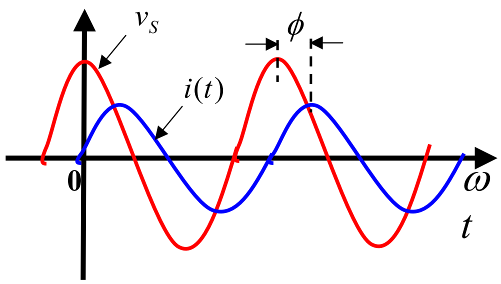
Sinais e Sistemas Electrónicos

Capítulo 4: Circuitos em regime sinusoidal



Ernesto Martins
evm@ua.pt
DETI (gab. 4.2.38)
Universidade de Aveiro

Sumário

- **Introdução**
- **Resposta forçada a uma função sinusoidal;**
- **Função forçadora complexa;**
- **Fasores;**
- **Relações fasoriais para R, L e C;**
- **Extensão das técnicas de análise aos circuitos em regime sinusoidal;**
- **Impedância;**
- **Potência em regime sinusoidal;**
- **Valor eficaz.**

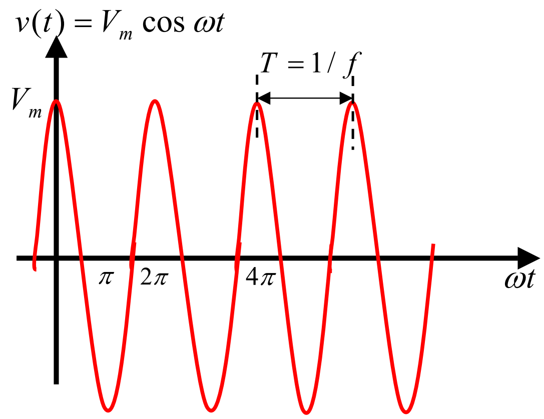
Introdução

- **O estudo da resposta dos circuitos a uma função forçadora sinusoidal é importante porque:**

  - **Tensões sinusoidais são geradas facilmente; a energia eléctrica disponível é sinusoidal;**

  - **A sinusóide goza da propriedade de *manter a forma* em circuitos lineares;**

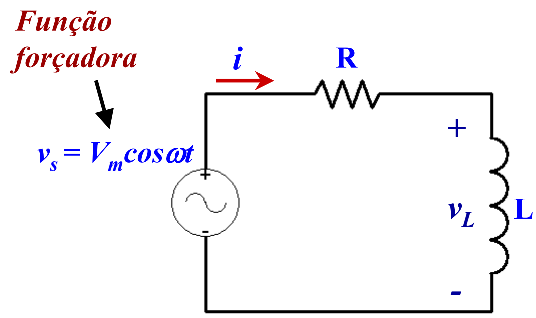
  - **Qualquer função periódica pode ser decomposta numa soma de sinusóides – conhecendo a resposta do circuito a cada uma das sinusóides podemos calcular a resposta à função original.**



Resposta a uma função sinusoidal

Resposta a uma função sinusoidal

- **Aplicando KVL**



$$-v_s + Ri + v_L = 0$$

$$Ri + L\frac{di}{dt} = V_m \cos\omega t$$

- **Dado que a resolução desta equação passa pela derivação e pela integração da função forçadora, é de prever que a sua solução, *i(t)*, tenha a mesma forma (e a mesma frequência) da função forçadora.**

- **Podemos portanto admitir que a solução tem a forma…**

$$i(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$ **em que *A* e ϕ são constantes a determinar.**

Função forçadora complexa

Função forçadora complexa

- **A resolução de equações diferenciais é muito complicada para ter utilidade em cálculos à mãos;**

- **O problema é simplificado se optarmos antes pela função forçadora complexa:**

Em lugar desta: $v_S = V_m \cos \omega t$ **Função forçadora sinusoidal**

Usamos antes esta: $v_S = V_m e^{j\omega t}$ **Função forçadora complexa**

E porque é que esta mudança para a função complexa é legítima?

Função forçadora complexa

… Porque segundo a *Fórmula de Euler*:

$$V_m e^{j\omega t} = \underbrace{V_m \cos \omega t}_{\text{Função forçadora real dada}} + \underbrace{jV_m \sin \omega t}_{\text{Função forçadora imaginária}}$$

Função forçadora complexa

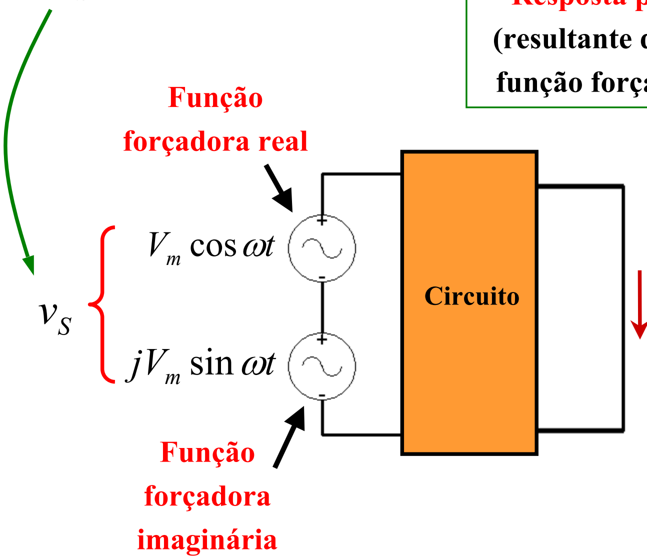
- **Portanto, ao aplicar a função forçadora complexa estamos, de facto, a aplicar, em simultâneo, duas funções:**
  - **A função forçadora sinusoidal usada no circuito real;**
  - **Uma função forçadora imaginária.**

- **O resultado obtido da análise, terá também uma parte real e uma parte imaginária. A parte real será a resposta desejada. A parte imaginária deve ser ignorada.**

Aplicação de uma função forçadora complexa

- **Esta abordagem funciona graças ao Princípio da Sobreposição.**

$$v_S = V_m e^{j\omega t}$$



Resposta procurada (resultante do efeito da função forçadora real)

Resposta imaginária (resultante do efeito da função forçadora imaginária)

$$i = I_m \cos(\omega t + \phi) + jI_m \sin(\omega t + \phi)$$

$$i = I_m e^{j(\omega t + \phi)}$$

Fasores

O fasor

- Uma grandeza sinusoidal é completamente caracterizada pela amplitude, pela fase e pela frequência;

$$i = I_m \cos(\omega t + \phi) \quad \longrightarrow \quad i = I_m e^{j(\omega t + \phi)}$$

- Mas num circuito linear, a frequência é a mesma para todas as tensões e correntes, pelo que a sua indicação é supérflua;

- Vamos então optar por uma representação complexa, na forma polar, que omite a frequência:

$$i = I_m e^{j\phi} \quad \longrightarrow \quad I = I_m \angle \phi$$

representação abreviada que se designa por **fasor**.

O fasor

- Assim, a função forçadora real

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + 0) \xrightarrow{\text{é representada pelo fasor}} \mathbf{V} = V_m \angle 0^{\circ}$$

e a resposta real

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi) \xrightarrow{\text{é representada pelo fasor}} \mathbf{I} = I_m \angle \phi$$

- Fasores são quantidades complexas; são escritos em maiúsculas e em bold;

- Fasores não são funções do tempo.

i(t) é uma representação no domínio do tempo	**I** é uma representação no domínio da frequência

Relações fasoriais para R, L e C

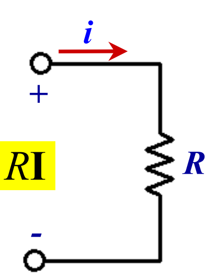
- **Sendo representações no domínio da frequência, os fasores têm a vantagem de transformar as relações diferencias corrente-tensão das bobinas e condensadores, em simples relações algébricas, simplificando assim a análise de circuitos em regime sinusoidal estacionário;**

- **Vejamos então como ficam as relações corrente-tensão dos três elementos passivos que conhecemos, no domínio da frequência:**
  - **Resistência;**
  - **Bobina;**
  - **Condensador.**

Relação entre os fasores V e I na resistência

$$V_m\angle 0^\circ = RI_m\angle\phi \quad \text{ou} \quad \mathbf{V} = R\mathbf{I}$$

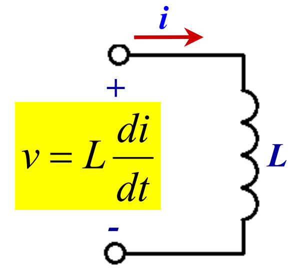
$\mathbf{V} = R\mathbf{I}$



- **Na forma fasorial (domínio da frequência), a relação corrente-tensão na resistência é igual à do domínio do tempo;**

- **Isto implica $\phi = 0$, ou seja, tensão e corrente estão sempre em fase no circuito.**

Relação entre os fasores V e I na bobina



- Para a bobina temos $v(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$

Substituindo *v(t)* pela função forçadora complexa

$$v(t) = V_m e^{j\omega t}$$

e *i(t)* pela resposta complexa $i(t) = I_m e^{j(\omega t+\phi)}$

obtemos $V_m e^{j\omega t} = L\dfrac{d}{dt}\left(I_m e^{j(\omega t+\phi)}\right) = j\omega L I_m e^{j(\omega t+\phi)}$

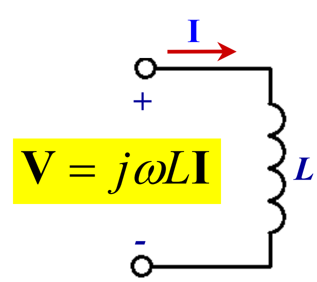
Dividindo por $e^{j\omega t}$ obtemos $V_m = j\omega L I_m e^{j\phi}$

O que dá na forma polar $V_m\angle 0^\circ = j\omega L I_m \angle\phi$

A relacão fasorial é portanto $\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}$

Relação entre os fasores V e I na bobina

$$\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}$$



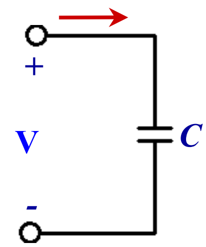
- Ou seja, a relação diferencial entre *v(t)* e *i(t)* que existe no domínio do tempo, transforma-se numa relação algébrica no domínio da frequência;

- Como o ângulo do factor *jωL* é *90º*, a fase de *V* é igual à fase de *I* mais *90º* - ou seja, a corrente está atrasada em relação à tensão de *90º*.

Relação entre os fasores V e I no condensador

$$\mathbf{I} = j\omega C\mathbf{V}$$

$\mathbf{I} = j\omega C\mathbf{V}$



- Mais uma vez, obtemos uma relação algébrica entre os fasores de corrente e tensão no domínio da frequência;

- Aqui é a fase de I que é igual à fase de V mais 90^o - ou seja, a corrente está avançada em relação à tensão de 90^o.

- É de notar a semelhança entre as relações corrente-tensão das bobinas e condensadores no domínio da frequência e a lei de Ohm;

Técnicas de Análise de Circuitos com fasores

Técnicas de análise de circuitos com fasores

- **Também se aplicam quando as tensões e as correntes são representadas por fasores.**

KVL

Ao longo de um caminho fechado temos $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \ldots + \mathbf{V}_N = 0$

KCL

Em qualquer nó de um circuito verifica-se $\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \ldots + \mathbf{I}_N = 0$

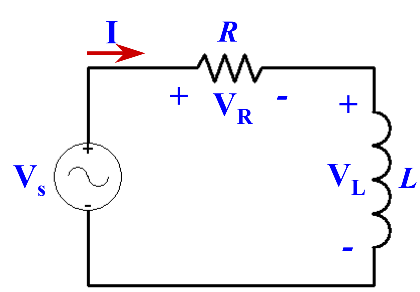
- **Análise Nodal e Análise de Malhas são também aplicáveis no domínio da frequência;**

- **O mesmo pode ser dito em relação aos Principio da Sobreposição, Transformações de fontes e teoremas de Thévenin e Norton.**

Aplicação da KVL ao circuito RL

- **Agora, tensões e correntes são representadas pelo fasor correspondente.**

- **A aplicação da KVL faz-se da mesma maneira:**



$$-\mathbf{V}_S + \mathbf{V}_R + \mathbf{V}_L = 0$$

Substituindo pelas relações V/I obtidas antes

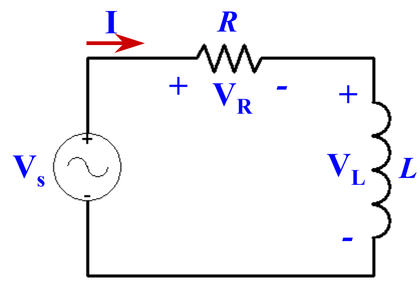
$$-\mathbf{V}_S + R\mathbf{I} + j\omega L\mathbf{I} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_S}{R + j\omega L}$$

Se, no domínio do tempo, a fonte é $V_s = V_m cos\omega t$, então o fasor correspondente é

$$\mathbf{V}_S = V_m \angle 0^{\circ}$$

Aplicação da KVL ao circuito RL

Pelo que $\mathbf{I} = \dfrac{V_m \angle 0^o}{R + j\omega L}$



$$\mathbf{I} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \angle\left(-arctg\,\frac{\omega L}{R}\right)$$

Relembrando…

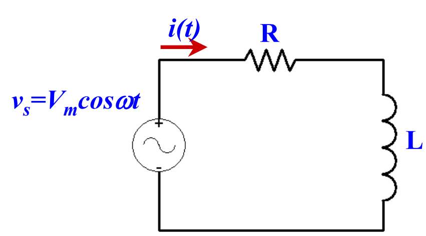
$$\mathbf{I} = I_m \angle \phi \quad \Longrightarrow \quad i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

Convertemos para o domínio do tempo

$$i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - arctg\,\frac{\omega L}{R}\right)$$

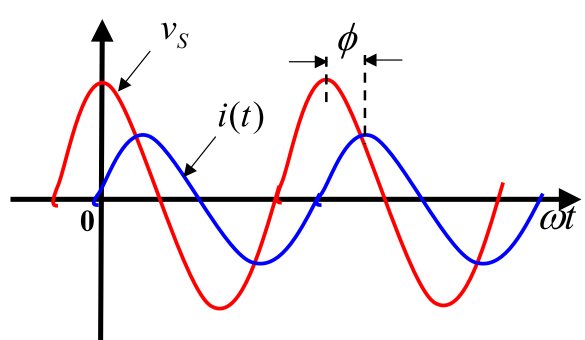
Conclusões

$$\boxed{i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - arctg\,\frac{\omega L}{R}\right)}$$



- **A amplitude da resposta é proporcional à amplitude da função forçadora – se assim não fosse o circuito não era linear!**

- **A amplitude da resposta diminui com *R*, *L* e *ω*, mas não de forma proporcional;**



- **A corrente está atrasada em relação à tensão de um ângulo, ϕ, entre e *0* e *90º*:**
  - ***L = 0*** **- corrente está em fase com a tensão;**
  - ***R = 0*** **- corrente está atrasada 90º.**

Impedância

- **No domínio da frequência, vimos que as relações V/I para os três elementos passivos que conhecemos são**

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I} \qquad \mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I} \qquad \mathbf{V} = \frac{\mathbf{I}}{j\omega C}$$

Escrevendo estas expressões como a razão entre os fasores de tensão e corrente

$$\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = R \qquad \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = j\omega L = X_L \qquad \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{1}{j\omega C} = X_C$$

verificamos que estas razões dependem apenas dos valores dos elementos e da frequência;

- **Por se tratarem de razões entre V e I, estas quantidades complexas são expressas com unidades de Ohm. Chamam-se genericamente impedâncias e representam-se pela letra Z.**

Sinais e Sistemas Electrónicos – 2022/2023

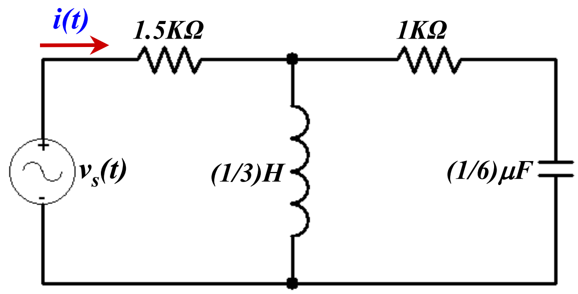
Impedância

$$\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = R \qquad \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = j\omega L = X_L \qquad \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{1}{j\omega C} = X_C$$

- **Embora possa ser um numero complexo, a impedância não é um fasor pois não tem uma correspondência no domínio do tempo.**

- **A validade das leis de Kirchhoff no domínio da frequência implica que as impedâncias podem ser associadas em série e em paralelo seguindo as mesmas regras usadas nas resistências.**

Exemplo 1 – Determinar $i(t)$ no circuito sabendo que $v_s(t) = 40\sin(3000t)$ [Volts]



- **Comecemos por calcular o fasor da função forçadora.**

$$v_s(t) = 40\sin 3000t \;\; = 40\cos(3000t - 90^\circ) \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{V_S} = 40\angle -90^\circ\, V$$

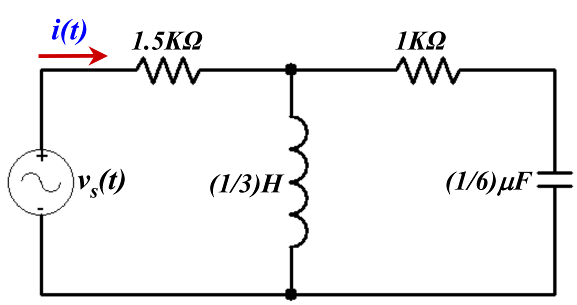
- **À frequência de *3000rad/s*, as impedâncias da bobina e do condensador são:**

$$\mathbf{Z}_L = j\omega L = j(3000)(1/3) = j1K\Omega$$

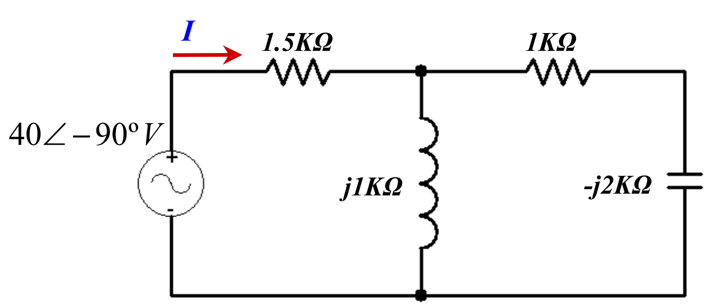
$$\mathbf{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{(3000)(1/6)10^{-6}} = -j2K\Omega$$

Exemplo 1

- **Desenhamos agora o circuito no domínio na frequência.**

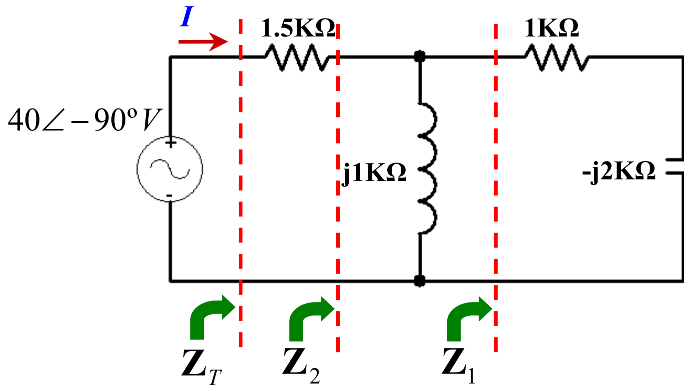


Toda a análise é feita agora neste circuito!



Exemplo 1

- **Calculamos agora a impedância total vista pela fonte**



$$\mathbf{Z}_1 = (1 - j2)K\Omega$$

$$\mathbf{Z}_2 = j1 // \mathbf{Z}_1 = \frac{j1(1-j2)}{j1+1-j2} = (0.5 + j1.5)K\Omega$$

$$\mathbf{Z}_T = 1.5 + \mathbf{Z}_2 = (2 + j1.5)K\Omega$$

Convertendo para a forma polar $\mathbf{Z}_T = 2.5\angle 36.87^{\text{o}}\, K\Omega$

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V_S}}{\mathbf{Z}_T} = \frac{40\angle -90^{\text{o}}}{2.5\angle 36.87^{\text{o}}} = 16\angle -126.9^{\text{o}}\ \ mA$$

- **O que transformando de volta para o domínio do tempo resulta em**

$$i(t) = 16\cos(3000t - 126.9^{\text{o}})\quad mA$$

Potência em regime sinusoidal

Valor eficaz

Potência

- **Potência instantânea**

$$p(t) = v(t)i(t)$$

- **Potência média - é a média da potência instantânea calculada num período:**

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt$$

Potência média em regime sinusoidal

- **Admitamos que a tensão e a corrente num dado elemento de circuito é dada por:**

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta) \quad \textbf{e} \quad i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

- **A potência instantânea nesse elemento é portanto**

$$p(t) = V_m I_m \cos(\omega t + \theta)\cos(\omega t + \phi)$$

$$= \frac{1}{2}V_m I_m \cos(\theta - \phi) + \frac{1}{2}V_m I_m \cos(2\omega t + \theta + \phi)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = $$
$$= 1/2\cos(\alpha+\beta) +$$
$$+ 1/2\cos(\alpha-\beta)$$

- **Ou seja, *p(t)* inclui duas parcelas**
  - **Uma que é constante e independente do tempo;**
  - **Outra que varia ao dobro da frequência de operação**

Potência média em regime sinusoidal

- **A potência média é portanto**

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \left[\frac{1}{2}V_m I_m \cos(\theta-\phi) + \frac{1}{2}V_m I_m \cos(2\omega t+\theta+\phi)\right]dt$$

- **Como o valor médio de um coseno (ou seno) num período é zero, segue-se que**

$$P = \frac{1}{2}V_m I_m \cos(\theta-\phi)$$

Apliquemos este resultado às situações em que o elemento em causa é

- **uma resistência;**
- **um elemento reactivo: bobina ou condensador.**

Potência absorvida por uma resistência

$$P_R = \frac{1}{2}V_m I_m \cos(\theta-\phi)$$

- **Como numa resistência**
  - **a corrente e a tensão estão em fase:** $\theta-\phi=0$
  - **e** $V_m = I_m R$

então

$$P_R = \frac{1}{2}I_m^{\ 2}R = \frac{1}{2}\frac{V_m^{\ 2}}{R}$$

Potência absorvida por uma bobina ou um condensador

- **Numa bobina temos** $\theta - \phi = 90^{o}$

- **Numa condensador temos** $\theta - \phi = -90^{o}$

Em qualquer dos casos temos $\cos(\theta - \phi) = 0$

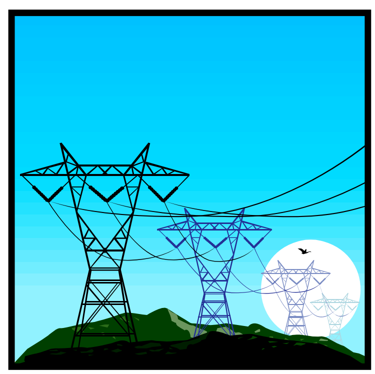
logo $P_L = 0$ **e** $P_C = 0$

A potência média fornecida a um circuito contendo apenas bobinas e condensadores é zero.

Valor eficaz

- **Como sabemos, a energia elétrica chega a nossas casas na forma de uma tensão alternada sinusoidal com o valor de 220V. 220V é o chamado valor eficaz da tensão;**

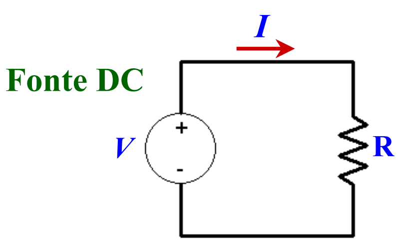
- **O valor eficaz de uma tensão ou corrente periódica, é uma medida da eficácia dessa tensão ou corrente de fornecer potência a uma carga;**

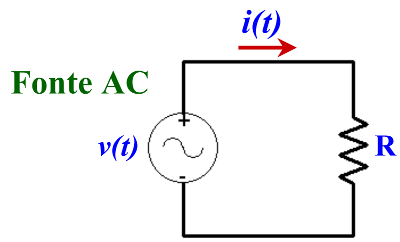


Valor eficaz de um corrente periódica: é igual ao valor da corrente DC que, ao fluir através de uma dada resistência, fornece a mesma potência média que a corrente periódica.

Valor eficaz

Vejamos como calcular o valor eficaz de uma corrente (ou tensão) sinusoidal atendendo à definição.





$$P_{DC} = I^2 R \qquad\qquad P_{AC} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)^2 R dt$$

Igualando as duas potências, definimos o valor eficaz da corrente

$$I_{eff}{}^2 R = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)^2 R dt \quad \Rightarrow \quad I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i(t)^2 dt}$$

Valor eficaz

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i(t)^2 dt}$$

- **O valor eficaz é, assim, obtido tirando a raiz quadrada à média do quadrado da corrente. Por esse motivo é habitualmente chamado de valor RMS (*Root-Mean-Square*).**

- **Se *i(t)* for a corrente sinusoidal**

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi) \qquad \textbf{com} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

O seu respectivo valor eficaz será

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m{}^2 \cos^2(\omega t + \phi) dt}$$

Valor eficaz

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^{\,2} \cos^2(\omega t + \phi) dt}$$

$$\boxed{\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\frac{I_m^{\,2}}{2}\int_0^T [1 + \cos(2\omega t + 2\phi)] dt}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

$$= I_m \sqrt{\frac{\omega}{4\pi}\int_0^{2\pi/\omega} [1 + \cos(2\omega t + 2\phi)] dt} \quad = I_m \sqrt{\frac{\omega}{4\pi}[t]_0^{2\pi/\omega}}$$

$$\Rightarrow \quad I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

Valor eficaz

$$I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

- **O valor eficaz é portanto independente da fase da corrente ou tensão;**

- **A corrente $\sqrt{2}\cos(\omega t + \phi)$ tem o valor eficaz de *1A*, e por isso fornece a uma resistência a mesma potência média que uma corrente DC de *1A*;**

- **Notar que o factor $\sqrt{2}$ só é válido para ondas sinusoidais.**