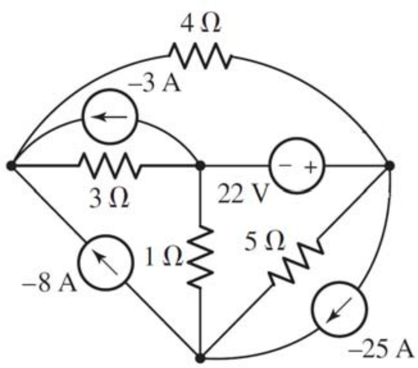
Sinais e Sistemas Electrónicos

Capítulo 2: Técnicas de Análise de Circuitos



Ernesto Martins
evm@ua.pt
DETI (gab. 4.2.38)
Universidade de Aveiro

Sumário

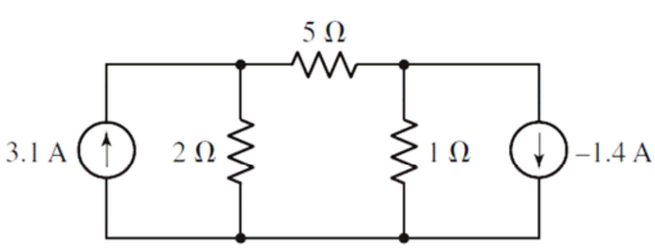
- **Análise de Nodal;**
- **Exemplos de cálculo;**
- **Análise Nodal com super-nós;**
- **Teorema de Thévenin;**
- **Exemplos de cálculo;**
- **Equivalente de Thévenin: Método Universal.**

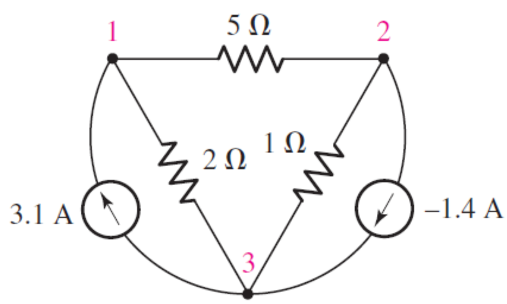
Análise Nodal

Análise de Nodal

- **Método sistemático que permite determinar as tensões em todos os nós de um circuito;**

- **nó – Ponto de ligação de dois ou mais elementos num circuito;**

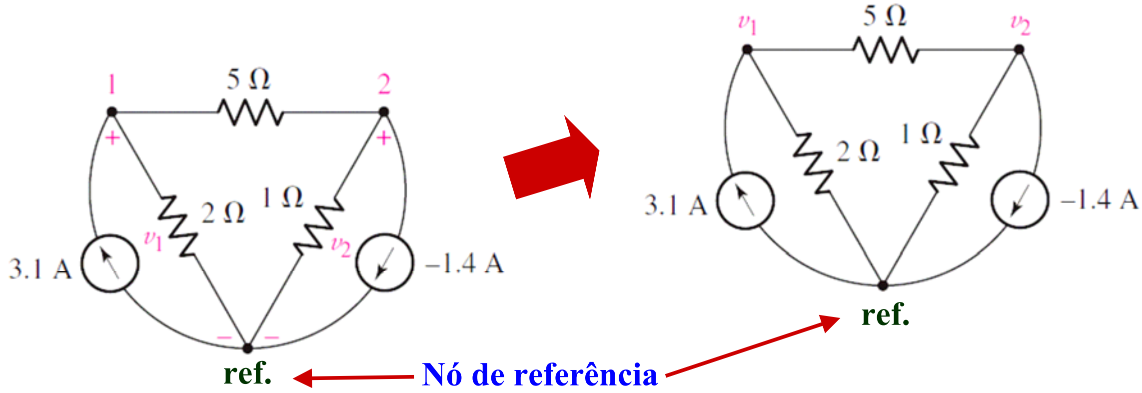




Circuito com 3 nós

Análise de Nodal – nó de referência

- Dado que uma tensão é sempre definida entre dois nós, designamos um dos nós do circuito como **Nó de Referência** – em relação ao qual todas as tensões são medidas.



- Quando referirmos, por exemplo, a tensão v_1, estaremos a referir-nos na realidade à tensão entre o **nó 1** e o **nó de referência**.

Sinais e Sistemas Electrónicos – 2022/2023

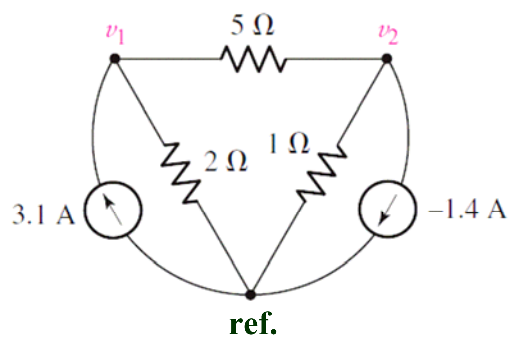
Análise de Nodal

- Para todos os efeitos práticos, o potencial eléctrico no nó de referência é considerado nulo;

- Um circuito com *N* **nós** tem *N-1* **tensões – as Tensões Nodais**;

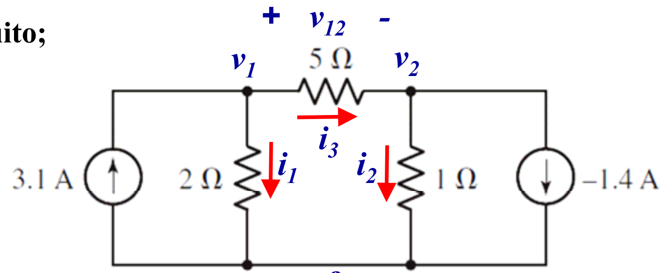
- A polaridade de referência das tensões nodais é geralmente considerada positiva **(+)** em cada nó e negativa **(-)** no nó de referência;

- Aplicando KCL a todos os nós **excepto o de referência**, obtemos um sistema de *N-1* **equações** com *N-1* **incógnitas** que nos permite determinar as tensões nodais.



Análise Nodal – exemplo 1

- **Apliquemos KCL aos nós do circuito;**



KCL: "A soma das correntes que entram num nó é igual à soma das correntes que saem desse nó"

nó 1: $$3.1 = i_1 + i_3$$

nó 2: $$i_3 = i_2 - 1.4$$

- **Exprimimos agora cada uma das correntes em função das tensões:**

$$i_1 = v_1/2 \qquad i_2 = v_2/1 \qquad i_3 = v_{12}/5 = (v_1 - v_2)/5$$

- **Substituindo acima obtém-se**

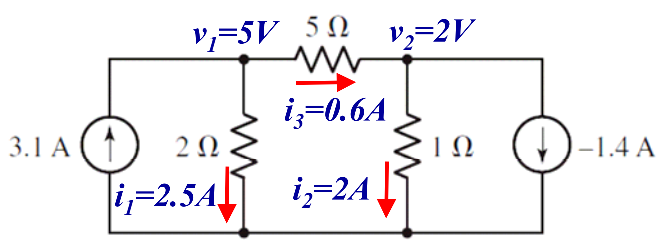
$$3 = 0.5v_1 + 0.2(v_1 - v_2)$$
$$0.2(v_1 - v_2) = 1v_2 - 2$$

Sinais e Sistemas Electrónicos – 2022/2023

Análise Nodal – exemplo 1

- **O que, rearranjando, dá o sistema**

$$\begin{cases} 3.5v_1 - v_2 = 15.5 \\ -v_1 + 6v_2 = 7 \end{cases}$$



- **Resolvendo por substituição obtém-se:**

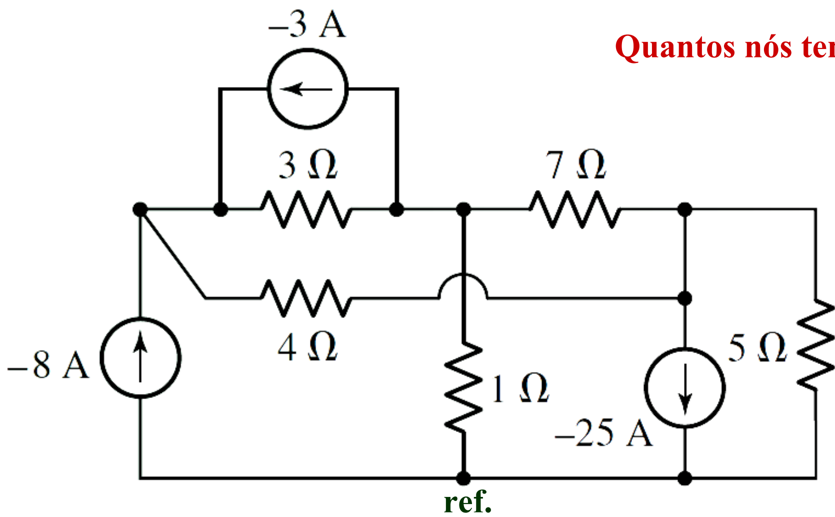
$$\begin{cases} v_1 = 5V \\ v_2 = 2V \end{cases}$$

- **Com as tensões nodais podemos agora calcular todas as correntes no circuito**

$$i_1 = v_1/2 = 2.5\text{A}$$
$$i_2 = v_2/1 = 2\text{A}$$
$$i_3 = (v_1 - v_2)/5 = 0.6A$$

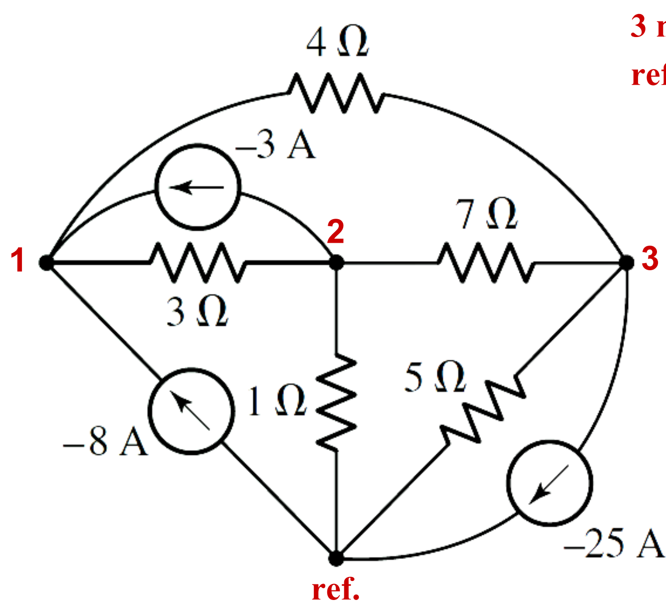
Análise Nodal – exemplo 2

- Determinar as tensões nodais no circuito dado.



Quantos nós tem?

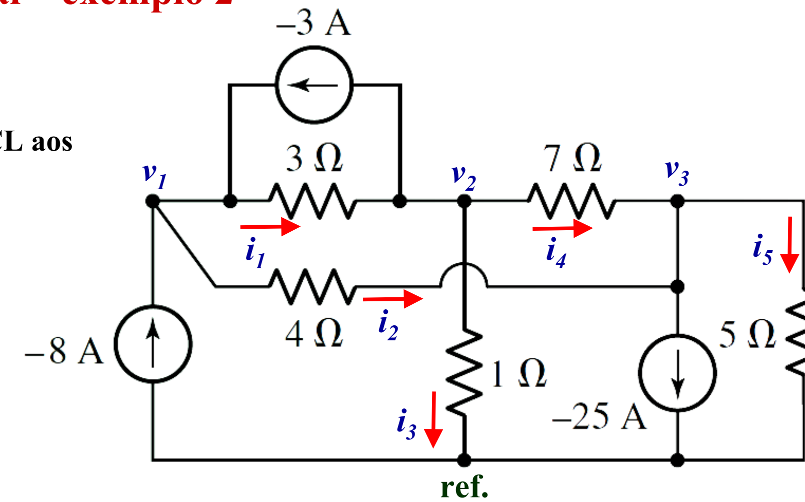
Análise Nodal – exemplo 2



3 nós mais o de referência!

Análise Nodal – exemplo 2

- **Aplicando KCL aos três nós:**



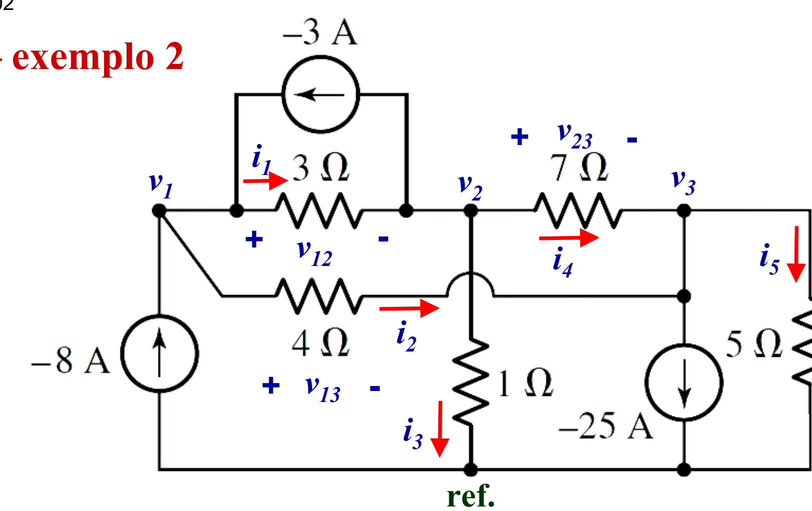
nó 1: $-8-3=i_1+i_2$

nó 2: $i_1=-3+i_3+i_4$

nó 3: $i_4+i_2=-25+i_5$

Análise Nodal – exemplo 2

- **Relacionando as correntes com as tensões, obtemos:**



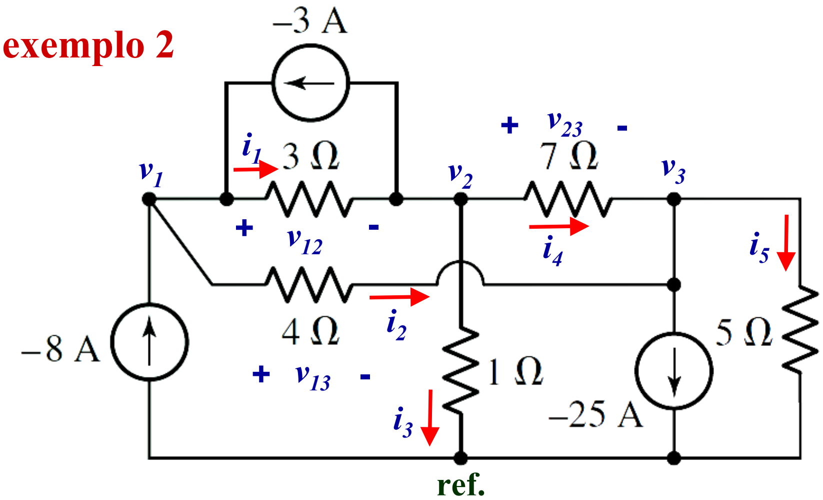
nó 1:

$$-8-3=i_1+i_2$$

$$-8-3=v_{12}/3+v_{13}/4=\frac{v_1-v_2}{3}+\frac{v_1-v_3}{4}$$

$$7v_1-4v_2-3v_3=-132$$

Análise Nodal – exemplo 2



- **Relacionando as correntes com as tensões, obtemos:**

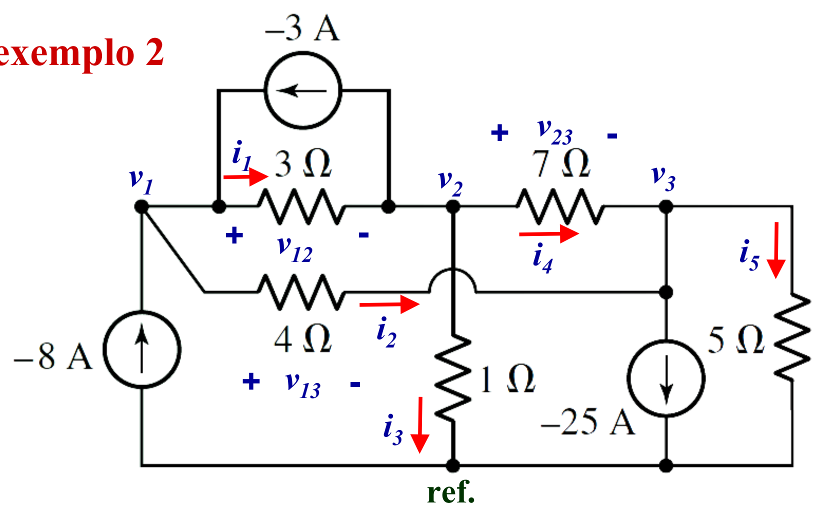
nó 2:

$$i_1 = -3 + i_3 + i_4$$

$$v_{12}/3 = -3 + v_2/1 + v_{23}/7 \Leftrightarrow \frac{v_1 - v_2}{3} = -3 + \frac{v_2}{1} + \frac{v_2 - v_3}{7}$$

$$7v_1 - 31v_2 + 3v_3 = -63$$

Análise Nodal – exemplo 2



- **Relacionando as correntes com as tensões, obtemos:**

nó 3:

$$i_4 + i_2 = -25 + i_5$$

$$v_{23}/7 + v_{13}/4 = -25 + v_3/5 \Leftrightarrow \frac{v_2 - v_3}{7} + \frac{v_1 - v_3}{4} = -25 + \frac{v_3}{5}$$

$$35v_1 + 20v_2 - 83v_3 = -3500$$

Análise Nodal – exemplo 2

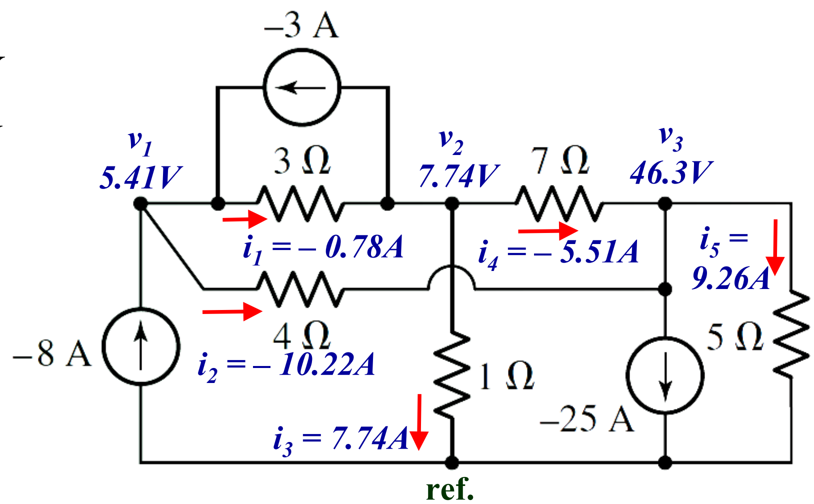
- O sistema de equações é:

$$\begin{cases} 7v_1 - 4v_2 - 3v_3 = -132 \\ 7v_1 - 31v_2 + 3v_3 = -63 \\ 35v_1 + 20v_2 - 83v_3 = -3500 \end{cases}$$

- Resolvendo obtém-se:

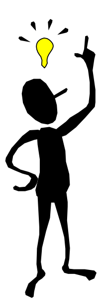
$$\begin{cases} v_1 = 5.41V \\ v_2 = 7.74V \\ v_3 = 46.3V \end{cases}$$

- Com as tensões nodais, podemos agora calcular todas as correntes.



Sinais e Sistemas Electrónicos – 2022/2023

Análise Nodal passo a passo



1. Contar o número de nós *N*;
2. Escolher um dos nós como nó de Referência;
3. Atribuir tensões aos nós: $v_1, v_2, \ldots v_{N-1}$;
4. Marcar correntes em todos os ramos;
5. Usando a Lei das Correntes de Kirchhoff (KCL), escrever *N-1* equações nodais.

Análise Nodal – Com fontes de tensão no meio

Como resolver?

Processo 1

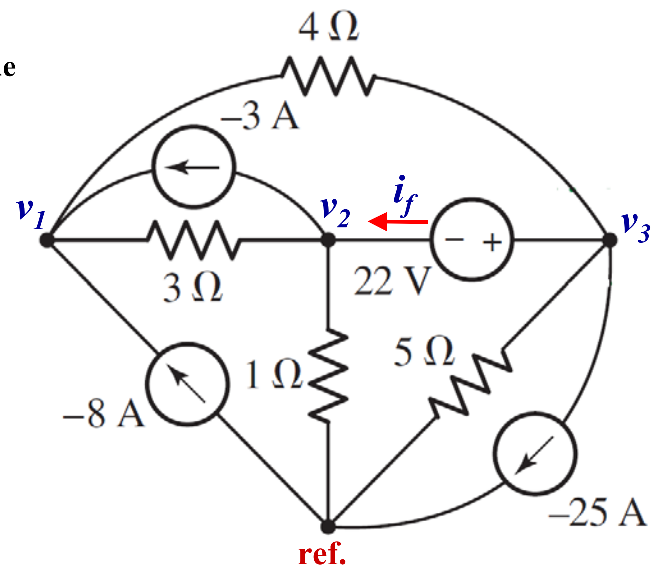
- **marcar uma corrente na fonte de tensão: i_f**
- **aplicar KCL aos 3 nós**
- **aplicar KVL aos nós 2 e 3:**

$v_3 - v_2 = 22$

Resultado:

4 equações com 4 incógnitas

MUITO COMPLICADO!!



Análise Nodal – Com fontes de tensão no meio

Processo 2

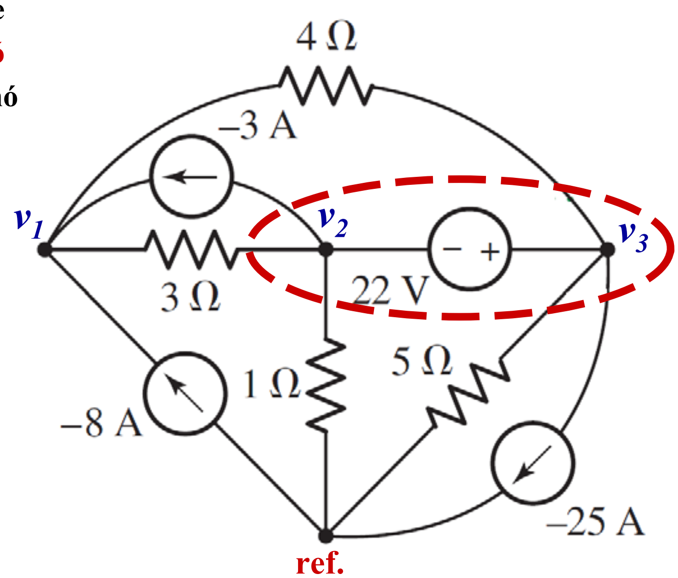
- **tratar os nós 2 e 3 mais a fonte de tensão como um só nó: um super nó**
- **aplicar KCL ao nó 1 e ao super-nó**
- **aplicar KVL aos nós 2 e 3:**

$v_3 - v_2 = 22$

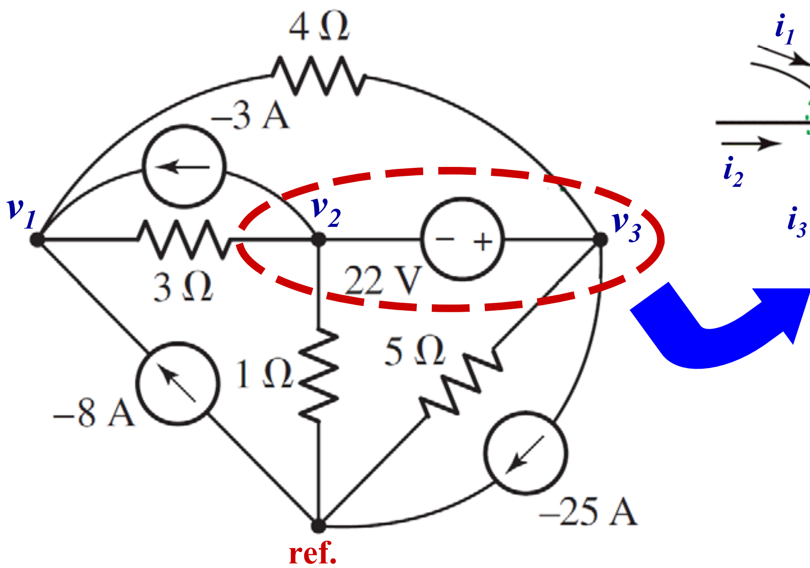
Resultado:

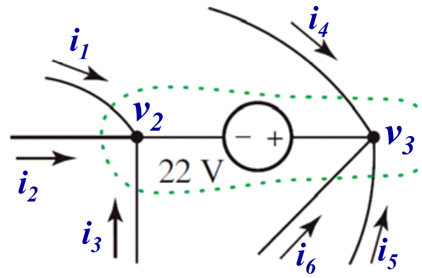
3 equações com 3 incógnitas

PROCESSO MAIS SIMPLES!!



Análise Nodal – com super-nó



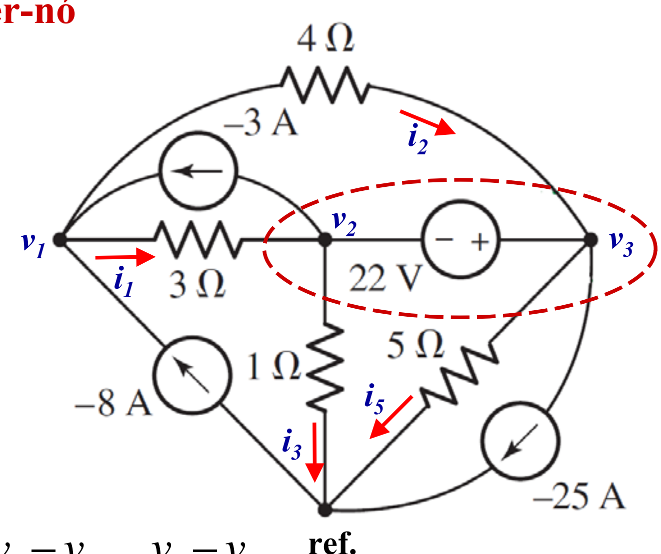


$$\sum_{k=0}^{6} i_k = 0$$

- **Se a soma das correntes que entram no nó v_2 é zero e a soma das correntes que entram no nó v_3 é zero, então a soma das correntes que entram nos dois nós também tem de ser zero.**

Análise Nodal – com super-nó

- **Apliquemos então KCL**



nó 1:

$$-8-3 = i_1 + i_2$$

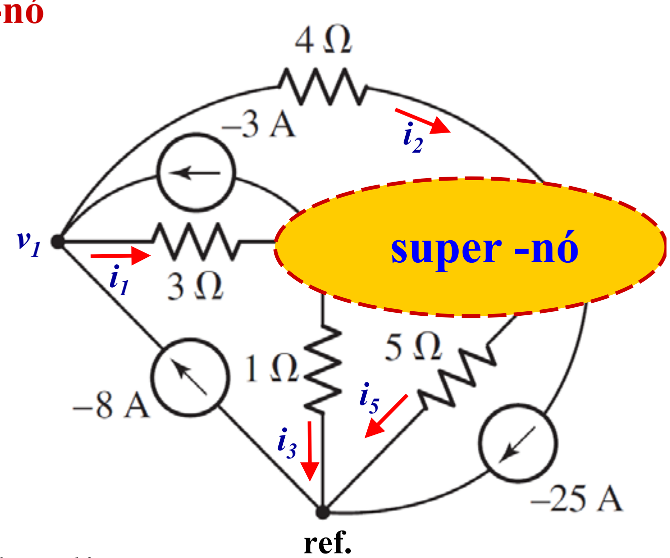
$$-8-3 = v_{12}/3 + v_{13}/4 = \frac{v_1 - v_2}{3} + \frac{v_1 - v_3}{4}$$

$$7v_1 - 4v_2 - 3v_3 = -132$$

... é a mesma equação do exemplo anterior

Análise Nodal – com super-nó

NOTA: O super-nó inclui a fonte de tensão + os dois nós aos quais a fonte está ligada



super -nó:

$$i_1 + i_2 = -3 + i_3 + i_5 - 25$$

$$\frac{v_1 - v_2}{3} + \frac{v_1 - v_3}{4} = -28 + \frac{v_2}{1} + \frac{v_3}{5}$$

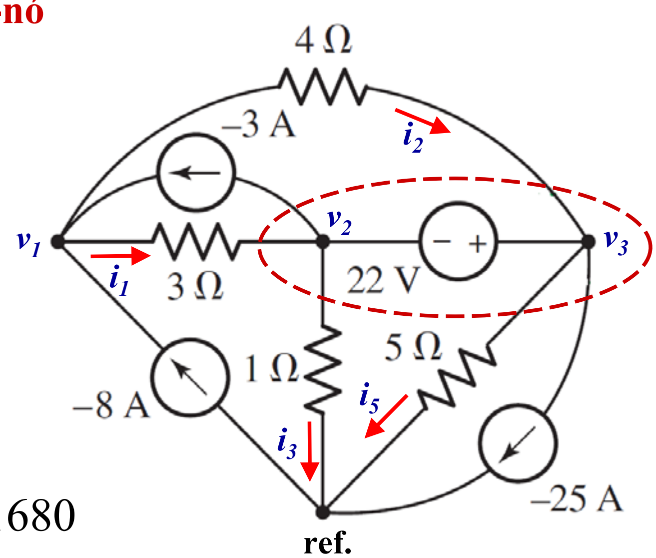
$$35v_1 - 80v_2 - 27v_3 = -1680$$

Análise Nodal – com super-nó

- **Finalmente, aplicamos KVL ao super-nó:**

$$v_3 - v_2 = 22$$

- **pelo que o sistema de equações final é**



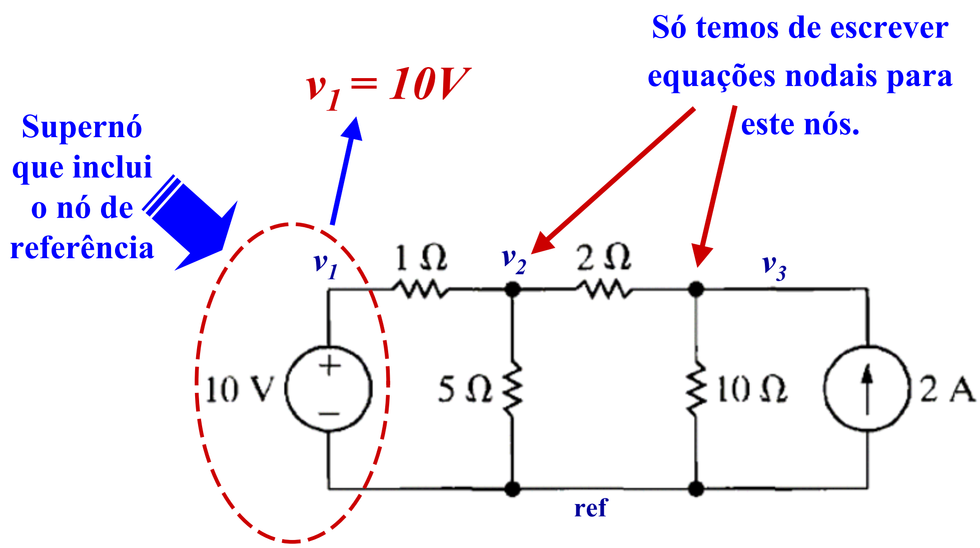
$$\begin{cases} 7v_1 - 4v_2 - 3v_3 = -132 \\ 35v_1 - 80v_2 - 27v_3 = -1680 \\ v_3 - v_2 = 22 \end{cases}$$

- **Resolvendo obtém-se:**

$$\begin{cases} v_1 = 1.07V \\ v_2 = 10.5V \\ v_3 = 32.5V \end{cases}$$

Análise Nodal – super-nó que contém o nó de referência

- **Quando o super-nó inclui o nó de referência a análise fica mais fácil!**



Análise Nodal passo a passo (com super-nós)

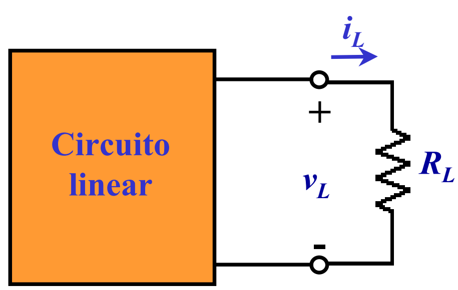
1. **Contar o número de nós *N*;**
2. **Escolher nó de Referência;**
3. **Atribuir tensões aos nós: $v_1, v_2, \ldots v_{N-1}$;**
4. **Marcar correntes em todos os ramos;**
5. **Se o circuito contiver fontes de tensão, formar super-nós que contenham essas fontes e os nós a que estão ligados;**
6. **Usando KCL, escrever uma equação para cada nó (excepto o de referência) e para cada super-nó que não contenha o nó de referência;**
7. **Usando KVL relacionar a tensão de cada fonte com as tensões nodais.**

Teorema de Thévenin

Léon Charles Thévenin
(1857 - 1926)

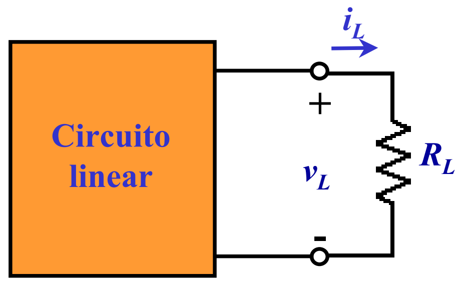
Teorema de Thévenin

- **Técnica que permite simplificar a análise de circuitos lineares.**



- **Útil nos casos em que estamos interessados em saber o que se passa *apenas num elemento ou numa parte do circuito*, por ex:**
  - **Qual é a potência dissipada em R_L?**
  - **Qual é o valor de v_L para diferentes valores de R_L?**

Teorema de Thévenin

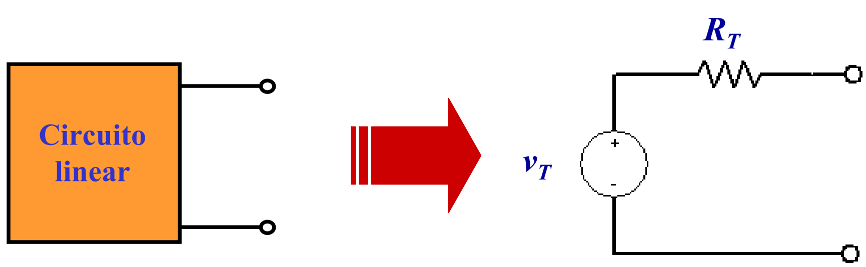


- **Segundo o teorema de Thévenin, podemos substituir todo o circuito linear por um circuito equivalente mais simples;**

- **A análise do que se passa em R_L prossegue depois usando este circuito equivalente.**

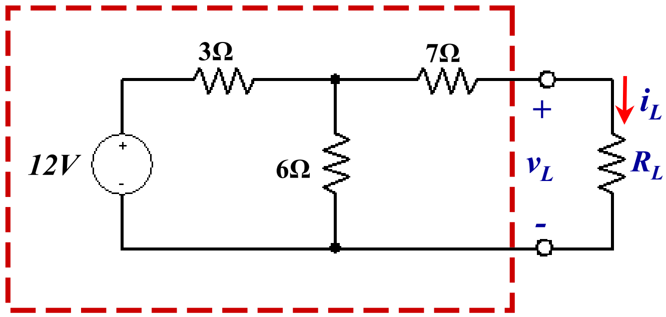
Teorema de Thévenin

- **Segundo este teorema o circuito equivalente é constituído por uma fonte de tensão com uma resistência em série.**



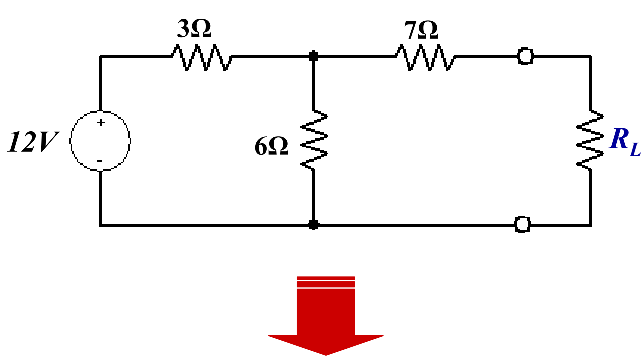
Teorema de Thévenin

- Suponha-se que queremos saber o que se passa na resistência R_L: por exemplo, qual é o valor de i_L para vários valores de R_L.



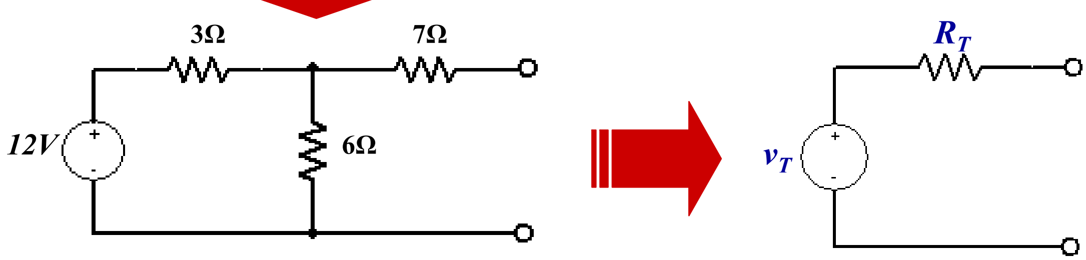
- Podemos começar por simplificar o resto do circuito (a parte dentro do rectângulo), determinando o seu equivalente de Thévenin.

Determinação do equivalente de Thévenin



1- Começamos por remover a resistência R_L.

2- Calculamos o equivalente de Thévenin entre os terminais.

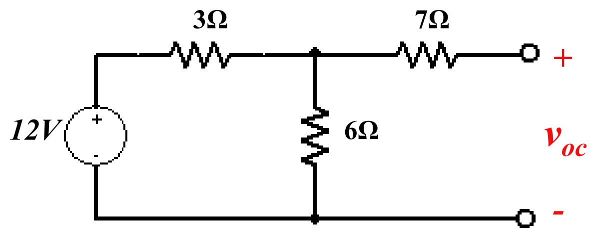


- Determinar o equivalente de Thévenin resume-se a calcular os valores de v_T e R_L.

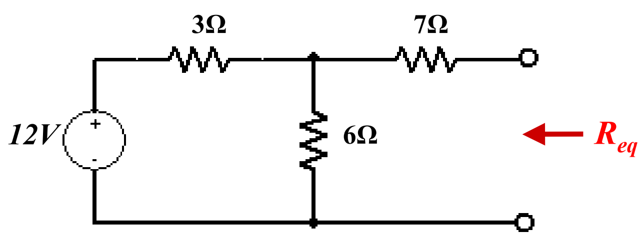
Como se procede então?

Determinação do equivalente de Thévenin

- **Determinamos a tensão que aparece aos terminais do circuito em aberto, ou seja, sem nada ligado.**



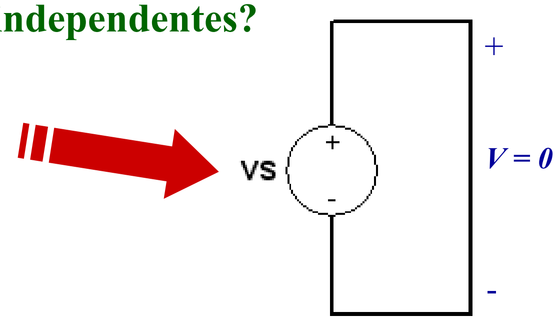
- **Determinamos a resistência equivalente entre os terminais do circuito quando este é desativado - todas as fontes independentes de tensão são curto-circuitadas e todas as fontes independentes de corrente são abertas (as fontes dependentes mantêm-se).**



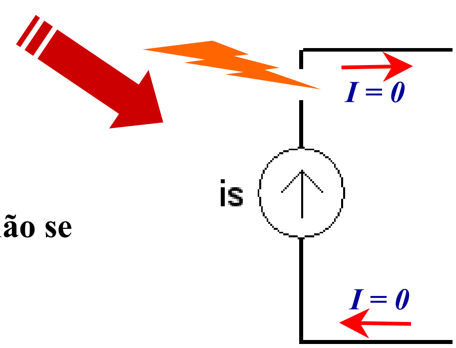
Determinação do equivalente de Thévenin

Como se desactivam as fontes independentes?

- **Fontes de tensão são curto-circuitadas ⇒ $V = 0$;**



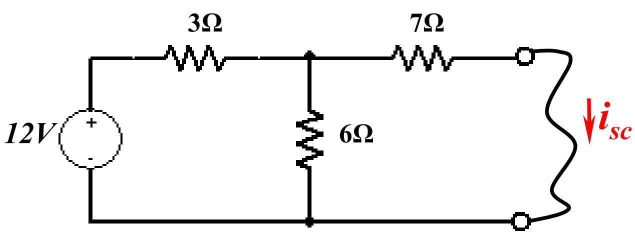
- **Fontes de corrente são abertas ⇒ $I = 0$;**



- **Fontes dependentes não se desactivam.**

Determinação do equivalente de Thévenin

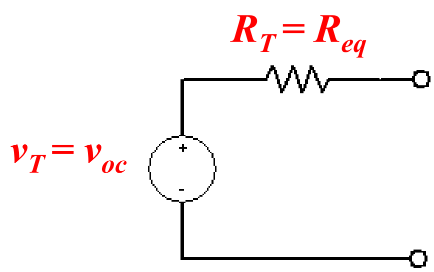
- **Se for mais fácil, podemos determinar a corrente entre os terminais do circuito quando estes são curto-circuitados – a corrente de curto-circuito:**



Esta corrente relaciona-se com os valores anteriores por:

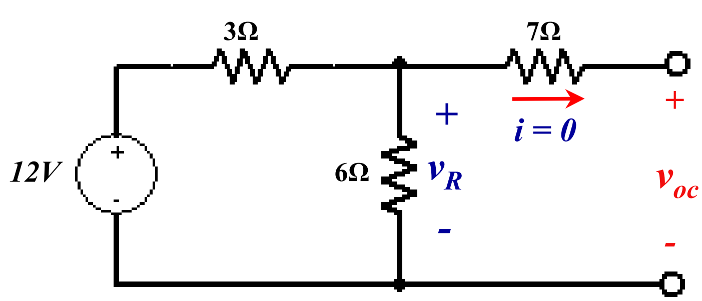
$$i_{sc} = \frac{v_{oc}}{R_{eq}}$$

Finalmente, o equivalente de Thévenin do circuito A é dado por



Aplicação do teorema de Thévenin

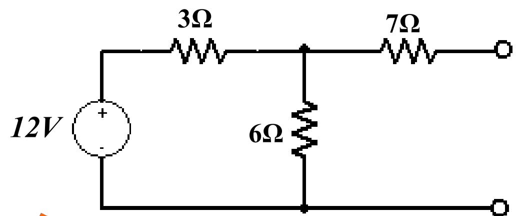
1- Determinação de v_{oc}, a tensão em circuito aberto do circuito A:



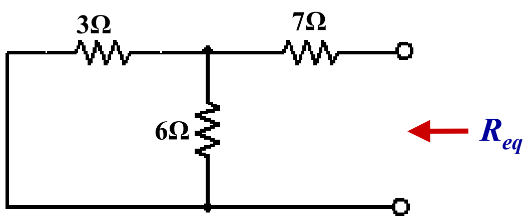
$$v_{oc} = v_R = \frac{6}{6+3} 12 = 8V$$

Aplicação do teorema de Thévenin

2- Determinação de R_{eq}, a resistência equivalente ou de saída:



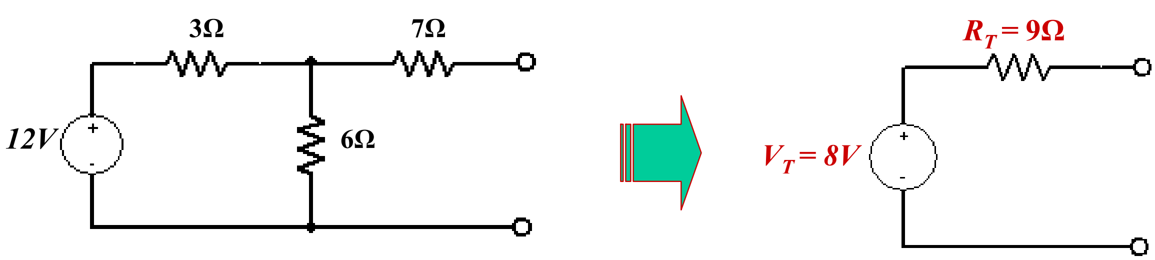
Desactivação das fontes…



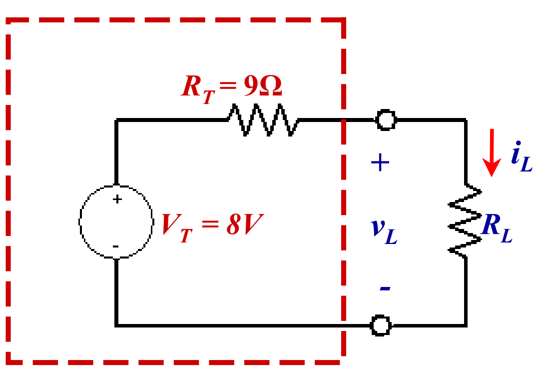
$$R_{eq} = 3//6 + 7 = \frac{3x6}{3+6} + 7 = 9\Omega$$

Aplicação do teorema de Thévenin

- **O equivalente de Thévenin do circuito é portanto:**



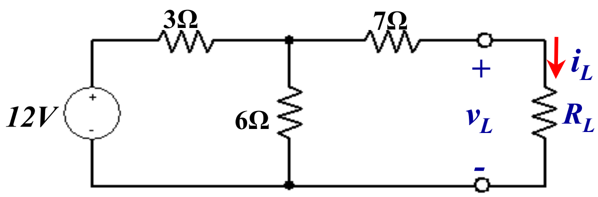
Equivalente de Thévenin do Circuito



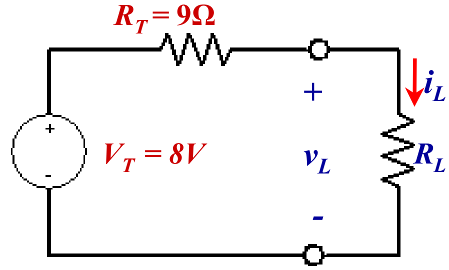
- **Neste circuito é muito mais fácil calcular, por exemplo, os valores de i_L para vários valores de R_L.**

Aplicação do teorema de Thévenin

Circuito original



Circuito c/ equivalente de Thévenin

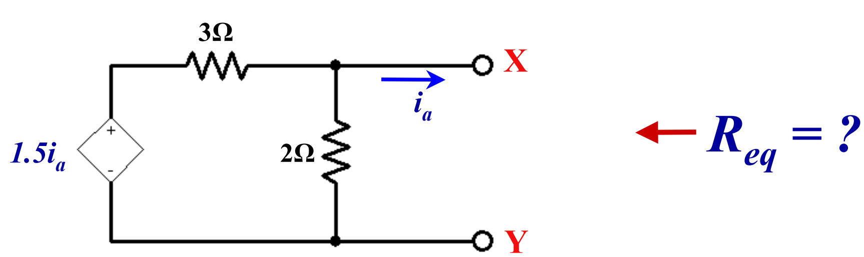


- **Com o equivalente de Thévenin é possível obter informações úteis que não estão disponíveis de imediato no circuito original:**
  - **O valor máximo de v_L (tensão de circuito aberto) é $8V$;**
  - **O valor máximo de i_L (corrente de curto-circuito) é $(8/9)A$;**
  - **O circuito A fornece a potência máxima quando $R_L = 9\Omega$.**

Equivalente de Thévenin – dificuldades

- **Em circuitos com fontes dependentes, por vezes é impossível obter o valor de R_T.**

Exemplo: **determinar o equivalente de Thévenin do circuito entre X e Y.**

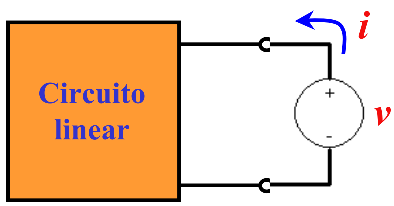


- **Obter R_{eq} por simples combinação de resistências não é possível porque a fonte dependente não pode ser desactivada.**

Equivalente de Thévenin - Método universal

- **É um método que pode ser aplicado a todos os circuitos.**

Como funciona?



- **Dado o circuito linear…**
- **… aplicamos nos terminais uma fonte de tensão de valor *v*, com corrente *i*.**
- **Depois analisamos o circuito de forma a obter uma expressão de *v* em função de *i*, com a forma**

$$v = ai + b$$

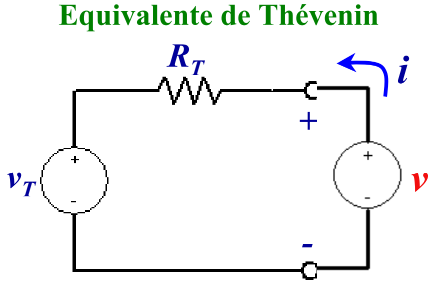
- **Dos coeficientes *a* e *b* tiramos**

$$R_T = a \quad \text{e} \quad v_T = b$$

Sinais e Sistemas Electrónicos – 2022/2023

Método universal - demonstração

- **É fácil mostrar que o Método Universal funciona recorrendo ao próprio Equivalente de Thévenin.**



- **Aplicamos então aos terminais uma fonte de tensão de valor *v*, com corrente *i*.**
- **Aplicando KVL:** $-v_T - R_T i + v = 0$

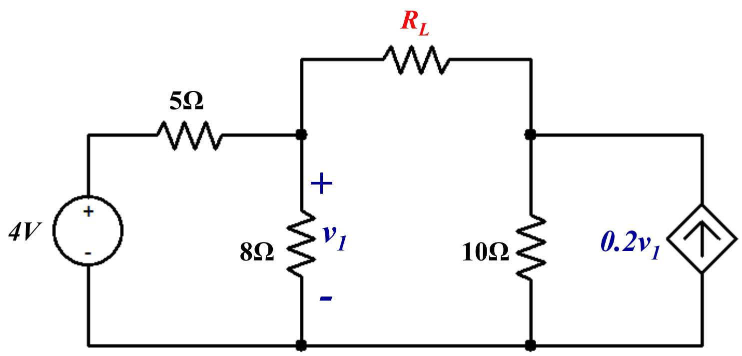
$$v = R_T i + v_T$$

- **Obtemos então uma relação de *v* em função de *i*, com a forma**

$$v = ai + b$$

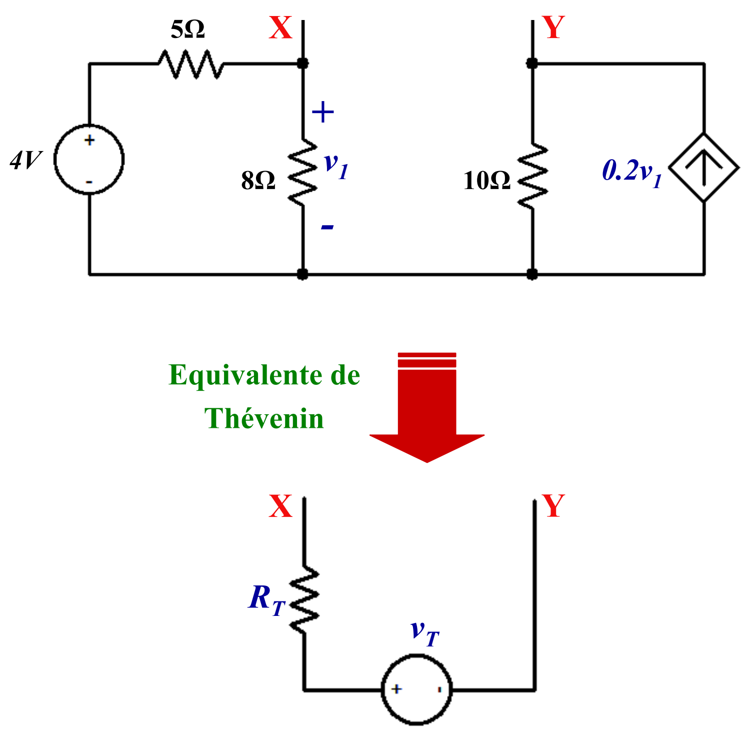
- **Donde se conclui que $a = R_T$ e $b = v_T$.**

Exemplo: **determinar o equivalente de Thévenin visto pela resistência** R_L.



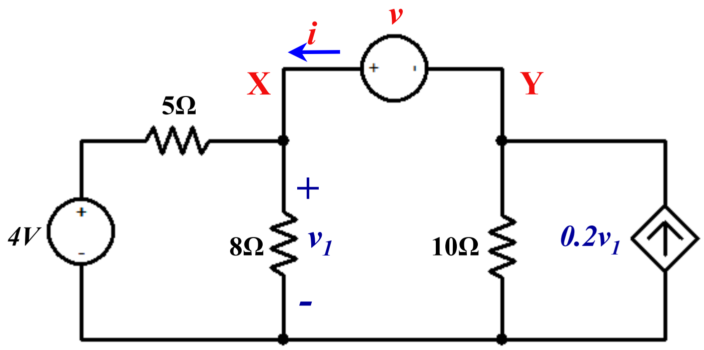
Exemplo

- **Retiramos RL e determinarmos o Equivalente de Thévenin entre os terminais X e Y.**



Exemplo

- **Como o circuito tem uma fonte dependente, teremos de usar o Método Universal;**



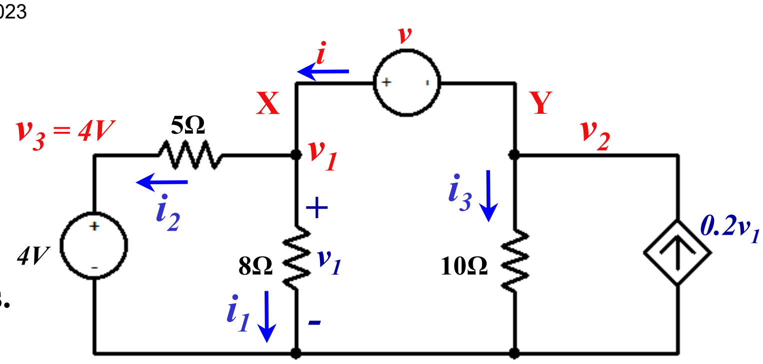
- **Agora o objectivo é determinar uma relação matemática de *v* em função de *i*, com a forma**

$$v = ai + b$$

Exemplo

- **Vamos fazer uma Análise Nodal;**

- **Marcamos correntes.**



- **Aplicando KCL:**

$$\begin{cases} i = i_1 + i_2 \\ 0.2v_1 = i + i_3 \end{cases}$$

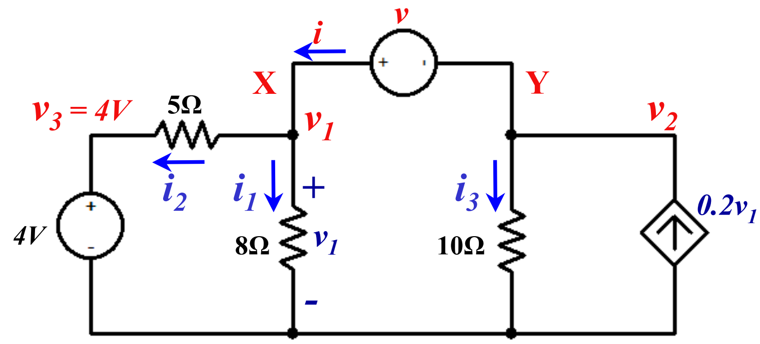
e KVL: $v_1 - v_2 = v$

$$\begin{cases} i = \dfrac{v_1}{8} + \dfrac{v_1 - 4}{5} \\ 0.2v_1 = i + \dfrac{v_2}{10} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad v_1 = \frac{1}{13}(40i + 32)$$

$$\Rightarrow \quad v_2 = \frac{64}{13} - \frac{64}{13}i$$

Exemplo



- **Substituindo as duas equações na de *v*:**

$$v_1 - v_2 = v \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{13}(40i+32)-\left(\frac{64}{13}-\frac{64}{13}i\right)=v$$

- **De onde tiramos a expressão apenas com *v* e *i*, como pretendido**

$$v=\frac{90}{13}i-\frac{32}{13}$$

Exemplo

$$v=\frac{90}{13}i-\frac{32}{13}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} v = ai + b \\ R_T = a \quad \text{e} \quad v_T = b \end{array}}$$

$$v = 6.92i - 2.46$$

Equivalente de Thévenin