3. Campos Eléctrico e Magnético

Hoje

3.1 Campo eléctrico

Propriedades das cargas elétricas. Isoladores e condutores. Lei de Coulomb. Campo elétrico.

3.2 Lei de Gauss

Lei de Gauss. Conductores em equilíbrio electrostático. Aplicações da Lei de Gauss.

3.3 Potencial Electrico

Diferença de potencial. Potencial eléctrico. Energia potencial. Cálculo do campo elétrico a partir do potencial..

3.4 Capacidade e condensadores

Capacidade eléctrica. Energia armazenada num condensador.

3.5 Corrente eléctrica e resistência

Corrente eléctrica. Resistência e a Lei de Ohm. Energia e potência eléctricas. Leis de Kirchhoff.

3.6 Campo magnético

Campo magnético. Força magnética. Lei de Biot-Savat. Lei de Ampère.

3.7 Indução electromagnética

Lei de Faraday. Lei de Lenz. Auto-inductância. Inductância mútua.

3.8 Equações de Maxwell

3. Campos Eléctrico e Magnético

2. Lei de Gauss

- Procedimento alternativo para o cálculo de campos elétricos

- Método mais conveniente para o cálculo de campos criados por distribuições contínuas de carga com elevada simetria

- Estudo e compreensão de fenómenos mais complexos, através de raciocínios qualitativos

Johann Carl Friedrich Gauß
(1777 – 1855)

3. Campos Eléctrico e Magnético

2. Lei de Gauss

Fluxo do campo eléctrico

Usamos o conceito de linhas de campo de um modo quantitativo.

- Um campo uniforme atravessa uma superfície quadrada colocada perpendicularmente ao campo

- se o número de linhas por unidade de área é proporcional à intensidade de campo então o número total de linhas que atravessam a superfície é igual ao produto $E \cdot A$

- A este produto chamamos fluxo do campo eléctrico

$$\Phi_E = E \cdot A$$

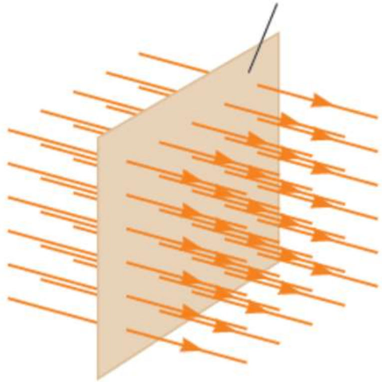


Figure 24.1 Field lines representing a uniform electric field penetrating a plane of area perpendicular to the field.

Unidades S.I.: campo x área = $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \times \mathrm{m}^2$

Fluxo do campo eléctrico

Usamos o conceito de linhas de campo de um modo quantitativo.

- Um campo uniforme atravessa uma superfície colocada obliquamente ao campo – a normal à superfície faz um ângulo θ com o campo
- O número de linhas que atravessam a área A é o mesmo que atravessam $A_\perp$ mas como $A = A_\perp \cdot \cos\theta$ resulta que

$$\Phi_E = E \cdot A_\perp = E \cdot A \cdot \cos\theta$$

- De um modo geral, se o campo é uniforme sobre toda a superfície, o fluxo é dado pelo produto escalar

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A}$$

onde $\vec{A}$ é o vector área

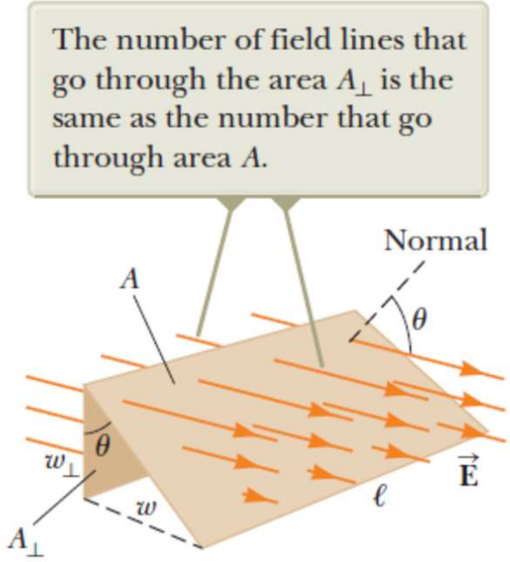


Figure 24.2 Field lines representing a uniform electric field penetrating an area A whose normal is at an angle θ to the field.

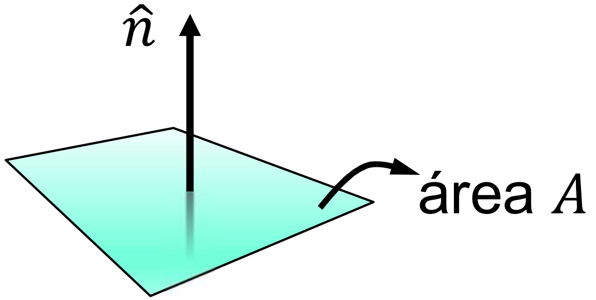
Fluxo do campo eléctrico

- De um modo geral, se o campo é uniforme sobre toda a superfície, o fluxo é dado pelo produto escalar

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A}$$

onde $\vec{A}$ é o vector área com módulo igual à área e direcção definida pelo vector unitário $\hat{n}$ normal à superfície

$$\vec{A} = A\hat{n}$$



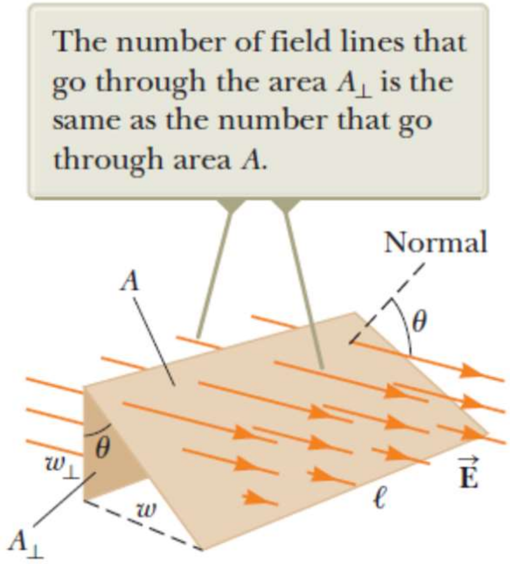


Figure 24.2 Field lines representing a uniform electric field penetrating an area A whose normal is at an angle θ to the field.

Fluxo do campo eléctrico

Se o campo não é uniforme sobre a superfície dividimos a superfície um pequenas áreas de modo a podermos considerar o campo local uniforme sobre os elementos de área e definimos o fluxo elementar como

$$\Delta\Phi_{E,i} = \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i$$

Somando todas as contribuições elementares, o fluxo total é

$$\Phi_{E,i} \approx \sum_i \Delta\Phi_{E,i} = \sum_i \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i$$

de modo que no limite $\Delta\vec{A}_i \to 0$ o somatório é substituído pela soma integral

$$\Phi_E = \iint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

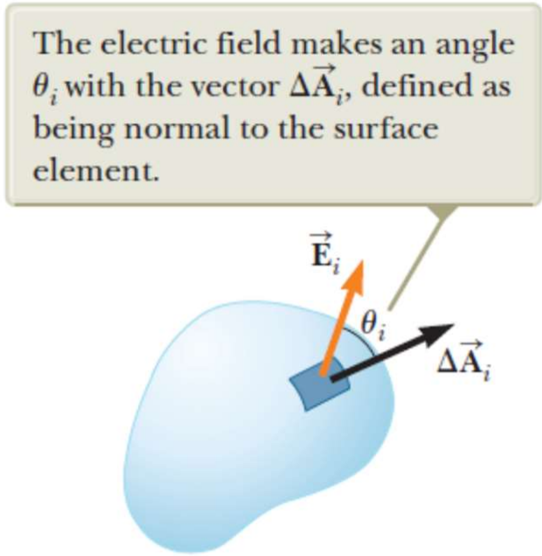


Figure 24.3 A small element of surface area ΔA_i in an electric field.

Fluxo do campo eléctrico

E portanto a definição geral de fluxo eléctrico é dada pelo integral

$$\Phi_E = \iint_{Área} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

o que representa um integral de superfície → significa que temos que saber o campo em todos os pontos da superfície bem como a própria superfície.

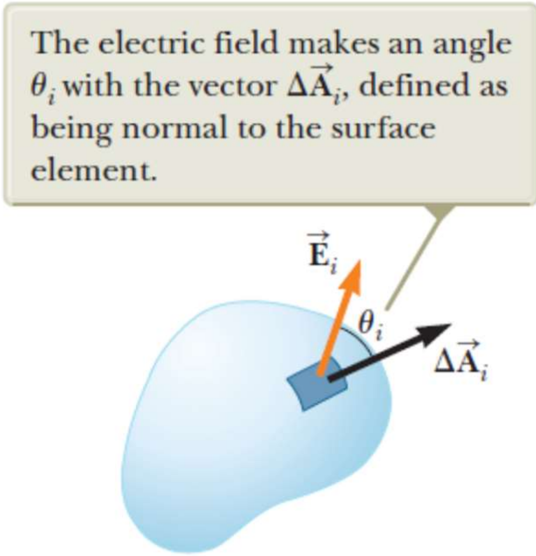


Figure 24.3 A small element of surface area ΔA_i in an electric field.

O cálculo destes integrais está fora do contexto de MCE e apenas abordamos os casos mais simples em que, devido à simetria do campo, os integrais se podem transformar em integrais simples 1-D

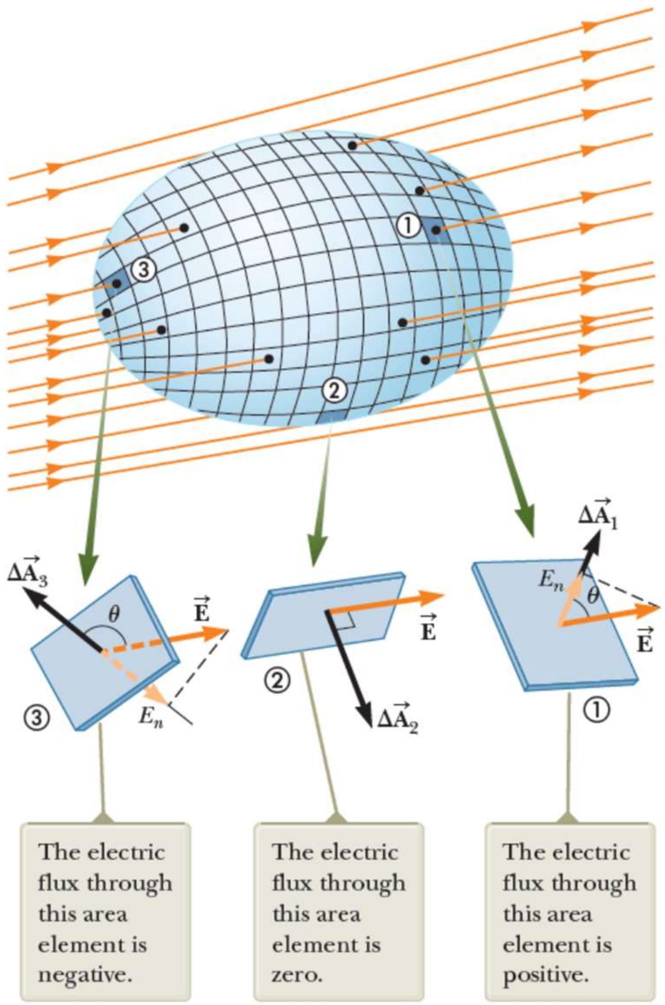
2. Lei de Gauss

Fluxo do campo eléctrico

Se a superfície é fechada e regular (limita um volume) o fluxo do campo eléctrico adquire um significado físico muito importante.

Definimos o vector normal em cada ponto da superfície como um vector que aponta sempre para fora e resulta

- Nas zonas em que o fluxo é negativo, o campo entra na superfície
- Nas zonas em que o fluxo é nulo, o campo é tangente à superfície
- Nas zona em que o fluxo é positivo, o campo sai da superfície



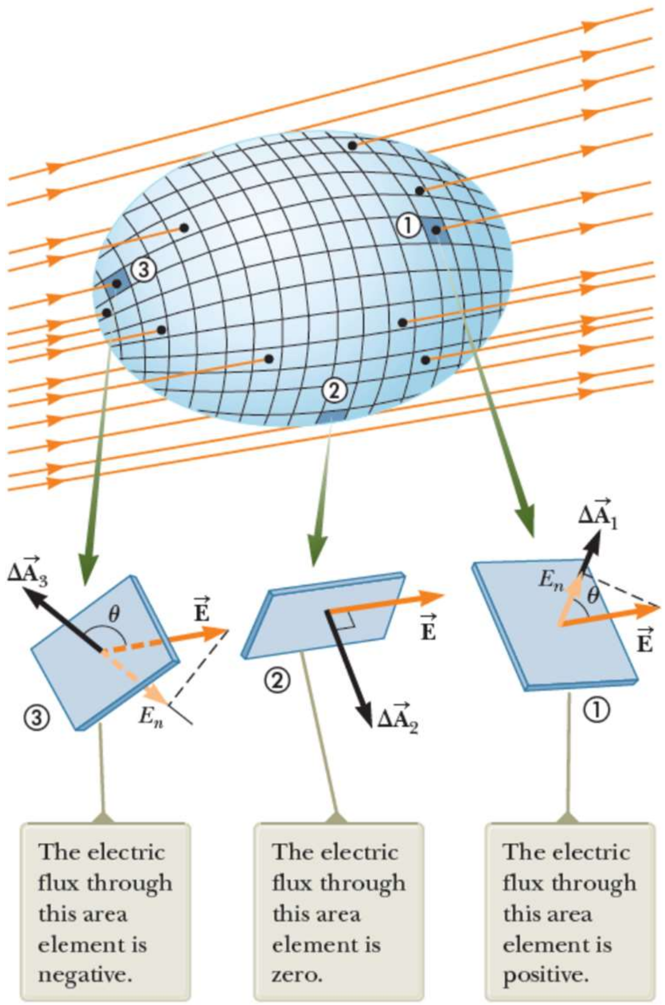
Fluxo do campo eléctrico

Portanto, o fluxo total através da superfície fechada é igual à soma algébrica do fluxo que entra e o que sai.

O fluxo eléctrico através de uma superfície fechada escreve-se

$$\Phi_E = \oiint_{Área} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oiint_{Área} E_n \cdot dA$$

onde E_n é a componente do campo normal à superfície



Lei de Gauss

Relação entre o fluxo eléctrico através de uma superfície fechada (frequentemente chamada superfície de Gauss) e a carga interior a essa superfície

O fluxo eléctrico através de uma superfície fechada escreve-se

$$\Phi_E = \oiint_{Área} E_n \cdot dA$$

onde E_n é a componente do campo normal à superfície

- Consideremos o caso de uma carga pontual, positiva localizada no centro de uma superfície esférica

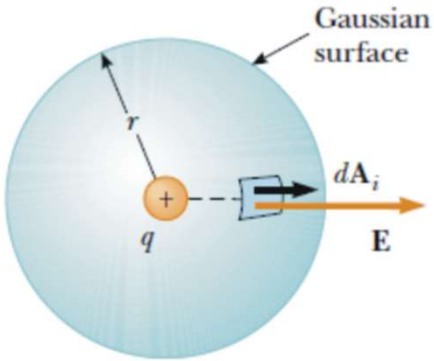
Lei de Gauss

A lei de Coulomb estabelece que $\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}\hat{r}$ e o campo é

- radial esférico
- módulo constante sobre a superfície esférica
- $\vec{E}$ é paralelo a $\mathrm{d}\vec{A}$ em todos os pontos da superfície esférica

Portanto

$$\Phi_E = \oiint_{Área} E_r\, dA = E_r \oiint dA$$

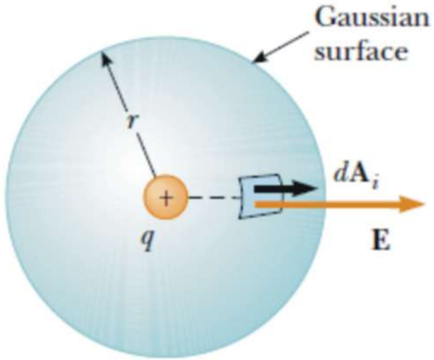


Cálculo da área da superfície esférica

$$\oiint dA = r^2 \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = r^2 \times [-\cos\theta]_0^{\pi} \times 2\pi = 4\pi r^2$$

Lei de Gauss

Então $\Phi_E = E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$



$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Este resultado pode ser generalizado a uma superfície fechada regular com qualquer forma e a uma distribuição contínua de carga qualquer e obtemos a chamada Lei de Gauss para o campo electrostático

$$\boxed{\Phi_E = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

O fluxo do campo eléctrico através de qualquer superfície fechada é igual à carga total interior à superfície dividida pela permitividade do meio

3. Campos Eléctrico e Magnético

2. Lei de Gauss

Lei de Gauss

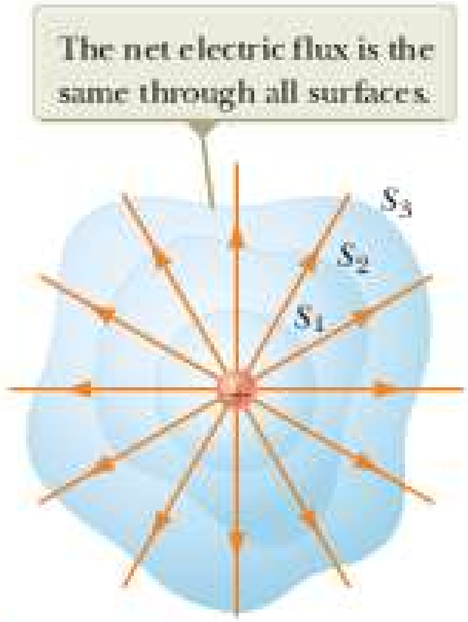


Figure 24.7 Closed surfaces of various shapes surrounding a positive charge.

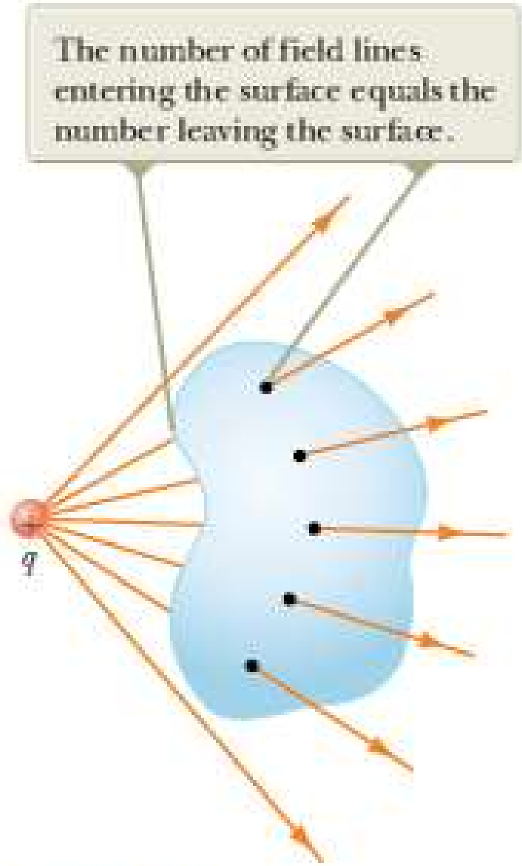


Figure 24.8 A point charge located *outside* a closed surface.

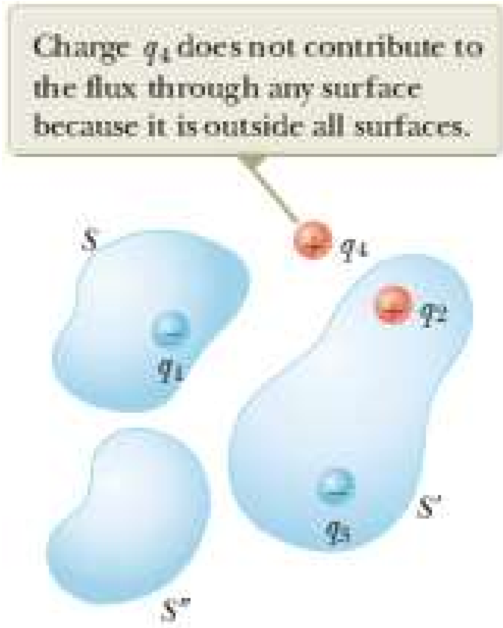


Figure 24.9 The net electric flux through any closed surface depends only on the charge *inside* that surface. The net flux through surface S is q_1/ϵ_0, the net flux through surface S' is $(q_2 + q_3)/\epsilon_0$, and the net flux through surface S'' is zero.

3. Campos Eléctrico e Magnético

2. Lei de Gauss

Lei de Gauss

Atenção: fluxo nulo não é necessariamente campo nulo

Por exemplo, duas situações em que o fluxo é nulo através de uma superfície fechada são

1. Não existem partículas carregadas dentro da superfície
2. Existem partículas carregadas dentro da superfície mas a soma algébrica é nula (dipolo)

Em ambos os casos é incorrecto concluir que o campo eléctrico à superfície é nulo

A lei de Gauss estabelece que o fluxo eléctrico é proporcional à carga – não ao campo

Lei de Gauss

Superfícies de Gauss para o cálculo do campo eléctrico

1. Superfície fechada
2. Em cada ponto da superfície fechada o vector $\vec{E}$ é normal ou tangente à superfície
3. $|\vec{E}|$ é constante em todos os pontos em que $\vec{E}$ é normal à superfície
4. Uma superfície Gaussiana é uma superfície matemática (virtual) e não precisa de coincidir com qualquer superfície física (real)

Quando estas condições são simultaneamente satisfeitas, usamos

$$\boxed{\Phi_E = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

para calcular $\vec{E}$

3. Campos Eléctrico e Magnético

2. Lei de Gauss

Condutores em equilíbrio electrostático

- Um condutor (p.ex. Ag, Au, Cu) caracteriza-se pela existência de cargas “livres” no seu interior
- quando não existe movimento de cargas eléctricas no interior de um condutor → equilíbrio electrostático

Um condutor em equilíbrio electrostático tem as seguintes propriedades

✓O campo eléctrico no interior do condutor é nulo quer seja sólido ou ôco

✓Qualquer carga acumulada num condutor isolado localiza-se na sua superfície

✓O campo eléctrico na superfície exterior de um condutor carregado é normal à superfície e a sua intensidade é $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ onde σ é a densidade de carga local

✓Num condutor carregado com forma irregular o campo é mais intenso nas zonas em que o raio de curvatura é menor (bicos aguçados – efeito de ponta)

3. Campos Eléctrico e Magnético

2. Lei de Gauss

Condutores em equilíbrio electrostático

✓O campo eléctrico no interior do condutor é nulo quer seja sólido ou ôco

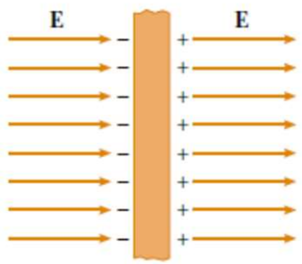


Figure 24.16 A conducting slab in an external electric field **E**. The charges induced on the two surfaces of the slab produce an electric field that opposes the external field, giving a resultant field of zero inside the slab.

Consideremos um barra sólida metálica condutora neutra – electrões "livres" estão uniformemente distribuídos pelo interior do condutor

Aplicamos um campo eléctrico externo

Os electrões movem-se contra o campo $(q < 0)$ e a carga negativa acumula-se na face esquerda

Na face direita cria-se carga positiva devido à falta de electrões

Esta redistribuição de carga cria o seu próprio campo que se sobrepõe ao campo externo no interior do condutor

As densidades de carga aumentam até o campo interno igualar o campo externo, resultando num campo total nulo no interior

Num bom condutor, o tempo necessário para atingir o equilíbrio electrostático é de $\sim 10^{-16}$ s $\left(t \cong \frac{\varepsilon_0}{\sigma}\right) \rightarrow$ praticamente instantâneo

2. Lei de Gauss

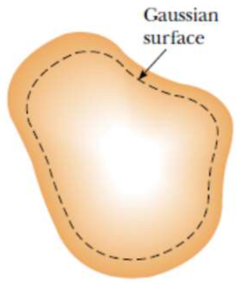


Figure 24.17 A conductor of arbitrary shape. The broken line represents a gaussian surface that can be as close to the surface of the conductor as we wish.

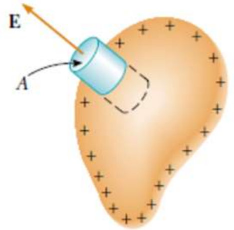


Figure 24.18 A gaussian surface in the shape of a small cylinder is used to calculate the electric field just outside a charged conductor. The flux through the gaussian surface is EA. Remember that **E** is zero inside the conductor.

Condutores em equilíbrio electrostático

✓ Qualquer carga acumulada num condutor isolado localiza-se na sua superfície

✓ O campo eléctrico na superfície exterior de um condutor carregado é normal à superfície e a sua intensidade é $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ onde σ é a densidade de carga local

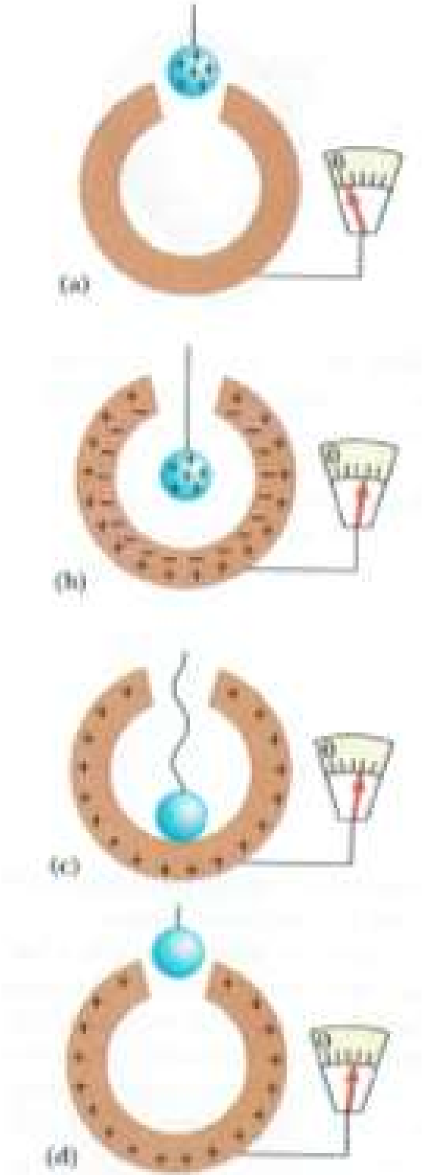
Consideramos uma superfície de Gauss tão próximo da superfície quanto quisermos. Se o campo é nulo então não pode haver carga dentro da superfície → carga reside na superfície

Agora consideramos outra superfície de Gauss perto da superfície do condutor, parte dentro e parte fora, paralela à superfície do condutor, por ex. um pequeno cilindro. Como as cargas estão em repouso (equilíbrio) o campo tem de ser normal (componente tangencial nula)

O fluxo através do pequeno cilindro (superfície de Gauss) só pode ser para fora e $\Phi_E = \oiint_{Área} E_n \cdot dA = E_n \cdot A = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \rightarrow E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ pois $q_{int} = \sigma A$ na superfície do condutor

3. Campos Eléctrico e Magnético

2. Lei de Gauss



Verificação experimental (Faraday)

a) Uma pequena esfera metálica carregada positivamente é introduzida numa esfera metálica ôca

A pequena esfera está suspensa por um fio isolador

O condutor ôco está isolado electricamente

A superfície exterior da esfera grande está ligada a um electrómetro

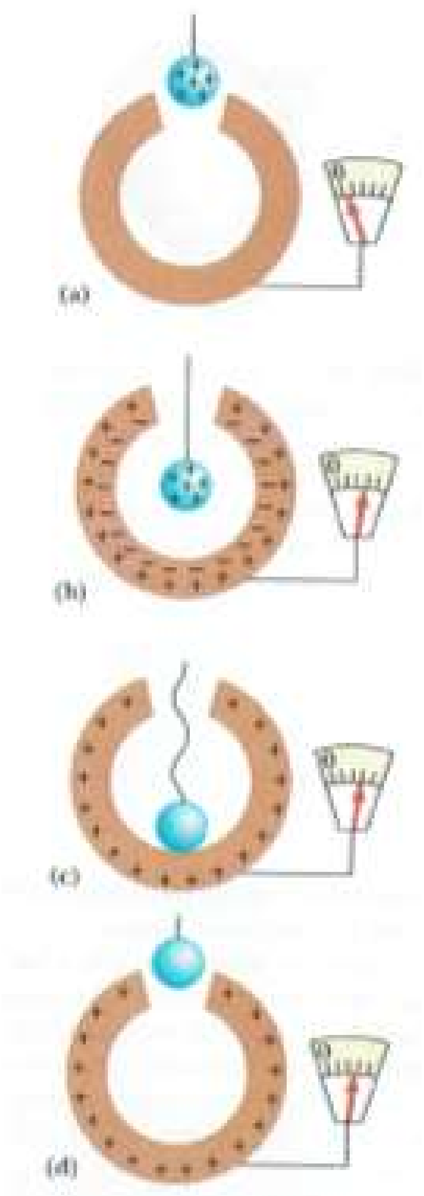
b) A pequena esfera carregada positivamente induz na parede interior do condutor uma carga negativa, deixando carga positiva igual na parede exterior. Esta carga é detectada por um electrómetro

c) A deflexão do electrómetro não se altera quando a pequena esfera carregada toca na parede interior do condutor ôco

d) Quando a pequena esfera é retirada a leitura do electrómetro não se altera e verifica-se que a pequena esfera está descarregada

3. Campos Eléctrico e Magnético

2. Lei de Gauss



Verificação experimental (Faraday)

Conclusões

- Uma pequena esfera carregada colocada no interior do condutor ôco não é atraída nem repelida → $E = 0$ no interior
- Carga transferida da pequena esfera para o condutor ôco
- A carga (excesso) no condutor ôco reside na sua superfície

3. Campos Eléctrico e Magnético

2. Lei de Gauss

Verificação experimental

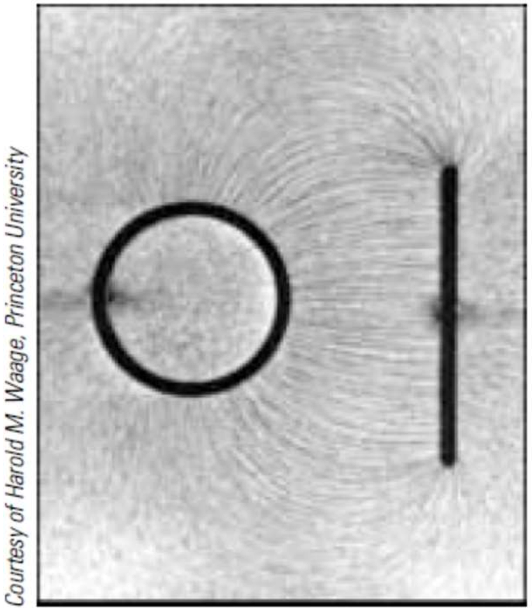


Figure 24.19 Electric field pattern surrounding a charged conducting plate placed near an oppositely charged conducting cylinder. Small pieces of thread suspended in oil align with the electric field lines. Note that (1) the field lines are perpendicular to both conductors and (2) there are no lines inside the cylinder ($E = 0$).

Padrão de campo eléctrico de uma placa carregada perto de um cilindro condutor com carga oposta

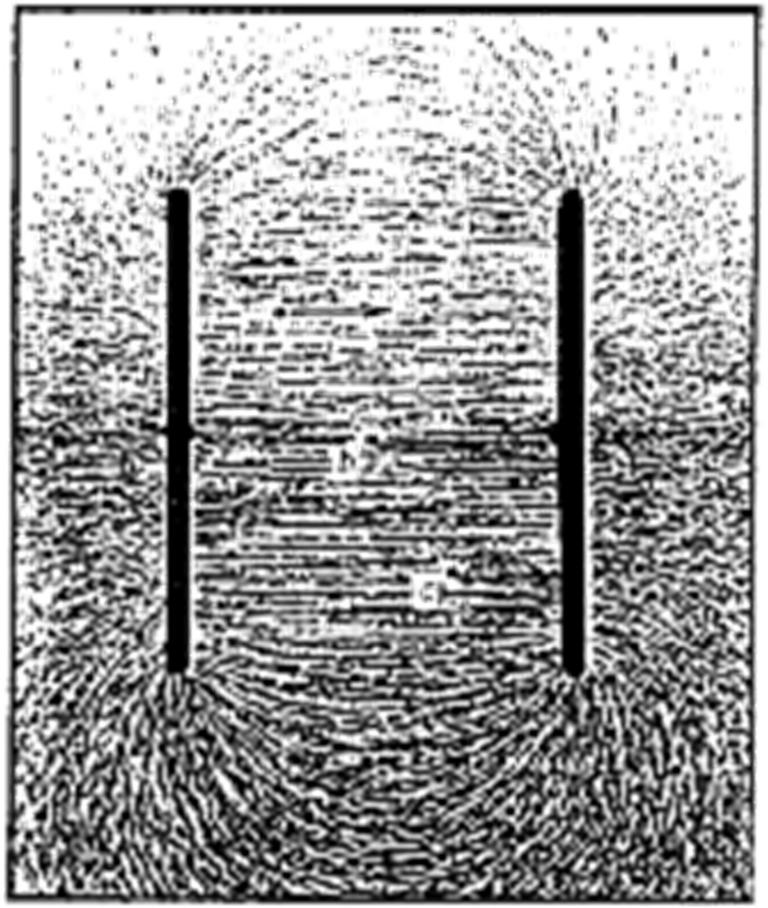
As linhas de campo são perpendiculares aos dois condutores

Não há linhas de campo no interior do tubo cilíndrico $E = 0$

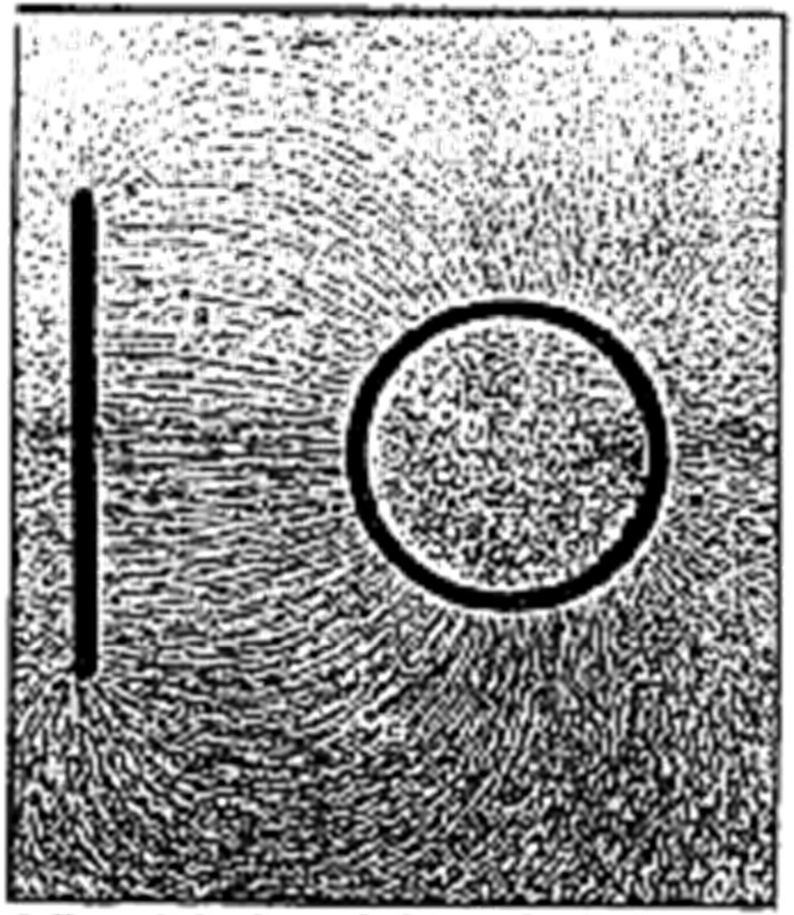
3. Campos Eléctrico e Magnético

2. Lei de Gauss

Verificação experimental



c. Oppositely charged plates

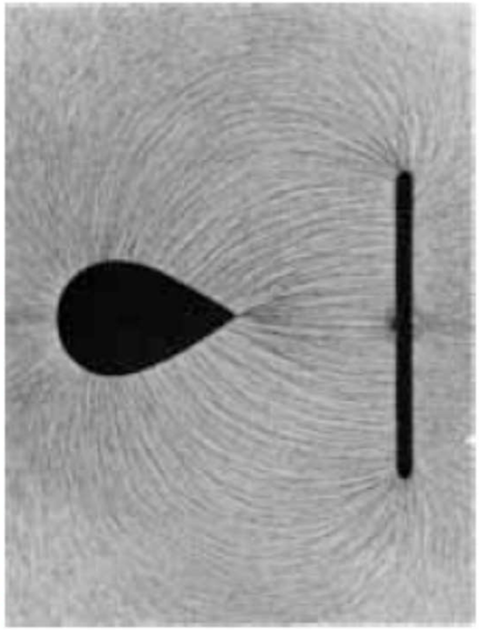


d. Oppositely charged plate and cylinder

3. Campos Eléctrico e Magnético

2. Lei de Gauss

Verificação experimental



Courtesy of Harold M. Waage, Princeton University

Figure 25.23 Electric field pattern of a charged conducting plate placed near an oppositely charged pointed conductor. Small pieces of thread suspended in oil align with the electric field lines. The field surrounding the pointed conductor is most intense near the pointed end and at other places where the radius of curvature is small.

Padrão de campo eléctrico de uma placa carregada perto de um objecto pontiagudo carregado com carga oposta

As linhas de campo são perpendiculares aos dois condutores

O campo é muito intenso perto da ponta e noutros pontos onde o raio de curvatura é pequeno (bodas da placa)

Aplicação da lei de Gauss

cálculo do campo criado por uma esfera isoladora uniformemente carregada

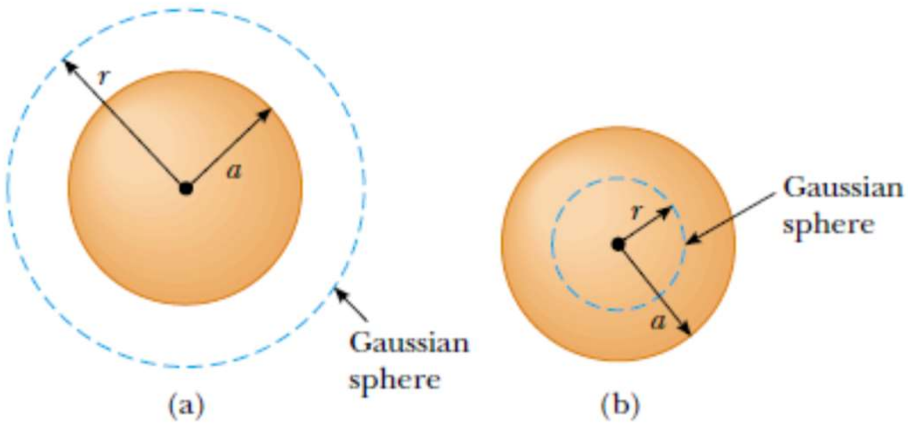


Figure 24.11 (Example 24.5) A uniformly charged insulating sphere of radius a and total charge Q. (a) For points outside the sphere, a large spherical gaussian surface is drawn concentric with the sphere. In diagrams such as this, the dotted line represents the intersection of the gaussian surface with the plane of the page. (b) For points inside the sphere, a spherical gaussian surface smaller than the sphere is drawn.

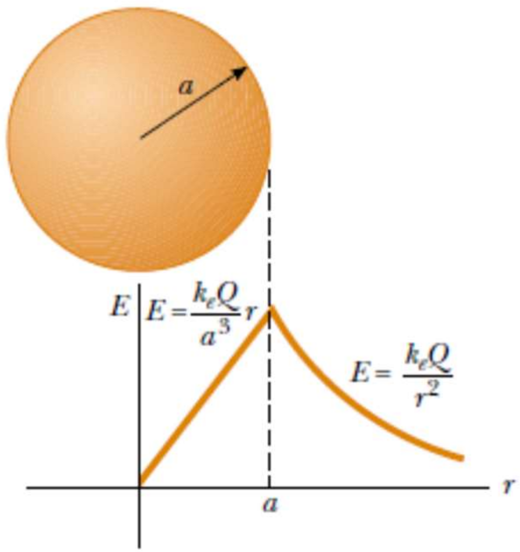


Figure 24.12 (Example 24.5) A plot of E versus r for a uniformly charged insulating sphere. The electric field inside the sphere ($r < a$) varies linearly with r. The field outside the sphere ($r > a$) is the same as that of a point charge Q located at $r = 0$.

3. Campos Eléctrico e Magnético

2. Lei de Gauss

Aplicação da lei de Gauss

cálculo do campo criado por uma película esférica uniformemente carregada

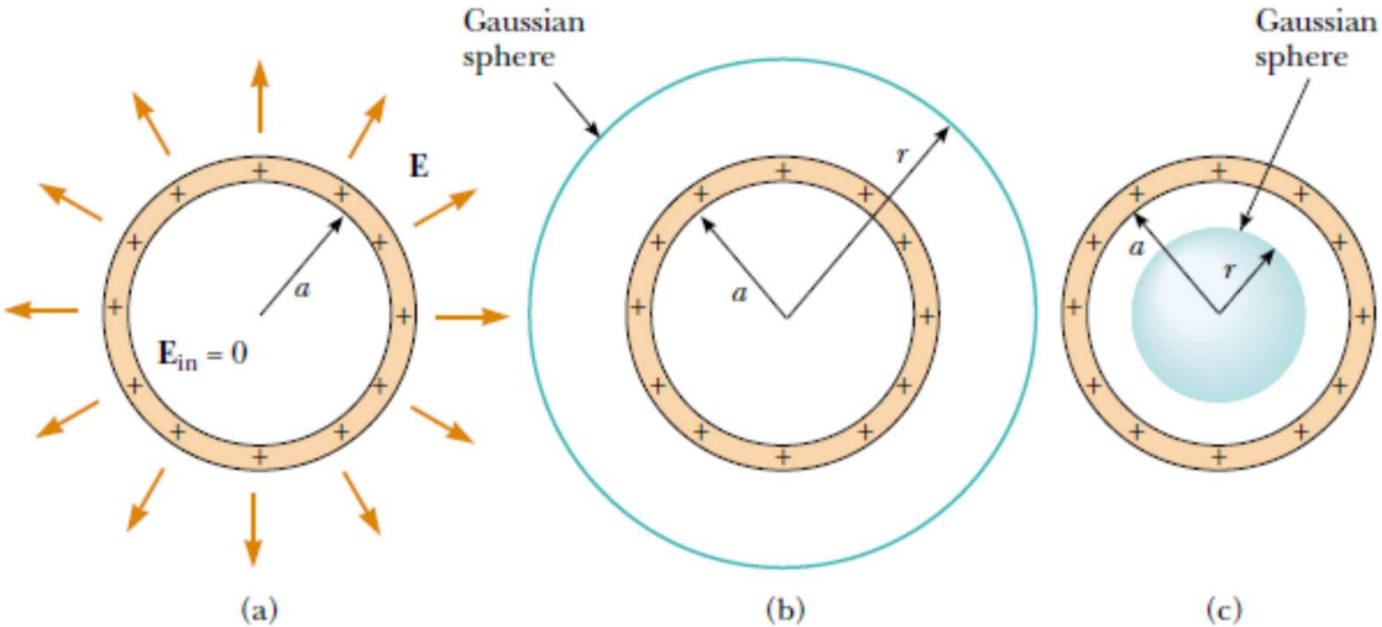


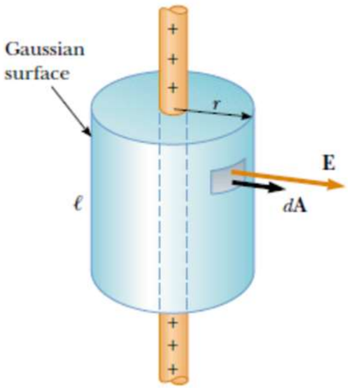
Figure 24.13 (Example 24.6) (a) The electric field inside a uniformly charged spherical shell is zero. The field outside is the same as that due to a point charge Q located at the center of the shell. (b) Gaussian surface for $r > a$. (c) Gaussian surface for $r < a$.

3. Campos Eléctrico e Magnético

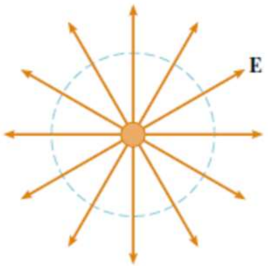
2. Lei de Gauss

Aplicação da lei de Gauss

cálculo do campo criado por um fio infinito uniformemente carregado com densidade linear λ (C/m)



(a)



(b)

Aplicação da lei de Gauss

cálculo do campo criado por um plano infinito uniformemente carregado com densidade superficial σ (C/m^2)

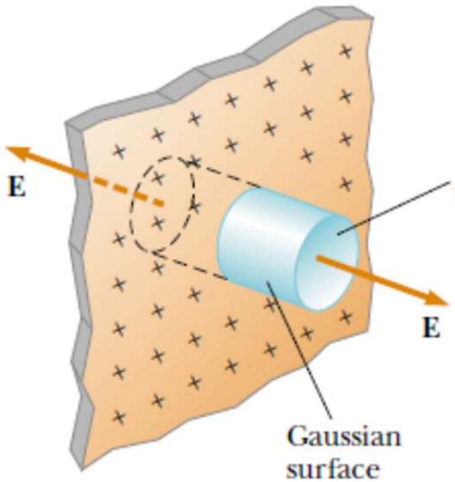


Figure 24.15 (Example 24.8) A cylindrical gaussian surface penetrating an infinite plane of charge. The flux is EA through each end of the gaussian surface and zero through its curved surface.