2) Numerus c perinde vt a, positiue acceptus, inter $\sqrt{D} + b$ et $\sqrt{D} - b$ situs erit. Nam $-c = \frac{D - bb}{a}$; quare, abstractione facta a signo, c iacebit inter $\frac{D - bb}{\sqrt{D} + b}$ et $\frac{D - bb}{\sqrt{D} - b}$ i. e. inter $\sqrt{D} - b$ et $D + b$.

3) Hinc patet, etiam (c, b, a) fore formam reductam.

4) Tum a tum c erunt $< 2\sqrt{D}$. Vterque enim est $< \sqrt{D} + B$, adeoque a potiori $< 2\sqrt{D}$.

5) Numerus b situs erit inter $\sqrt{D}$ et $\sqrt{D} \mp a$ (accepto signo superiori quando a positiuus, inferiori quando est negatiuus). Quia enim $\pm a$ iacet inter $\sqrt{D} + b$ et $\sqrt{D} - b$, erit $\pm a - (\sqrt{D} - b)$, siue $b - (\sqrt{D} \mp a)$ positiuus; $b - \sqrt{D}$ autem est negatiuus; quamobrem b inter $\sqrt{D}$ et $\sqrt{D} \mp a$ erit situs. — Prorsus eodem modo demonstratur, b inter $\sqrt{D}$ et $\sqrt{D} \mp c$ iacere (prout c pos. vel neg.).

6) *Cuiuis formae reductae (a, b, c) ab vtraque parte contigua est reducta vna, et non plures.*

Fiat $a' = c$, $b' \equiv -b$ (mod. a') et inter $\sqrt{D}$ et $\sqrt{D} \mp a'$ situs *), $c' = \frac{b'b' - D}{a'}$, eritque forma (a', b', c') formae (a, b, c) ab vltima

*) Vbi signa ambigua sunt, superiora semper valent quando a' est positiuus, inferiora quando a' negatiuus.

parte contigua, simulque manifestam est, si vlla forma reducta formae (a, b, c) ab vltima parte contigua detur, eam ab hac $(a'\ b', c')$ diuersam esse non posse. Hanc vero reuera esse reductam, ita demonstramus.

A) Si ponitur $\sqrt{D} + b \mp a' = p$, $\pm a' - (\sqrt{D} - b) = q$, $\sqrt{D} - b = r$, hi p, q, r ex (2) supra et defin. formae reductae erunt positiui. Porro ponatur $b' - (\sqrt{D} \mp a') = q'$, $\sqrt{D} - b' = r'$ eruntque q', r' positiui, quia b' iacet inter $\sqrt{D}$ et $\sqrt{D} \mp a'$. Denique sit $b + b' = \pm ma'$ eritque m integer. Iam patet esse $p + q' = b + b'$, adeoque $b + b'$ siue $\pm ma'$ positiuum, et proin etiam m; vnde sequitur $m - 1$ certe non esse negatiuum. Porro fit $r + q' \pm ma' = 2b' \pm a'$, siue $2b' = r + q' \pm (m - 1)a'$, vnde $2b'$ et b' necessario erunt positiui. Et quoniam $b' + r' = \sqrt{D}$, erit $b' < \sqrt{D}$.

B) Porro fit $r \pm ma' = \sqrt{D} + b'$, siue $r \pm (m - 1)a' = \sqrt{D} + b' \mp a'$; quare $\sqrt{D} + b' \mp a'$ erit positiuus. Hinc et quoniam $\pm a' - (\sqrt{\ } - b') = q'$, adeoque positiuus, $\mp a'$ iacebit inter $\sqrt{D} + b'$ et $\sqrt{D} - b'$. — Quocirca (a', b', c') erit forma reducta.

Eodem modo demonstratur, si fiat $'c = a$, $'b \equiv - b$ (mod. $'c$) et inter $\sqrt{D}$ et $\sqrt{D} \pm {'c}$ situs, $'a = \frac{'b'b - D}{'c}$, formam $('a, 'b, 'c)$ fore reductam. Manifesto autem forma haec formae (a, b, c) a parte prima est contigua, aliaque reducta praeter $('a, 'b, 'c)$ hac proprietate praedita esse non poterit.

Ex. Formae reductae (5, 11 — 14), cuius determinans = 191, a parte vltima contigua reducta (— 14, 3, 13), a parte prima vero haec (— 22, 9, 5).

7) Si formae reductae (a, b, c) a parte vltima contigua est reducta (a', b', c'): reductae (c, b, a) contigua erit a prima parte forma (c', b', a); et si reductae (a, b, c) a prima parte contigua est forma $('a, 'b, 'c)$; reductae (c, b, a) reducta $('c, 'b, 'a)$ contigua erit ab vltima parte. Porro etiam formae $(-'a, 'b, -'c)$, $(-a, b, -c)$, $(-a', b', -c')$ reductae erunt, et secunda primae, tertia secundae ab vltima parte contiguae, siue prima secundae, secundaque tertiae a parte prima; similiterque tres formae $(-c', b' -a')$, $(-c, b, a)$, $(-'c, 'b, -'a)$. Haec tam obuia sunt vt explicatione non egeant.

185. Multitudo omnium formarum reductarum determinantis dati D semper est finita, ipsae vero duplici modo inueniri possunt. Designemus indefinite omnes formas reductas determinantis D per (a, b, c), ita vt omnes valores ipsorum a, b, c determinare oporteat.

Methodus prima. Accipiantur pro a omnes numeri (tum positiue, tum negatiue) minores quam $2\sqrt{D}$ quorum residuum quadraticum D, et pro singulis a, ponatur b aequalis omni-