Séances conjointes Physique 2 - Projet 2
Circuits magnétiques couplés

A travers cet exercice (qui s'étend sur deux séances), on vous propose d'analyser le transfert de puissance sans fil par couplage inductif. Les circuits magnétiques couplés, tels que représentés aux Figure 2 et 3, seront au centre de vos investigations: la partie gauche du circuit est appelée le circuit primaire, tandis que la partie droite est le secondaire (voir cours LEPL1202). La valeur des deux résistances R_1 et R_2, des deux inductances L_1 et L_2 et des deux capacités C_1 et C_2 est à priori inconnue. La source de tension alternative fournit une tension $V_s = V_0 cos(\omega t)$. L'inductance mutuelle est notée M.

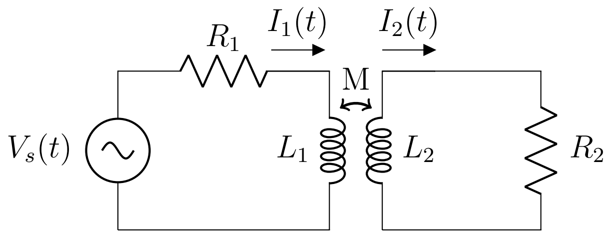


Figure 1: Circuit magnétique couplé

1 Séance A

Dans un premier temps, on s'intéresse au circuit sans les capacités, et on éloigne significativement le circuit secondaire du circuit primaire.

Que vaut l'inductance mutuelle M dans ce cas-là ? Le secondaire a-t-il un impact sur le primaire ?

Quelles hypothèses pouvez vous faire sur les courants I_1(t) et I_2(t) en connaissant l'expression mathématique de la tension $V_s(t)$? En d'autres mots, quelle forme mathématique prendront ces deux courants, si on suppose que la source est branchée depuis un temps infini?

Etablissez les équations différentielles qui régissent ce circuit. En vous basant sur le système d'équations différentielles ainsi déterminé et sur vos hypothèses sur les deux courants, quelles conditions doivent être respectées ? Résolvez le système ainsi obtenu.

Dans un second temps, on s'intéresse au circuit couplé (sans les capacités): les deux inductances sont maintenant suffisament proches.

A nouveau, et sur base notamment de vos connaissances en Physique, quelles hypothèses pouvez-vous faire sur les courants $I_1(\mathrm{t})$ et $I_2(\mathrm{t})$ en connaissant l'expression mathématique de la tension $V_s(t)$?

Etablissez les équations différentielles qui régissent ce circuit. En vous basant sur le système d'équations différentielles ainsi déterminé et sur vos hypothèses sur les deux courants, quelles conditions doivent être respectées ?

Que pensez vous du système obtenu? Est-il facilement solvable?

Connaissez-vous un autre outil (analytique) vous permettant de résoudre plus facilement le système ? Si oui, essayez de l'appliquer au cas simple (voir premier temps). Sinon, rendez-vous au cours de restrucuration LEPL1502 de mercredi.

Si vous avez encore du temps à la fin de la séance.

Une manière de mesurer l'inductance mutuelle est bien entendu d'appliquer la loi de Lenz: alimenter le primaire, et mesurer la tension induite au secondaire. Intéressons-nous à une méthode alternative (plus facile).

Supposons que vous disposiez d'un (bon) multimètre, capable de vous donner avec précision la valeur d'une inductance d'une bobine par une mesure à ses bornes (le multimètre donne bien la valeur de l'inductance, en corrigeant les effets de la résistance interne de la bobine).

Dans le schéma ci-dessous, on a négligé les résistances internes des bobines, *non pas parce qu'elles sont négligeables, mais que leur effet est compensé par l'appareil de mesure: cela est équivalent à les négliger.* Sur base des équations du circuit couplé (très simplifié) déterminées pendant la séance, pouvez-vous mettre au point une mesure de l'inductance mutuelle M en fonction de la géométrie (par exemple, la distance entre les bobines) **qui n'utiliserait que le multimètre**?

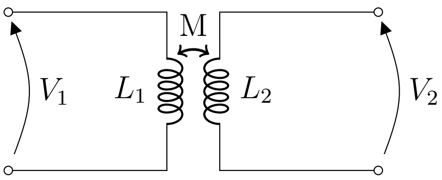


Figure 2: Mesure de l'inductance mutuelle

Quelques mots à propos du laboratoire 4.

Le laboratoire 4 sera présenté en détails lors de la restucturation de S4. Il sera consacré à la mesure de l'inductance d'une bobine et de l'inductance mutelle de bobines couplées. Ce sera à vous de mettre au point les méthodes de mesure de ces deux éléments (L et M), dont les résultats pourront aussi être comparés aux mesures effectuées avec un bon multimètre.

2 Séance B

Suite au cours de restructuration, resolvez à nouveau l'exercice (voir second temps).

Comment pouvez-vous illustrer l'impact du circuit secondaire sur le circuit primaire ? Est-il possible de représenter le circuit secondaire comme une impédance au primaire?

Quelle est la puissance totale fournie au circuit? Quelle pourcentage de cette puissance est effectivement transférée au secondaire ? Sous quelle condition la puissance transférée sera-t-elle maximale ?

Dans un troisième temps, on s'intéresse au circuit couplé complet.

Refaites la même démarche qu'au point précédent. Sous quelle condition le courant induit au secondaire est-il maximum ?

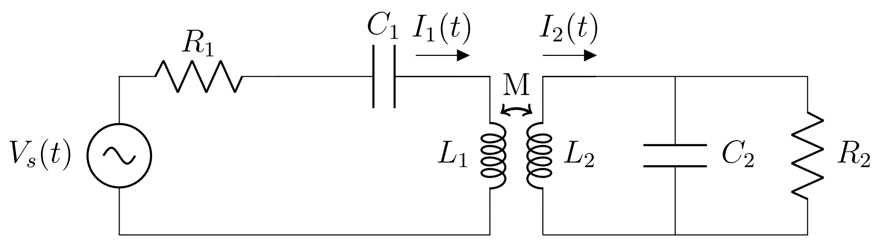


Figure 3: Circuit magnétique couplé avec capacités

Dans un premier temps, on s'intéresse au circuit sans les capacités, et on éloigne significativement le circuit secondaire du circuit primaire.

Que vaut l'inductance mutuelle M dans ce cas-là ? Le secondaire a-t-il un impact sur le primaire ?

Quelles hypothèses pouvez vous faire sur les courants I_1(t) et I_2(t) en connaissant l'expression mathématique de la tension $V_s(t)$? En d'autres mots, quelle forme mathématique prendront ces deux courants, si on suppose que la source est branchée depuis un temps infini?

Etablissez les équations différentielles qui régissent ce circuit. En vous basant sur le système d'équations différentielles ainsi déterminé et sur vos hypothèses sur les deux courants, quelles conditions doivent être respectées ? Résolvez le système ainsi obtenu.

$M = 0$ Nope.

$V_s(t) = V_0 \cos(\omega t)$

$$I_1(t) = \frac{V_0 \cos(\omega t)}{\sqrt{R_1^2 + (L\omega)^2}} \qquad I_2(t) = 0$$

$$V_s = I . R_1 + L \frac{dI}{dt}$$

$$I . R_1 = -L . dI$$

$$dI = \frac{-R_1 . I}{L}$$

$$I = e^{-\frac{R}{L} . t}$$

$$V_0 . \cos(\omega t) = I . R_1 + L . \frac{dI}{dt}$$

$a . \cos(\omega t) + b . \sin(\omega t)$

$$V_0 . \cos(\omega t) = a . R_1 . \cos(\omega t) + b . R_1 . \sin(\omega t) - L . a \omega \sin(\omega . t) + L b \omega . \cos(\omega t)$$

$V_0 = a.R_1 + Lb\omega$ $\qquad\qquad b = \dfrac{V_0 . L.\omega}{R^2+L^2\omega^2}$

$bR_1 = La\omega$

$b = \dfrac{L.a.\omega}{R_1}$

$V_0 = a.R_1 + \dfrac{L^2\omega^2.a}{R_1}$

$a = V_0 . \dfrac{R_1}{R_1^2+L^2\omega^2} \Rightarrow$

$\dfrac{V_0.R_1}{R_1^2+L^2\omega^2}\cos(\omega t) + \dfrac{V_0 . L.\omega}{R_1^2+L^2\omega^2}\sin(\omega t)$

$I = \dfrac{V_0}{R_1^2+L^2\omega^2}\left(R_1\cos(\omega t+\phi) + L\omega\sin(\omega t+\phi)\right) + \underbrace{e^{-\frac{R}{L}.t}}_{t=\infty \Rightarrow 0}$

$I_2 = 0$

Dans un second temps, on s'intéresse au circuit couplé (sans les capacités): les deux inductances sont maintenant suffisament proches.

A nouveau, et sur base notamment de vos connaissances en Physique, quelles hypothèses pouvez-vous faire sur les courants I_1(t) et I_2(t) en connaissant l'expression mathématique de la tension $V_s(t)$?

Etablissez les équations différentielles qui régissent ce circuit. En vous basant sur le système d'équations différentielles ainsi déterminé et sur vos hypothèses sur les deux courants, quelles conditions doivent être respectées ?

Que pensez vous du système obtenu? Est-il facilement solvable?

Connaissez-vous un autre outil (analytique) vous permettant de résoudre plus facilement le système ? Si oui, essayez de l'appliquer au cas simple (voir premier temps). Sinon, rendez-vous au cours de restrucuration LEPL1502 de mercredi.

$V_1 = \dfrac{L_1 dI_1}{dt} - \dfrac{M. dI_2}{dt}$

$$V_S = I_1 . R_1 + L_1 . \frac{dI_1}{dt} - M . \frac{dI_2}{dt}$$

$$I_1 = a . \cos(\omega t + q_1)$$
$$I_2 = b . \cos(\omega t + q_2)$$

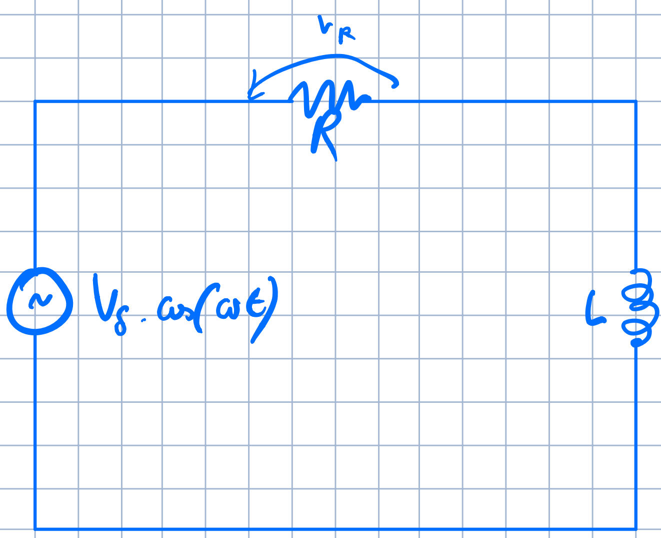
$$V_2 = \frac{M dI_1}{dt} - L_2 \frac{dI_2}{dt}$$

$$I_2 . R_2 = \frac{M . dI_1}{dt} - L_2 . \frac{dI_2}{dt}$$

$$V_0 . \cos(\omega t \quad) = a . R_1 . \cos(\omega t + q_1) - L_1 . a . \omega . \sin(\omega t + q_1) + M . b . \omega . \sin(\omega t + q_2)$$

$$R_2 . b . \cos(\omega t + q_2) = - M . a . \omega . \sin(\omega t + q_1) + L_2 . b . \omega . \sin(\omega t + q_2)$$

Bof solvable ... si !



$$V_S . \cos(\omega t) = R . I + \frac{L . dI}{dt}$$

Et au niveau de l'inductance,

$$I . X_L = V_L$$

I est le même au niveau de la résistance, on mesure donc le voltage drop V_R et on utilise la relation

$$I = \frac{V}{R}$$

pour déterminer I, on mesure V_L = et on utilise la formule

$$L = \frac{V_L}{I . \omega}$$

on $V_L = V_S - V_R$

nous avons donc

$$\frac{V_S - V_R}{I \cdot \omega}$$