ſemper evaneſcit, poſito $t = \infty$; eritque ergo $zz + \frac{B}{t^q} = 0$, Cap. VIII.
æquatio pro una Aſymtota. Formas quidem præcedentium Aſymtotarum jam expoſuimus, quare iſtas Aſymtotas hac forma $zz = \frac{C}{t^k}$ contentas examinemus.

209. Si igitur Axis in ipſa Aſymtota recta $u = c$ ſumatur, & Applicata $u - c$ ponatur $= z$, omnes illæ Aſymtotæ curvilineæ continebuntur in hac æquatione $zz = \frac{C}{t^k}$, denotante k numerum integrum minorem quam $n - 1$. Harum autem Curvarum rami in infinitum excurrentes, ſeu facto
$t = \infty$, ita ſe habebunt. Si $k = 1$, ſeu $zz = \frac{C}{t}$, quia t Tab. X Fig. 39.
negativum fieri nequit, Curva duos habebit ramos EX & FX in regionibus P & R in infinitum excurrentes, quod idem eveniet ſi fuerit k numerus quicunque impar. At, ſi ſit k numerus par, ut 2, ſeu $zz = \frac{C}{tt}$, primum diſpiciendum eſt
utrum C ſit quantitas negativa an affirmativa. Priori caſu æ- Tab. XI
quatio realis eſſe nequit, ideoque Curva hinc nullum habebit Fig. 40.
ramum in infinitum extenſum. Poſteriori caſu Curva quatuor habebit ramos in infinitum excurrentes & cum Aſymtota XY concurrentes, ſcilicet EX, FX, GY, & HY in omnibus quatuor regionibus P, Q, R, & S diſperſos.

210. Ponamus ſupremum membrum æquationis P habere tres Factores æquales, atque æquatione ad Coordinatas t & u reducta, ut ſit u iſte Factor triplex ipſius P, erit.

$$P = \ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha t^{n-3}u^3 + \alpha t^{n-4}u^4 + \&c.$$

$$Q = \beta t^{n-1} + \beta t^{n-2}u + \beta t^{n-3}u^2 + \beta t^{n-4}u^3 + \beta t^{n-5}u^4 + \&c.$$

$$R = \gamma t^{n-2} + \gamma t^{n-3}u + \gamma t^{n-4}u^2 + \gamma t^{n-5}u^3 + \gamma t^{n-6}u^4 + \&c.$$

$$S = \delta t^{n-3} + \delta t^{n-4}u + \delta t^{n-5}u^2 + \delta t^{n-6}u^3 + \delta t^{n-7}u^4 + \&c.$$

&c.

LIB. II. Hinc, pro diversis constitutionibus membrorum Q & R, sequentes oriuntur æquationes.

I.

$$\alpha t^{n-3} u^3 + \beta t^{n-1} = 0$$

II.

$$\alpha t^{n-3} u^3 + \beta t^{n-2} u + \gamma t^{n-2} = 0$$

III.

$$\alpha t^{n-3} u^3 + \beta t^{n-3} u^2 + \gamma t^{n-2} = 0$$

IV.

$$\alpha t^{n-3} u^3 + \beta t^{n-3} u^2 + \gamma t^{n-3} u + \delta t^{n-3} = 0.$$

211. Prima æquatio abit in $\alpha u^3 + \beta t^2 = 0$, ideoque hæc Asymtota est Linea tertii ordinis, cujus talis erit figura, si Abscissæ t super Axe XY a puncto A sumantur. Duos scilicet habebit ramos E & F in regionibus P & Q in infinitum excurrentes.

TAB. XI. Fig. 41.

Secunda æquatio ita se habet $\alpha u^3 + \beta t u + \gamma t = 0$. Ex qua u, posito $t = \infty$, duplicem valorem habere potest, vel finitum vel infinitum, ideoque in has duas æquationes resolvitur $\beta u + \gamma = 0$ & $\alpha u u + \beta t = 0$, posterior est pro Parabola, uti ante vidimus, ac propterea Curva habebit duos ramos in infinitum extensos ad Parabolam appropinquantes. Prior vero æquatio præbeat $u - c = 0$, quæ est pro Linea recta Asymtota, cujus indoles perspicietur si, præterquam in $\beta u + \gamma = u - c$, ubique loco u scribatur c; eritque ergo, $t^{n-2}(u-c) + t^{n-3}(\alpha c^3 + \beta c^2 + \gamma c + \delta) + t^{n-4}(\alpha c^4 + \beta c^3 + \gamma c^2 + \delta c + \varepsilon) +$ &c. $= 0$; unde, uti supra, sequitur fore vel $(u-c) + \frac{A}{t} = 0$, vel $(u-c) + \frac{A}{tt} = 0$, &c.. Ultima vero æquatio, quæ oriri potest, est $(u-c) + \frac{A}{t^{n-2}} = 0$. Hoc ergo casu Curva duplicem habebit Asym-

totam,

totam, alteram rectam indolis hic declaratæ, alteram vero Parabolam conjunctim. CAP. VIII.

212. Tertia æquatio $\alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma t = 0$, posito $t = \infty$, subsistere nequit, nisi sit $u = \infty$; ideoque terminus βu^2 præ αu^3 evanescit, proditque ista æquatio tertii ordinis $\alpha u + \gamma t = 0$, pro Asymtota, cujus hæc est figura, ut in regionibus oppositis P & S duos habeat ramos AE & AF in infinitum excurrentes. TAB. XI. *Fig.* 42.

Quarta æquatio autem $\alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta = 0$, vel unam vel tres Asymtotas rectas inter se parallelas exhibet, nisi duæ vel omnes inter se sint æquales, ad quarum indolem indagandam sit primum $u = c$, radix æquationis una aliam sui similem non habens, sitque $\alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta = (u - c) \times (fu^2 + gu + h)$. Ponatur ubique $u = c$, præterquam in hoc Factore $u - c$, ac prodibit hujusmodi æquatio $t^{n-3}(u-c) + A t^{n-4} + B t^{n-5} + C t^{n-6} + \&c. = 0$; unde Asymtota orietur formæ $u - c = \frac{K}{t^k}$, existente k numero minore quam $n - 2$.

213. Si æquationis $\alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta = 0$, duæ radices fuerint æquales, ita ut ea expressio sit $= (u - c)^2 \times (fu + g)$; atque, statuendo $u = c$, nisi in quopiam membro fuerit Factor $u - c$, ad hujusmodi æquationem pervenietur $(u - c)^2 + \frac{A(u - c)}{t^p} + \frac{B}{t^q} = 0$; ubi erit q minor quam $n - 2$, & p minor quam q, quem casum ante evolvimus. Superest ergo casus, quo æquatio $\alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta = 0$, tres habet radices reales, puta $(u - c)^3$, atque hujusmodi obtinebitur æquatio $(u - c)^3 t^{n-3} + P t^{n-4} + Q t^{n-5} + R t^{n-6} + S t^{n-7} + \&c. = 0$. Quod si P non fuerit divisibile per $u - c$, ponatur $u = c$, fietque

LIB. II. $(u-c)^3 + \frac{A}{t} = 0$. Sin autem P diviſorem habeat $u-c$ ſemel, ponatur ubique, præterquam in hoc Factore, $u=c$, atque orietur æquatio hujus formæ $(u-c)^3 + \frac{A(u-c)}{t} + \frac{B}{t^q} = 0$, exiſtente q numero minore quam $n-2$; eſt vero $\frac{B}{t^q}$ terminus ſecundum proxime ſequens, qui non evaneſcit facto $u-c$. Sin P adeo per $(u-c)^2$ fuerit diviſibilis, Q vero non habeat Factorem $u-c$, orietur æquatio hujus formæ $(u-c)^3 + \frac{A(u-c)^2}{t} + \frac{B}{tt} = 0$. Quod ſi autem ſecundus adeo per $(u-c)^3$ fuerit diviſibilis, tum ordine procedendum eſt, donec ad terminum perveniatur non diviſibilem per $(u-c)^3$, qui ſi fuerit diviſibilis per $(u-c)$, ulterius eſt progrediendum, donec ad terminum non diviſibilem per $u-c$, perveniatur. Sin autem ille terminus per $(u-c)^2$ diviſibilis fuerit, procedatur ulterius donec perveniatur ad terminum vel non diviſibilem per $u-c$ vel diviſibilem. Priori caſu æquatio terminetur, poſteriori ulterius pergatur donec ad terminum non diviſibilem per $(u-c)$ perveniatur. Sic itaque obtinebitur ſemper æquatio in hac forma generali contenta $(u-c)^3 + \frac{A(u-c)^2}{t^p} + \frac{B(u-c)}{t^q} + \frac{C}{t^r} = 0$, ubi erit r minor quam $n-2$; q minor quam r, & p minor quam q.

214. In hac æquatione vel tres continentur æquationes formæ $(u-c) = \frac{K}{t^k}$; vel una hujuſmodi & una $(u-c)^2 = \frac{K}{t^k}$; vel unica tantum formæ $(u-c)^3 = \frac{K}{t^k}$: quod poſtremum evenit ſi fuerit & $3p$ major quam r & $3q$ major quam

$2r$.

21. Tum vero etiam fieri potest ut duæ æquationes fiant imaginariæ, quæ ergo nullam Asymtotam indicabunt. Ceterum formas harum Asymtotarum jam explicavimus præter ultimam æquatione $(u-c)^3 = \frac{K}{t^k}$ contentam. Præbet autem ista æquatio, si k sit numerus impar, formam Figurâ trigesimâ sextâ designatam, cum duobus ramis EX & FY in regionibus oppositis P & S in infinitum excurrentibus. Sin autem k sit numerus par, orietur forma Figura trigesima septima repræsentata in qua sunt duo rami EX & FY ad eandem Asymtotæ rectæ XY partem, seu in regionibus P & Q excurrentes. CAP. VIII. TAB. X. Fig. 36. TAB. X Fig. 37.

215. Quoniam ex his facile perspicitur, quemadmodum Asymtotarum forma, si quatuor pluresve Factores simplices in membro æquationis supremo fuerint æquales, investigari debeat, ulterius hic non progredior; verum hoc Caput applicatione regularum datarum ad unum exemplum finiam.

EXEMPLUM.

Sit igitur proposita Linea curva hac æquatione expressa $y^3xx\times(y-x)-xy(yy+xx)+1=0$, *cujus supremum membrum* $y^3xx(y-x)$ *unum Factorem habet solitarium,* $y-x$, *duos æquales* xx, *& insuper tres æquales* y^3.

Consideremus primum Factorem simplicem $y-x$; ex quo, posito $y=x$, fiet $y-x-\frac{2}{x}=0$; &, ob $x=\infty$, erit $y-x=0$, quæ est æquatio pro Asymtota rectilinea BAC cum Axe XY in initio Abscissarum faciens angulum semirectum BAY. Ad hanc Lineam transferatur tanquam ad Axem æquatio, quod fiet ponendo $y=\frac{u+t}{\sqrt{2}}$ & $x=\frac{t-u}{\sqrt{2}}$; quo facto orietur hæc æquatio $\frac{(u+t)(tt-uu)^2u}{4}+\frac{(tt-uu)(tt+uu)}{2}+1=0$: unde, per 4 multiplicando, fiet TAB. XI. Fig. 43.

0 =