formis, videatur recta CM Curvæ in unico puncto M occurrere, quia angulo $ACM = \phi$ unicus valor rectæ CM respondet. Verum, si angulus ϕ duobus rectis augeatur, eadem manebit rectæ CM per punctum C ductæ positio, hoc tantum discrimine quod in plagam oppositam dirigatur; sicque alia ejusdem rectæ CM intersectio cum Curva prodibit, etiamsi z æquetur Functioni uniformi sinus anguli ϕ. Scilicet, sit P Functio illa sinus anguli ϕ, ita ut sit $z = P$, unde oriatur punctum Curvæ M; augeatur nunc angulus ϕ duobus rectis, seu ejus sinus statuatur negativus, quo facto abeat P in Q, ut sit $z = Q$; hinc ergo prodibit nova intersectio ejusdem rectæ CM productæ cum Curva m, sumendo $Cm = Q$.

CAP. XVII.

TAB. XX. Fig. 82.

394. Quamvis ergo P sit Functio uniformis sinus anguli ϕ, tamen recta CM, sub dato angulo $ACM = \phi$ per punctum C ducta, Curvæ in duobus punctis M & m occurret, nisi sit $Q = -P$. Quod si ergo unaquæque recta CM Curvæ in unico tantum puncto occurrere debeat, quantitatem illam P Functionem esse oportet imparem sinus anguli ϕ. Hoc idem autem usuvenit, si P fuerit Functio impar cosinus anguli ϕ. Quam ob rem omnes Curvæ, quas singulæ rectæ ex C eductæ in unico puncto intersecant, continebuntur in hac æquatione $z = P$; si quidem P fuerit Functio impar cum sinus tum cosinus anguli $ACM = \phi$.

395. Cum igitur Curvæ, quæ a rectis ex puncto C ductis in unico puncto secantur, contineantur in æquatione $z = P$, si P fuerit Functio impar sinus & cosinus anguli ϕ, seu ejusmodi Functio, quæ valorem negativum induat, si tam sinus quam cosinus anguli ϕ statuatur negativus, hinc facile pro hujusmodi Curvis æquatio inter Coordinatas orthogonales reperiri poterit. Demisso enim ex puncto M in Axem CA perpendiculo MP, si dicatur $CP = x$, $PM = y$, erit $\frac{y}{z} = \sin.\phi$ & $\frac{x}{z} = \cos.\phi$: unde, si P fuerit Functio impar ipsarum $\frac{x}{z}$ & $\frac{y}{z}$, omnes istæ Curvæ continebuntur in hac

TAB. XX. Fig. 81.

LIB. II. æquatione $z = P$. A simplicissimis ergo incipiendo, erit

$$z = \frac{\alpha x}{z} + \frac{\beta y}{z} + \frac{\gamma z}{x} + \frac{\delta z}{y};$$

atque ad altiores potestates ascendendo, erit

$$z = \frac{\alpha x}{z} + \frac{\beta y}{z} + \frac{\gamma z}{x} + \frac{\delta z}{y} + \frac{\varepsilon x^3}{z^3} + \frac{\zeta x^2 y}{z^3} + \frac{\eta x y^2}{z^3} + \frac{\theta y^3}{z^3} + \frac{\iota x x}{y z} + \frac{\varkappa y y}{x z} + \frac{\lambda y z}{x x} + \&c.$$

396. Si hæc æquatio per z dividatur, ubique pares tantum ipsius z occurrent potestates: ideoque, cum sit $z = \surd(xx + yy)$, eliminando z nulla irrationalitas in æquatione remanebit, prodibitque æquatio rationalis inter x & y. Æquatio ergo generalis ita erit comparata, ut unitas, seu quantitas constans, æquetur Functioni -1 dimensionum ipsarum x & y. Cujusmodi Functio si fuerit P, erit $C = P$; ideoque $\frac{1}{C} = \frac{1}{P}$; at $\frac{1}{P}$ erat Functio unius dimensionis ipsarum x & y; unde, si Functio quæcunque unius dimensionis ipsarum x & y æquetur constanti, æquatio erit pro Curva, quam rectæ per punctum C eductæ in unico puncto intersecant.

397. Sit P Functio n dimensionum ipsarum x & y; & Q Functio $n+1$ dimensionum; erit $\frac{Q}{P}$ Functio unius dimensionis: ideoque omnes Curvæ, quas hic contemplamur, continebuntur in æquatione $\frac{Q}{P} = c$, seu $Q = cP$. Denotante ergo n numerum quemcunque, æquatio generalis pro his Curvis erit

$$\alpha x^{n+1} + \beta x^{n} y + \gamma x^{n-1} y^2 + \delta x^{n-2} y^3 + \varepsilon x^{n-3} y^4 + \&c.$$
$$= c\,(A x^{n} + B x^{n-1} y + C x^{n-2} y^2 + D x^{n-3} y^3 + \&c.)$$

Ex qua Lineæ singulorum ordinum, quæ a rectis ex puncto C eductis

eductis in unico tantum puncto secantur in sequentibus æquationibus continebuntur.

I.

$$\alpha x + \beta y = c$$

II.

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma yy = c(Ax + By)$$

III.

$$\alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma x y^2 + \delta y^3 = c(Ax^2 + Bxy + Cyy)$$

IV.

$$\alpha x^4 + \beta x^3 y + \gamma x^2 y^2 + \delta x y^3 + \varepsilon y^4 = c(Ax^3 + Bx^2 y + Cxy^2 + Dy^3)$$

&c.

398. Primum ergo Linea recta satisfacit, quam utique constat ab aliis Lineis rectis per datum punctum ductis non nisi in uno puncto secari posse. Secunda æquatio est pro Sectionibus conicis generalis, dummodo Sectio conica per ipsum punctum C transeat, quæ intersectio, cum omnibus rectis ex C eductis communis sit, non computatur; quoniam ergo Sectiones conicæ a recta quacunque nonnisi in duobus punctis secari possunt, omnis recta per punctum C in ipsa Curva utcunque sumtum transiens unicam tantum præbebit intersectionem. Lineæ autem curvæ sequentium ordinum omnes per ipsum punctum C transeunt, quæ intersectio omnibus rectis per C ductis communis pariter non computatur. Atque idcirco ex altioribus ordinibus in æquationibus exhibitis eæ tantum continentur, quas rectæ per C ductæ in unico puncto intersecant. Sic igitur omnes enumeravimus Curvas algebraïcas, quæ a rectis per datum punctum C ductis nonnisi in unico puncto trajiciuntur.

399. Progrediamur jam ad eas Curvas investigandas quas singulæ rectæ per punctum C ductæ vel in duobus punctis intersecant, vel nusquam; si quidem radices æquationis duplicem intersectionem indicantis fiant imaginariæ. Cum igitur pro quovis angulo $ACM = \phi$, recta $CM = z$ duplicem sortiatur valorem, ea per æquationem quadraticam definietur. Sit

itaque

LIB. II. itaque $zz - Pz + Q = 0$: ubi P & Q sint Functiones anguli ϕ seu ejus sinus cosinusve. Quoniam vero recta CM Curvam nonnisi in duobus punctis M & N secare debet, non solum P & Q Functiones uniformes anguli ϕ esse oportet, sed etiam aucto angulo ϕ duobus rectis nullæ novæ intersectiones oriri debent: id quod evenit si P fuerit Functio impar sinus & cosinus anguli ϕ, ita ut valorem induat negativum, si sinus & cosinus negative accipiantur: Q autem esse debet Functio par ejusdem sinus & cosinus.

400. Positis autem Coordinatis orthogonalibus $CP = x$, & $PM = y$; erit $\frac{y}{z} = \sin.\phi$, & $\frac{x}{z} = \cos.\phi$; ideoque P debebit esse Functio impar ipsarum $\frac{x}{z}$ & $\frac{y}{z}$; & Q Functio par ipsarum $\frac{x}{z}$ & $\frac{y}{z}$. Ex his colligitur fore $\frac{P}{z}$ Functio rationalis ipsarum x & y, atque adeo Functio homogenea -1 dimensionum. Simili modo erit $\frac{Q}{zz}$ Functio rationalis ipsarum x & y homogenea -2 dimensionum. Quod si ergo fuerit L Functio homogenea $(n+2)$ dimensionum, M Functio homogenea $(n+1)$ dimensionum, atque N Functio homogenea n dimensionum quæcunque ipsarum x & y, fractio $\frac{M}{L}$ exhibebit Functionem convenientem pro $\frac{P}{z}$, & $\frac{N}{L}$ Functionem convenientem pro $\frac{Q}{zz}$. Quare, cum sit $zz - Pz + Q = 0$, erit $1 - \frac{P}{z} + \frac{Q}{zz} = 0$: unde æquatio generalis pro Curvis, quæ a rectis per punctum C ductis in duobus punctis secantur, erit $1 - \frac{M}{L} + \frac{N}{L} = 0$, seu $L - M + N = 0$; ubi est $P = \frac{Mz}{L}$ & $Q = \frac{Nzz}{L} = \frac{N(xx+yy)}{L}$; eritque adeo P Functio irrationalis ipsarum x & y, ob $z = \sqrt{(xx+yy)}$, & Q est Functio rationalis nullius dimensionis.

401. Hinc

401. Hinc jam facile erit ex quovis Linearum ordine eas exhibere, quæ a rectis per datum punctum C ductis in duobus punctis vel nusquam intersecentur. Pro secundo scilicet ordine fiat $n = 0$, ac prodibit æquatio generalissima Sectionum conicarum.

$$\alpha xx + \beta xy + \gamma yy - \delta x - \varepsilon y + \zeta = 0.$$

Puncto ergo C sumto ubicunque, omnis recta per id ducta Sectionem conicam vel in duobus punctis vel nusquam intersecabit. Interim tamen fieri potest, ut unaquæpiam recta Curvam in uno tantum puncto intersecet; quod, cum inter infinitas illas rectas per C ductas vel uni vel duabus tantum usuveniat, hac exceptio nullius erit momenti: quin etiam ita hoc paradoxon explicari potest, ut altera intersectio in infinitum abeat; quam ob causam ista exceptio nostro asserto nullam vim inferre censenda est.

402. Quo autem pateat quibus casibus ista exceptio locum habeat, æquationem inter x & y reducamus ad æquationem inter z & angulum $ACM = \phi$; quæ, ob $y = z.\,\mathit{fin}.\,\phi$, & $x = z.\,\mathit{cof}.\,\phi$, abibit in hanc

$$z^2(\alpha(\mathit{cof}.\phi)^2 + \beta.\mathit{fin}.\phi.\mathit{cof}.\phi + \gamma(\mathit{fin}.\phi)^2) - z(\delta.\mathit{cof}.\phi + \varepsilon.\mathit{fin}.\phi) + \zeta = 0:$$

ex qua patet, si fuerit coëfficiens ipsius z^2 æqualis nihilo, unicam tantum intersectionem locum habere; quod ergo evenit si fuerit $\alpha + \beta.\,\mathit{tang}.\,\phi + \gamma(\mathit{tang}.\,\phi)^2 = 0$. Quod si ergo hæc æquatio duas habeat radices reales, duobus casibus recta per C educta Curvam in unico tantum puncto secabit. Quoniam vero ejusdem æquationis radices indicant Asymtotas Curvæ, perspicuum est Hyperbolas a rectis alteri Asymtotæ parallelis in unico tantum puncto secari, cujusmodi rectæ per punctum C transeuntes duæ tantum dantur. In Parabola vero unica recta Axi parallela hanc exceptionem patietur. Verum si Sectio conica fuerit Ellipsis, ubicunque assumatur punctum