Ex his igitur colligetur $DQ = t = nx + nf - my - mg$ & $QM = u = mx + mf + ny + ng$, ficque ex x & y definientur novæ Coordinatæ t & u. Hinc vero erit $nt + mu = x + f$ & $nu - mt = y + g$, ob $mm + nn = 1$, quocirca habebitur $x = mu + nt - f$, & $y = nu - mt - g$, qui ergo valores fi in æquatione inter x & y data loco x & y fubftituantur, prodibit æquatio inter t & u, qua ejufdem Curvæ LM natura exprimetur. CAP. II.

35. Quoniam nullus excogitari poteft Axis rs, qui quidem in eodem plano cum Curva fit fitus, qui non in hac poftrema determinatione contineatur; pro eadem quoque Curva LM nulla exiftet æquatio inter Coordinatas orthogonales, quæ non in hac æquatione inter t & u inventa comprehendatur. Cum igitur quantitates f & g cum angulo q, unde m & n pendent, infinitis modis variari queant, omnes æquationes, quæ in æquatione inter t & u hoc modo inventa continentur, ejufdem lineæ curvæ naturam exprimènt. Hanc ob rem ifta æquatio inter t & u vocari folet æquatio generalis pro Curva LM, quoniam ea in fe complectitur omnes omnino æquationes, quæ ad eandem lineam curvam pertinent.

36. Supra jam innuimus difficile effe ex diverfitate aliquot æquationum inter Coordinatas judicare, utrum eæ ad eandem lineam curvam, an ad diverfas referantur: nunc igitur patet via omnes hujufmodi quæftiones dijudicandi. Sint enim duæ propofitæ æquationes, altera inter x & y, & altera inter t & u, ponatur in illa $x = mu + nt - f$ & $y = nu - mt - g$, ubi m & n ita a fe invicem pendent ut fit $mm + nn = 1$; quo facto difpiciendum erit utrum altera illa æquatio inter t & u in hac, quæ modo eft eruta, contineatur, feu an quantitates f, g cum m & n ita definiri poffint, ut ipfa altera æquatio inter t & u refultet. Quod fi fieri poffit, ambæ æquationes eandem lineam curvam exprimènt, fin fecus diverfas.

EXEMPLUM.

Hoc modo patebit has duas æquationes

$$yy - ax = 0$$
$$\&$$
$$16uu - 24tu + 9tt - 55au + 10at = 0,$$

ad eandem lineam curvam referri, etiamsi ipsæ plurimum discrepent: si enim in priori æquatione ponamus $x = mu + nt - f$ & $y = nu - mt - g$, ea transformabitur in hanc

$$\left.\begin{array}{l} nnuu - 2mntu + mmtt - 2ngu + 2mgt + gg \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - mau - nat + af \end{array}\right\} = 0.$$

Num igitur in hac altera illa æquatio contineatur, multiplicemus illam per nn hanc vero per 16, ut termini primi utrinque congruant, habebiturque

$$16nnuu - 24nntu + 9nntt - 55nnau + 10nnat = 0$$
$$\&$$
$$\left.\begin{array}{l} 16nnuu - 32mntu + 16m^2tt - 32ngu + 32mgt + 16gg \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - 16mau - 16nat + 16af \end{array}\right\} = 0.$$

Nunc inquiratur quot termini, arbitrariis f, g, m & n determinandis, æquales reddi queant, ac primo quidem habebimus $24nn = 32mn$ & $9nn = 16mm$, quarum utraque dat $3n = 4m$, & ob $mm = 1 - nn$, erit quoque $25nn = 16$, hinc $n = \frac{4}{5}$ & $m = \frac{3}{5}$, sicque jam tres termini conveniunt. Quartus & quintus dant $55nna = 32ng + 16ma$ & $10nna = 32mg - 16na$, unde an idem pro g valor eruatur videndum est, dat vero prior $g = \frac{55na}{32} - \frac{ma}{2n} = \frac{11a}{8} - \frac{3a}{8} = a$, & posterior $g = \frac{5nna}{16m} + \frac{na}{2m} = \frac{a}{3} + \frac{2a}{3} = a$, uterque ergo valor congruit, & jam quinque termini conveniunt. Nil aliud ergo

ergo supereſt, niſi ut ſit $gg + af = 0$, quod, cum f nondum ſit determinatum, nil habet difficultatis, fiet enim $f = -a$. Oſtenſum ergo eſt, has duas æquationes propoſitas eandem lineam curvam exhibere. CAP. II.

37. Quanquam autem fieri poteſt, ut æquationes admodum diverſæ eandem lineam curvam repræſentent, tamen ſæpenumero ex æquationum diverſitate tuto linearum curvarum diverſitas concluditur. Evenit hoc ſi æquationes propoſitæ ad diverſos ordines pertineant, ſeu in quibus maximæ dimenſiones, quas Coordinatæ x & y ſeu t & u conſtituunt, ſunt diverſæ, hoc enim caſu lineæ curvæ, quæ per has æquationes indicantur, certo erunt diverſæ. Cujuſcunque enim ordinis fuerit æquatio inter x & y, ſi ponatur $x = mu + nt - f$ & $y = nu - mt - g$, reſultabit æquatio inter t & u ejuſdem ordinis; quare, ſi altera æquatio inter t & u propoſita ad alium ordinem pertineat, Curvam quoque diverſam indicabit.

38. Niſi igitur duæ æquationes, altera inter x & y altera inter t & u, ad eundem ordinem pertineant, ſtatim concludendum eſt lineas curvas, quæ illis æquationibus exprimuntur, eſſe diverſas. Dubitatio ergo tantum locum habere poteſt, ſi ambæ æquationes fuerint ejuſdem ordinis, hiſque ſolum caſibus inveſtigatione ante tradita opus erit, quæ autem cum ſatis operoſa evadat, ſi æquationes ad altiorem quempiam ordinem pertineant, infra expeditiores regulæ tradentur, ex quibus ſtatim varietas Curvarum dignoſci poterit.

39. Quæ hic de invenienda æquatione generali pro quavis linea curva ſunt præcepta, eadem ad lineam rectam accommodari poſſunt. Sit enim, loco lineæ curvæ, propoſita linea recta LM, quam Axi RS parallelam ſtatuamus: ubicunque ergo initium Abſciſſarum A capiatur, erit ſemper Applicata PM conſtantis magnitudinis, ſeu $y = a$; quæ ergo eſt æquatio pro linea recta Axi parallela. Quæramus hinc æquationem generalem lineæ rectæ ad Axem quemcunque rs relatam; poſito ergo $DG = g$, anguli ODs Sinu $= m$, Coſinu $= n$, & vocata Abſciſſa $DQ = t$, & Applicata $MQ = u$, ob $y =$ TAB. III. *Fig.* 12.

LIB. II. $nu - mt - g$, erit $nu - mt - g - a = 0$, quæ eſt æquatio generalis pro linea recta. Multiplicetur ea per conſtantem k & ponatur $nk = \alpha$, $mk = -\beta$ & $(g+a)k = -b$, eritque æquatio $\alpha u + \beta t + b = 0$ pro linea recta, quæ cum ſit æquatio primi ordinis inter t & u generalis, patet omnem æquationem primi ordinis inter duas Coordinatas, nullam lineam curvam, ſed rectam lineam exhibere.

TAB. III. Fig. 13. 40. Quoties ergo inter Coordinatas x & y talis prodit æquatio $\alpha x + \beta y - a = 0$; toties ea præbet lineam rectam, cujus poſitio reſpectu Axis RS ita determinabitur. Ponatur primo $y = 0$, ſicque in Axe reperitur punctum C, ubi hæc recta Axem trajicit, fit enim $AC = \frac{a}{\alpha}$; tum ponatur $x = 0$, fietque $y = \frac{a}{\beta}$ qui eſt valor Applicatæ AB in initio Abſciſſarum. Cum ergo habeantur duo puncta, B & C, in recta quæſita, ea erit definita, ideoque æquationi propoſitæ ſatisfaciet recta LM. Ponatur enim Abſciſſa quæcunque $AP = x$ & reſpondens Applicata $MP = y$, erit ob ſimilitudinem triangulorum CPM, CAB, $CP : PM = CA : AB$, hoc eſt $\frac{a}{\alpha} - x : y = \frac{a}{\alpha} : \frac{a}{\beta}$, unde fit $\frac{ay}{\alpha} = \frac{aa}{\alpha\beta} - \frac{ax}{\beta}$, ſeu $\alpha x + \beta y = a$, quæ eſt ipſa æquatio propoſita.

41. Si fuerit vel α vel $\beta = 0$, tum iſta conſtructio uſum habere non poterit, at vero iſti caſus per ſe ſunt facillimi. Sit enim $\alpha = 0$, & $y = a$, unde patet lineam ſatisfacientem eſſe rectam Axi parallelam ab eoque intervallo $= a$ remotam, ſin ſit $a = 0$, ſeu $y = 0$, linea ſatisfaciens in Axem incidet. Quod ſi vero fuerit $\beta = 0$, & $x = a$, perſpicuum eſt lineam ſatisfacientem eſſe rectam ad Axem normalem, quæ ab initio Abſciſſarum intervallo $= a$ diſtet. Hoc ſcilicet caſu omnibus Applicatis unica Abſciſſa reſpondet, ita ut Abſciſſa quantitas variabilis eſſe deſinat. Ex his igitur luculenter perſpicitur, quemadmodum lineæ rectæ per æquationes inter Coordinatas orthogonales deſignari queant.

42. Aſſum-

42. Assumsimus hactenus Coordinatas, quibus natura Curvæ definitur, inter se esse normales, simili vero modo etiam ex data æquatione linea curva definietur, si Applicatæ ad Axem sub angulo quocunque inclinentur. Vicissim ergo natura Curvæ exprimi poterit per æquationem inter duas Coordinatas obliquangulas, atque hujusmodi æquationes quoque variatis cum Axe tum principio Abscissarum innumerabilibus modis variari possunt, manente Curva eadem. Sicque pro quavis obliquitate Coordinatarum æquatio generalis ad Curvam exhiberi potest. Quod si vero etiam hæc obliquitas alia atque alia statuatur, multo latius patens eruetur æquatio pro Curva, quam æquationem generalissimam appellabimus, quoniam naturam Curvæ non solum exprimit per æquationem ad quemvis Axem & quodcunque initium Abscissarum relatam, sed etiam pro quacunque Coordinatarum obliquitate. Hæcque adeo æquatio generalissima abibit in æquationem generalem, si angulus, quem Coordinatæ inter se constituunt, rectus statuatur. CAP. II.

43. Data sit pro Curva LM æquatio inter Coordinatas rectangulas, nempe inter $AP = x$ & $PM = y$, & quæratur, retento Axe RS & initio Abscissarum A eodem, æquatio inter Coordinatas, quæ datum angulum comprehendant qui sit $= \phi$. Ex puncto ergo M ad Axem RS ducatur recta MQ ad angulum illum datum MQA, cujus Sinus sit $= \mu$ & Cosinus $= \nu$. Erit ergo AQ nova Abscissa, & MQ nova Applicata: posito ergo $AQ = t$ & $QM = u$, erit in triangulo rectangulo PMQ, $\frac{y}{u} = \mu$ & $\frac{PQ}{u} = \nu = \frac{t-x}{u}$. Quocirca fiet $u = \frac{y}{\mu}$ & $t = \nu u + x = \frac{\nu y}{\mu} + x$, & vicissim $y = \mu u$ & $x = t - \nu u$. Consequenter si in æquatione inter x & y proposita ponatur $x = t - \nu u$ & $y = \mu u$ prodibit æquatio inter Coordinatas obliquangulas t & u, quæ inter se datum angulum ϕ constituant. TAB. III. Fig. 14.

44. Quod si autem data fuerit pro Curva LM æquatio inter Coordinatas obliquangulas AQ & QM; ex ea vicissim

 reperietur