re multitudo omnium repraesentationum propriarum formae φ per f erit $= 48.2^{\mu-1} = 3.2^{\mu+3}$; multitudo autem discerptionum diuersarum in terna quadrata $= 2^{\mu-1}$.

Ex. Sit $\varphi = 19tt + 6tu + 41uu$, adeoque $M = 770$; hic quatuor valores sequentes expr. $\sqrt{-(19, -3, 41)}$ (mod. 770) considerare oportet (art. 283): $(39, 237)$, $(171, -27)$, $(269, -83)$, $(291, -127)$. Vt inueniantur repraesentationes ad valorem $(39, 237)$ pertinentes, primo eruitur forma ternaria $\begin{pmatrix} 19, & 41, & 2 \\ 3, & 6, & 3 \end{pmatrix} = g$, in quam per praecepta art. 272, 275 f transire inuenitur per substitutionem

$$\begin{matrix} 1, & -6, & -0 \\ -3, & -2, & -1 \\ -3, & -1, & -1 \end{matrix}$$

vnde habetur repraesentatio formae φ per f haec: $x = t - 6u$, $y = -3t - 2u$, $z = -3t - u$; repraesentationes 47 reliquas ad eundem valorem pertinentes, quae ex horum valorum permutatione signorumque conuersione oriuntur, breuitatis caussa non adscribimus. Omnes vero 48 repraesentationes eandem discerptionem formae φ in tria quadrata $tt - 12tu + 36uu$, $9tt + 12tu + 4uu$, $9tt + 6tu + uu$ producunt.

Prorsus simili modo valor $(171, -27)$ suppeditat discerptionem in quadrata $(3t + 5u)^2$, $(3t - 4u)^2$, tt; valor $(269, -83)$ hanc $(t + 6u)^2 + (3t + u)^2 + (3t - 2u)^2$; denique valor $(291, -127)$ hanc $(t + 3u)^2 + (3t + 4u)^2 + (3t - 4u)^2$; singulae hae decompositiones

48 repraesentationibus aequipollent. — Praeter has 192 repraesentationes autem, siue quatuor discerptiones, aliae non dabuntur, quum 770 per nullum quadratum diuisibilis sit, adeoque repraesentationes impropriae exstare non possint.

290. De formis determinantis -1 et -2, quae quibusdam exceptionibus obnoxiae erant, paucis seorsim agemus. Praemittimus obseruationem generalem, si φ, φ' sint formae binariae aequiualentes quaecunque, (Θ) transformatio data illius in hanc, ex combinatione repraesentationis cuiusuis formae φ per aliquam ternariam f cum substitutione (Θ) prodire repraesentationem formae φ' per f; porro ex repraesentationibus propriis ipsius φ hoc modo oriri repraesentationes proprias formae φ', e diuersis diuersas, denique e cunctis cunctas. Haec omnia per calculum facillime comprobantur. Quare vna formarum φ, φ' totidem modis per f repraesentari poterit ac altera.

I. Sit primo $\varphi = tt + uu$, atque φ' forma quaecunque alia binaria positiua det. -1, cui itaque φ aequiualebit; transeat φ in φ' per substitutionem $t = \alpha t' + \beta u'$, $u = \gamma t' + \delta u'$. Forma φ repraesentatur per ternariam $f = xx + yy + zz$ ponendo $x = t$, $y = u$, $z = 0$; permutando x, y, z hinc emergunt *sex* repraesentationes, et e singulis rursus quatuor, mutando signa ipsorum t, u, ita vt omnino 24 repraesentationes diuersae habeantur, quibus vnica discerptio in tria quadrata aequipollet et praeter quas alias dari non posse facile perspicitur. Hinc concluditur, etiam formam φ' vnico tantum modo in tria quadrata decomponi posse, puta in $(\alpha t' + \beta u')^2$, $(\gamma t' + \delta u')^2$ et 0, quae discerptio 24 repraesentationibus aequiualet.

II. Sit $\varphi = tt + 2uu$, φ' quaecunque alia forma binaria positiua det. — 2, in quam φ transeat per substitutionem $t = \alpha t' + \beta u'$, $u = \gamma t' + \delta u'$. Tunc simili modo vt in casu praec. concluditur, φ, et proin etiam φ', vnico tantum modo in tria quadrata discerpi posse, puta φ in $tt + uu + uu$, atque φ' in $(\alpha t' + \beta u')^2 + (\gamma t' + \delta u')^2 + (\gamma t' + \delta u')^2$; talem decompositionem 24 repraesentationibus aequipollere facile perspici potest.

Hinc colligitur, formas binarias determinantium — 1 et — 2 respectu multitudinis repraesentationum per ternariam $xx + yy + zz$ cum aliis formis binariis omnino conuenire; quum enim in vtroque casu fiat $\mu = 0$, formula in art. praec. IV. tradita vtique producit 24 repraesentationes. Ratio huius rei est, quod duae exceptiones, quibus tales formae obnoxiae erant, se mutuo compensant.

Theoriam generalem repraesentationum impropriarum in art. 284 explicatam ad formam $xx + yy + zz$ applicare, breuitatis gratia supersedemus.

291. Quaestio de inueniendis omnibus repraesentationibus propriis *numeri* positiui dati M per formam $xx + yy + zz$ primo per art. 281.