第 4 节　匀变速直线运动速度与时间的关系

一、 基本关系推导

在速度发生变化的运动中, 如果加速度保持不变, 则称为匀变速直线运动. 这是一类最简单的变速运动.

$t=0$ 时的速度记为 v_0,t 时刻的速度记为 v, 则代入加速度的定义(1.7)式:

$$a=\frac{v-v_0}{t-0}$$

上式左右同时乘以时间 t, 再加上 v_0, 移项得

$$v=v_0+at \tag{1.10}$$

二、 例题分析

例 1.A,B 是做匀变速直线运动的两个物体的速度时间图象, 如图 1.9

(1)A,B 各做什么运动并求其加速度;

(2)两图象交点的意义;

(3)求 1s A,B 的速度;

(4)求 6s 末 A,B 的速度.

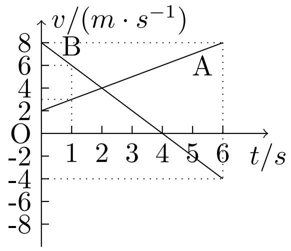

图 1.9

答案 见解析

解析 (1) A 物体沿规定的正方向做匀加速直线运动, 加速度大小为 $a_1=\frac{v-v_0}{t}=\frac{8-2}{6}m/s^2=1m/s^2$, 方向与初速度方向相同;B 物体前 4s 沿规定的正方向做匀减速直线运动,4s 后沿反方向做匀加速直线运动, 加速度为 $a_2=\frac{0-8}{4}m/s^2=-2m/s^2$, 负号表示加速度方向与初速度方向相反.

(2) 两图象的交点表示在该时刻 A,B 速度相同.

(3)1s 末 A 物体的速度为 3m/s, 和初速度方向相同;B 物体的速度为 6m/s , 和初速度方向相同.

(4)6s 末 A 物体的速度为 8m/s , 和初速度方向相同;B 物体的速度为 $-4m/s$, 和初速度方向相反.

例 2. 一物体从静止开始以 $2m/s^2$ 的加速度做匀加速直线运动, 经过 5s 后做匀速直线运动, 最后 2s 的时间内物体做匀减速直线运动直到静止. 求

(1)物体做匀速直线运动时速度大小;

(2)物体做匀速直线运动时的加速度.

答案 (1) $10m/s$ (2) $-5m/s^2$, 加速度方向与 v_c 方向相反.

解析 此题先画出草图如图 1.10 所示, 设图中 $A\to B$ 为匀加速直线运动,$B\to C$ 为匀速直线运动,$C\to D$ 为匀减速直线运动,BC 段的速度为 AB 段的末速度, 也是 CD 段的初速度.

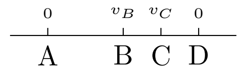

图 1.10

(1) 由速度与时间的关系(2.1)式得

$$v_B=a_1t_1=2\times 5m/s=10m/s$$

即做匀速直线运动的速度为 $10m/s$

(2) 由加速度的定义(1.7)式得

$$a_2=\frac{v-v_0}{t_2}=\frac{v_D-v_C}{t_2}=\frac{0-10}{2}m/s^2=-5m/s^2$$

负号表示加速度方向与 v_C 方向相反.

第 5 节　匀速直线运动位移与时间的关系

为了导出匀变速直线运动位移与时间的关系先来推导一下最简单的匀速直线运动的位移与时间的关系. 所谓匀速直线运动, 指速度保持不变的运动, 即: 速度大小和方向都不发生变化.

记 $t=0$ 时的位移为零, 和时刻的位移为 x, 代入速度的定义式(1.1)式:

$$v=\frac{x-0}{t-0}$$

将上式左右同时乘以时间 t, 然后再移项得:

$$x=vt \tag{1.11}$$

匀速直线运动的 $v-t$ 图象为:

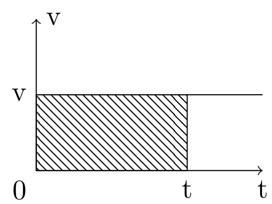

图 1.11: 匀速直线运动 $v-t$ 关系

在上图中, 显然阴影的面积为 vt, 对比匀速直线运动的位移公式, 这个面积正好等于位移. 这个结论拓展到匀变速直线运动中也是成立的.

第 6 节 匀变速直线运动位移与时间的关系

一、 基本关系推导

匀变速直线运动速度是变化的, 我们可以利用微元法来求出它的位移. 所谓微元法就是按时间分成若干个部分, 在每一小段时间内速度变化不大, 可以近似认为这一小段内质点做匀速直线运动, 然后求出这一小段位移来, 同理可以求出每一小段的位移, 再将每一小段位移加起来就等到匀变速直线运动的位移了.

如图 2.4 画出匀变速直线运动的速度–时间图象

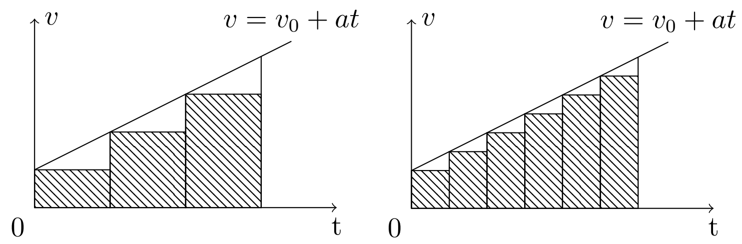

图: 甲　　图: 乙

图 1.12: 微元法求位移

图甲等分时间的间隔较大, 图乙等分间隔是甲的一半. 无论是甲还是乙, 均可以用阴影的小矩形的面积表示一小段时间内的位移, 然后加起来就得到近似的匀变速直线运动的位移. 但是甲的间隔较乙为大, 所以甲不如乙精确, 如果对乙再细分下去会得到更加精确的近似位移. 可以预见当无限分割时间时, 将会得到严格的位移, 阴影也就成为了一个梯形, 如下

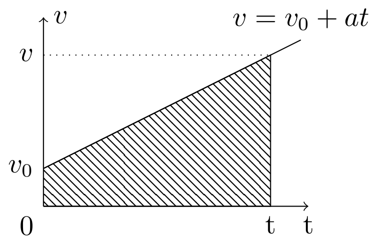

图 1.13: 匀变速直线运动 $x-t$ 关系

由梯形的面积计算公式易得, 匀变速直线运动的位移公式为:

$$x=\frac{(v+v_0)t}{2} \tag{1.12}$$

上面这个公式是推导匀变速直线运动的基本关系, 一定要记牢. 上述公式含有 t 时刻的速度 v , 将 (2.1) 式代入 (2.3) 消去 v 便得到:

$$x=\frac{(v_0+at+v_0)t}{2}=v_0t+\frac{1}{2}at^2$$

即匀变速直线运动位移与时间的关系为:

$$x=v_0t+\frac{1}{2}at^2 \tag{1.13}$$

二、 例题分析

例 1. 一物体做初速度为零的匀加速直线运动, 加速度大小为 $a=2m/s^2$, 求:

(1) 第 $5s$ 末物体的速度多大?

(2) 前 $4s$ 的位移多大?

(3) 第 $4s$ 内的位移多大?

答案 (1) $10m/s$ (2) $16m$ (3) $7m$

解析 (1) 第 $5s$ 末物体的速度由 (2.1) 式得

$$v_1=0+2\times 5m/s=10m/s$$

(2) 前 $4s$ 的位移由(2.4) 式得

$$x_1=0+\frac{1}{2}\times 2\times 4^2m=16m$$

(3) 物体第 3 秒末的速度由(2.1)式得

$$v_2=v_0+at_2=6m/s$$

则第 $4s$ 内的位移由(2.4)式得

$$x_2=v_2t_3+\frac{1}{2}at_3^2=7m$$

例 2. 一辆汽车正在平直的公路上以 $72km/h$ 的速度行驶, 司机看见红色信号灯便立即踩下制动器, 此后, 汽车开始做匀减速直线运动. 设汽车减速过程的加速度大小为 $5m/s$, 求:

(1)开始制动后, 前 $2s$ 内汽车行驶的距离;

(2)开始制动后, 前 $5s$ 内汽车行驶的距离.

答案 (1) $30m$ (2) $40m$

解析 首先将速度的单位换算为国际单位, 方法如下:

$$72km/h=\frac{72km}{1h}=\frac{72\times 10^3m}{3.6\times 10^3s}=20m/s$$

由于汽车最后停下来, 则刹车时间记为 t_s, 由(2.1)式可得

$$t_s = \frac{v - v_0}{a} = \frac{0 - 20m/s}{-5m/s^2} = 4s$$

(1) 因为 $t_1 = 2s < t_s$, 所以汽车在 $2s$ 内一直做匀减速直线运动, 并没有停下来. 由(2.4)式得:

$$x_1 = v_0 t_1 + \frac{1}{2}at_1^2 = 20 \times 4 - \frac{1}{2} \times 5 \times 2^2 m = 30m$$

(2) 因为 $t_2 = 5s > t_s$, 所以汽车在 $t_s = 4s$ 时已经停止运动, 而 $4s$ 到 $5s$ 一直没有运动, 所以位移就是前 $4s$ 的位移.
法一: 由(2.4)式得:

$$x_2 = v_0 t_s + \frac{1}{2}at_s^2 = 20 \times 4 - \frac{1}{2} \times 5 \times 4^2 m = 40m$$

法二: 由(2.3)式得

$$x_2 = \frac{(v_0 + v)t_s}{2} = \frac{(20m/s + 0) \times 4s}{2} = 40m$$

注意: 此题不止一种解法, 这里只是演示(2.4)式和(2.3)式的使用方法, 在刹车类问题中两个方法比较的话,(2.3)式要比(2.4)式计算简单, 简单的原因是(2.3)式不涉及平方运算. 但是是后面还可以有多种解法, 请同学们注意及时回顾.

第 7 节　匀变速直线运动位移与速度的关系

一、 基本关系推导

有的时候我们不知道时间, 但是知道匀变速直线运动中的 v 和 v_0, 以及加速度 a, 如果要计算位移我们需要先根据 $v - t$ 关系计算出时间, 再根据 $x - t$ 关系来求位移, 这是一个方法, 但是不是最简单的方法. 本节将导出 $x - v$ 的关系.

利用(2.1)式解得时间 $t = \dfrac{v - v_0}{a}$, 将此时间代入(2.3)式得:

$$x = \frac{(v + v_0)(v - v_0)}{2a}$$

考虑到平方差公式 $(v + v_0)(v - v_0) = v^2 - v_0^2$, 左右同时乘以 $2a$, 再移项得:

$$v^2 - v_0^2 = 2ax \tag{1.14}$$

上式就是匀变速直线运动的位移与速度的关系.

二、 例题分析

例 1. 汽车以 $10m/s$ 的速度行驶, 刹车的加速度大小为 $3m/s^2$, 求它向前滑行 $12.5m$ 后的瞬时速度.

答案 $5m/s$, 方向与初速度方向相同.

解析 当汽车做刹车运动时, 它的速度是不会改变方向的, 我们称之为不可逆类问题. 设初速度方向为正, 则 $v_0 = 10m/s$,$a = -3m/s^2$,$x = 12.5m$

法一: 由匀变速直线运动位移与速度的关系(2.5)式得

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2ax} = \sqrt{10^2 + 2 \times (-3) \times 12.5}m/s = 5m/s$$

注意, 由于汽车的速度不可能改变方向, 所以我们可以判断末速度为正. 即汽车向前滑行 $12.5m$ 后的瞬时速度大小为 $5m/s$, 方向与初速度方向相同.

法二: 由匀变速直线运动位移与时间的关系(2.4)式解得

$$t = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2ax}}{a} = \frac{5}{3}s$$

再由匀变速直线运动速度与时间的关系(2.4)式得

$$v = v_0 + at = 10 + (-3) \times \frac{5}{3}m/s = 5m/s$$

注意: 法一和法二相比更加简单, 而法二显然走了弯路. 所以在匀变速直线运动问题中, 如果根据已知条件选用适当的公式则可以使问题大为简化, 所以同学们遇到问题时应当尽量考虑一题多解, 从而能够获得选用适当解题方法的能力.

数学补充–求根公式

在上述题目的第一种解法中用到了一元二次方程的求根公式, 依然为了同学们学习的连惯性, 这里做详细的证明. 如下

一元二次方程为

$$ax^2 + bx + c = 0$$

上式提出 a, 并将第二项加入 2, 变成如下形式

$$a(x^2 + 2\frac{b}{2a}x) + c = 0$$

在上式括号内加入 $(\dfrac{b}{2a})^2$, 然后再减去它则方程不变

$$a(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}) + c - \frac{b^2}{4a} = 0$$

上式中圆括号内为完全平方式, 同时将圆括号外的部分移到等号右侧, 方程左右同时除以 a

$$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

记右式分子部分为 $\Delta=b^2-4ac$,Δ 就是判别式, 如果 $\Delta<0$ 则此方程无解, 如果 $\Delta>0$ 则对上式开方得

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

移项得

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

上式就是一元二次方程的求根公式.

所以由(2.4)来求时间时就有:

$$x=v_0t+\frac{1}{2}at^2$$

上式移项则相当于关于时间 t 的一元二次方程

$$\frac{1}{2}at^2+v_0t-x=0$$

用求根公式解得

$$t=\frac{-v_0\pm\sqrt{v_0^2+2ax}}{a}$$

由于时间 t 永远大于零, 所以只能取根

$$t=\frac{-v_0+\sqrt{v_0^2+2ax}}{a}$$

第 8 节 匀变速直线运动的推论

一、 平均速度

平均速度的定义为:

$$\overline{v}=\frac{x}{t}$$

将匀变速直线运动的位移(2.3)式代入平均速度公式可得:

$$\overline{v}=\frac{v+v_0}{2} \tag{1.15}$$

二、 中间时刻的瞬时速度

记中间时刻的瞬时速度为 $v_{\frac{t}{2}}$, 则由匀变速直线运动速度与时间的关系(2.1)得:

$$v_{\frac{t}{2}}-v_0=a\frac{t}{2} \tag{1.16}$$

$$v-v_{\frac{t}{2}}=a\frac{t}{2} \tag{1.17}$$

显然上面二式的右侧相等, 所以有

$$v_{\frac{t}{2}}-v_0=v-v_{\frac{t}{2}}$$

解得:

$$v_{\frac{t}{2}}=\frac{(v+v_0)}{2} \tag{1.18}$$

对比平均速度公式, 此二式可以合写成:

$$\overline{v}=v_{\frac{t}{2}}=\frac{(v+v_0)}{2} \tag{1.19}$$

三、 位移中点的瞬时速度

位移中点的瞬时速度记为 $v_{\frac{x}{2}}$, 由匀变速直线运动位移与速度(2.5)式可得:

$$v^2-v_{\frac{x}{2}}^2=2a\frac{x}{2} \tag{1.20}$$

$$v_{\frac{x}{2}}^2-v_0^2=2a\frac{x}{2} \tag{1.21}$$

显然上面二式的右侧相等, 所以有

$$v^2-v_{\frac{x}{2}}^2=v_{\frac{x}{2}}^2-v_0^2$$

解得:

$$v_{\frac{x}{2}}=\sqrt{\frac{v^2+v_0^2}{2}} \tag{1.22}$$

四、 $v_{\frac{t}{2}}$ 和 $v_{\frac{x}{2}}$ 的大小关系

从物理角度证明

如图 2.6 画出了匀加速直线运动时间中点和位移中点的具体位置.

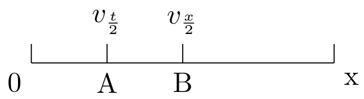

图 1.14: 匀加速直线运动

由于图 2.6 所示为匀加速直线运动, 所以质点从 A 点到 B 点必须加速一段时间, 所以可以得到时间中点的瞬时速度 $v_{\frac{t}{2}}$ 小于位移中点的瞬时速度 $v_{\frac{x}{2}}$

如图 2.7 画出了匀减速直线运动时间中点和位移中点的具体位置.

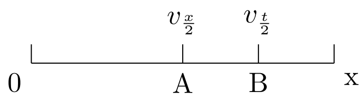

图 1.15: 匀减速直线运动

由于图 2.7 所示为匀加速直线运动, 所以质点从 A 点到 B 点必须减速一段时间, 所以仍然可以得到时间中点的瞬时速度 $v_{\frac{t}{2}}$ 小于位移中点的瞬时速度 $v_{\frac{x}{2}}$

综合以上论述可得:

$$v_{\frac{t}{2}} < v_{\frac{x}{2}} \tag{1.23}$$

从数学角度证明

对于任意的 $a>0$,$b>0$ 有下述均值不等式:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2}$$

上式中, 当且仅当 $a=b$ 取等号. 为了保证同学们学习的连惯性, 这里证明此式如下:

$$(a-b)^2 \geqslant 0$$
$$a^2+b^2-2ab \geqslant 0$$
$$a^2+b^2 \geqslant 2ab$$

对上式, 左右同时加上 a^2+b^2 得

$$2(a^2+b^2) \geqslant a^2+b^2+2ab$$

上式右侧为完全平方式, 将其写成完全平方式

$$2(a^2+b^2) \geqslant (a+b)^2$$

左右同时除以 4 , 再开方, 得

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2}$$

无论是匀加速还是匀减速, 都有 $v \neq v_0$, 如设运动的方向为正, 则二个速度都大于零. 所以有

$$\sqrt{\frac{v^2+v_0^2}{2}} > \frac{v+v_0}{2}$$

上面正式时间中点的瞬时速度和位移中点的瞬时速度的表达式, 所以有

$$v_{\frac{t}{2}} < v_{\frac{x}{2}}$$

五、 相邻相等时间段内的位移差

设匀变速直线运动的加速度为 a, 任意相邻二段时间为 T, 此二段时间内的位移分别为 x_1 和 x_2, 如图 2.8 所示

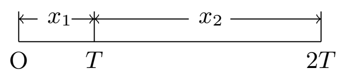

图 1.16: 等时间段内的位移差

则有关系

$$x_2 - x_1 = aT^2 \tag{1.24}$$

式(2.15) 不涉及初速度, 一般用来处理用打点计时器所获得的纸带, 因为纸带上的点是可以用毫米刻度尺来测量的, 用这个方法求加速度很方便.

证法一

第一段中间时刻的瞬时速度等于第一段的平均速度, 记为 v_1, 则 $v_1 = \dfrac{x_1}{T}$ 第二段中间时刻的瞬时速度等于第二段的平均速度, 记为 v_2, 则 $v_2 = \dfrac{x_2}{T}$ 由(1.7)式得

$$a = \frac{v_2 - v_1}{T}$$

将 v_1 和 v_2 的表达式代入得

$$a=\frac{x_2/T-x_1/T}{T}$$

上式分子分母同乘以 T, 然后左右同时再乘以 T^2, 移项得

$$x_2-x_1=aT^2$$

证法二

画出这段时间段内的 $v-t$ 图象如下

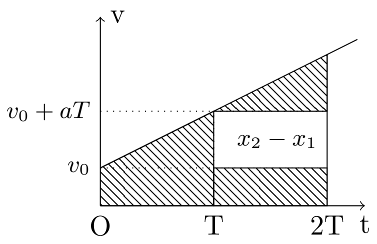

图 1.17: 相邻位移差

图 2.9 中 $0\sim T$ 时间段内梯形阴影面积表示位移 x_1,$T\sim 2T$ 梯形面积表示位移 x_2 两面积之差就表示 x_2-x_1, 在图中所示为空白矩形的面积. 矩形的长为 T, 宽为 aT, 所以其面积为 aT^2, 即

$$x_2-x_1=aT^2$$

证法三

设初速度为 v_0, 则由匀变速直线运动位移与时间的关系(2.4)得

$$x_1=v_0T+\frac{1}{2}aT^2 \tag{1.25}$$

$$x_1+x_2=v_0\cdot 2T+\frac{1}{2}a(2T)^2 \tag{1.26}$$

用式(2.17)−2×(2.16)得

$$x_2-x_1=aT^2$$

证法四

同证法三计算出第一段的位移, 即式(2.16). 由匀变速直线运动速度与时间的关系(2.1)得第二段的初速度为

$$v_1=v_0+aT$$

再由匀变速直线运动位移与时间关系(2.4)计算第二段的位移得

$$x_2=(v_0+aT)\cdot T+\frac{1}{2}aT^2 \tag{1.27}$$

用式(2.18) − (2.16)得

$$x_2-x_1=aT^2$$

六、 逐差法求加速度

在用打点计时器处理纸带时得到以下数据, 为了说理清析, 仅以图 2.10 为例说明处理的原理.

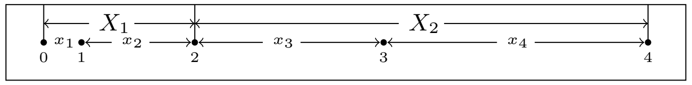

图 1.18: 逐差法四段纸带

使用毫米刻度尺测量长度时, 计数与真实值的差距不会大于 $1mm$, 这个 $1mm$ 叫做绝对误差. 无论这个真实长度是多大, 这个绝对误差也不会发生变化, 但是这个绝对误差在实际长度中占的比例却不相同, 这个比例叫做相对误差, 即

$$\text{相对误差}=\frac{\text{绝对误差}}{\text{实际长度}}\times 100\%$$

所以实际长度越长, 相对误差越小, 也就是在绝对误差一定 ($1mm$) 的情况下, 测量越长的长度相对误差越小.

在如图 2.10 所获得的纸带中, 如果实际测量, 则要求测量 $0\to 1$,$0\to 2$,$0\to 3$,$0\to 4$ 的长度来标注的. 但是在纸带上说理却一般如上图所示.

在使用(2.15) 来计算加速度时, 显然所取长度越大则相对误差越小. 在所示纸带中, 能找到的长度最大的相邻位移就是图中的 $X_1=x_1+x_2$ 和 $X_2=x_3+x_4$, 但是此二大段的时间间隔却对应由原来的 T 变成了 $2T$, 对这二大段使用(2.15) 得

$$(x_3+x_4)-(x_1+x_2)=a(2T)^2$$

由上式解得

$$a=\frac{(x_3+x_4)-(x_1+x_2)}{(2T)^2}$$

同理, 其它偶数段类似. 如果纸带中有 6 段, 对应分成两大组, 每组的时间为 $3T$, 则对应的逐差法为

$$a=\frac{(x_4+x_5+x_6)-(x_1+x_2+x_3)}{(3T)^2} \tag{1.28}$$

如果一段纸带中有奇数段, 则要舍去一段, 通过前述分析, 则应去掉最短的一段, 也就是第 1 段, 例如 7 段情况应该写成

$$a=\frac{(x_5+x_6+x_7)-(x_2+x_3+x_4)}{(3T)^2}$$

七、 初速度为零的比例关系

匀变速直线运动的比例关系共有两大组, 其一按时间等分, 其二按位移等分.

按时间等分

时间每隔 T 分一份, 则 T ,$2T$,$3T$,$\cdots$ 等时刻对应的速度分别为 v_1,v_2,v_3,$\cdots$

由(2.1) 式, 可得

$$v_n=a\cdot nT$$

所以有

$$v_1:v_2:v_3:\cdots:v_n=1:2:3:\cdots:n \tag{1.29}$$

从 0 时刻开始,$0\sim T$, $0\sim 2T$, $0\sim 3T$,$\cdots$ 等时间间隔内对应的位移分别记为 x_1 , x_2 , x_3, $\cdots$

由 (2.4) 式, 可得

$$x_n=\frac{1}{2}a\cdot(nT)^2$$

所以有

$$x_1:x_2:x_3:\cdots:x_n=1^2:2^2:3^2:\cdots:n^2 \tag{1.30}$$

第 T , 第 $2T$, 第 $3T$, $\cdots$, 第 nT 时间间隔内对应的位移分别记为 Δx_1 , Δx_2 , Δx_3, $\cdots$, Δx_n

由 x_n 与 n 的关系可得

$$\Delta x_n=x_n-x_{n-1}=(2n-1)\cdot\frac{1}{2}aT^2$$

所以有

$$\Delta x_1:\Delta x_2:\Delta x_3:\cdots:\Delta x_n=1:3:5:\cdots:(2n-1) \tag{1.31}$$

按位移等分

位移每隔 L 分一份, 记 L ,$2L$, $3L$, $\cdots$, nL 等位置时, 质点的速度分别为 v_1 , v_2 ,v_3 , $\cdots$, v_n

由(2.5) 式, 可得

$$v_n^2-0=2ax_n$$

代入 $x_n=nL$ 解得

$$v_n=\sqrt{n\cdot 2aL}$$

所以有

$$v_1:v_2:v_3:\cdots:v_n=\sqrt{1}:\sqrt{2}:\sqrt{3}:\cdots:\sqrt{n} \tag{1.32}$$

记质点到达 L ,$2L$, $3L$, $\cdots$, nL 等位置时, 需要的时间分别为 t_1 , t_2 ,t_3 , $\cdots$, t_n

由(2.4) 式, 可得

$$x_n=\frac{1}{2}at_n^2$$

代入 $x_n=nL$ 解得

$$t_n=\sqrt{\frac{2nL}{a}}$$

所以有

$$t_1:t_2:t_3:\cdots:t_n=\sqrt{1}:\sqrt{2}:\sqrt{3}:\cdots:\sqrt{n} \tag{1.33}$$

记质点经过第一个 L , 第二个 L, 第三个 L , $\cdots$, 第 n 个 L 等位移时, 需要的时间分别为 Δt_1 , Δt_2 ,Δt_3 , $\cdots$, Δt_n

由 t_n 的表达式可得

$$\Delta t_n=t_n-t_{n-1}=(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})\sqrt{\frac{2L}{a}}$$

所以有

$$\Delta t_1:\Delta t_2:\Delta t_3:\cdots:\Delta t_n=\sqrt{1}:(\sqrt{2}-\sqrt{1}):(\sqrt{3}-\sqrt{2}):\cdots:(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}) \tag{1.34}$$

第 9 节　匀变速直线运动习题精解

例 1. 一物体以某一速度冲上一光滑斜面, 做匀变速直线运动, 前 $4s$ 的位移为 $1.6m$, 随后 $4s$ 的位移为零, 那么物体的加速度多大?

答案 物体的加速度大小为 $0.1m/s^2$

解析 题目中所述运动情况如图 1.19 所示. 由于随后的 $4s$ 内位移为零, 则可以判断出在这 $4s$ 内先上升再下降, 由对称性知向上运动 x_1 和向下运动 x_1 的时间都是 $2s$. 所以记发生 x_2 位移的时间 $t_2=4s$, 发生 x_1 位移的时间 $t_1=2s$.

解法一: 设初速度 v_0, 由匀变速直线运动位移与时间的关系(2.4)式得

$$x_2=v_0t_2+\frac{1}{2}at_2^2$$

显然可以得到, 物体到达最高点的速度为 0 , 设从最低点到最高点所用时间为 t , 则 $t=t_1+t_2=6s$, 同样可以由(2.4)式得

$$x_1+x_2=v_0t+\frac{1}{2}at^2$$

由上述二式联立解得

$$a=-0.1m/s^2, v_0=0.6m/s$$

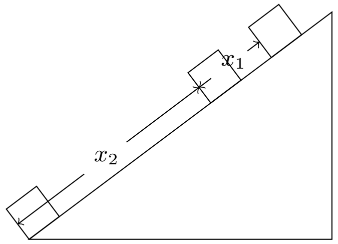

图 1.19

解法二: 由平均速度公式(2.10)可以得到前 $4s$ 内的中间时刻的瞬时速度为

$$v=\frac{x_2}{t_2}=0.4m/s$$

根据后 $2s$ 速度减到零, 可得从第 $2s$ 末到第 $6s$ 末速度由 $v=0.4m/s$ 减到零. 所以可以由加速度定义(1.7)式得

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{0-0.4m/s}{6s-2s}=-0.1m/s^2$$

解法三: 将此运动视为反向的初速度为零的匀加速直线运动, 由等分时间时位移的比例关系(2.21)可得, 连续三段 $T=2s$ 的位移比为 $1:3:5$, 所以可以得到

$$x_1=\frac{1}{8}x_2=0.2m$$

同时可以得到第二段时间内的位移为 $0.6m$, 由相邻两段时间内的位移差公式(2.15) 得

$$0.6m-0.2m=a'(2s)^2$$

解上式得

$$a'=\frac{0.6m-0.2m}{4s^2}=0.1m/s^2$$

上式中加速度加撇的原因在于它是反向的匀加速直线运动, 而正向的匀减速直线运动与它相差一个负号, 即 $a=-a'=-0.1m/s^2$.

解法四: 考虑同第三种解法得到 $x_1=0.2m$, 仍然视为反向的匀加速直线运动, 由匀变速直线运动公式(2.4)关系得

$$x_1=\frac{1}{2}a'T^2$$

对上式简单运算得

$$a'=\frac{2x_1}{T^2}=0.1m/s^2$$

匀减速直线运动的加速度为 $a=-a'=-0.1m/s^2$.

解法五: 与解法二相同, 由平均速度公式(2.10)式得到中间时刻的瞬时速度 $v=0.4m/s$, 对于此后 $4s$ 内物体将匀减速到速度为 0, 由平均速度公式(2.6)可得后 $4s$ 的位移为

$$x=\frac{v+0}{2}\cdot t=0.8m$$

由匀变速直线运动位移与速度的关系(2.5)式得

$$v^2-0^2=2ax$$

解得

$$a=-\frac{v^2}{2x}=-0.1m/s^2$$

同学们注意, 在匀变速直线运动中往往会导致一题多解, 但是归根结底都是相同的. 只是按不同的思路考虑问题罢了, 如果方法选择得当则题目会很轻松的得到解决, 但是选择不当会增加不少的计算量. 所以同学们在刚刚开始学习的时候最好能够尝试一题多解, 练熟公式的同时找到解题的技巧.

例 2. 一物体做匀加速直线运动, 通过一段位移 Δx 所用的时间为 t_1, 紧接着通过下一段位移 Δx 所用时间为 t_2, 求物体运动的加速度.

答案 $\dfrac{2\Delta x(t_1-t_2)}{t_1t_2(t_1+t_2)}$

解析 物体通过第一段位移中间时刻的瞬时速度为 $v_1=\frac{\Delta x}{t_1}$, 通过第二段位移中间时刻的瞬时速度为 $v_2=\frac{\Delta x}{t_2}$, 由 v_1 变到 v_2 所需的时间显然为 $\Delta t=\frac{t_1+t_2}{2}$, 由加速度定义(1.7)式得

$$a=\frac{v_2-v_1}{\Delta t}=\frac{2\Delta x(t_1-t_2)}{t_1t_2(t_1+t_2)}$$

例 3. 一质点运动的位移随时间变化的图象是一条抛线, 方程为 $x=-5t^2+40t$, 则

(1)求质点的初速度

(2)求质点运动的加速度

(3)求质点运动的最大位移

(4)求质点速度为零时的时间

答案 见解析

解析 对比 $x=-5t^2+40t$ 和匀变速直线运动位移与时间的关系(2.4) 可得

(1) 质点运动的初速度为 $v_0=40m/s$

(2) 质点运动的加速度由对比可知 $\frac{1}{2}a=-5m/s^2$, 解得 $a=-10m/s^2$.

(3) 最大位移由匀变速直线运动(2.5)式得

$$0-v_0^2=2ax_m$$

解得

$$x_m=\frac{0-v_0^2}{2a}=80m$$

(4) 由匀变速直线运动速度与时间的关系(2.1)式得

$$0=v_0+at$$

解得

$$t=-\frac{v_0}{a}=4s$$

例 4. 一辆汽车沿平直公路以速度 v_1 行驶了 $\frac{2}{3}$ 的路程, 接着又以速度 $v_2=20km/h$ 行驶完其余 $\frac{1}{3}$ 的路程, 如果汽车全程的平均速度为 $28km/h$, 那么汽车在前 $\frac{2}{3}$ 的路程内速度的大小为多少?

答案 $35km/h$

解析 由于汽车做单向直线运动则位移大小等于路程, 设总位移为 x, 则前 $\frac{2}{3}$ 所用的时间为 $t_1=\frac{2x}{3v_1}$, 后 $\frac{1}{3}$ 所用时间为 $t_2=\frac{x}{3v_2}$, 则总时间为

$$t=t_1+t_2=\frac{2x}{3v_1}+\frac{x}{3v_2}$$

由平均速度公式 (2.6) 得

$$\overline{v}=\frac{x}{\frac{2x}{3v_1}+\frac{x}{3v_2}}$$

上式约掉 x 然后经过简单计算得

$$v_1=\frac{2\overline{v}v_2}{3v_2-\overline{v}}=35km/h$$

注意: 在这个题的计算中不要上来就化单位为国际单位, 因为在计算中很明显的一点就是位移不知道, 所以在计算中一定可以消去. 这样一来, 最后的结果应该就可以用与题目中相同的单位表达, 并且一般会比较简洁, 如果化单位的话, 这个题目就走了弯路了.

例 5. 质点由 A 点出发沿直线 AB 运动, 行程的第一部分是加速度大小为 a_1 的匀加速运动, 接着做加速度大小为 a_2 的匀减速运动, 到达 B 点时恰好速度减为零. 若 AB 间总长度为 x, 则质点从 A 到 B 所用时间 t 为多少?

答案 $\sqrt{\dfrac{2x(a_1+a_2)}{a_1a_2}}$

解析 设第一阶段的末速度为 v, 则由题意据匀变速直线运动位移与速度关系(2.5) 式可知:

$$\frac{v^2}{2a_1}+\frac{v^2}{2a_2}=x$$

由上式解得

$$v=\sqrt{\frac{2a_1a_2x}{a_1+a_2}}$$

而由匀变速直线运动位移计算基本关系(2.3)式可得

$$x=\frac{0+v}{2}t_1+\frac{v+0}{2}t_2=\frac{v}{2}t$$

由此解得

$$t=\sqrt{\frac{2(a_1+a_2)x}{a_1a_2}}$$

例 6. 美国 “肯尼迪” 号航空母舰上装有帮助飞机起飞的弹射系统. 已知 “F-15” 型战斗机在跑道上加速时, 产生的最大加速度为 $5m/s^2$, 起飞的最小速度是 $50m/s^2$, 弹射系统能够使飞机具有的最大速度为 $30m/s$, 则:

(1)飞机起飞时在跑道上至少加速多长时间才能起飞?

(2)航空母舰的跑道至少应该多长?

答案 (1)$4s$ (2)$160m$

解析 (1) 飞机在跑道上运动的过程中, 当有最大初速度、最大加速度时，起飞所需时间最短，据加速度的定义(1.7)或者匀变速直线运动速度与时间的关系(2.1)得

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{50 - 30}{5} s = 4s$$

则飞机起飞时在跑道上的加速时间至少为 $4s$.

(2) 由匀变速直线运动位移与时间的关系(2.5) 式得

$$x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{50^2 - 30^2}{2 \times 5} m = 160m$$

即航空母舰的跑道至少为 160.

例 7. 一质点做匀变速直线运动, 初速度 $v_0 = 2m/s$, $4s$ 内位移为 $20m$, 求:

(1)质点 $4s$ 末的速度;

(2)质点 $2s$ 末的速度.

答案 (1)$8m/s$ (2) $5m/s$

解析 (1) 利用平均速度公式(1.3)得 $4s$ 内的平均速度为

$$\overline{v} = \frac{x}{t} = \frac{v_0 + v_4}{2}$$

代入数据解得 $4s$ 末的速度为

$$v_4 = 8m/s$$

(2) 由匀变速直线运动平均速度与位移中点的瞬时速度关系(2.10)得 $2s$ 末的速度为

$$v_2 = \frac{v_0 + v_4}{2} = 5m/s$$

例 8. 一个做匀加速直线运动的物体, 在前 $4s$ 内经过的位移为 $24m$, 在第 2 个 $4s$ 内经过的位移是 $60m$, 求这个物体的加速度和初速度各是多少?

答案 $2.25m/s^2$ $1.5m/s$

解析 解法一: 物体在前 $4s$ 内的位移

$$x_1 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

在第 2 个 $4s$ 内的位移

$$x_2 = v_0(2t) + \frac{1}{2}(2t)^2 - (v_0 t + \frac{1}{2} a t^2)$$

将 $x_1 = 24m$,$x_2 = 60m$ 代入上式, 解得

$$a = 2.25m/s^2, v_0 = 1.5m/s$$

解法二: 物体在 $8s$ 内的平均速度等于中间时刻 (第 $4s$ 末) 的瞬时速度, 则

$$v_4 = \frac{24 + 60}{8} m/s = 10.5m/s$$

物体在前 $4s$ 内的平均速度等于第 $2s$ 末的瞬时速度

$$v_2 = \frac{24}{4} m/s = 6m/s$$

由加速度的定义可得

$$a = \frac{v_4 - v_2}{\Delta t} = \frac{10.5 - 6}{2} m/s^2 = 2.25m/s^2$$

由匀变速直线运动速度与时间的关系得

$$v_2 = v_0 + a t_2$$

解得

$$v_0 = v_2 - a t_2 = 1.5m/s$$

解法三: 由等时相邻位移公式(2.15)得

$$a = \frac{\Delta x}{T^2} = \frac{60 - 24}{4^2} m/s^2 = 2.25m/s^2$$

同解法一 $v_4 = \frac{24+60}{8} m/s$, 由匀变速直线运动速度与时间关系(2.1) 式得

$$v_4 = v_0 + a t_4$$

解得

$$v_0 = 1.5m/s$$

例 9. 一辆汽车以 $3m/s^2$ 的加速度开始启动的瞬间, 另一辆以 $6m/s$ 的速度做匀速直线运动的自行车恰好从汽车的旁边通过.

(1)汽车一定能追上自行车吗? 若能追上, 汽车经过多长时间追上? 追上时汽车的瞬时速度多大?

(2)记汽车用 2 表示, 自行车用 1 表示. 在汽车追上自行车前, 当 $v_2 < v_1$ 时, 两者间的距离如何变化? 当 $v_2 > v_1$ 时, 两者间的距离如何变化? 汽车追上自行车前多长时间与自行车相距最远? 此时的距离是多大?

答案 见解析

解析 解法一:(1) 因为汽车做加速运动, 故汽车一定能追上自行车. 汽车追上自行车时, 两者位移相等,$x_2 = x_1$, 即

$$\frac{1}{2}at^2 = v_1 t$$

解得

$$t = \frac{2v_1}{a} = \frac{2 \times 6}{3}s = 4s, v_2 = at = 3 \times 4m/s = 12m/s$$

(2) 开始阶段,$v_2 < v_1$, 两者间的距离逐渐变大. 后来 $v_2 > v_1$, 两都间的距离又逐渐减小. 所以汽车追上自行车前, 当 $v_2 = v_1$ 时, 两者距离最大. 设经过时间 t_1 , 汽车速度等于自行车速度, 则

$$at_1 = v_1$$

解得

$$t_1 = 2s$$

此时

$$x_1 = v_1 t_1 = 6 \times 2m = 12m$$

$$x_2 = \frac{1}{2}at_1^2 = \frac{1}{2} \times 3 \times 2^2 m = 6m$$

最大距离为

$$\Delta x = x_1 - x_2 = 6m$$

解法二: 在第一个解法中偏重于物理情景的讨论, 由于运动的情况可能要复杂的多, 讨论就会变得复杂, 所以这里介绍偏重数学计算的统一化讨论的方法. 开始自行车在汽车前面, 则分别写出二者在任意时刻 t 的位移分别为

$$x_1 = v_1 t, x_2 = \frac{1}{2}at^2$$

由于自行车开始在汽车的前面, 所以计算它们位移差的变化量 $\Delta x = x_1 - x_2$, 如果 $\Delta x < 0$ 在 $t > 0$ 时成立, 则汽车就可以追上自行车, 反之则不能追上.

$$\Delta x = v_1 t - \frac{1}{2}at^2$$

代入数值得 Δx 关于时间 t 的一元二次函数. 如下

$$\Delta x = 6t - \frac{3}{2}t^2, (t > 0)$$

令

$$\Delta x = 0$$

得一元二次方程

$$6t - \frac{3}{2}t^2 = 0$$

上式容易解得 $t_1 = 0$(舍去),$t_2 = 4s$, 所以经过 $4s$ 汽车追上自行车. 此时速度为

$$v = at_2 = 3 \times 4m/s = 12m/s$$

求函数 $\Delta x = 6t - \frac{3}{2}t^2, (t > 0)$ 的极大值, 则由二次函数的性质易得

$$t = -\frac{6}{2 \times (-\frac{3}{2})}s = 2s$$

时二车的相对距离 Δx 取最大, 为

$$\Delta x_{max} = \frac{4 \times (-\frac{3}{2}) \times 0 - 6^2}{4 \times (-\frac{3}{2})} = 6m$$

例 10. 车从静止开始以 $1m/s^2$ 的加速度前进, 在车开始运动的同时, 车后 $20m$ 处, 某人骑自行车开始以 $6m/s$ 的速度匀速追赶, 能否追上? 若不能追上, 人与车的最小距离是多少? 若能追上, 什么时候追上?

答案 不能 $2m$

解析 开始运动时, 车在前, 人在后所以选择人的起点为坐标原点, 以车和人运动的方向为正方向, 则以 2 表示车,1 表示人, 则二者的位移分别为

$$x_1 = 6t$$

$$x_2 = 20 + \frac{1}{2} \times 1 \times t^2$$

任意时刻二者位移差为 $\Delta x = x_2 - x_1$ 代入上述表达式得

$$\Delta x = 0.5t^2 - 6t + 20, (t > 0)$$

令 $\Delta x = 0$ 得一元二次方程, 其判别式为

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 0.5 \times 20 = -4 < 0$$

所以无解, 则人不能追上汽车. 由一元二次函数求极值可得

$$\Delta x_{min} = \frac{4 \times 0.5 \times 20 - (-6)^2}{4 \times 0.5} = 2m$$