

3. Campos Eléctrico e Magnético

Hoje

3.1 Campo eléctrico

Propriedades das cargas eléctricas. Isoladores e condutores. Lei de Coulomb. Campo eléctrico.

3.2 Lei de Gauss

Lei de Gauss. Condutores em equilíbrio electrostático. Aplicações da Lei de Gauss.

3.3 Potencial eléctrico

Diferença de potencial. Potencial eléctrico. Energia potencial. Cálculo do campo eléctrico a partir do potencial.

3.4 Capacidade e condensadores

Capacidade eléctrica. Energia armazenada num condensador.

3.5 Corrente eléctrica e resistência

Corrente eléctrica. Resistência e a Lei de Ohm. Energia e potência eléctricas. Leis de Kirchhoff.

3.6 Campo magnético

Campo magnético. Força magnética. Lei de Biot-Savat. Lei de Ampère.

3.7 Indução electromagnética

Lei de Faraday. Lei de Lenz. Auto-inductância. Inductância mútua.

3.8 Equações de Maxwell



3. Campos Eléctrico e Magnético

3.2 Potencial Eléctrico

*O que é que significa dizermos
que uma pilha é de 1,5 ou 9,0 Volt*



3. Campos Eléctrico e Magnético

3.2 Energia Potencial Eléctrica

- *A integração espacial de uma força define o conceito de trabalho realizado pela força num dado trajecto*
- *O trabalho elementar realizado pela força devido a um deslocamento elementar é*

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

onde $d\vec{s}$ é o deslocamento do ponto de aplicação da força \vec{F} (ou da resultante de um sistema de forças) que actua sobre o corpo

- *O trabalho total realizado pela força entre os pontos $\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2$ é*

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$



3. Campos Eléctrico e Magnético

3.2 Energia Potencial Eléctrica

Uma partícula carregada com carga eléctrica q num campo eléctrico \vec{E} fica sujeita à acção de uma força

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

O trabalho realizado pela força eléctrica em mover a carga entre os pontos \vec{r}_1 e \vec{r}_2 é

$$W = q \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

- *onde $d\vec{s}$ é o deslocamento do ponto de aplicação da força \vec{F} (ou da resultante de um sistema de forças) que actua sobre um corpo entre os pontos $\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2$*



3. Campos Eléctrico e Magnético

3.3 Energia Potencial

Dado que o campo eléctrico é conservativo, podemos definir uma energia potencial ou melhor a variação da energia potencial de uma carga q quando sujeita à acção de um campo eléctrico num deslocamento finito entre dois pontos A e B escrevendo

$$\Delta U = U(B) - U(A) = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

- *onde $d\vec{s}$ é o deslocamento do ponto de aplicação do vector campo \vec{E} que actua sobre a carga q*



3. Campos Eléctrico e Magnético

3.3 Energia Potencial

Dividindo a energia potencial pela carga obtemos

$$\frac{\Delta U}{q} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

uma grandeza física que depende apenas da distribuição de carga da fonte e tem um valor bem definido em todos os pontos do campo

*Esta quantidade chamamos **Potencial Eléctrico** (ou simplesmente Potencial) V*

$$V = \frac{U}{q}$$



3. Campos Eléctrico e Magnético

3.3 Energia Potencial

Aqui o deslocamento $d\vec{r}$ é entre dois pontos do espaço e NÃO o deslocamento de qualquer carga

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

e tal como na energia potencial, apenas diferenças de potencial têm significado

Geralmente consideramos o potencial nulo num ponto conveniente do campo, tal como fazemos para a energia potencial gravítica em Dinâmica



3. Campos Eléctrico e Magnético

3.2 Potencial eléctrico

Unidades S.I. do potencial eléctrico

$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$Potencial = \frac{Energia}{Carga} \text{ (J/C)}$$

A diferença de potencial $V_B - V_A$ é igual ao trabalho por unidade de carga que um acção externa realizaria para deslocar uma carga de prova de A para B sem variação da energia cinética



3. Campos Eléctrico e Magnético

3.2 Potencial eléctrico

Unidades S.I. do potencial eléctrico chama-se Volt

$$1 \text{ Volt} = \frac{1 \text{ Joule}}{1 \text{ Coulomb}}$$

Uma pilha é de “1,5 Volt” significa que fornece 1,5 Joule de energia a cada carga de 1 Coulomb que é deslocada de um terminal para o outro



Alessandro Giuseppe
Antonio Anastasio Volta
(1745 – 1827)



3. Campos Eléctrico e Magnético

3.2 Potencial Eléctrico

Unidades S.I. do campo eléctrico expressas em termos de potencial

$$1 \text{ Joule} = 1 \text{ Newton} \times 1 \text{ metro} = 1 \text{ Nm}$$

$$1 \text{ Volt} = \frac{1 \text{ Joule}}{1 \text{ Coulomb}} = \frac{1 \text{ Nm}}{1 \text{ C}} = 1 \frac{\text{N}}{\text{C}} \times 1\text{m}$$

$$1 \frac{\text{N}}{\text{C}} = 1 \frac{\text{Volt}}{\text{metro}}$$

Obs

Em física nuclear e das partículas usa-se a unidade 1eV (electrão-Volt) que representa a energia que um electrão adquire quando é acelerado por uma diferença de potencial de 1V

$$1 \text{ eV} = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C} \cdot 1\text{V} = 1,60 \times 10^{-19} \text{ J}$$



3. Campos Eléctrico e Magnético

3.4 Potencial em campo uniforme

Consideremos o campo uniforme

$$\vec{E} = -E_y \hat{j}$$

a diferença de potencial entre os pontos A e B é

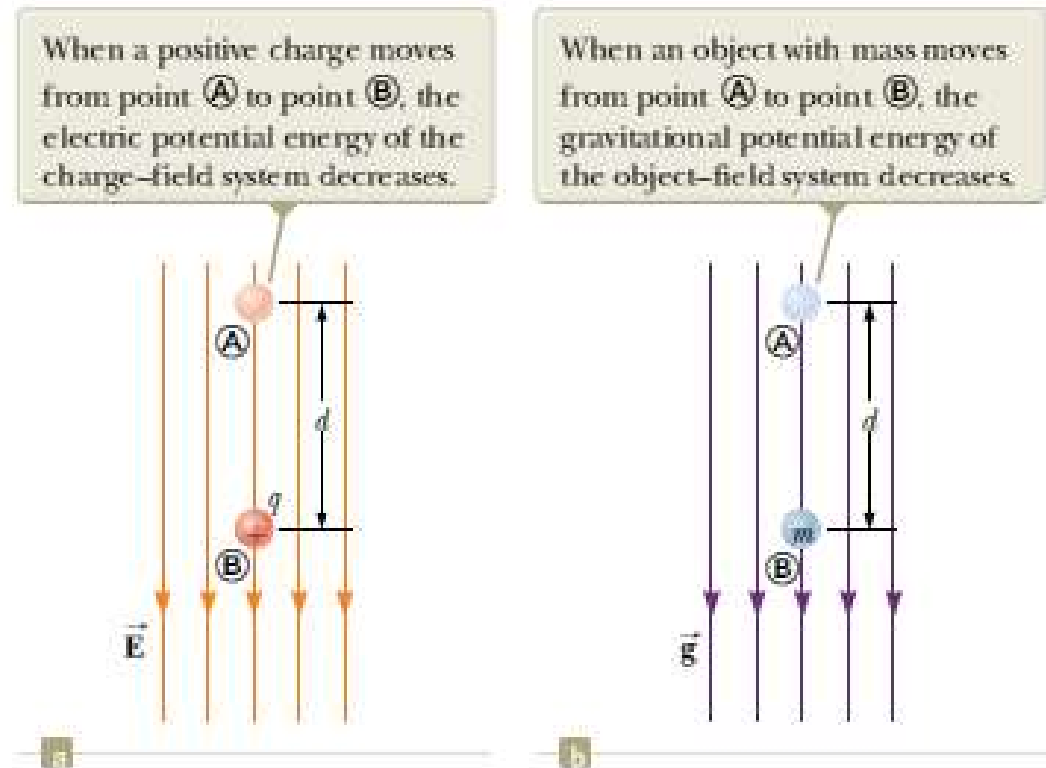
$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$= - \int_A^B E \cdot dr \cdot \cos 0$$

$$V_B - V_A = -Ed$$

onde o sinal menos significa que o potencial em B é inferior ao potencial em A $\rightarrow V_B < V_A$

- As linhas de campo eléctrico apontam sempre no sentido dos potenciais decrescentes
- uma carga $+q$ move-se de A para B \rightarrow a sua Energia potencial variou
$$\Delta U = q\Delta V = -qEd$$



3. Campos Eléctrico e Magnético

3.4 Potencial em campo uniforme

Consideremos o campo uniforme $\vec{E} = E_x \hat{i}$
a diferença de potencial entre os pontos A e B é

$$\begin{aligned} V_B - V_A &= - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \\ &= - \left(\int_A^C E \cdot ds \cdot \cos 0 + \int_C^B E \cdot ds \cdot \cos 90 \right) = -Ed \\ V_B - V_A &= -Ed \end{aligned}$$

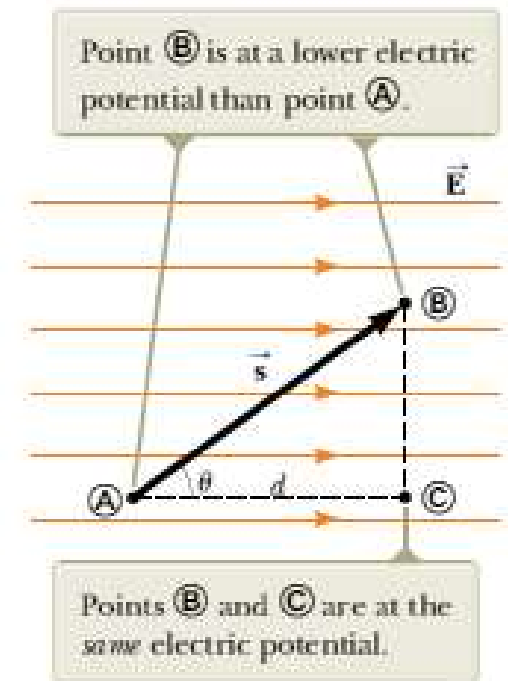
Todos os pontos que se situam num plano perpendicular ao campo têm o mesmo potencial $\rightarrow V_C = V_B$

Chamamos **superfície equipotencial** a uma superfície formada por uma distribuição contínua de pontos com o mesmo potencial

Agora, se o campo é um vector constante temos

$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = \vec{E} \cdot \int_A^B d\vec{s} = -\vec{E} \cdot \vec{s}$$

e a variação da energia potencial da carga é $\Delta U = q\Delta V = -q\vec{E} \cdot \vec{s}$



3. Campos Eléctrico e Magnético

3.4 Potencial em campo uniforme

Consideremos agora duas placas planas colocadas paralelamente uma à outra, ligadas a uma bateria de 12 V e distanciadas de 0,30 cm.

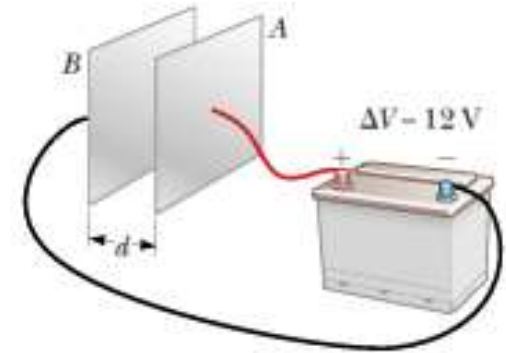
A d.d.p. entre as placas é

$$V_B - V_A = -Ed$$

assumindo que o campo é uniforme entra as placas.

Podemos calcular o campo entre as placas

$$E = \frac{|V_B - V_A|}{d} = \frac{12}{0,3 \times 10^{-2}} = 4 \text{ kV/m}$$



3. Campos Eléctrico e Magnético

3.4 Potencial em campo uniforme

Exemplo:

Um protão parte do repouso sob a acção de um campo uniforme $E = 8,0 \times 10^4 \text{ V/m}$ e percorre uma distância $d = 0,50 \text{ m}$ na direcção do campo. Calcular

- a) a d.d.p. entre os pontos A e B
- b) a variação da Energia potencial do protão
- c) a velocidade em B

Resolução

- a) $V_B - V_A = -Ed = -8,0 \times 10^4 \times 0,5 = -4,0 \times 10^4 \text{ V}$
- b) $\Delta U = q\Delta V = 1,6 \times 10^{-19} \times (-4,0 \times 10^4) = -6,4 \times 10^{-15} \text{ J}$
- c) A força eléctrica é uma força conservativa $\Rightarrow \Delta E_c + \Delta U = 0$

$$\left(\frac{1}{2} m_p v_B^2 - 0 \right) + q\Delta V = 0 \rightarrow v_B = \sqrt{\frac{2eEd}{m_p}} = 2,8 \times 10^6 \text{ m/s}$$

obs: $m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$

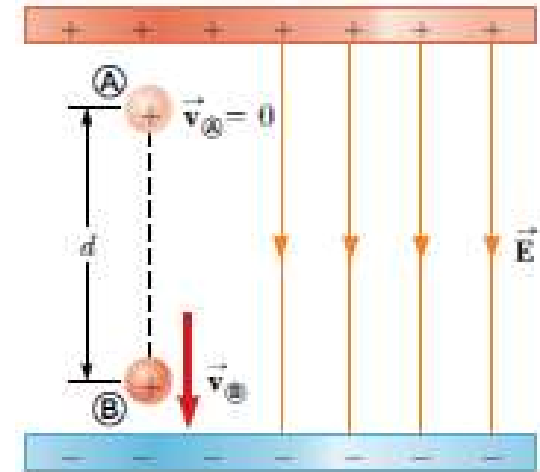


Figure 25.6 (Example 25.2) A proton accelerates from A to B in the direction of the electric field.

3. Campos Eléctrico e Magnético

3.4 Potencial de cargas pontuais

Consideremos uma carga pontual isolada

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

A d.d.p. entre os pontos A e B é

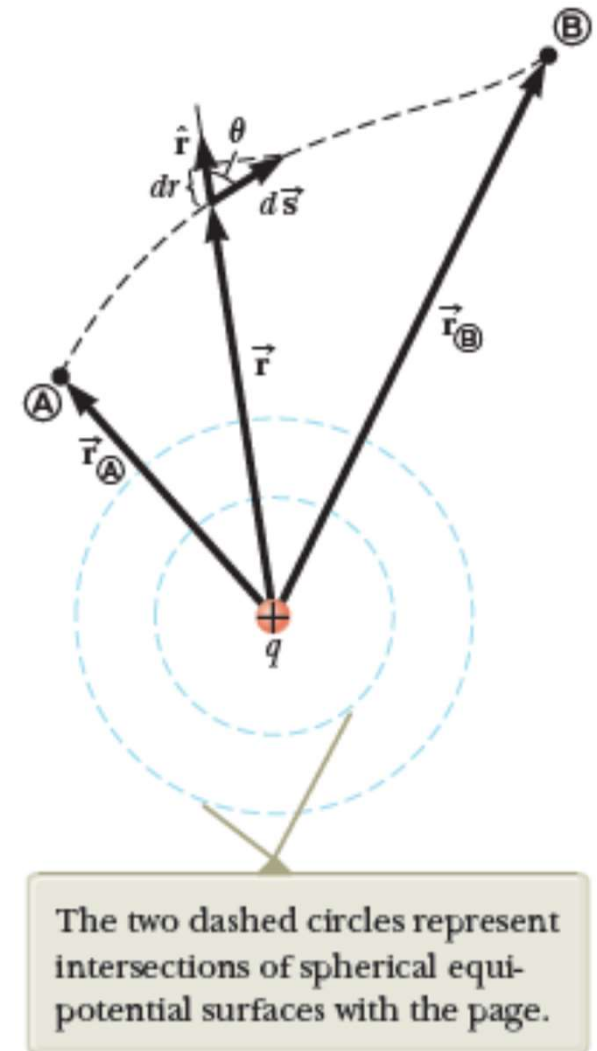
$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_A^B \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{s}$$

mas $\hat{r} \cdot d\vec{s} = ds \cos \theta$

e $ds \cos \theta = dr$

$$V_B - V_A = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B}$$

$$V_B - V_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right]$$



3. Campos Eléctrico e Magnético

3.4 Potencial de cargas pontuais

Fazendo $V_A(R_A \rightarrow \infty) = 0$ resulta $V_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_B}$

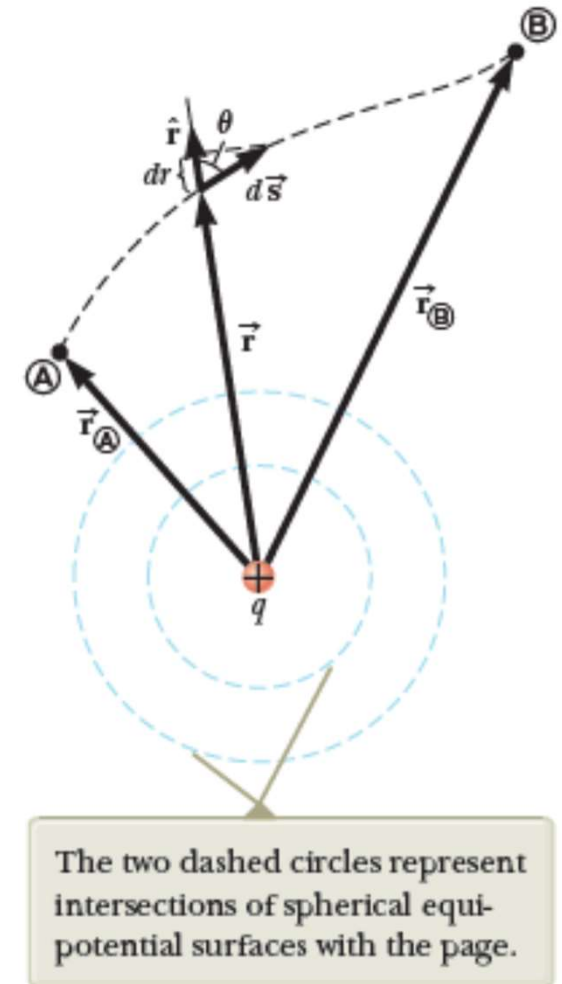
ou seja
$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

o que representa o potencial criado por uma carga pontual

De acordo com o princípio da sobreposição

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

o potencial num ponto é igual à soma algébrica dos potenciais devidos a todas as cargas presentes



3. Campos Eléctrico e Magnético

3.4 Energia Potencial

Se V_1 é o potencial eléctrico num ponto P devido à carga q_1 , então o trabalho necessário para trazer uma outra carga q_2 desde o infinito até ao ponto P é

$$W_{\infty \rightarrow P} = q_2 V_1 = q_2 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}}$$

ou seja
$$W_{\infty \rightarrow P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

Por definição este trabalho é igual à energia potencial U do sistema de duas caragas separadas pela distância r_{12}

A energia total de um sistema de três cargas é

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right)$$

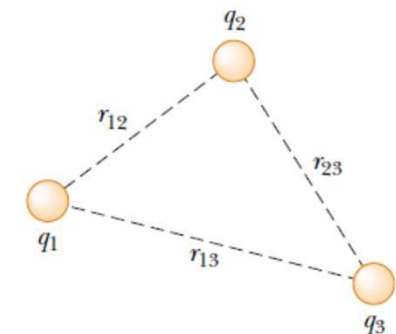
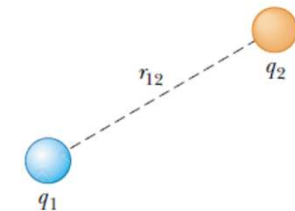


Figure 25.10 Three point charges are fixed at the positions shown. The potential energy of this system of charges is given by Equation 25.14.

Obs

- Se $q_1 q_2 > 0$ as cargas repelem-se \Rightarrow é necessário realizar trabalho sobre as cargas para as aproximar uma da outra
- Se $q_1 q_2 < 0$ as cargas atraem-se \Rightarrow é necessário realizar trabalho para manter as cargas afastadas



3. Campos Eléctrico e Magnético

3.4 Energia Potencial

- Fixamos q_1 e consideramos q_2 e q_3 muito afastadas (infinito)
- O trabalho requerido para colocar q_2 em r_{12} é o primeiro termo de U

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right)$$

- Os outros dois termos representam o trabalho requerido para colocar q_3 junto de q_1 e q_2

Generalizando

A Energia Electrostática de um conjunto de cargas é a energia necessária para formar esse conjunto (configuração final)



3. Campos Eléctrico e Magnético

3.4 Relação entre campo e potencial

Partindo da definição de potencial

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$$

sendo

$$\vec{E} = E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k}$$
$$d\vec{s} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}$$

resulta

$$dV = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz)$$

mas do cálculo infinitesimal sabemos que

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

Então

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} ; E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} ; E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$



3. Campos Eléctrico e Magnético

3.4 Relação entre campo e potencial

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} ; E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} ; E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Em notação vectorial (s.c. cartesiano)

$$\vec{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)V$$

onde $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$ é o operador gradiente (derivada direccional).

As superfícies equipotenciais são sempre perpendiculares ao campo, pois

$$dV = 0 \rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

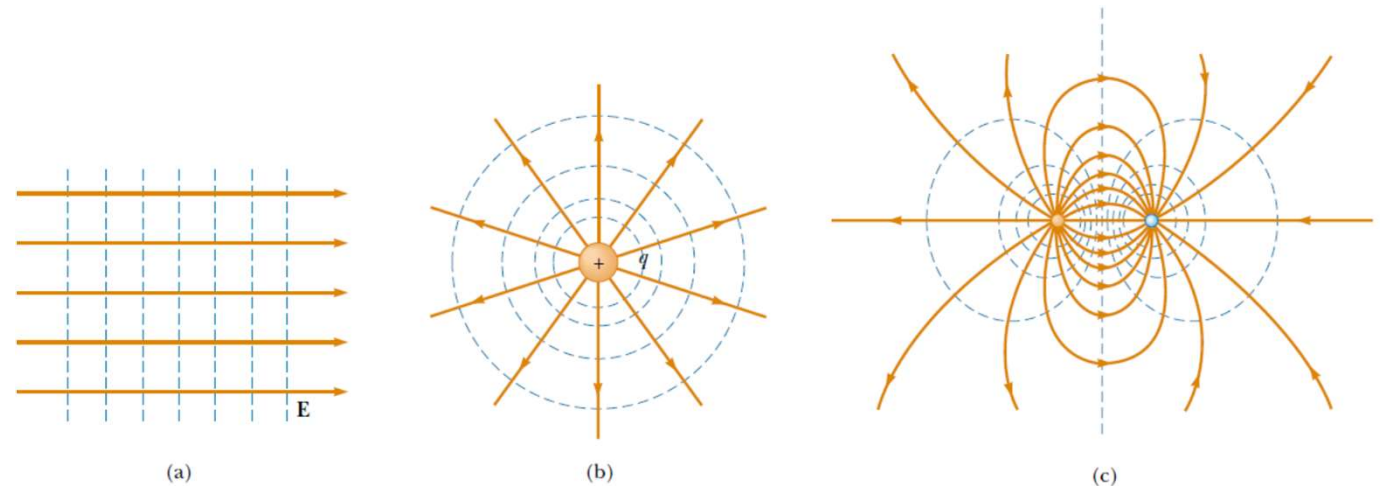


Figure 25.12 Equipotential surfaces (dashed blue lines) and electric field lines (red lines) for (a) a uniform electric field produced by an infinite sheet of charge, (b) a point charge, and (c) an electric dipole. In all cases, the equipotential surfaces are *perpendicular* to the electric field lines at every point. Compare these drawings with Figures 25.2, 25.7b, and 25.8b.

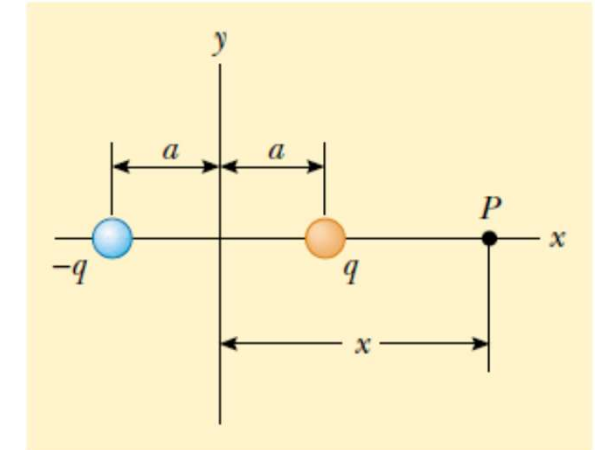
3. Campos Eléctrico e Magnético

3.4 Relação entre campo e potencial

Potencial e Campo de um dipolo

- a) calcular o potencial no ponto P
- b) Calcular V e E_x num ponto muito afastado
- c) Calcular V e E_x num ponto entre as cargas

Resolução



$$\begin{aligned} \text{a)} \quad V_P &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-q}{x+a} + \frac{q}{x-a} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-(x-a) + (x+a)}{x^2 - a^2} \right) \\ V_P &= \frac{qa}{2\pi\epsilon_0(x^2 - a^2)} \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad x \gg a \rightarrow V_P \cong \frac{qa}{2\pi\epsilon_0 x^2} ; \quad E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \cong \frac{qa}{\pi\epsilon_0 x^3}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad V_P &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-q}{x+a} + \frac{q}{x-a} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-(x-a) + (x+a)}{x^2 - a^2} \right) = -\frac{qx}{2\pi\epsilon_0(x^2 - a^2)} \\ E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{-x^2 - a^2}{(x^2 - a^2)^2} \right] \end{aligned}$$

Obs

verificação em $x = 0$



3. Campos Eléctrico e Magnético

3.4 Potencial de distribuições contínuas

Podemos calcular o potencial devido a distribuições contínuas de carga de duas maneiras

1. Se conhecermos a distribuição de carga, o potencial total pode ser obtido pela integração dos elementos de carga

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}$$

2. Se o campo é conhecido (p.ex. usando a lei de Gauss) o potencial total pode ser obtido pela integração do integral de linha do campo

$$V(r) = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

ou calculando a diferença de potencial entre dois pontos no campo e assumindo o potencial nulo num ponto conveniente

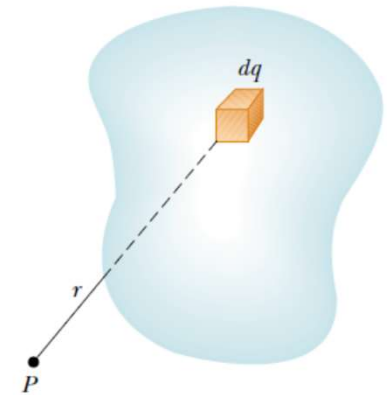


Figure 25.14 The electric potential at the point P due to a continuous charge distribution can be calculated by dividing the charged body into segments of charge dq and summing the electric potential contributions over all segments.

3. Campos Eléctrico e Magnético

3.4 Potencial de distribuições contínuas

Exemplo: Potencial e campo de um anel de carga uniformemente carregado ao longo do seu eixo. A carga total é Q e o raio do anel é a .

Orientamos o anel de modo que o seu plano é perpendicular ao eixo- xx que passa no seu centro onde colocamos a origem.

O elemento de carga dq situa-se à distância $\sqrt{a^2 + x^2}$ do ponto P . Então fica

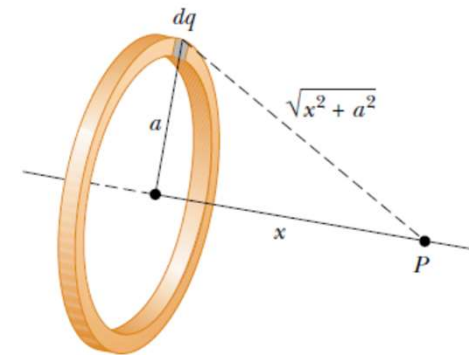


Figure 25.15 A uniformly charged ring of radius a lies in a plane perpendicular to the x axis. All segments dq of the ring are the same distance from any point P lying on the x axis.

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} \int dq \rightarrow V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

A única variável nesta expressão é x

O campo obtém-se do potencial por derivação

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right) \rightarrow E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

$E_y = E_z = 0$ (só tem componente segundo xx)

3. Campos Eléctrico e Magnético

3.4 Potencial de distribuições contínuas

Exemplo: Potencial e campo e um disco uniformemente carregado com densidade uniforme σ (C/m²) em pontos do seu eixo.

Resolução

Escolhemos o ponto P a uma distância x do centro do disco e colocamos o plano do disco perpendicular ao eixo- xx . Consideramos que o disco é formado por uma infinidade de anéis carregados de espessura infinitesimal dr

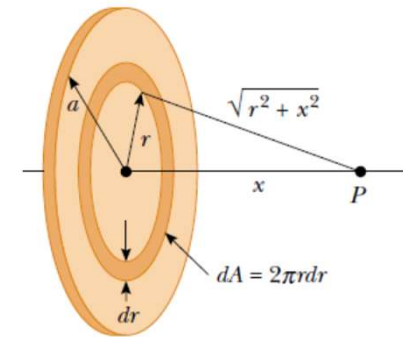


Figure 25.16 A uniformly charged disk of radius a lies in a plane perpendicular to the x axis. The calculation of the electric potential at any point P on the x axis is simplified by dividing the disk into many rings each of area $2\pi r dr$.

Então a área elementar é $dA = 2\pi r dr$ e a carga elementar é $dq = \sigma dA$ e cada anel elementar contribui com o potencial

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

no ponto P

3. Campos Eléctrico e Magnético

3.4 Potencial de distribuições contínuas

Exemplo: Potencial e campo e um disco uniformemente carregado com densidade uniforme σ (C/m²) em pontos do seu eixo.

Resolução

Integrando entre $r = 0$ e $r = a$ obtemos o potencial total do disco no ponto P

$$V = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \int_0^a \frac{2r dr}{\sqrt{r^2 + a^2}}$$

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{r^2 + a^2} - x)$$

O campo eléctrico no ponto P é

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{r^2 + a^2} - x) \rightarrow E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right]$$

$E_y = E_z = 0$ (só tem componente segundo xx)

No limite $a \rightarrow \infty$ resulta $E_x \rightarrow \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ (plano infinito)

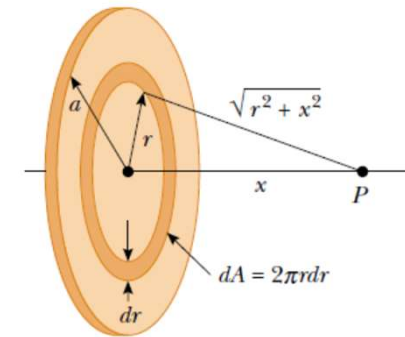


Figure 25.16 A uniformly charged disk of radius a lies in a plane perpendicular to the x axis. The calculation of the electric potential at any point P on the x axis is simplified by dividing the disk into many rings each of area $2\pi r dr$.

3. Campos Eléctrico e Magnético

3.4 Potencial de distribuições contínuas

Exemplo: potencial e campo criado por um fio uniformemente carregado.

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}$$

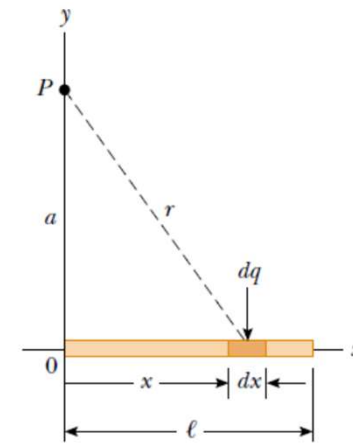


Figure 25.17 A uniform line charge of length ℓ located along the x axis. To calculate the electric potential at P , the line charge is divided into segments each of length dx and each carrying a charge $dq = \lambda dx$.

3. Campos Eléctrico e Magnético

3.4 Potencial de distribuições contínuas

Exemplo: Potencial dentro e fora de uma esfera de raio R uniformemente carregada com densidade volúmica ρ e carga total positiva Q .

Resolução

No exterior da esfera $r > R$

Este é um caso em que a simetria da distribuição convida ao uso da lei de Gauss para calculamos o

campo $E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$ e o

potencial $V_B = -\int_{\infty}^r E_r dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$

\rightarrow potencial de uma carga pontual

Na superfície da esfera $r = R$

$$V_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$

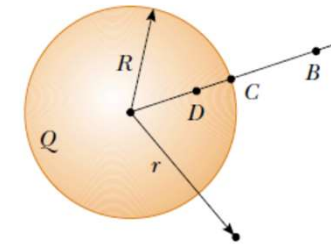


Figure 25.18 A uniformly charged insulating sphere of radius R and total charge Q . The electric potentials at points B and C are equivalent to those produced by a point charge Q located at the center of the sphere, but this is not true for point D .

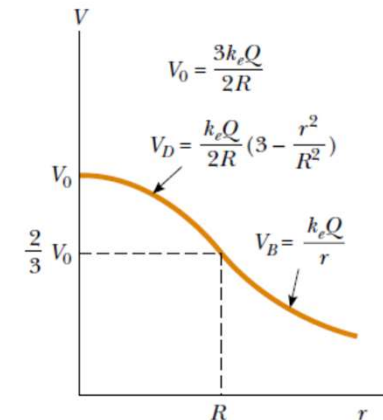


Figure 25.19 A plot of electric potential V versus distance r from the center of a uniformly charged insulating sphere of radius R . The curve for V_D inside the sphere is parabolic and joins smoothly with the curve for V_B outside the sphere, which is a hyperbola. The potential has a maximum value V_0 at the center of the sphere. We could make this graph three dimensional (similar to Figures 25.7a and 25.8a) by spinning it around the vertical axis.

3. Campos Eléctrico e Magnético

3.4 Potencial de distribuições contínuas

Exemplo: Potencial dentro e fora de uma esfera de raio R uniformemente carregada com densidade volúmica ρ e carga total positiva Q .

Resolução

No interior da esfera $r < R$

Usamos a lei de Gauss para calcularmos o campo

$$E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0} \rightarrow E_r = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

$$V_D - V_C = - \int_R^r E_r dr = - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \int_R^r r dr = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (R^2 - r^2)$$

como $V_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$ resulta

$$V_D = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

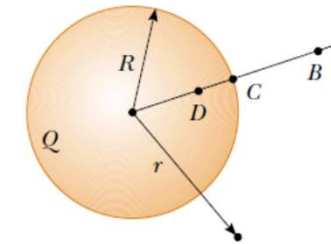


Figure 25.18 A uniformly charged insulating sphere of radius R and total charge Q . The electric potentials at points B and C are equivalent to those produced by a point charge Q located at the center of the sphere, but this is not true for point D .

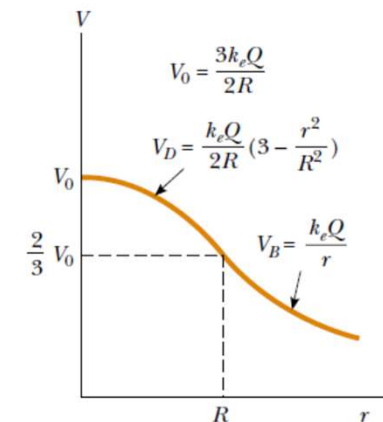


Figure 25.19 A plot of electric potential V versus distance r from the center of a uniformly charged insulating sphere of radius R . The curve for V_D inside the sphere is parabolic and joins smoothly with the curve for V_B outside the sphere, which is a hyperbola. The potential has a maximum value V_0 at the center of the sphere. We could make this graph three dimensional (similar to Figures 25.7a and 25.8a) by spinning it around the vertical axis.

3. Campos Eléctrico e Magnético

3.4 Potencial de distribuições contínuas

Exemplo: Potencial dentro e fora de uma esfera de raio R uniformemente carregada com densidade volúmica ρ e carga total positiva Q .

Resolução

No interior da esfera $r < R$

Usamos a lei de Gauss para calcularmos o campo

$$E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0} \rightarrow E_r = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

$$V_D = - \int E_r dr + \text{Cte} = - \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3} r^2 + \text{Cte}$$

como para $r = R$, $V_D = V_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$ resulta

$$V_D = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

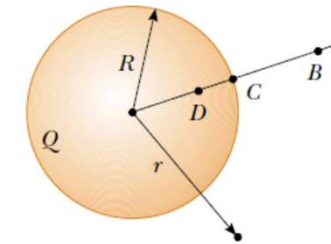


Figure 25.18 A uniformly charged insulating sphere of radius R and total charge Q . The electric potentials at points B and C are equivalent to those produced by a point charge Q located at the center of the sphere, but this is not true for point D .

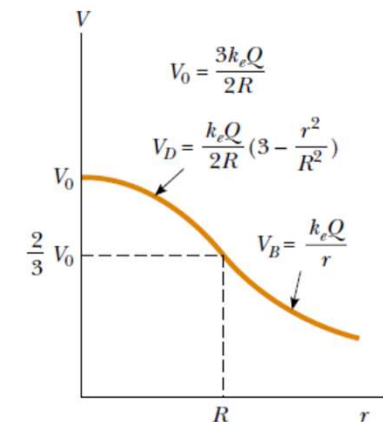


Figure 25.19 A plot of electric potential V versus distance r from the center of a uniformly charged insulating sphere of radius R . The curve for V_D inside the sphere is parabolic and joins smoothly with the curve for V_B outside the sphere, which is a hyperbola. The potential has a maximum value V_0 at the center of the sphere. We could make this graph three dimensional (similar to Figures 25.7a and 25.8a) by spinning it around the vertical axis.

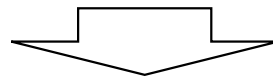
3. Campos Eléctrico e Magnético

3.4 Potencial de condutores carregados

Num condutor sólido em equilíbrio

- A carga reside na superfície exterior do condutor
- O campo eléctrico no interior do condutor é nulo
- O campo eléctrico à superfície é perpendicular à superfície do condutor

Vamos ver que todos os pontos da superfície de um condutor carregado em equilíbrio electrostático têm o mesmo potencial



A superfície de um condutor em equilíbrio electrostático é uma superfície equipotencial

Entre dois pontos quaisquer na superfície de um condutor em equilíbrio $V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$ pois $\vec{E} \perp d\vec{s}$



3. Campos Eléctrico e Magnético

3.4 Potencial de condutores carregados

Entre dois pontos quaisquer na superfície de um condutor em equilíbrio

$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \text{ pois } \vec{E} \perp d\vec{s}$$

Como o campo é nulo em todos os pontos no interior do condutor (ôco ou sólido) em equilíbrio, o potencial tem de ser constante e, portanto, igual ao seu valor na superfície

Obs

- Não é necessário realizar trabalho para trazer uma pequena carga do interior para a superfície
- O potencial no interior é constante NÃO É NULO (no caso geral)
O campo é que é nulo



3. Campos Eléctrico e Magnético

3.4 Potencial de condutores carregados

Exemplo: Condutor esférico com raio R carregado com carga $+Q$

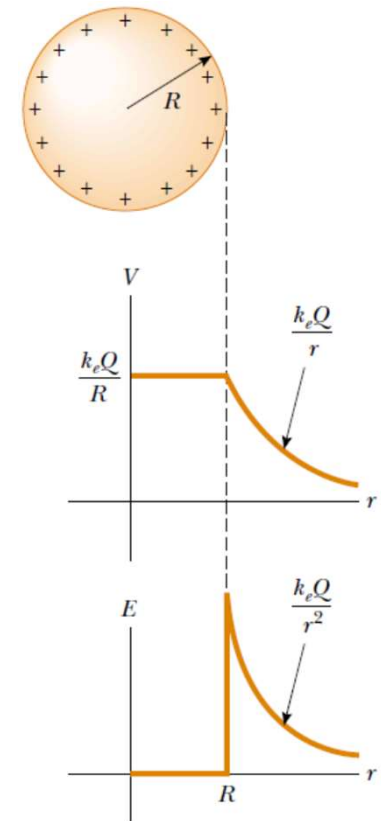
Quando o condutor esférico é carregado, o excesso de carga distribui-se uniformemente na superfície com densidade superficial de carga uniforme

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

- O campo no interior é nulo
- O potencial tem de ser constante no interior e, portanto, igual ao da superfície

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

E se o condutor não for esférico? como se distribui a carga?



3. Campos Eléctrico e Magnético

3.4 Potencial de condutores carregados

Exemplo: Dois condutores esféricos de raios R_1 e R_2 estão separados de uma distância $d \gg R_1$ e $d \gg R_2$. As esferas são ligadas por um fio condutor e as cargas das esferas em equilíbrio são q_1 e q_2 . Qual a relação entre os campos eléctricos na superfície dos condutores?

Resolução

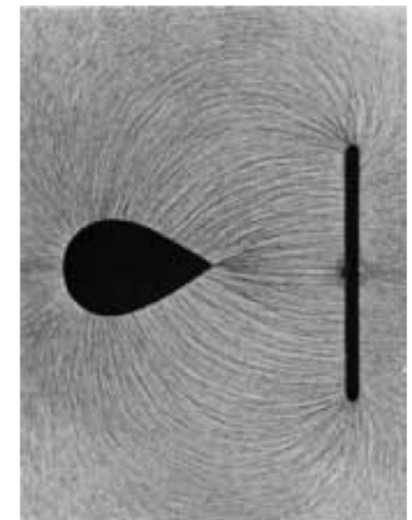
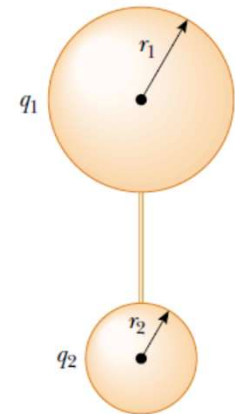
Se as esferas estão em equilíbrio então a superfície dos condutores é uma superfície equipotencial e

$$V_1 = V_2 \rightarrow \frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2}$$

Como as esferas estão muito afastadas, a carga está uniformemente distribuída na superfície e

$$\begin{cases} E_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} \\ E_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} \end{cases} \rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow$$

- o campo é mais intenso na superfície da esfera mais pequena
- o potencial das duas esferas é igual
- a densidade de carga não é uniforme



3. Campos Eléctrico e Magnético

3.4 Potencial de condutores carregados

Exemplo: Dois condutores esféricos de raios R_1 e R_2 estão separados de uma distância $d \gg R_1$ e $d \gg R_2$. As esferas são ligadas por um fio condutor e as cargas das esferas em equilíbrio são q_1 e q_2 . Qual a relação entre os campos eléctricos na superfície dos condutores?

Resolução

Se as esferas estão em equilíbrio então a superfície dos condutores é uma superfície equipotencial e

$$V_1 = V_2 \rightarrow \frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2}$$

Como as esferas estão muito afastadas, a carga está uniformemente distribuída na superfície e

$$\begin{cases} E_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} \\ E_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} \end{cases} \rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow$$

- o campo é mais intenso na superfície da esfera mais pequena
- o potencial das duas esferas é igual
- a densidade de carga não é uniforme

