memset0's Notebook

方知蓦然回首之时
那人却已不在灯火阑珊处

特征多项式和常系数线性齐次递推学习笔记

2019-02-19 | 算法

$n \times n$ 的矩阵 A 的特征多项式定义为

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

根据 Cayley–Hamilton theorem ，A 满足

$$p(A) = O$$

则

$$A^n = A^n \bmod p(A)$$

shlw loves matrix I

1. 求 $p(x)$

关于我
友情链接
文章聚合

Theme Ringo by memset0
Proudly powered by Typecho

↑

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(\lambda I - A) \\
&= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda - c_1 & -c_2 & \cdots & -c_{k-1} & -c_k \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & \lambda & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda \end{bmatrix}\right) \\
&= \lambda^n - \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda^{n-i}
\end{aligned}
$$

1. 求 $x^n \mod p(x)$ 直接多项式快速幂 + 多项式取模即可。 拉板子 233 !
2. 把 A 代入 $x^n \mod p(x)$ 设 $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_{k-1} \\ f_{k-2} \\ f_{k-3} \\ \vdots \\ f_0 \end{pmatrix}$ ，则 $f_k = [A^i \vec{f}]_k$ 。故：

$$
\begin{aligned}
f(n) &= \left[A^n \vec{f}\right]_k \\
&= \left[\sum_{i=0}^{k-1} g_i A^i \vec{f}\right]_k \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} g_i \left[A^i \vec{f}\right]_k \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} g_i f_i
\end{aligned}
$$

memseto's Notebook

方知蓦然回首之时
那人却已不在灯火阑珊处

关于我
友情链接
文章聚合

Theme Ringo by memseto
Proudly powered by Typecho

↑

shlw loves matrix II

1. 求 $p(x)$ 代入 $x=0\cdots k$ 的值分别求出对应的 $p(x)$ 。 暴力展开拉格朗日插值的式子，复杂度 $O(k^4)$
2. 求 $x^n \bmod p(x)$ 暴力多项式快速幂 + 多项式取模即可，复杂度 $O(k^2\log n)$。
3. 把 A 代入 $x^n \bmod p(x)$ 暴力把矩阵代入多项式即可。

没错你看这个 II 怎么比 I 还简单 233 ...

参考资料

由于笔者非常比较懒，大部分的式子直接从 https://cmxrynp.github.io/2019/01/17/characteristic-polynomial/ 贺了过来。

特征多项式 常系数线性齐次递推

已有 4 条评论

gamefly free trial
May 22nd, 2019 at 03:47 am

Thanks very nice blog!

回复

Echeneis
February 28th, 2019 at 10:02 pm

Hi! Behold is an interesting offering for you. I can send your commercial offers or messages through feedback forms.
Mailing is made in the same way as you received this message.
Details on this link. http://bit.ly/2TXdkWy
When you register using this link, you will receive a 20% discount on your first purchase. http://bit.ly/2GM1zQ9
It's time to finish.

回复

memset0
March 1st, 2019 at 02:03 pm

喵喵喵？好好说话不要冒充外国人。

回复

cialis
February 28th, 2019 at 12:30 am

Valuable information. Lucky me I found your website by chance, and I am stunned why this
twist of fate did not came about earlier! I bookmarked
it.

回复

用户名

邮箱

网址（选填）

memset0's Notebook

方知蓦然回首之时
那人却已不在灯火阑珊处

关于我
友情链接
文章聚合

网址（选填）

可以在这里写评论哦 ~

提交评论

LOJ150 挑战多项式
上一篇 «

循环卷积学习笔记
» 下一篇

memset0's Notebook

方知蓦然回首之时
那人却已不在灯火阑珊处

关于我
友情链接
文章聚合

在这里输入关键字哦 ~ (回车搜索)

memset0's Notebook

方知蓦然回首之时
那人却已不在灯火阑珊处

关于我

友情链接

文章聚合