Appunti del corso di Calcolo

per ripetere un po'

Matteo Scarpa

20 novembre 2020

pdf perchè universale. In caso di errori segnalarli a *mscarpa@dsi.uvine.it* o mandarmi un mp. Si ringrazia Ceasar per il sostegno e le correzioni e PiGreco (il gatto in copertina) per i momenti di distrazione.

Indice

1 Dato per scontato anche se mai imparato

Questa sezione è dedicata a chi ha bisogno di un ripasso di elementi non spiegati nel corso ma comunque necessari per gli argomenti del corso.

1.1 Disequazioni

Queste sono le formule per dire quando $y = ax^2+bx+c$ con $a > 0$ è positivo. Le formule per $a < 0$ si ricavano moltiplicando per -1 le sequenti formule:

$$\begin{aligned} \Delta > 0 \quad \text{f}(x) \quad x < x' \quad &\cup\, x > x'' \\ \Delta = 0 \quad &\forall x \in \text{Dominio} \\ \Delta > 0 \quad &\forall x \in \text{Dominio} \end{aligned}$$

1.2 Esponenziale e logaritmi

Si può vedere dalla figura che a^x è decrescente se $0 < a < 1$ ed è crescente se $a > 1$. Se $a = 1$ il grafico è quello della retta $y = 1$. La funzione esponenziale f: $x \rightarrow a^x$ è monotona quindi invertibile. Infatti la sua inversa è la funzione logaritmo in base a di x e si indica con f$^-$1 : $x \rightarrow \lg_a x$. Il logaritmo in base a di x è l'esponente di a che serve per ottenere x.

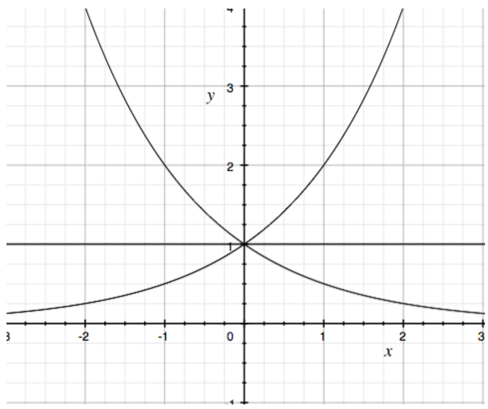

Figura 1: Funzioni esponenziali con $a > 1$, $a = 1$ e $a < 1$

NB:

$$\lg_a 1 = 0 \tag{1}$$

$$\lg_a a = 1 \tag{2}$$

$$\lg_a(xy) = \lg_a x + \lg_a y \tag{3}$$

$$\lg_a(\frac{x}{y} = \lg_a x - \lg_a y \tag{4}$$

$$\lg_b x = \frac{\lg_a x}{\lg_a b} \tag{5}$$

1.3 Trigonometria

La trigonometria si basa tutto sul circolo goniometrico, circonferenza di raggio unitario (fig 1.2) su cui si disegnano gli angoli con cui si lavora. La trigonometria usa come misura degli angoli i *radianti* ovvero la misura dell'angolo che sottende un arco di circonferenza uguale al raggio. Per convertire dai gradi basta ricorrere alla seguente proporzione:

$$\text{gradi} : 360 = \text{radianti} : 2\pi$$

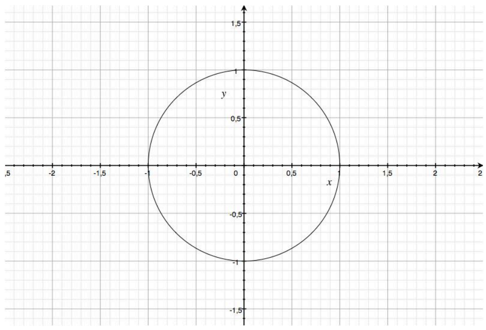

Figura 2: Circolo goniometrico

La tabella mostra gli angoli notevoli in gradi e radianti.

Gradi	*Radianti*
30	$\frac{\pi}{6}$
60	$\frac{\pi}{3}$
45	$\frac{\pi}{4}$
90	$\frac{\pi}{2}$
180	π
270	$\frac{3}{2}\pi$
360	2π

Seno e Coseno Dato l'angolo orientato $\alpha = \widehat{aop}$ si definiscono sin e cos di α rispettivamente come l'ordinata y e l'ascissa x del punto $\mathbb{P}$:

$$\sin\alpha = yp \text{ e } \cos\alpha = xp$$

NB:

$$\sin(\frac{\pi}{2}) - \alpha = \cos\alpha \tag{6}$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha \tag{7}$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos\alpha \tag{8}$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha \tag{9}$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha \tag{10}$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha \tag{11}$$

Altre formule utili della trigonometria:

Formula 1.3.1 (Ugualianza fondamentale).

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Formula 1.3.2 (Addizione-sottrazione seno).

$$sen(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

Formula 1.3.3 (Addizione-sottazione coseno).

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \pm \sin x \sin y$$

Formula 1.3.4 (Duplicazione seno).

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

Formula 1.3.5 (Duplicazione coseno).

$$\cos^2 x - \sin^2 x$$

Formula 1.3.6 (Prostaferesi seno).

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin(\frac{x \pm y}{2}) \cos(\frac{x \pm y}{2})$$

Formula 1.3.7 (Prostaferesi coseno).

$$\cos x + \cos y = +2 \cos(\frac{x+y}{2}) \cos(\frac{x-y}{2}) \qquad \cos x - \cos y = -2 \sin(\frac{x+y}{2}) \sin(\frac{x-y}{2})$$

Tangente La *tangente* non è altro che $\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$. Le formule riportate qui sopra permettono di ricavare le formule equivalenti per la funzione tangente.

Altre funzioni trigonometriche Sono *secante, cosecante* e *cotangente.* Esse sono delle funzioni derivate da quelle viste fin ora:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \tag{12}$$

$$\cos x = \frac{1}{\sin x} \tag{13}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} \tag{14}$$

$$\tag{15}$$

2 Cenni di insiemistica

Le nozioni di insieme di elementi di un insieme e di appartenenza vanno assunte come nozioni primitive.

2.1 Notazioni

$a \in A$ Significa che è un elemento dell'insieme A
$a \notin A$ Significa che non è un elemento dell'insieme A
Un insieme può essere definito espicitamente elencandone tutti i suoi elementi (ovviamente solo se è un insieme finito, cioè formato da un numero finito di elementi) oppure dando una legge oggettiva che permetta di identificare in maniera certa tutti i suoi elementi.

Esempi $A = \{1, 3, 7\}$ Rappresenta l'insieme i cui elementi sono i numeri 1,3,7
$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ Rappresenta l'insieme i cui elementi sono i numeri 2,4,6,8,10. Tale insieme potrebbe essere individuato in altro modo in base alla seguente legge:
A è l'insieme formato da i numeri pari positivi minori o uguali a 10
$A = \{\forall n \in N | n \geq 100\}$ Si legge:
A è l'insieme di tutti i numeri interi (come vedremo più avanti l'insieme dei numeri naturali si indica con $\mathcal{N}$)

2.2 Insiemi

Sottoinsiemi impropri o sottoinsiemi L'insieme A si dice sottoinsieme di B (e si scrive $A \subseteq B$) se ogni elemento di A è anche elemento di B.

Sottoinsiemi Propri A si dice sottoinsieme proprio di B (e si scrive $A \subset B$) se ogni elemento di A appartiene a B e inoltre vi è almeno un elemento di B che non appartiene ad A

2.3 Operazioni sugli insiemi

Unione Dati due insiemi A e B si definisce la loro unione (che si scrive $C = A \cup B$) l'insieme C formato da tutti gli elementi di A e da tutti gli elenemti di B (copiati una sola volta anche se presenti sia in A che in B).

Esempio

$$A = \{2, -5, 4\}\, B = \{0, 3, -5\} \Rightarrow A \cup B = \{2, -5, 4, 0, 3\}$$

In maniera ovvia le operazioni di unione e di intersezione possono estendersi ad un numero qualsiasi di insiemi.

Complemento di A in B Si indica con B/A ed è definito come l'insieme di tutti gli elementi di B che non appartengono ad A.

Esempio Riferendosi agli esempi precedenti si ha: $B/A = \{0,3\}$ $A/B = \{2,4\}$

Proprietà delle operazioni sugli insiemi

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap B = B \cap A$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$C/A \cup B = (C/A) \cap (C/B)$$
$$C/A \cap B = (C/A) \cup (C/B)$$

Due insiemi si dicono uguali se contengono gli stessi elementi. In tal caso valgono contemporaneamente $A \subseteq B$ e $A \supseteq B$
L'insieme che non contiene alcun elemento si chiama insieme vuoto ϕ Due insiemisi dicono disgiunti se la loro intersezione è l'insieme vuoto, cioè se:

$$A \cap B = \phi$$

Valgono le seguenti proprietà:

$$A \cup \phi = A \quad A \cap \phi = \phi \quad A/\phi = A$$

Prodotto Cartesiano Dati due insiemi A e B chiamasi prodotto cartesiano (e si indica con AxB) l'insieme delle coppie ordinate (a,b) con $a \in A$ e $b \in B$

Insiemi numerici

I numeri naturali $\mathbb{N}$ L'insieme $\mathbb{N}$ indica l'insieme dei numeri naturali. È chiuso rispetto alla somma e al prodotto; questo vuole dire che il risultato di una somma o di un prodotto è sempre in $\mathbb{N}$.

I numeri interi con segno $\mathbb{Z}$ L'insieme $\mathbb{Z}$ indica l'insieme dei numeri interi relativi con segno. È chiuso per le operazioni di somma, prodotto e sottrazione.

Insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ L'insieme $\mathbb{Q}$ indica l'insieme dei numeri razionali. È chiso rispetto somma, prodotto, sottrazione e divisione diversa da 0. I suoi numeri possono essere rappresentati come coppie di numeri interi in cui il primo è il numeratore e il secondo è il denominatore (n, d). Due numeri razionali $\frac{a}{b}$ e $\frac{a'}{b'}$ sono equivalenti solo se $ab' = a'b$. I numeri razionali possono anche rappresentare decimali finiti o periodici quali $\frac{2}{3} = 0,\bar{6}$ oppure $\frac{3}{4} = 0,75$

Insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ L'insieme $\mathbb{R}$ indica l'insieme dei numeri reali. Può essere espresso attraverso il concetto di limite o con il concetto di elemento di separazione di due classi contigue di numeri razionali.
Per esempio $\sqrt[2]{2}$ può essere l'elemento di separazione fra la classe formata da tutti i numeri negativi, lo zero e tutti i numeri positiviil cui quadrato è pari o superiore a 2 e la classe formata da tutti i numeri il cui quadrato è superiore a 2.In oltre gode della proprietà di completezza ovvero che:

$$a \leq \delta \leq b \quad \forall a \in A \quad \wedge \forall b \in B$$

3 Limiti

3.1 Nozioni legate ai limiti

Estremo superiore e inferiore In un insieme completo l'estremo superiore si definisce:

> Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$ chiamasi maggiorante ogni numero $k \geq a$ $\forall a \in A$.

In tal caso si dice limitato superiormente e viene chiamato *estremo superiore* il più piccolo dei suoi maggioranti. Se tale numero $\delta \in A$ si dice *massimo di A*, altrimenti si definisce soltanto come estremo superiore di A.
Nel caso che A non ammetta maggioranti allora è *illimitato superiormente* e il suo estremo è $+\infty$. Analogamente si definisce *estremo inferiore.*

Palla aperta di centro P0 e raggio δ LA si indica con $\mathbb{B}(P0, \delta)$ ed è data dai punti $P \in \mathbb{R} | d(P, P0) < \delta$.
A questo punto risulta evidente che i concetti e le definizioni date in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ possono estendersi a uno spazio cartesiano $\mathbb{R}^n$ qualsiasi.

Spazi metrici

> Un insieme $\mathbb{X}$ è detto spazio metrico e i suoi elementi vengono chiamati punti se esiste una funzione $d : \mathbb{X}x\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$ che

chiameremo *distanza* tale che:

$$d(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in \mathbb{X} \tag{16}$$
$$d(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow x = y \tag{17}$$
$$d(x,y) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall x,y,z \in \mathbb{X} \tag{18}$$

3.1.1 Definizioni legate agli spazi metrici

Intorno sferico Chiamasi *intorno sferico* o *palla aperta* di centro x0$\in \mathbb{X}$ e raggio $\delta > 0$, l'insieme dei punti $x \in \mathbb{X}$ tali che: $d(x_0, x) < \delta$

Intorno Chiamasi *intorno* di x_0 qualsiasi sottoinsieme $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{X}$ contenente un intorno sferico di x_0

Aperto Un sottoinsieme $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{X}$ si dice *aperto* se ogni suo punto è centro di un intorno sferico tutto contenuto in $\mathbb{A}$

Chiuso Un sottoinsieme $\mathbb{B} \subset \mathbb{X}$ si dice *chiuso* se il suo complemento in x x/$\mathbb{B}$ è aperto. **N.B.**: l'intero spazio $\mathbb{X}$ e l'insieme vuoto ϕ sono gli unici due insiemi sia aperti che chiusi.

Punto di frontiera Un punto x_0 si dice di *frontiera* per $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{X}$ se in ogni suo interno sferico cadono sia punti si $\mathbb{A}$ che punti di $\mathbb{X}/\mathbb{A}$. Il punto x_0 può appartenere ad $\mathbb{A}$ oppure ad $\mathbb{X}/\mathbb{A}$.

Punto di accumulazione Un punto $x - 0$ si dice di *accumulazione* per $\mathbb{A}$ se in ogni suo intorno cadono punti di $\mathbb{A}$ diversi da $x - 0$. Anche in questo caso $x - 0$ può appartenere sia ad $\mathbb{A}$ che ad $\mathbb{X}/\mathbb{A}$.

Punto isolato Un punto x_0 si dice *isolato* se esiste una palla aperta con centro in x_0 che non contiene altri punti di $\mathbb{A}$

3.1.2 Funzioni

Crescenti f si dice *crescente* se:

$$x'' > x' \rightarrow \mathrm{f}(x'') > \mathrm{f}(x')$$

Decrescenti f si dice *decrescente* se:

$$x'' > x' \rightarrow \mathrm{f}(x'') < \mathrm{f}(x')$$

Monotone È evidente che le funzioni strettamente monotone sono iniettive e quindi invertibili.

Periodiche Una funzione f di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ si dice *periodica* se esiste almeno un numero reale $\alpha > 0$ tale che:

$$\mathrm{f}(x \pm n\alpha) = \mathrm{f}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \wedge \forall n \in \mathbb{N}$$

Continue Una funzione si dice continua nel punto $x0 \in$ Dominio f() se:

$$\lim_{x \to x_0} (\mathrm{f})(x) = \mathrm{f}(x)$$

Si dice continua su tutto il dominio se vale $\forall x_0 \in$ Dominiof(). L'insieme delle funzioni continue nell'insieme D si indica con il simbolo $C^0(D)$

3.2 Limite a variabile singola

Definizione: Sia f(x) una funzione definita attorno al punto x0 (non necessariamente anche nel punto) si dirà che:

$$\lim_{x \to x_0} \mathrm{f}(x) = L$$

Se $\forall \varepsilon > 0$ piccolo a piacere esiste in corrispondenza un intorno H di x_0 per cui:

$$|\mathrm{f}(x) - L| < \varepsilon \text{ per } x \in H/x_0$$

si chiama

$$\lim_{x \to x_0^+} \mathrm{f}(x) = L$$
$$\textit{limite destro}$$
$$\lim_{x \to x_0} \mathrm{f}(x) = L$$

Se $\forall \varepsilon > 0$ piccolo a piacere esiste in corrispondenza un intorno H di x0 per cui:

$$|\mathrm{f}(x) - L| < \varepsilon \text{ per } x \in H/x_0$$
$$\text{si chiama}$$
$$\lim_{x \to x0^-} \mathrm{f}(x) = L \textit{limite sinistro}$$

3.2.1 Teoremi dei limiti

Teorema 3.2.1 (Teorema dell'unicità del limite:)**.**
Se esiste $\lim_{x\to x_0} f(x) \to x_0$ *questo è unico. Ne seque che la condizione necessaria e sufficente affinche esista* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *è che in* x_0 *esistano il limite destro e sinistro e che siano uguali tra loro.*

Dati i limiti

$$\lim_{x\to x_0} \mathrm{f}(x) = L1 \qquad \lim_{x\to x_0} \mathrm{g}(x) = L2$$

sono dimostrabili i seguenti teoremi:

Teorema 3.2.2 (Limite della somma e della differenza:)**.**

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = L1 \pm L2$$

Teorema 3.2.3 (Limite del prodotto:)**.**

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)g(x) = L1 * L2$$

Principio 3.2.4 (Di sostituzione:)**.** *Se f(x) e g(x) sono infinitesimi di ordine superiore o infiniti di ordine inferiore di* $f_1(x)$ *e* $g_1(x)$ *allora si ha:*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) \pm f_1(x)}{g(x) \pm g_1(x}$$

Teorema 3.2.5 (Limite del quoziente:)**.**

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L1}{L2}$$

Teorema 3.2.6 (Limite del rapporto di due polinomi:)**.**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} \ \textit{con}\ a_n \neq 0 b_m \neq 0 \ \textit{è:}$$

$$\infty \ \textit{se}\ n > m$$

$$\frac{a^n}{b^m} \ \textit{sse}\ n = m$$

$$0 \ \textit{se}\ n < m$$

Teorema 3.2.7 (Limite di una funzione composta da due funzioni continue:)**.**

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)] = f(l)$$

I teoremi qui enunciati valgono sempre a meno che non si presenti uno dei seguenti casi indeterminati:

$$\pm\infty \mp \infty \qquad \infty * 0 \qquad \frac{0}{0} \qquad 1^{\infty} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

3.2.2 Infinitesimi e infiniti

La funzione $\lim\limits_{x\to x_0} \mathrm{f}(x) = 0$ si dice *infinitesima* in x_0 o in ∞.
La funzione $\lim\limits_{x\to x_0} \mathrm{f}(x) = \infty$ si dice *infinita* in x_0 o in ∞.

Date due funzioni f(x) e g(x) infinitesime si dice che f(x) è *infinitesima di ordine superiore* rispetto a g(x) se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\mathrm{f(x)}}{g(x)} = 0$$

Date due funzioni f(x) e g(x) infinite si dice che f(x) è *infinita di ordine superiore* rispetto a g(x) se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\mathrm{f(x)}}{g(x)} = \infty$$

3.2.3 Limiti notevoli o particolarmente importanti

Mi permetto di aggiungere dei limiti oltre ai limiti notevoli o variazioni di essi per semplificare il lavoro con i limiti in quanto i seguenti sei limiti sono i limiti indefiniti più comuni.

$$\lim_{x\to 0} \frac{{}^{x} - 1}{x} = 1 \tag{19}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e \tag{20}$$

$$\lim_{\mathrm{f}(x)\to 0} \frac{\sin \mathrm{f}(x)}{\mathrm{f}(x)} = 1 \tag{21}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0 \tag{22}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \tag{23}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + x)}{x} = 1 \tag{24}$$

4 Derivate

4.1 Derivata a una variabile

La *derivata* non è altro che un limite. Infatti la derivata è il limite del rapporto incrementale della funzione f.

$$\mathrm{df}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{f}(x_0 + h) - \mathrm{f}(x_0)}{h}$$

4.1.1 Tabella delle derivate fondamentali e non

$$\mathrm{d}(k) = 0$$
$$\mathrm{d}(x) = 1$$
$$\mathrm{d}(x^n) = nx^{n-1}$$
$$\mathrm{d}(|x|) = \frac{|x|}{x} \text{ oppure } \frac{x}{|x|}$$
$$\mathrm{d}(A^x) = A^x \log A$$
$$\mathrm{d}\sqrt[2]{x} = \frac{1}{2\sqrt[2]{x}}$$
$$\mathrm{d}(\log_a x) = \frac{1}{x} \log_a e$$
$$\mathrm{d}(e^x) = e^x$$
$$\mathrm{d}(\sin x) = \cos x$$
$$\mathrm{d}(\cos x) = -\sin x$$
$$\mathrm{d}(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ o } i + \tan' 2x$$
$$\mathrm{d}(\arctan x) = \frac{1}{1 + x^2}$$
$$\mathrm{d}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$$
$$\mathrm{d}(k\mathrm{f}(x)) = k\mathrm{f}'(x)$$
$$\mathrm{d}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt[2]{1 - x^2}}$$
$$\mathrm{d}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt[2]{1 - x^2}}$$

4.1.2 Teoremi delle derivate

Teorema 4.1.1.

$$\mathrm{d}\left(f(x) \pm g(x)\right) = f'(x) \pm g'(x)$$

Teorema 4.1.2.

$$\mathrm{d}\,(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x))$$

Teorema 4.1.3.

$$\mathrm{d}(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Teorema 4.1.4.

$$\mathrm{d}\ f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

Teorema 4.1.5.

$$\mathrm{d}(f'(x)) = \frac{1}{f'(f^-1()x)}$$

Teorema 4.1.6.

$$\mathrm{d}(f(x)^{g(x)}) = f(x)^{g(x)} \left(g'(x) \ln{(f(x))} + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)} \right)$$

Teorema 4.1.7 (Rolle)**.** *Sia $f(x) \in c'[a,b]$ con $f(a) = f(b)$ e derivabile in $]a,b[$.*
Allora esiste almeno un punto interno ad [a,b] in cui $f'(c) = 0$

Teorema 4.1.8 (Lagrange)**.** *Sia $f(x) \in c'[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$.*
Allora esiste almeno un punto c interno ad $[a,b]$ in cui: $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Corollario 4.1.9 (Lagrange 1)**.** *Sia $f(x) \in c'[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$.*
Allora esiste almeno un punto c interno ad $[a,b]$ in cui: $f'(x) = 0$

Corollario 4.1.10 (Lagrange 2)**.** *Sia $f(x)$ e g(x) continue in $[a,b]$ e $f'(x) = g'(x)$ in $]a,b[$.*
Allora $f(x) - g(x) = k$ in $[a,b]$

Corollario 4.1.11 (Lagrange 3)**.** *Sia $f(x) \in c'[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$.*
Allora se $f'(x) > 0$ la funzione è crescente.
Se $f'(x) < 0$ la funzione è decrescente.

4.1.3 Differenziale

Per h=1 si ottiene:

$$\mathrm{f}(x_0) + \mathrm{f}'(x_0)(x - x_0) = \mathrm{f}(x_0) + f'(x_0)\delta x$$

per cui in una prima approssimazione si ha, in un intorno di x_0:

$$\mathrm{f}(x) \cong \mathrm{f}(x_0) + \mathrm{f}'(x_0)\delta x$$

da cui segue:

$$\delta\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(x) + \mathrm{f}'(x_0) \cong \mathrm{f}'(x_0)\delta x$$

La quantità $\mathrm{f}'(x_0)\delta x$ si chiama *differenziale* di f(x) nel punto x. E si scrive:

$$d\mathrm{f}(x_0) = \mathrm{f}'(x_0)\delta x$$

4.2 Derivate a più variabili

È possibile fare una derivata a più variabili. Essa si scrive

$$\mathrm{f}_y(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{f}(x,y+h) - \mathrm{f}(x,y)}{h}$$

e si indica

$$\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{d}x} \text{ e } \frac{\mathrm{df}}{\mathrm{d}y}$$

Da questo si ricava che

$$\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{d}i}(x,y) = \mathrm{f}_x(x,y) \text{ che ha u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{d}i}(x,y) = \mathrm{f}_x(x,y) \text{ che ha u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.2.1 Derivata secondo vettore

La derivata secondo il vettore

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \text{ è uguale a } \frac{\mathrm{df}}{\mathrm{d}u}(x,y) = \mathrm{f}_x(x,y) * u_1 + \mathrm{f}_y(x,y) * u_2$$

4.2.2 Derivata di funzione composta

$$\mathrm{f}(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ e sia } g(t) = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases} * \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

Allora

$$\mathrm{f}(x,y) = \mathrm{f}[x(t), y(t)]$$
$$\mathrm{f}'(x,y) = \mathrm{f}[x(t), y(t)] * x'(t) + \mathrm{f}_y[x(t), y(t)] * y'(t)$$

4.2.3 Derivata di ordine superiore

$$\mathrm{f}_{xx}(x,y) = \frac{\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}}{\mathrm{d}x} \to \text{Derivo } \mathrm{f}_x(x,y) \text{ tenendo la y come costante} \quad (25)$$
$$\mathrm{f}_{yy}(x,y) = \frac{\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}}{\mathrm{d}y} \to \text{Derivo } \mathrm{f}_y(x,y) \text{ tenendo la x come costante} \quad (26)$$
$$\mathrm{f}_{xy}(x,y) = \frac{\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}}{\mathrm{d}y} \to \text{Derivo } \mathrm{f}_x(x,y) \text{ tenendo la x come costante} \quad (27)$$
$$\mathrm{f}_{yx}(x,y) = \frac{\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}}{\mathrm{d}y} \to \text{Derivo } \mathrm{f}_y(x,y) \text{ tenendo la y come costante} \quad (28)$$
$$(29)$$

Per il teorema di Schwarz se esiste $\mathrm{f}_{x,y}$ allora è uguale a $\mathrm{f}x, y$

5 Integrale

5.1 Definito

Sia f(x) $\in C^0[a,b]$. Si consideri una partizione P_n dell'intervallo [a,b] in n parti, mediante i punti $x_0 = a, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n = b$.
Sia δ_i un punto arbitrario dell' iesimo intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ e δ l'ampiezza massima dell'intervalli della partizione. Si riesce a dimostrare che esiste ed è finito il limite:

$$\int\limits_a^b \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x = \lim_{x \to \infty \text{ e } \delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{f}(\delta_i)(x_i - x_{i-1})$$

E si definisce *integrale definito* della funzione f(x) tra a e b, che sono detti estremi di integrazione. In oltre si pone per definizione:

$$\int\limits_a^b \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x = -\int\limits_a^b \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_a^b \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x = 0$$

5.1.1 Proprietà degli integrali

Formula 5.1.1 (Somma algebrica)**.**

$$\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Formula 5.1.2 (Costante)**.**

$$\int\limits_a^b (\alpha f(x))\mathrm{d}x = \alpha \int\limits_a^b (f(x))\mathrm{d}x$$

Formula 5.1.3 (Intervalli in sequenza)**.**

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x$$

Teorema 5.1.4 (Calcolo di un integrale)**.**

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = G(b) - G(a) \textit{ in cui } G \textit{ è una qualunque primitiva di } f(x)$$

5.2 Indefiniti

La totalità delle primitive di f(x) si indica come:

$$\int \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x = G(x) + k$$

ed è chiamato *integrale indefinito* in cui k ha un valore arbitrario.

5.2.1 Integrali immediati o notevoli

Esistono, oltre alle formule di derivazione, una serie di integrali definiti sotto forma di tabella:

$$\int \mathrm{d}x = x + c \tag{30}$$

$$\int x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + c(a \neq -1) \tag{31}$$

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = log(x) + c \tag{32}$$

$$\int \sin(x)\mathrm{d}x = -\cos(x) + c \tag{33}$$

$$\int \cos(x)\mathrm{d}x = \sin(x) + c \tag{34}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\mathrm{d}x = \tan(x) + c \tag{35}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(x)}\mathrm{d}x = \cot(x) + c \tag{36}$$

$$\int e^x\mathrm{d}x = e^x + c \tag{37}$$

$$\int a^x\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\log(a)} + c \tag{38}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin(x) + c \tag{39}$$

$$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arccos(x) + c \tag{40}$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x = \arctan(x) + c \tag{41}$$

5.2.2 Integrazione per sostituzione

Dato l'integrale: $\int \mathrm{f}\,(g(x))g'(x)\mathrm{d}x$ si pone $t = g(x) \Rightarrow \mathrm{d}t = g'(x)\mathrm{d}x$ ottenendo cosi l'integrale $\int \mathrm{f}(t)\mathrm{d}t$.
Se lo si risolve si ha: $\int \mathrm{f}(t)\mathrm{d}t = \mathrm{f}(t) + c$ con $\mathrm{f}'(t) = \mathrm{f}(t)$

5.3 Applicazione degli integrali

5.3.1 Area sottesa alla curva

Data una curva di equazione $y = \mathrm{f}(x)$ con $x \in [a, b]$, se la curva sta tutta sopra l'asse x l'integrale:

$$\int_a^b \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x$$

rappresenta l'area compresa fra la curva e l'intervallo $[a, b]$. Se la curva sta tutta sotto l'asse x ($\mathrm{f}(x) \leq 0$) allora l'area compresa fra la curva e l'asse x è data da $\int_a^b \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x$.
Se invece la curva attraversa l'asse x allora l'integrale precedente rappresenta la differenza tra la parte di area sopra e sotto dell'asse delle x. Per calcolare quest'area si deve dividere l'intervallo in due parti,: [a,c] e [c,b], in cui nel primo è sopra l'asse x e dopo sotto o viceversa. La formula per trovare l'area allora diventa:

$$\mathrm{Area} = -\int_a^c \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x + \int_c^b \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x$$

Se invece devo calcolare l'area compresa tra due curve $y = \mathrm{f}(x)$ e $y = \mathrm{g}(x)$ in cui, nell'intervallo preso, sono una sopra l'altra ($\mathrm{f}(x) > g(x)$) uso la formula:

$$\int_a^b [\mathrm{f}(x) - g(x)]\mathrm{d}x$$

nel malaugurato caso in cui si "intrecciano" (prima sono $\mathrm{f}(x) > \mathrm{g}(x)$ e poi sono $\mathrm{f}(x) < g(x)$ e poi di nuovo $\mathrm{f}(x) > g(x)$) allora serve fare:

$$\int_a^c [\mathrm{f}(x) - g(x)]\mathrm{d}x \int_d^b [\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}'(x)]\mathrm{d}x + \int_c^d [g(x) - \mathrm{f}(x)]\mathrm{d}x$$

5.3.2 Calcolo della lunghezza di una curva

Data la funzione $y = \mathrm{f}(x)$ con $x \in [a, b]$ la lunghezza di questa curva si può calcolare con l'integrale:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \mathrm{f}'(x)^2}\mathrm{d}x$$

5.3.3 Calcolo volume di solido di rotazione

Data la curva di equazione $y = \mathrm{f}(x)$ con $x \in [a,b]$ il volume del solido generato da una sua rotazione di un angolo 2π attorno al'asse x è dato dall'integrale:

$$V = \int_a^b [\mathrm{f(x)}]^2 \mathrm{d}x$$

5.4 Criteri di convergenza per integrali

Alle volte, anche se non si sa calcolare un integrale generalizzato è utile sapere se esso converge o diverge. A questo scopo sono utili seguenti criteri di convergenza:

5.4.1 Criterio del confronto

Siano f(x) e g(x) continue nell'intervallo [a,b] escluso un punto c di tale intervallo in cui tendono entrambe ad infinito (c può coincidere con uno degli estremi dell'intervallo). Si ha allora che:
se $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ converge, converge anche $\int_a^b \mathrm{f(x)}\mathrm{d}x$
se $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ diverge, diverge anche $\int_a^b \mathrm{f(x)}\mathrm{d}x$

5.4.2 Criterio di asintoticità

Siano f(x) e g(x) continue in $[a,b]$ escluso un punto c di tale intervallo (che può coincidere con uno dei due estremi) in cui le funzioni tendano entrambe ad infinito allora se f(x) e g(x) sono dello stesso ordine per x→c allora

$$\int_a^b \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x \text{ e } \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

sono entrambe divergenti o entrambe convergenti.

Siano f(x) e g(x) continue in $[a,+\infty]$ e siano dello stesso ordine per $x \to \infty$ allora

$$\int_a^{+\infty} \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x \text{ e } \int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$$

5.5 Integrali doppi

5.5.1 formule di riduzione

Se, per esempio, ho una una funzione con dominio normale rispetto a

$$x : D = \{(x, y),\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x),\ a \leq x \leq b\}$$

e dovessi risolvere l'integrale

$$\int\limits_{D}\int \mathrm{f}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{a}^{b}[\int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \mathrm{f}(x,y)\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$$

- Calcolo la primitiva della funzione $\int\limits_{a}^{b} \mathrm{f}(x,y)\mathrm{d}x$ considerando x come costante
- Calcolo $\mathrm{f}_y(x,y)$, cioè la primitiva rispetto a y del punto precedente
- Calcolo l'integrale

$$\int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \mathrm{f}(x,y)\mathrm{d}x = [\text{f(x,y)}]_{\alpha(x)}^{\beta(x)} = \mathrm{f}[x,\beta(x)] - \mathrm{f}[x,\alpha(x)]$$

- Calcolo l'integrale doppio rispetto alla sola x ovvero risolvo

$$\int\limits_{D}\int \mathrm{f}(x,y)\mathrm{d}x = \int\limits_{a}^{b} \{\mathrm{f}[x,\beta(x)] - \mathrm{f}[x,\alpha(x)]\}\,\mathrm{d}x$$

Oppure se, per esempio, ho una una funzione con dominio normale rispetto a

$$y : D = \{(x, y),\ \gamma(y) \leq x \leq \delta(y),\ c \leq y \leq d\}$$

e dovessi risolvere l'integrale

$$\int\limits_{D}\int \mathrm{f}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{c}^{d}[\int\limits_{\gamma(y)}^{\delta(y)} \mathrm{f}(x,y)\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$$

- Calcolo la primitiva della funzione $\int\limits_{c}^{d} \mathrm{f}(x,y)\mathrm{d}y$ considerando y come costante
- Calcolo $\mathrm{f}_y(x,y)$, cioè la primitiva rispetto a x del punto precedente

- Calcolo l'integrale

$$\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} \mathrm{f}(x,y)\mathrm{d}y = [\mathrm{f}(x,y)]_{\gamma(y)}^{\delta(y)} = \mathrm{f}[\gamma(y),y] - \mathrm{f}[\delta,y]$$

- Calcolo l'integrale doppio rispetto alla sola x ovvero risolvo

$$\int\int_D \mathrm{f}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \{\mathrm{f}[x,\beta(x)] - \mathrm{f}[\gamma(y),y]\}\,\mathrm{d}y$$

6 Studio di funzione

6.1 Massimi e minimi di funzioni a una variabile

Un punto $x_0 \in [a,b] \leq$ Dominio f si dice:

Massimo locale esiste un intorno di f(x) in cui si ha

$$\mathrm{f}(x) \geq \mathrm{f}(x_0)$$

Minimo locale esiste un intorno di f(x) in cui si ha

$$\mathrm{f}(x) \leq \mathrm{f}(x_0)$$

Se è anche $\forall x \in \delta$ allora è anche **Assoluto**

6.1.1 Ricerca dei massimi e minimi locali

in f(x) derivabile Si cercano le soluzioni dell'equazione $\mathrm{f}'(x) = 0$ per ogni soluzione x_0 si studia il segno di $\mathrm{f}'(x)$ per un intorno di x_0
Se $\mathrm{f}'(x) > o$ a sinistra e $\mathrm{f}'(x) < 0$ a destra è **massimo locale**
Se $\mathrm{f}'(x) < 0$ a sinistra e $\mathrm{f}'(x) > o$ a destra è **minimo locale**
Se $\mathrm{f}'(x)$ è sempre o maggiore o minore di 0 allora può essere un *flesso*

6.1.2 Formule di Taylor

Sia $\mathrm{f}(x) \in c^n(a,b)$ e $x_0 \in (a,b)$ chiamasi **polinomio di Taylor** $p_n(x)$ della funzione $\mathrm{f}(x)$ nel punto x_0 il polinomio

$$\sum_{i=0}^{n} h\frac{\mathrm{f}^h(x_2)}{h!}(x-x_0)^h$$

dove si intende $\mathrm{f}^0(x)0\mathrm{f}(x)$ e 0!=1

6.2 Funzioni a più variabili

6.2.1 Piano tangente

Data una funzione $\mathrm{f}(x, y)$ ed un punto $P_0(x_0, y_0)$

$$z = \mathrm{f}(x_0, y_0) + \mathrm{f}_x(x_0, y_0) * (x - x_0) + \mathrm{f}_y(x_0, y_0) * (y - y_0)$$

6.2.2 Gradiente

Il gradiente di una funzione a due variabili si scrive come:

$$\nabla \mathrm{f}(x, y) = \begin{pmatrix} \mathrm{f}_x(x, y) \\ \mathrm{f}_y(x, y) \end{pmatrix}$$

Che non è altro che la direzione di massima crescita della derivata. Per il calcolo consiglio la forma

$$|\nabla \mathrm{f}(x, y)| = \sqrt[2]{(\mathrm{f}_x(x, y))^2 + (\mathrm{f}_y(x, y))^2}$$

In forma unitaria o versore si scrive

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{f}_x(x,y)}{|\nabla \mathrm{f}(x,y)|} \\ \frac{\mathrm{f}_y(x,y)}{|\nabla \mathrm{f}(x,y)|} \end{pmatrix}$$

6.3 Massini e minimi a due variabili

6.3.1 Massimi e minimi relativi

Per trovare i massimi e minimi relativi devo studiare il determinante della matrice Hessiana.

$det[h(x_0, y_0)]$	$f_{xx}(x, y)$	Quindi?
> 0	> 0	min
> 0	< 0	max
< 0	$>=< 0$	sella
$= 0$	$>=< 0$	indefinito

6.3.2 Massimi e minimi assoluti

Data un dominio

- trovo i punti in cui le derivate vanno a 0 tenendo solo quelli interni al dominio
- calcolo massimi e minimi relativi all'interno del dominio e il valore della funzione

Con questi dati puoi studiare la funzione per ricavare i massimi e minimi assoluti ovvero:

- studia la funzione sui punti delimitati dal dominio
- studiare la funzione nei vertici del dominio