teram $\mu' m + \nu' n = 1$ per μ, et subtrahendo fit $\mu' - \mu = n(\mu'\nu - \mu\nu')$ similiterque multiplicando illam per ν' hanc per ν fit subtrahendo $\nu' - \nu = m(\mu\nu' - \mu'\nu)$. Hinc statim prodit $v' - v = (\mu\nu' - \mu\nu')(amm + 2bmn + cnn) = (\mu'\nu - \mu\nu')M$, siue $v' \equiv v$ (mod. M). Quomodocunque igitur μ, ν determinentur, formula $\mu(mb + nc) - \nu(ma + nb)$ valores *diuersos* (i. e. incongruos) expressionis $\surd(bb - ac)$ (mod. M) dare nequit. Si itaque v est valor quicunque illius formulae: repraesentationem numeri M per formam $axx + 2bxy + cyy$ eam vbi $x = m$, $y = n$, *pertinere* dicemus *ad valorem v, expressionis* $\surd(bb - ac)$ (*mod.* M). Ceterum facile ostendi potest, si valor formulae illius aliquis sit v atque $v' \equiv v$ (mod. M), loco numerorum μ, ν, qui dant v, alios μ', ν' accipi posse, qui dent v'. Scilicet faciendo $\mu' = \mu + \frac{n(v' - v)}{M}$, $\nu' = \nu - \frac{m(v' - v)}{M}$, fiet $\mu' m + \nu' n = \mu m + \nu n = 1$, valor autem formulae ex μ', ν' prodiens superabit valorem ex μ, ν prodeuntem quantitate $(\mu'\nu - \mu\nu')M$, quae fit $= (\mu m + \nu n)(v' - v) = v' - v$, siue valor ille erit $= v'$.

156 Si duae repraesentiones eiusdem numeri M per eandem formam (a, b, c) habentur, in quibus indeterminatae valores inter se primos habent: hae vel ad eundem valorem expr. $\surd(bb - ac)$ (mod. M) pertinere possunt vel ad diuersos. Sit $M = amm + 2bmn + cnn = am'm' + 2bm'n' + cn'n'$, atque $\mu m + \nu n = 1$, $\mu m' + \nu' n' = 1$, patetque si fuerit

$\mu(mb+nc)-\nu(ma+nb) \equiv \mu'(m'b+n'c)-\nu'(m'a+n'b)$ (mod, M), congruentiam semper manere, quicunque alii valores idonei pro $\mu, \nu; \mu', \nu'$ accipiantur, in quo casu vtramque repraesentationem ad *eundem* valorem expr. $\sqrt{(bb-ac)}$ (mod. M) pertinere dicemus; si vero congruentia pro vllis valoribus ipsorum $\mu, \nu; \mu', \nu'$ locum non habet, pro nullis locum habebit, repraesentationesque ad valores *diuersos* pertinebunt. Si vero $\mu(mb+nc)-\nu(ma+nb) \equiv -(\mu'(m'b+n'c)-\nu'(m'a+n'b))$: repraesentationes ad valores *oppositos* expr. $\sqrt{(bb-ac)}$ pertinere dicentur. Omnibus hisce denominationibus etiam vtemur, quando de pluribus repraesentationibus eiusdem numeri per formas *diuersas*, sed quae eundem determinantem habent, agitur.

Ex. Sit forma proposita haec $(3, 7, -8)$ cuius determinans $= 73$. Per hanc formam habentur repraesentationes numeri 57 hae: $3.13^2+14.13.25-8.25^2$; $3.5^2+14.5.9-8.9^2$. Pro prima poni potest $\mu = 2$, $\nu = -1$, vnde prodit valor expr. $\sqrt{73}$ (mod. 57) ad quam repr. pertinet $= 2(13.7-25.8)+(13.3+25.7) = -4$. Simili modo repraesentatio secunda pertinere inuenitur, faciendo $\mu = 2$, $\nu = -1$, ad valorem $+4$. Quare ambae repraesentationes ad valores oppositos pertinent.

Antequam vlterius progredimur, obseruamus, formas quarum determinans $= 0$ ab inuestigationibus sequentibus prorsus exclusas esse, quippe quae theorematum concinnitatem tantummodo turbarent, adeoque tractationem peculiarem postulent.

157. Si forma, F, cuius indeterminatae sunt x, y in aliam F', cuius indeterminatae sunt x', y' per substitutiones tales $x = \alpha x' + \beta y'$, $x = \gamma x' + \delta y'$ transmutari potest, ita vt α, β, γ, δ sint integri: priorem *implicare* posteriorem, siue posteriorem *sub priori contentam esse* dicemus. Sit forma F haec $axx + 2bxy + cyy$, forma F' vero haec $a'x'x' + 2b'x'y' + c'y'y'$, habebunturque sequentes tres aequationes:

$$a' = a\alpha\alpha + 2b\alpha\gamma + c\gamma\gamma$$
$$b' = a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta$$
$$c' = a\beta\beta + 2b\beta\delta + c\delta\delta.$$

Multiplicando aequationem secundam per se ipsam, primam per tertiam, et subtrahendo fit deletis partibus se destruentibus $b'b' - a'c' = (bb - ac)(\alpha\delta - \beta\gamma)^2$. Vnde sequitur determinantem formae F' per determinantem formae F diuisibilem et quotientem esse quadratum; manifesto igitur hi determinantes *eadem signa* habebunt. Quodsi itaque insuper forma F' per similem substitutionem in formam F transmutari potest, *i. e.* si tum F' sub F, tum F sub F' contenta est, formarum determinantes erunt aequales *) atque $(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = 1$. In hoc casu formas *aequiualentes* dicemus. Quare ad formarum aequiualentiam aequalitas determinantium est conditio necessaria, licet illa ex hac sola minime sequatur. —

*) Manifestum est ex analysi praecedente hanc propositionem etiam ad formas quarum determinans $= 0$, patere. Sed aequatio $(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = 1$ ad hunc casum non est extendenda.