potestatem ipsius r etiam radicem aequ. $x^n - 1 = 0$ esse; quocirca quum quantitates $1 (= r^0)$, $r, rr \ldots r^{n-1}$ omnes sint diuersae, hae exhibebunt omnes radices aequ. $x^n - 1 = 0$, et proin hae $r, rr, r^3 \ldots r^{n-1}$ cum Ω coincident. Facile hinc generalius colligitur, Ω conuenire cum r^e, r^{2e}, $r^{3e} \ldots r^{(n-1)e}$, si e sit integer quicunque per n non diuisibilis, positiuus seu negatiuus. Erit itaque $X = (x - r^e)(x - r^{2e})(x - r^{3e}) \ldots (x - r^{(n-1)e})$, vnde $r^e + r^{2e} + r^{3e} \ldots + r^{(n-1)e} = -1$, et $1 + r^e + r^{2e} \ldots + r^{(n-1)e} = 0$. Duas radices tales vt r et $\frac{1}{r} (= r^{n-1})$, aut generaliter r^e et r^{-e} *reciprocas* vocabimus; manifestum est, productum ex duobus factoribus simplicibus $x - r$ et $x - \frac{1}{r}$ fieri reale $= xx - 2x \cos \omega + 1$, ita vt angulus ω vel angulo $\frac{P}{n}$ vel alicui multiplo eius sit aequalis.

340. Quoniam itaque, vna radice ex Ω per r expressa, omnes radices aequ. $x^n - 1 = 0$ per potestates ipsius r exprimuntur, productum, e pluribus radicibus huius aequ. quomodocunque conflatum, per r^λ exhiberi poterit, ita vt λ sit vel 0, vel positiuus et $< n$. Designando itaque per $\varphi(t, u, v \ldots)$ functionem algebraicam rationalem integram indeterminatarum t, u, v etc., qualem per summam talium partium $ht^\alpha u^\beta v^\gamma \ldots$ exprimere licet: manifestum est, si pro t, u, v etc. quaedam e radicibus aequ. $x^n - 1 = 0$ substituantur, puta $t = a$, $u = b$, $v = c$ etc., $\varphi(a, b, c \ldots)$ sub formam $A + A'r + A''rr + A'''r^3 \ldots + A^v r^{n-1}$ reduci posse, ita vt coëfficientes A, A' etc. (e quibus etiam aliqui deesse adeo-

que $=$ o fieri possunt) sint quantitates determinatae, insuperque omnes hos coëfficientes integros fieri, si omnes coëfficientes determinati in $\phi\,(t, u, v\ldots)$, i. e. omnes h sint integri. Quodsi vero postea pro $t, u, v\ldots$ substituuntur $aa, bb, cc\ldots$ resp., quaeuis pars vt $ht^{\alpha}u^{\beta}v^{\gamma}\ldots$, quae antea reducebatur ad r^{σ}, nunc fiet $r^{2\sigma}$, vnde facile concluditur, fieri $\phi\,(aa, bb, cc\ldots) = A + A'rr + A''r^4 + A'''r^6 \ldots + A^{v}r^{2n-2}$. Perinde erit generaliter, pro valore quocunque integro ipsius λ, $\phi\,(a^{\lambda}, b^{\lambda}, c^{\lambda}\ldots) = A + A'r^{\lambda} + A''r^{2\lambda} \ldots + A^{v}r^{(n-1)\lambda}$, quae propositio maximi est momenti, fundamentumque disquisitionum sequentium constituit. — Hinc sequitur etiam $\phi\,(1, 1, 1\ldots) = \phi\,(a^{n}, b^{n}, c^{n}\ldots) = A + A' + A''\ldots + A^{v}$; nec non $\phi\,(a, b, c\ldots) + \phi\,(aa, bb, cc\ldots) + \phi\,(a^3, b^3, c^3\ldots)\ldots + \phi\,(a^{n}, b^{n}, c^{n}\ldots) = nA$, quae itaque summa semper fit integer per n diuisibilis, qnando omnes coëfficientes determinati in $\phi\,(t, u, v\ldots)$ sunt integri.

341. Theorema. *Si functio X per functionem inferioris gradus $P = x^{\lambda} + Ax^{\lambda-1} + Bx^{\lambda-2}\ldots + Kx + L$ est diuisibilis, coëfficientes $A, B\ldots L$ omnes integri esse nequeunt.*

Dem. Sit $X = PQ$, atque $\mathfrak{P}$ complexus radicum aequationis $\mathfrak{P} = 0$, $\mathfrak{Q}$ complexus radicum aequationis $\mathfrak{Q} = 0$, ita vt Ω constet ex $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ simul sumtis. Porro sit $\mathfrak{R}$ complexus radicum ipsis $\mathfrak{P}$ reciprocarum, $\mathfrak{S}$ complexus radicum ipsis $\mathfrak{Q}$ reciprocarum, sintque radices quae continentur in $\mathfrak{R}$ radices aequationis $R = 0$

(quam fieri $x^\lambda + \frac{K}{L} x^{\lambda-1} + \text{etc.} + \frac{A}{L} x + 1 = 0$ facile perspicitur), eaeque quae continentur in $\mathfrak{S}$ radices aequationis $S = 0$. Manifesto etiam radices $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{S}$ iunctae complexum Ω efficient, ac erit $RS = X$. Iam quatuor casus distinguimus.

I. Quando $\mathfrak{P}$ conuenit cum $\mathfrak{R}$ adeoque $P = R$. In hoc casu manifesto binae semper radices in $\mathfrak{P}$ reciprocae erunt, adeoque P productum ex $\frac{1}{2}\lambda$ factoribus talibus duplicibus $xx - 2x \cos\omega + 1$; quum talis factor sit $= (x - \cos\omega)^2 + \sin\omega^2$, facile perspicietur, P pro valore quocunque reali ipsius x necessario valorem realem obtinere. Sint aequationes, quarum radices sunt quadrata, cubi, biquadrata ... potestates $n - 1^{\text{tae}}$ radicum in $\mathfrak{P}$ resp. hae $P' = 0$, $P'' = 0$, $P''' = 0$, ... $P^\nu = 0$, sintque valores functionum $P, P', P'' \ldots P^\nu$, quos obtinent statuendo $x = 1$, resp. $p, p', p'' \ldots p^\nu$, tunc per ante dicta p erit quantitas positiua et prorsus simili ratione etiam p', p'' etc. positiuae erunt. Quum itaque p sit valor functionis $(1 - t)(1 - u)(1 - v)$ etc., quem obtinet ponendo pro t, u, v etc. radices in $\mathfrak{P}$; p' valor eiusdem, statuendo pro t, u, v etc. quadrata illarum radicum etc., insuperque valor pro $t = 1$, $u = 1$, $v = 1$ etc. manifesto fiat $= 0$: summa $p + p' + p'' \ldots + p^\nu$ erit integer per n diuisibilis. Praeterea facile perspicietur, productum $PP'P'' \ldots$ fieri $= X^\lambda$, adeoque $pp'p'' \ldots = n^\lambda$.

Iam si omnes coëfficientes in P rationales essent, omnes quoque in P', P'' etc. per art. 338