Omnes ſcilicet Lineas curvas, quas hæc æquatio, denotantibus litteris x & y Coordinatas orthogonales, in ſe complectitur, ad ordinem Linearum ſecundum numeramus. Sunt igitur hæ Lineæ curvæ ſimpliciſſimæ, quia in ordine primo nulla Linea curva continetur, & hanc ob rem a quibuſdam Lineæ curvæ primi ordinis vocari ſolent. Lineæ vero iſtæ curvæ in hac æquatione contentæ ſub nomine *Sectionum conicarum* vulgo innotuerunt, quia eædem omnes ex ſectione Coni naſcuntur. Diverſæ harum Linearum ſpecies ſunt Circulus, Ellipſis, Parabola & Hyperbola, quas infra ex æquatione generali deducemus.

55. Ad tertium porro Linearum ordinem referuntur omnes Lineæ curvæ, quas ſequens æquatio tertii ordinis generalis ſuppeditat.

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2 + \eta x^3 + \theta x^2 y + \iota xy^2 + \kappa y^3$$

ſumtis x & y pro Coordinatis orthogonalibus, quia conditio obliquitatis Applicatarum ampliorem ſignificatum huic æquationi non inducit, ut jam notavimus. Quia in hac æquatione multo plures, quam in præcedente habentur litteræ conſtantes, quas pro arbitrio definire licet, etiam multo major ſpecierum diverſarum numerus in hoc ordine continetur, quarum enumerationem exhibuit NEWTONUS.

56. Ad quartum Linearum ordinem pertinent omnes Lineæ curvæ, quas hæc æquatio generalis quarti ordinis exhibet

$$\begin{aligned} 0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2 + \eta x^3 + \theta x^2 y + \iota xy^2 + \kappa y^3 \\ + \lambda x^4 + \mu x^3 y + \nu x^2 y^2 + \xi xy^3 + o y^4, \end{aligned}$$

ſumtis x & y pro Coordinatis orthogonalibus, quia obliquitas Applicatarum æquationi majorem generalitatem non inducit. Occurrunt ergo in hac æquatione quindecim quantitates conſtantes, pro arbitrio definiendæ, unde multo major ſpecierum diverſarum varietas in hoc ordine occurrit, quam in præcedente. Lineæ iſtæ quarti ordinis vocari etiam ſolent Lineæ

D 2 curvæ

LIB. II. curvæ tertii ordinis, quia Linearum ordo secundus pro Linearum curvarum ordine primo reputatur; similique modo Lineæ tertii ordinis conveniunt cum Lineis curvis secundi ordinis.

57. Ex his jam intelligitur, quænam Lineæ curvæ ad ordinem quintum, sextum, septimum & sequentes pertineant. Æquatio autem generalis omnes Lineas quinti ordinis in se complectens, quia ad æquationem generalem quarti ordinis insuper accedunt termini,

$$x^5\ ;\ x^4y\ ;\ x^3y^2\ ;\ x^2y^3\ ;\ xy^4\ ;\ y^5$$

constabit omnino terminis viginti & uno, & æquatio generalis omnes Lineas sexti ordinis continens habebit viginti & octo terminos, & ita porro secundum numeros trigonales. Scilicet æquatio generalis pro Lineis ordinis n continebit $\frac{(n+1)(n+2)}{1.\ \ 2}$ terminos, totidemque in ea inerunt litteræ constantes, quas pro arbitrio definire licet.

58. Neque vero quælibet litterarum constantium diversa determinatio diversas Lineas curvas producit. Vidimus enim in præcedente Capite pro eadem Linea curva, mutatis Axe & Abscissarum initio, infinitas exhiberi posse æquationes diversas; unde ex diversitate æquationum ad eundem ordinem pertinentium non sequitur Curvarum iis æquationibus indicatarum diversitas. Quam ob rem in enumeratione generum ac specierum ad eundem ordinem pertinentium, quæ ex æquatione generali deducitur, admodum cautum esse oportet, ne eadem Linea curva ad duas pluresve species referatur.

59. Cum igitur ex ordine æquationis, quæ inter Coordinatas datur, Lineæ curvæ ordo cognoscatur, proposita quacunque æquatione algebraïca inter Coordinatas x & y, statim constabit, ad quemnam ordinem Linea curva illa æquatione indicata sit referenda. Primum scilicet æquatio, si sit irrationalis, ab irrationalitate liberari, tumque, si fractiones superfuerint, ab his purgari debebit, quo facto maximus dimensionum numerus,

numerus, quem variabiles x & y in ea conſtituunt, ordinem, ad quem Linea curva pertinet, indicabit. Sic Linea curva, quam hæc æquatio $yy - ax = 0$ dat, erit ordinis ſecundi: Linea curva autem in hac æquatione $yy = x\surd(aa - xx)$ (quæ ab irrationalitate liberata fit ordinis quarti) contenta erit ordinis quarti. Et Linea curva, quam hæc æquatio præbet $y = \frac{a^3 - axx}{aa + xx}$, erit ordinis tertii, quia æquatio a fractionibus liberata fit $aay + xxy = a^3 - axx$, in cujus termino xxy tres ſunt dimenſiones. Cap. III.

60. In una eademque autem æquatione plures Lineæ curvæ diverſæ contineri poſſunt, prout Applicatæ ad Axem vel normales vel ſub data obliquitate conſtitutæ ponuntur. Sic hæc æquatio $yy = aa - xx$, ſi Coordinatæ ponantur orthogonales, præbet Circulum, ſin autem Coordinatæ obliquangulæ ſtatuantur, tum Curva erit Ellipſis. Omnes tamen iſtæ Curvæ diverſæ ad eundem ordinem pertinent, quia reductione Coordinatarum obliquangularum ad rectangulas ordo Curvæ non mutatur. Quanquam ergo æquatio generalis pro Lineis curvis cujuſque ordinis ob angulum, quo Applicatæ Axi inſiſtunt, neque latius neque minus late patens redditur, tamen propoſita æquatione ſpeciali Linea curva in ea contenta non determinatur, niſi angulus quem Coordinatæ inter ſe conſtituunt, determinetur.

61. Quo Linea curva ad eum ordinem, quem æquatio indicat, proprie referatur, neceſſe eſt, ut æquatio in Factores rationales reſolvi nequeat. Si enim æquatio duos pluresve habeat Factores, tum duas pluresve involvet æquationes, quarum quælibet peculiarem Lineam curvam generabit, quæ junctim ſumtæ æquationis propoſitæ vim exhaurient. Hujuſmodi ergo æquationes in Factores reſolubiles non unam ſed plures Curvas continuas in ſe complectuntur, quarum quævis peculiari æquatione exprimi queat; & quæ aliter inter ſe non ſunt connexæ, niſi quod earum æquationes in ſe mutuo ſint multiplicatæ. Qui cum ſit nexus ab arbitrio noſtro pendens, ejuſ-

LIB. II. modi Lineæ curvæ non unam continuam Lineam conſtituere cenſeri poſſunt. Tales ergo æquitiones, quas ſupra complexas vocavimus, producent Lineas curvas non continuas, attamen ex continuis compoſitas, quas propterea complexas vocabimus.

62. Sic hæc æquatio $yy = ay + xy - ax$, quæ ad Lineam ſecundi ordinis eſſe videtur, ſi ad nihilum reducatur, ut ſit $yy - ay - xy + ax = 0$, conſtabit ex his Factoribus $(y-x)(y-a) = 0$: complectitur ergo has duas æquationes $y - x = 0$ & $y - a = 0$, quarum utraque eſt pro linea recta, illa ſcilicet cum Axe in initio Abſciſſarum angulum ſemirectum conſtituit, hæc vero Axi ad diſtantiam $= a$ eſt parallela. Duæ ergo iſtæ lineæ rectæ ſimul conſideratæ in æquatione propoſita $yy = ay + xy - ax$ continentur. Simili modo hæc æquatio eſt complexa $y^4 - xy^3 - aaxx - ay^3 + axxy + aaxy = 0$ neque propterea Lineam continuam quarti ordinis exhibet, cum enim Factores ſint $(y-x)(y-a)(yy-ax)$ tres continebit lineas diſcretas, duas ſcilicet rectas & unam Curvam in æquatione $yy - ax = 0$ contentam.

63. Poſſunt ergo pro lubitu Lineæ complexæ quæcunque formari, quæ complectantur duas pluresve Lineas ſive rectas ſive curvas ad arbitrium deſcriptas. Quod ſi enim unius cujuſque Lineæ natura exprimatur per æquationem ad eundem Axem idemque Abſciſſarum initium relatam, hæque æquationes ſingulæ, poſtquam ad cyphram fuerint reductæ, in ſe multiplicentur, prodibit æquatio complexa, in qua omnes Lineæ aſ-
AB. IV. ſumtæ ſimul continentur. Ita, ſi propoſitus fuerit Circulus
ig. 16. centro C & Radio $CA = a$ deſcriptus, ac præterea Linea recta LN per Centrum C tranſiens, æquatio pro quovis Axe exhiberi poterit, quæ Circulum & Lineam rectam, quaſi ambo unam Lineam conſtituerent, conjunctim complectatur.

64. Sumatur diameter AB, quæ cum recta LN angulum ſemirectum conſtituat pro Axe, ac ſumto initio Abſciſſarum in A, vocatiſque Abſciſſa $AP = x$, & Applicata $PM = y$, erit pro Linea recta $PM = CP = a - x$, & quia punctum

rect

rectæ M in regionem Applicatarum negativarum cadit, erit $y = -a + x$, seu $y - x + a = 0$. Pro Circulo autem cum sit $PM^2 = AP.PB$, ob $BP = 2a - x$, erit $yy = 2ax - xx$ seu $yy + xx - 2ax = 0$. Multiplicentur jam hæ duæ æquationes in se invicem ac prodibit æquatio tertii ordinis complexa Cap. III.

$$y^3 - y^2x + yxx - x^3 + ayy - 2axy + 3axx - 2aax = 0,$$

quæ tam Circulum quam lineam rectam simul in se complectetur. Abscissæ scilicet $AP = x$ respondere invenientur tres Applicatæ, binæ Circuli & una rectæ: sit nimirum $x = \frac{1}{2}a$, fiet $y^3 + \frac{1}{2}ay^2 - \frac{3}{4}aay - \frac{3}{8}a^3 = 0$, unde fit primo $y + \frac{1}{2}a = 0$ tum divisione per hanc radicem instituta erit $yy - \frac{3}{4}aa = 0$, unde tres valores ipsius y erunt.

I. $y = -\frac{1}{2}a$;

II. $y = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$;

III. $y = -\frac{1}{2}a\sqrt{3}$.

Quasi ergo Circulus cum recta LN unum continuum constituerit, ita in æquatione repræsentatur.

65. Notato hoc discrimine inter Curvas incomplexas & complexas, perspicuum est Lineas secundi ordinis vel esse Curvas continuas, vel ex duabus Lineis rectis complexas; si enim æquatio generalis habet Factores, hi erunt primi ordinis, ideoque Lineas rectas denotabunt. Lineæ autem tertii ordinis erunt vel incomplexæ, vel ex una recta & una Linea secundi ordinis complexæ, vel ex tribus Lineis rectis complexæ. Porro Lineæ quarti ordinis erunt vel continuæ seu incomplexæ, vel ex una Linea recta & una Linea tertii ordinis complexæ, vel ex duabus