erit $QR = \frac{st}{\surd(ss+tt)}$, per quam si dividatur QM prodibit tangens anguli inclinationis $MRQ = \frac{z\surd(ss+tt)}{st}$. Si porro ad MR normalis ducatur MN, erit hæc cum ad planum tangens, tum ad ipsam Superficiem in puncto M normalis. Ejus ergo positio colligitur ex $QN = \frac{zz\surd(ss+tt)}{st}$. Demittatur ex N ad Axem AP perpendicularis

dicularis NV, ob angulum $QNV = QST$, erit $PV = \frac{zz}{t} = QW$ & $NW = \frac{zz}{t}$. Quare, si hoc modo definiatur positio puncti N in plano APQ, recta NM erit normalis in Superficiem. Cap. VI.

150. Quemadmodum intersectio duarum Superficierum per projectiones indagari debet, supra jam est ostensum. Inquiramus autem cujus ordinis futura sit projectio, pro ordine, ad quem Superficies referuntur. Ac primo quidem duæ Superficies primi ordinis, seu planæ, pro intersectione ejusque projectione dant Lineam primi ordinis. Deinde quoque vidimus hanc projectionem ultra secundum ordinem assurgere non posse, si altera Superficies fuerit primi ordinis altera secundi. Simili modo manifestum est, si altera Superficies fuerit tertii ordinis altera primi, projectionem tertium gradum non esse transgressuram & ita porro. Sin autem duæ Lineæ secundi ordinis se mutuo secent, projectio intersectionis erit vel quarti ordinis vel inferioris; atque generaliter si altera Superficies sit ordinis m, altera ordinis n, intersectionis projectio ad altiorem ordinem, quam qui numero mn indicatur, nunquam referetur.

151. Quando neutra Superficierum se mutuo secantium est plana, plerumque sectio earum mutua est Linea curva non in eodem plano constituta. Hoc tamen non obstante fieri potest, ut tota sectio in eodem plano sit posita; id quod eveniet si ambæ Superficierum æquationes junctim sumtæ hujusmodi æquationem $\alpha z + \beta y + \gamma x = f$ in se complectantur. Quod utrum eveniat, ex duabus æquationibus propositis definiantur binæ variabiles z & y per tertiam x, fiatque $z = P$ & $y = Q$, existentibus P & Q Functionibus ipsius x. Tum dispiciatur, an ejusmodi numerus n detur, ut in $P + nQ$ omnes potestates ipsius x se mutuo tollant, præter infimam x & terminos constantes. Quod si eveniat, fueritque $P + nQ = mx + k$, sectio erit in eodem plano, hocque planum indicabitur æquatione $z + ny = mx + k$.

 152. Sint,

APPEND. 152. Sint, verbi gratia, propoſitæ ſequentes duæ Superficies ſecundi ordinis altera pro Cono recto $zz = xx + yy$, altera pro Superficie ſecundi generis elliptico - hyperbolica $zz = xx + 2yy - 2ax - aa$. Ex quibus cum ſit $xx + 2yy - 2ax - aa = xx + yy$, erit $y = \sqrt{(2ax + aa)}$ & $z = x + a$, quæ ultima æquatio jam indicat totam ſectionem in eodem plano eſſe ſitam, cujus poſitio determinetur æquatione $z = x + a$. Hac igitur ratione plurimæ quæſtiones ad naturam Superficierum pertinentes reſolvi poterunt. Quæ autem methodum hic expoſitam tranſgrediuntur, eæ Analyſin infinitorum requirunt, ad quam ſcientiam hæc, quæ his libris tradita ſunt, viam præparant.

F I N I S.

TAB: I

pag.

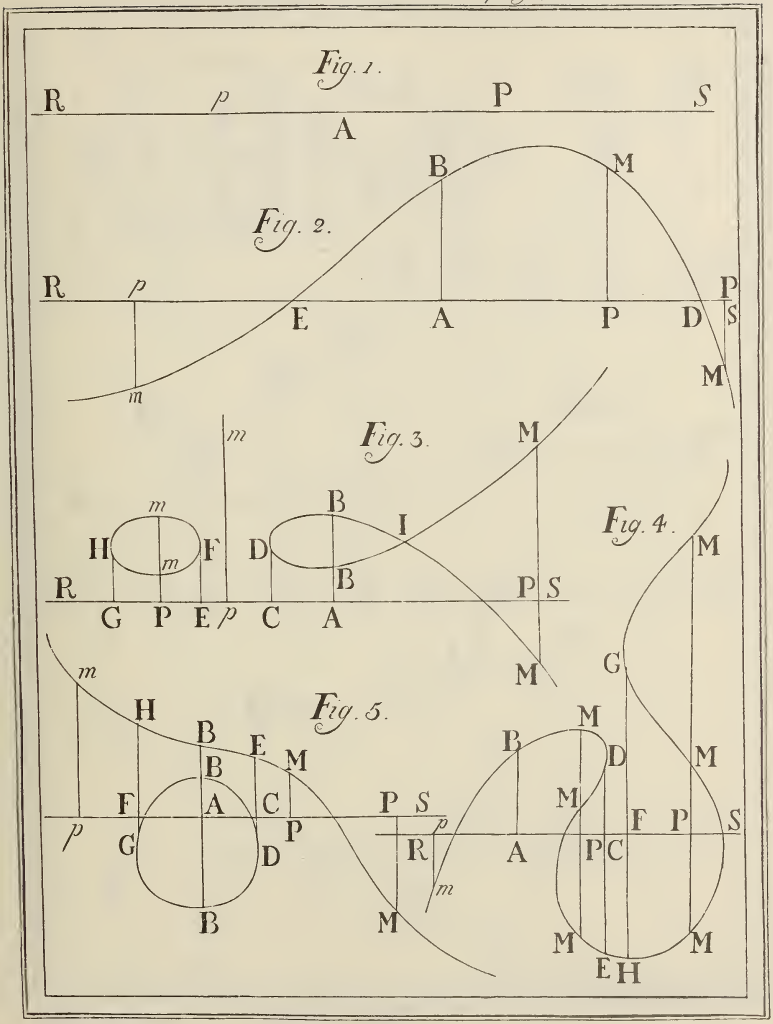

Fig. 1.
R p P S
A
Fig. 2.
B M
R p E A P D P S
m M
Fig. 3.
m
M
m
B
I
H F D
m
B
R P S
G P E p C A
M
Fig. 4.
M
G
M
Fig. 5.
m
H
B
E
B M
F A C P S
p G D P
B M
B M
D
M
F P S
p
R A PC
m
M M
E H