$\frac{A}{t}$, atque Axis parabolæ parallelus eſt alteri Aſymtotæ rectæ. Cap. IX.

235. Sit etiam $\gamma = 0$, ut ſit hæc æquatio

$$\alpha u^3 + \delta uu + \epsilon t + \zeta u + \eta = 0,$$

ubi ϵ evaneſcere non poteſt, niſi ſimul Linea ceſſet eſſe Curva. Facto autem t infinito, neceſſario u debet eſſe infinita, unde fit $\alpha u^3 + \epsilon t = 0$, quæ præbet ſpeciem ultimam.

16.

Decimasexta Species unam habet Aſymtotam parabolicam ſpeciei $u^3 = At$.

236. Omnes ergo Lineas tertii ordinis reduximus ad *ſedeciem Species*, in quibus propterea omnes illæ *Species ſeptuaginta duæ*, in quas Newtonus Lineas tertii ordinis diviſit, continentur. Quod vero inter hanc noſtram diviſionem ac *Newtonianam* tantum intercedat diſcrimen mirum non eſt; hic enim tantum ex ramorum in infinitum excurrentium indole Specierum diverſitatem deſumſimus, cum Newtonus quoque ad ſtatum Curvarum in ſpatio finito ſpectaſſet, atque ex hujus varietate diverſas Species conſtituiſſet. Quanquam autem hæc diviſionis ratio arbitraria videtur, tamen Newtonus ſuam tandem rationem ſequens multo plures Species producere potuiſſet, cum equidem mea methodo utens neque plures neque pauciores Species eruere queam.

237. Quo igitur natura & complexus cujuſque Speciei melius perſpiciatur, æquationem generalem pro qualibet Specie exhibebo, idque in ſimpliciſſima forma, quæ ſalva univerſitate locum habere poteſt. Pro unaquaque vero ſimul Species *Newtonianas* eo pertinentes recenſebo.

Species Prima.

$$y(xx - 2mxy + nnyy) + ayy + bx + cy + d = 0,$$

exiſtente mm majore quam nn & niſi ſi erit $b = 0$.

Huc pertinent Newtoni ſpecies, 33, 34, 35, 36, 37, 38.

SPECIES SECUNDA.

$$y(xx - 2mxy + nnyy) + ayy + cy + d = 0:$$
existente mm minore quam nn.

Huc pertinent NEWTONI species, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45.

SPECIES TERTIA.

$$y(x - my)(x - ny) + ayy + bx + cy + d = 0,$$
ubi nec $b = 0$, nec $mb + c + \frac{aa}{(m - n)^2} = 0$, nec $nb + c + \frac{aa}{(m - n)^2} = 0$, neque $m = n$.

Huc pertinent NEWTONI Species, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; item 24, 25, 26, 27, si $a = 0$.

SPECIES QUARTA.

$$y(x - my)(x - ny) + ayy + cy + d = 0;$$
ubi nec $c + \frac{aa}{(m - n)^2} = 0$, nec $m = n$.

Huc pertinent NEWTONI Species 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21; item, si $a = 0$, hæ 28, 29, 30, 31.

SPECIES QUINTA.

$$y(x - my)(x - ny) + ayy - \frac{aay}{(m - n)^2} + d = 0,$$
non existente $m = n$.

Huc pertinent NEWTONI Species, 22, 23, & 32.

SPECIES SEXTA.

$$yy(x - my) + axx + bx + cy + d = 0;$$
si neque $a = 0$, neque $2m^3 aa - mb - c = 0$.

Huc pertinent NEWTONI Species, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52.

SPECIES SEPTIMA.

$$yy(x - my) + axx + bx + m(2m^2a^2 - b)y + d = 0;$$
non existente $a = 0$.

Huc pertinent NEWTONI Species, 53, 54, 55, 56.

SPECIES OCTAVA.

$$yy(x - my) + bbx + cy + d = 0;$$
non existente $c = - mbb$ nec $b = 0$.

Huc pertinent NEWTONI Species, 61, & 62.

SPECIES NONA.

$$yy(x - my) + bbx - mbby + d = 0;$$
non existente $b = 0$.

Huc pertinet NEWTONI Species, 63.

SPECIES DECIMA.

$$yy(x - my) - bbx + cy + d = 0;$$
non existente $c = mbb$, nec $b = 0$.

Huc pertinent NEWTONI Species, 57, 58, 59.

SPECIES UNDECIMA.

$$yy(x - my) - bbx + mbby + d = 0;$$
non existente $b = 0$.

Huc pertinet NEWTONI Species, 60.

SPECIES DUODECIMA.

$$yy(x - my) + cy + d = 0;$$
non existente $c = 0$.

Huc pertinet NEWTONI Species, 64.

SPECIES TERTIA-DECIMA.

$$yy(x - my) + d = 0.$$

Huc pertinet NEWTONI Species, *65*.

SPECIES QUARTA-DECIMA.

$$y^3 + axx + bxy + cy + d = 0:$$

non existente $a = 0$.

Huc pertinet NEWTONI Species, *67, 68, 69, 70, 71*.

SPECIES QUINTA-DECIMA.

$$y^3 + bxy + cx + d = 0;$$

non existente $b = 0$.

Huc pertinet NEWTONI Species, *66*.

SPECIES SEXTA-DECIMA.

$$y^3 + ay + bx = 0;$$

non existente $b = 0$.

Huc pertinet NEWTONI Species, *72*.

238. Species autem hæ plerumque tam late patent, ut ſub unaquaque varietates ſatis notabiles contineantur; ſi quidem ad formam, quam Curvæ habent in ſpatio finito, reſpiciamus. Hancque ob cauſam NEWTONUS numerum Specierum multiplicavit, ut eas Curvas, quæ in ſpatio finito notabiliter diſcrepant, a ſe invicem ſecerneret. Expediet ergo has, quas *Species* nominavimus, *Genera* appellare, atque varietates, quæ ſub unoquoque deprehenduntur, ad *Species* referre. Imprimis autem hoc erit tenendum, ſi quis Lineas quarti altiorisve ordinis ſimili modo ſubdividere voluerit; ibi enim multo major varietas in quavis Specie ſic inventa locum habebit.

CAPUT

CAPUT X.

De præcipuis Linearum tertii ordinis proprietatibus.

239. Quemadmodum ſupra Linearum ſecundi ordinis proprietates præcipuas ex æquatione generali deduximus, ita etiam Linearum tertii ordinis præcipuæ proprietates ex æquatione generali cognoſci poterunt: ſimilique modo licebit Linearum quarti altiorisſve gradus proprietates ex æquatione concludere. Quam ob rem conſideremus æquationem generaliſſimam pro Lineis tertii ordinis, quæ eſt

$$\alpha y^3 + \beta y^2 x + \gamma yxx + \delta x^3 + \varepsilon yy + \zeta yx + \eta xx + \theta y + \iota x + \varkappa = 0,$$

quæ exprimet naturam Lineæ tertii ordinis cujuſvis inter Coordinatas x & y ad quemvis angulum inclinatas, & recta quacunque pro Axe aſſumta.

240. Niſi igitur α ſit $= 0$, unicuique Abſciſſæ x vel una reſpondebit Applicata realis, vel tres. Ponamus dari tres Applicatas reales; atque manifeſtum eſt earum relationem per æquationem definiri poſſe. Poſita itaque $\alpha = 1$, iſtiuſmodi erit æquatio,

$$y^3 + (\beta x + \varepsilon)yy + (\gamma xx + \zeta x + \theta)y + \delta x^3 + \eta xx + \iota x + \varkappa = 0:$$

atque ſumma iſtarum trium Applicatarum eidem Abſciſſæ x reſpondentium, erit $= -\beta x - \varepsilon$; ſumma trium rectangulorum ex binis Applicatis formatorum erit $= \gamma xx + \zeta x + \theta$; ac denique productum omnium ſeu parallelepipedum ex illis formatum erit $= -\delta x^3 - \eta xx - \iota x - \varkappa = 0$. Si duæ Applicatæ eſſent imaginariæ, hæc quidem eadem valerent, at ad Linearum figuram accommodari non poſſent, quia ex ea neque

neque summa neque rectangulum duarum Applicatarum imaginariarum intelligi potest.

TAB. XII. Fig. 44. 241. Sit igitur Linea quæcunque tertii ordinis ad Axem AZ relata, ad quem sub dato angulo applicatæ sint Ordinatæ LMN, lmn Curvam secantes in tribus punctis. Posita ergo Abscissa $AP = x$, Applicata y triplicem habebit valorem PL, PM, & $-PN$: unde erit $PL + PM - PN = -6x - \varepsilon$. Quare, si capiatur $PO = z = \frac{PL + PM - PN}{3}$, punctum O ita erit in medio situm, ut sit $LO = MO + NO$. Cum igitur sit $z = -\frac{6x - \varepsilon}{3}$, hoc punctum O situm erit in Linea recta OZ, quæ recta propterea omnes Ordinatas lmn ipsi LMN parallelas ita secabit in o, ut sit $lo + mo = no$; quæ proprietas analoga est proprietati Diametrorum, qua Lineæ secundi ordinis sunt præditæ. Quod si ergo duæ Ordinatæ parallelæ & Curvam in tribus punctis secantes ita secentur in punctis O & o, ut binæ Applicatæ ad unam partem jacentes simul sumtæ æquales sint tertiæ ad partem alteram sitæ, recta per hæc puncta O & o ducta omnes reliquas Ordinatas illis parallelas similiter secabit, eritque quasi Diameter Lineæ tertii ordinis.

242. Quoniam in Lineis secundi ordinis omnes Diametri se mutuo in eodem puncto intersecant, videamus quomodo plures hujusmodi Diametri Linearum tertii ordinis inter se sint comparatæ. Concipiamus ergo ad eundem Axem AP sub alio quovis angulo Applicatas; sitque Abscissa $= t$ & Applicata $= u$; erit $y = nu$ & $x = t - mu$, qui valores in æquatione generali

$$y^3 + 6y^2x + \gamma yxx + \delta x^3 + \varepsilon yy + \zeta yx + \eta xx + \theta y + \iota x + \varkappa = 0,$$

substituti hanc dabunt æquationem