si DT & TM pro Coordinatis sectionis quæsitæ accipiantur, & vocentur $DT = t$, $TM = u$, erit $QM = u.\sin.\Phi$, & $TQ = u.\cos.\Phi$. Cap. III.

85. Ex T ad Axem AD demittatur perpendiculum TV; atque, ob angulum $TDV = \theta$, erit $TV = t.\sin.\theta$ & $DV = t.\cos.\theta$. Quia porro angulus TQP est $= \theta$, erit $PV = u.\sin\,\theta.\cos.\Phi$ & $PQ - TV = u.\cos.\theta.\cos.\Phi$. Ex his itaque Coordinatæ x, y, & z sequenti modo per t & u definientur ut sit

$$AP = x = f + t.\cos.\theta - u.\sin.\theta.\cos.\Phi$$

&

$$PQ = y = \quad t.\sin.\theta + u.\cos.\theta.\cos.\Phi$$

atque

$$QM = z = \quad u.\sin.\Phi.$$

Quare, si isti valores in æquatione inter x, y, & z pro Solido data substituantur, obtinebitur æquatio inter t & u, seu Coordinatas sectionis quæsitæ, cujus adeo natura innotescet. Convenit autem hic modus fere cum eo, quo supra §. 50. usi sumus.

CAPUT IV.

De immutatione Coordinatarum.

86. Quemadmodum æquationes pro Lineis curvis in eodem plano sitis in innumerabiles formas diversas transformari possunt, immutandis cum Abscissarum initio, tum Axis positione, tum utroque: ita in præsenti negotio multo adhuc major varietas locum habet. Primum enim in eodem plano, in quo binæ Coordinatæ sunt sitæ, hæ infinitis modis variari possunt. Deinde vero hoc ipsum planum, quod duas

APPEND. continet Coordinatas mutari, ſicque prior varietas in infinitum augeri poterit. Data ſcilicet æquatione inter tres Coordinatas inter ſe normales, perpetuo inveniri poteſt alia æquatio inter tres quaſcunque alias Coordinatas pariter inter ſe normales, quarum poſitio reſpectu priorum infinities magis variari poteſt, quam ſi duæ tantum eſſent Coordinatæ, uti uſu venit in æquationibus Linearum curvarum.

87. Ponamus primum ſolum Abſciſſarum x initium in Axe mutari, ita ut binæ reliquæ Coordinatæ y & z maneant eædem; atque nova Abſciſſa quantitate conſtante ab x diſcrepabit. Sit igitur nova Abſciſſa $= t$, erit $x = t \pm a$ quo valore in æquatione pro Superficie ſubſtituto prodibit æquatio inter tres Coordinatas t, y & z quæ, etſi a priori diverſa, tamen pro eadem erit Superficie. Simili modo reliquæ Coordinatæ y & z quantitatibus conſtantibus augeri minuive poterunt: atque, ſi ponatur $x = t + a$; $y = u \pm b$ & $z = v \pm c$, orietur æquatio inter tres variabiles t, u, & v pro eadem Superficie: atque adeo hæ novæ Coordinatæ prioribus erunt parallelæ. Interim hoc modo æquatio pro Superficie, etſi eſt magis generalis, tamen non multum variatur.

TAB. XXXVII. Fig. 140.

88. Quoniam tres Coordinatæ orthogonales, quarum æquatio naturam Superficiei exprimit, ad tria plana inter ſe normalia referuntur, ponamus planum unum in quo binæ Coordinatarum x & y capiuntur, invariatum manere, in eo autem Lineam quamcunque aliam CT, præter AP, pro Axe aſſumi. Cum igitur priores Coordinatæ pro Axe AP eſſent $AP = x$, $P = y$, $QM = z$, pro novo Axe CQ manebit Coordinata $QM = z$ eadem, at binæ reliquæ evadent $CT = t$, $TQ = u$, ducta QT ad novum Axem CT normali. Ad æquationem igitur inter has novas Coordinatas t, u & z inveniendam, ducatur CR parallela priori Axi AP, tum ex C ad eum perpendicularis ducatur CB, ac vocetur $AB = a$, $BC = b$; & angulus $RCT = \zeta$. Denique ducatur TR normalis ad CR & ex T in QP productam perpendiculum TS.

89. His

89. His factis; in Triangulo TCR erit $TR = t.\,\text{ſin.}\,\zeta$, $CR = t.\,\text{coſ.}\,\zeta$: in Triangulo autem QTS, cujus angulus ad Q pariter erit $= \zeta$, fiet $TS = u.\,\text{ſin.}\,\zeta$, & $QS = u.\,\text{coſ.}\,\zeta$. Ex his jam obtinebitur $AP = x = CR + TS - AB = t.\,\text{coſ.}\,\zeta + u.\,\text{ſin.}\,\zeta - a$; & $QP = QS - TR - BC = y = u.\,\text{coſ.}\,\zeta - t.\,\text{ſin.}\,\zeta - b$. Quod ſi ergo iſti valores loco x & y in æquatione pro Superficie propoſita ſubſtituantur, reſultabit æquatio inter ternas novas Coordinatas t, u & z, qua ejuſdem Superficiei natura exprimetur. Hæc igitur nova æquatio multo latius patentem ſpeciem præ ſe feret, cum in eam ingrediantur tres novæ conſtantes arbitrariæ a, b & angulus ζ, quæ in priori æquatione non inerant. Hæcque erit æquatio generalis: quando quidem idem planum, in quo binæ Coordinatæ x & y verſantur, retineatur. Cap. IV.

90. Varietur nunc quoque planum, in quo binæ priores Coordinatæ x & y erant aſſumtæ: ac primo quidem ita ut interſectio novi plani cum priori APQ incidat in ipſam rectam AP, quæ etiam pro novis Coordinatis tanquam Axis ſpectetur. Sit igitur APT hoc novum planum, cujus ad prius APQ inclinatio erit angulus QPT, qui ponatur η. Ex M in PT ducatur normalis MT, quæ ſimul in novum planum erit perpendicularis & vicem tertiæ Coordinatæ tenebit. Ponantur ergo tres novæ Coordinatæ $AP = x$, $PT = u$, & $TM = v$: &, ducta TR ad PQ, & TS ad QM normali, erit $TR = u.\,\text{ſin.}\,\eta$, $PR = u.\,\text{coſ.}\,\eta$; $TS = v.\,\text{ſin.}\,\eta$ & $MS = v.\,\text{coſ.}\,\eta$. Hinc erit $PQ = y = u.\,\text{coſ.}\,\eta - v.\,\text{ſin.}\,\eta$ & $QM = z = v.\,\text{coſ.}\,\eta + u.\,\text{ſin.}\,\eta$, qui valores, in æquatione propoſita pro y & z ſubſtituti, dabunt æquationem inter tres novas Coordinatas x, u & v, qua ejuſdem Superficiei natura exprimetur. Tab. XXXVII. Fig. 141.

91. Cadat nunc interſectio novi plani ſecantis cum plano APQ in Lineam quamcunque CT, ſitque η inclinatio iſtorum planorum; ac ſumatur recta hæc CT pro Axe in hoc plano. Quæratur primum æquatio inter Coordinatas in plano APQ ad Axem CT relatas, quæ ex præcedentibus ita reperietur, Tab. XXXVII. Fig. 140.

APPEND. perietur, ut, positis $AB = a$, $BC = b$, angulo $TCR = \zeta$, & Coordinatis $CT = p$, $TQ = q$, & $QM = r$, ut sit $x = p.\cos.\zeta + q.\sin.\zeta - a$; $y = q.\cos.\zeta - p.\sin.\zeta - b$, & $z = r$. Nunc vero ex §. præcedente, positis novis Coordinatis t, u, & v, fiet $p = t$; $q = u.\cos.\eta - v.\sin.\eta$, & $r = v.\cos.\eta + u.\sin.\eta$. His substitutis, Coordinatæ principales x, y, z ex novis ita determinabuntur ut sit

$$x = t.\cos.\zeta + u.\sin.\zeta.\cos.\eta - v.\sin.\zeta.\sin.\eta - a$$
&
$$y = - t.\sin.\zeta + u.\cos.\zeta.\cos.\eta - v.\cos.\zeta.\sin.\eta - b$$
atque
$$z = u.\sin.\eta + v.\cos.\eta.$$

TAB. XXXVII. Fig. 140. 92. Sumatur jam in plano isto novo, in quo Coordinatæ t & u sunt sitæ, alia Linea quæcunque pro Axe; sicque orietur æquatio generalissima pro Superficie proposita. Sint in hunc finem AP, PQ, QM Coordinatæ t, u, & v, quas modo invenimus; ita ut AP repræsentet intersectionem memorati plani cum plano in quo principales Coordinatæ x & y positæ concipiuntur. Sitque recta CT novus Axis ad quem novæ generalissimæ Coordinatæ, quas quærimus, referantur, quæ vocentur, $CT = p$, $TQ = q$, & $QM = r$. Præterea, sunt AB & BC Lineæ constantes, angulus autem CTR ponatur $= \theta$. His positis erit ex §. 89.

$$t = p.\cos.\theta + q.\sin.\theta - AB$$
&
$$u = - p.\sin.\theta + q.\cos.\theta - BC$$
atque
$$v = r.$$

Qui valores si substituantur in expressionibus §. præcedentis reperietur

$x =$

Cap. IV.

$$x = p(\cos.\zeta.\cos.\theta - \sin.\zeta.\cos.\eta.\sin.\theta) + q(\cos.\zeta.\sin.\theta + \sin.\zeta.\cos.\eta.\cos.\theta) - r.\sin.\zeta.\sin.\eta + f$$

&

$$y = -p(\sin.\zeta.\cos.\theta + \cos.\zeta.\cos.\eta.\sin.\theta) - q.(\sin.\zeta.\sin.\theta - \cos.\zeta.\cos.\eta.\cos.\theta) - r.\cos.\zeta.\sin.\eta + g$$

atque

$$z = -p.\sin.\eta.\sin.\theta + q.\sin.\eta.\cos.\theta + r.\cos.\eta + h,$$

ubi f, g & h ſunt Lineæ conſtantes ex compoſitione earum, quæ in calculum ſunt introductæ, ortæ.

93. Patet ergo æquationem generaliſſimam pro quavis Superficie ſex conſtantes arbitrarias complecti, quæ utcunque determinentur, æquatio perpetuo ejuſdem Superficiei naturam exprimet. Quantumvis autem ſimplex & ſuccincta fuerit æquatio pro Superficie inter Coordinatas x, y, z, ſi ex ea conflectur æquatio generaliſſima inter p, q, & r, ea ob ingentem conſtantium arbitrariarum numerum neceſſario fiet maxime intricata: præſertim, ſi altiores dimenſiones ipſarum x, y, & z affuerint. Vix igitur dari poterit caſus, in quo conveniret ad æquationem generaliſſimam aſſurgere. Quanquam enim ea utilitas inde percipi poſſet, ut idoneo modo conſtantibus illis definiendis æquatio ſimpliciſſima redderetur; tamen, ob calculi prolixitatem, hic labor plerumque fieret moleſtiſſimus. Interim tamen in ſequentibus iſta methodus æquationes generaliſſimas formandi uſu non carebit, quoniam inde egregiæ proprietates elicientur ac demonſtrabuntur.

94. Quamquam autem æquatio generaliſſima plerumque ſit maxime complicata; tamen, ſi ad dimenſiones, quas Coordinatæ junctim ſumtæ conſtituunt, ſpectemus, earum numerus perpetuo æqualis eſt numero dimenſionum, quas primæ Coordinatæ x, y & z confecerunt. Sic, cum æquatio pro Sphæra $xx + yy + zz = aa$ ſit duarum dimenſionum, æquatio quoque generaliſſima non plures quoque quam duas continebit dimenſiones Coordinatarum p, q, & r. Hinc numerus dimenſionum, quas Coordinatæ in æquatione cujuſpiam Superficiei