数学分析

张东升

前言

> 长远而言, 是观念, 因而也正是传播新观念的人, 主宰着历史发展的进程.[1]

记录学习过程中的点点滴滴.

[1] Friedrich Hayek

目录

第一章　公理集合论

现代数学是建立在公理集合论的基础之上. 目前数学家普遍认可的公理系统是 Zermelo-Fraenkel 公理系统 (ZF 公理系统), 再加上选择公理 (Axiom of Choice) 就构成了 ZFC 公理系统.

纯粹集合论者在数学中只研究一切被称为集合 (Set) 的对象 (Object), 而无需考虑其它对象. 非纯粹集合论者认为在数学中存在一类原始对象, 它们只能作为集合的元素存在, 本身不能作为集合存在. 本书对这两种论点持开放态度.

在 ZFC 公理系统中, 有两个未加定义的原始概念—集合和属于. 给定任意集合 a 和 b: 如果集合 a 属于集合 b, 记作 $a \in b$; 如果集合 a 不属于集合 b, 记作 $a \notin b$; 如果对于任意集合 c, $c \in a$ 蕴含 $c \in b$, 那么称 a 是 b 的子集, a 包含于 b, 或 b 包含 a, 记作 $a \subseteq b$; 如果集合 a 不是集合 b 的子集, 记作 $a \nsubseteq b$.

1.1　公理

在哲学中, 外延 (Extension) 由一个概念所适用的全体对象构成, 它是相对于内涵 (Intension/Connotation) 而言的. 在数学中, 外延是指一个数学概念对应的集合中的所有元素. 集合可以描述概念的外延, 这是公理化集合论中外延公理的出发点. 两个集合相等当且仅当它们包含的所有元素都一一相等. 这个公理的实质在于指出集合唯一地由它的成员来决定.

公理 1.1 (外延公理) *给定任意集合 a 和 b, $a = b$ 当且仅当: 对于任意集合 c, $c \in a$ 当且仅当 $c \in b$. 一阶逻辑下, 外延公理表述如下:*

$$\forall a \forall b (a = b \leftrightarrow \forall c (c \in a \leftrightarrow c \in b)). \tag{1.1}$$

给定任意集合 a 和 b: 如果两个集合不满足条件 $a = b$, 那么称 a 不等于 b, 记作 $a \neq b$; 如果 $a \subseteq b$, 且 $a \neq b$, 则称 a 是 b 的真子集, a 真包含于 b, 或 b 真包含 a.

分类公理 (Axiom schema of specification), 又称分离公理 (Axiom schema of separation), 受限概括公理 (Axiom schema of restricted comprehension) 或子集公理 (Subset axiom scheme).

公理 1.2 (分类公理) *假定 P 是一个单变量谓词. 给定任意集合 a, 存在一个集合 b, 使得对于任意集合 c, $c \in b$ 当且仅当 $c \in a$ 且 $P(c)$ 成立. 一阶逻辑下, 分类公理表述如下:*

$$\forall a \exists b \forall c (c \in b \leftrightarrow c \in a \wedge P(c)). \tag{1.2}$$

注意, 对于所有这种谓词 P 都存在一个特定的分类公理, 所以分类公理实际上是一个公理模式.

通过分类公理定义的集合 b 是集合 a 的子集. 分类公理是在一个已经存在的集合基础上通过限定条件获取新集合的有力手段. 通过外延公理, 可以证明通过分类公理获取的集合是唯一的.

命题 1.1.1 *通过分类公理使用同一个谓词获取的集合是唯一的.*

证明. 设通过分类公理使用谓词 P 从集合 a 获取两个集合 x 和 y. 由分类公理可知, $x \subseteq a$, 对于任意 $z \in x$, 有 $z \in a$ 且 $P(x)$ 成立, 因此 $z \in y$. 同理也可以证明对于任意 $z \in y$, 有 $z \in x$. 因此 $x = y$. □

公理 1.3 (配对公理) 给定任意集合 a 和 b, 存在一个集合 c, 使得对于任意集合 d, $d \in c$ 当且仅当 $d \in a$ 或 $d \in b$. 一阶逻辑下, 配对公理表述如下:

$$\forall a \forall b \exists c \forall d (d \in c \leftrightarrow d \in a \vee d \in b). \tag{1.3}$$

公理 1.4 (并集公理) 给定任意集合 a, 存在一个集合 b, 使得对于任意集合 c, $c \in b$ 当且仅当存在一个集合 d, 满足 $d \in a$ 且 $c \in d$. 一阶逻辑下, 并集公理表述如下:

$$\forall a \exists b \forall c (c \in b \leftrightarrow \exists d (d \in a \wedge c \in d)). \tag{1.4}$$

上面定义的是广义并运算, 下面引入二元并运算.

定义 1.1.1 给定集合 A 和 B, $A \cup B \coloneqq \bigcup \{A, B\}$.

给定集合 A 和 B, 根据配对公理, 存在集合 $\{A, B\}$, 因此可以在此集合上执行并运算.

命题 1.1.2 给定集合 A, B 和 C, 如果 $A \subseteq C$ 且 $B \subseteq C$, 那么 $A \cup B \subseteq C$.

证明. 对于任意 $x \in A \cup B$, $x \in A$ 或 $x \in B$. 如果 $x \in A$, 因为 $A \subseteq C$, 所以 $x \in C$. 同理, 如果 $x \in B$, 因为 $B \subseteq C$, 所以 $x \in B$. 综合以上两种情况, $x \in C$. 所以 $A \cup B \subseteq C$. □

命题 1.1.3 给定集合 A, B. 如果 $A \subseteq B$, 那么 $\bigcup A \subseteq \bigcup B$.

证明. 给定集合 A, B. 如果 $A \subseteq B$, 那么对于任意 $a \in \bigcup A$, 存在 $b \in A$, $a \in b$. 因为 $A \subseteq B$, 所以 $b \in B$. 又 $a \in b$, 所以 $a \in \bigcup B$. 所以 $\bigcup A \subseteq \bigcup B$. □

公理 1.5 (空集公理) 存在一个集合 a, 使得对于任意集合 b, $b \notin a$. 一阶逻辑下, 空集公理表述如下:

$$\forall a \forall b (\neg (b \in a)). \tag{1.5}$$

空集记作 $\varnothing$.

公理 1.6 (无穷公理) 存在一个集合 a, $\varnothing \in a$, 并且对于任意集合 $b \in a$, $b \cup \{b\} \in a$. 一阶逻辑下, 无穷公理表述如下:

$$\exists a (\varnothing \in a \wedge \forall b (b \in a \to b \cup \{b\} \in a)). \tag{1.6}$$

公理 1.7 (替代公理) 假定 P 是双变量谓词, 给定任意集合 a, 存在唯一的集合 b 满足 $P(a, b)$. 给定任意集合 c, 存在一个集合 d, 对于任意集合 e, $e \in d$ 当且仅当存在一个集合 f, $f \in c$ 且 $P(f, e)$ 成立. 一阶逻辑下, 替代公理表述如下:

$$\forall a \exists ! b (P(a, b)) \to \forall c \exists d \forall e (e \in d \leftrightarrow \exists f (f \in c \wedge P(f, e)). \tag{1.7}$$

命题 1.1.4 (聚集公理) 假定 P 是双变量谓词, 给定任意集合 a, 至少存在一个集合 b 满足 $P(a, b)$. 给定任意集合 c, 存在一个集合 d, 对于任意集合 e, $e \in d$ 仅当存在一个集合 f, $f \in c$ 且 $P(f, e)$ 成立. 一阶逻辑下, 聚集表述如下:

$$\forall a \exists b (P(a, b)) \to \forall c \exists d \forall e (e \in d \to \exists f (f \in c \wedge P(f, e)). \tag{1.8}$$

由聚集公理确定的集合不能保证是唯一的.

公理 1.8 (幂集公理) 给定任意集合 a, 存在一个集合 b, 使得对于任意集合 c, $c \in b$ 当且仅当 $c \subseteq a$. 一阶逻辑下, 幂集公理表述如下:

$$\forall a \exists b \forall c (c \in b \leftrightarrow c \subseteq a). \tag{1.9}$$

集合 a 的幂集记作 $\mathscr{P}(a)$.

定义 1.1.2 (集族) *如果给定任意集合 I 和 X, 存在一个满射函数 f, 满足:*

$$\begin{aligned} f\colon I &\to X \\ i &\mapsto x_i = f(i), \end{aligned}$$

称集合 I 为指标集 (Index set), 集合 X 为集族 (Family of set).

公理 1.9 (选择公理) *给定任意非空集合构成的集族 X, 存在一个选择函数 f, 满足: 对于任意 $x \in X$, 有 $f(x) \in x$. 一阶逻辑下, 选择公理表述如下:*

$$\forall X(\neg(\varnothing \in X) \to \exists f\colon X \to \bigcup X(\forall x(x \in X \to f(x) \in x))). \tag{1.10}$$

如果从有限集内选择一个元素是不需要选择公理的. 从有限集的定义可知, 有限集是可以与某个集合 $N = \{x \in \mathbb{N} \mid n \in \mathbb{N} \wedge x \leqslant n\}$ 建立一一映射的集合. 假设这个一一映射函数为 f, 那么我们可以选择 $f(0)$ 作为我们要选择的元素. 如果集合为无限集 S, 那么从 S 中选择一个元素 x 分为两种情况. 一种情况是元素 x 具备某种属性 P, 该属性可以将元素 x 从集合中唯一的确定下来. 在这种情况下我们不需要选择公理就可以从无限集 S 中选择唯一一个元素 x, 该元素就是集合 $\{x \in S \mid P(x)\}$ 的唯一元素.

那么选择公理为什么要这么定义呢? 为什么不直接以如下的方式定义:

$$\forall X(\neg(X = \varnothing) \to \exists f\colon X \to X(f(x) \in x)).$$

选择公理的定义保留了我们可以从一个集合 S 中选择出无限多个元素构成一个新集合 S' 的能力. 新集合可能是可数集, 也可能是不可数集. 而如果采用上面那种定义, 那我们只保留了从无限集合中选择一个元素的能力, 而丧失了直接选择出无限集的能力. 而且选择公理的定义也支持我们从一个无限集合 S 中挑选出一个元素 x 的能力. 根据配对公理, 存在集合 $A = \{S\}$. 根据选择公理, 存在一个选择函数 f, $f(S)$ 就是我们要选择的元素.

公理 1.10 (依赖选择公理) *依赖选择公理 (Axiom of dependent choice), 缩写为 DC.*

左全关系版本: 给定任意非空集合 S 以及 S 上的任意左全关系 R, 那么存在一个 S 上的数列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 满足: 对任意 $n \in \mathbb{N}$, $x_n \mathrel{R} x_{n+1}$ 成立.

右全关系版本: 给定任意非空集合 S 以及 S 上的任意右全关系 R, 那么存在一个 S 上的数列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 满足: 对任意 $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} \mathrel{R} x_n$ 成立.

选择公理是比依赖选择公理更强的公理. 选择公理可以推出依赖选择公理.

证明. 这里仅证明左全关系版本, 右全关系版本证明过程类似. 给定任意非空集合 S 以及 S 上的任意左全关系 R. 对于任意 $x \in S$, 构建集合 $R_x = \{y \in S \mid x \mathrel{R} y\}$. 由于 R 是左全关系, 所以 R_x 非空. 在集族 $A = \{R_x \mid x \in S\}$ 上使用选择公理, 存在选择函数 $f\colon S \to S$, 对任意 $x \in S$, 有 $f(x) \in R_x$, 即 $x \mathrel{R} f(x)$. 所以, 对于任意 $x \in S$, 定义序列:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}.$$

其中, f^n 表示选择函数 f 和自己复合 n 次, 规定 $f^0(x) = x$. 序列满足 $x_n \mathrel{R} x_{n+1}$. □

第二章　实数的连续性

2.1　闭区间套定理

定义 2.1.1 给定无穷多个闭区间 $[a_n, b_n]$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, 满足以下条件:

1. $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$,

称这些无穷多个闭区间构成的集合 $\{[a_n, b_n] \mid n \in \mathbb{N}\}$ 为闭区间套 *(nested intervals)*, 简称区间套.

定理 2.1.1 (闭区间套定理) 如果 $\{[a_n, b_n] \mid n \in \mathbb{N}\}$ 是一个闭区间套, 则存在唯一实数 $\xi \in [a_n, b_n], n = 0, 1, 2, \ldots$, 并且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n) = \xi$.

第三章 关系和函数

3.1 关系

在集合中, 元素是没有先后之分的. 但是在很多情况下, 我们还需要有先后之分的数据结构.

定义 3.1.1 (有序对) *给定任意集合 a 和 b, 称集合 $\{\{a\},\{a,b\}\}$ 为有序对, 记作 (a,b) 或 $<a,b>$.*

命题 3.1.1 *给定有序对 (a,b) 和 (c,d), $(a,b)=(c,d)$ 当且仅当 $a=c$ 且 $b=d$.*

证明. 充分性: 如果 $a=c$ 且 $b=d$, 那么 $(c,d)=\{\{c\},\{c,d\}\}=\{\{a\},\{a,b\}\}=(a,b)$.

必要性: 如果 $a=b$, 那么 $(a,b)=\{a\}$. 又 $(a,b)=(c,d)$, 那么 $(c,d)=\{\{c\},\{c,d\}\}=\{\{a\}\}$. 因为 $\{a\}\in\{\{a\}\}$, 所以 $\{a\}\in\{\{c\},\{c,d\}\}$, 那么 $\{a\}=\{c\}$ 或 $\{a\}=\{c,d\}$. 如果 $\{a\}=\{c\}$, 那么 $a=c$. 所以 $\{\{c\},\{c,d\}\}=\{\{a\}\},\{a,d\}\}=\{\{a\}\}$. 所以 $\{a,d\}\in\{\{a\}\}$, 那么 $\{a,d\}=\{a\}$. 所以 $a=d$. 得证. 如果 $\{a\}=\{c,d\}$, 那么 $c\in\{a\}$ 且 $d\in\{a\}$, 那么 $c=a$ 且 $d=a$. 又 $a=b$, 所以 $a=c$ 且 $b=d$. 得证.

如果 $a\neq b$, 那么 $(a,b)=(c,d)=\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$. $\{c\}=\{a\}$ 或 $\{c\}=\{a,b\}$. 如果 $\{c\}=\{a,b\}$, 那么 $a=c$ 且 $b=c$, 因此 $a=b$, 与假设矛盾. 所以 $\{c\}=\{a\}$. 所以 $(a,b)=(c,d)=\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{a\},\{a,d\}\}$. 同理可得 $\{a\}=\{a\}$ 或 $\{a\}=\{a,d\}$. 如果 $\{a\}=\{a,d\}$, 可知 $a=d$. 已知 $a=c$, 所以 $c=d$. 那么 $(a,b)=\{c\}$, 可知 $a=b$, 与假设矛盾. 所以 $\{a\}\neq\{a,d\}$. $\{a,b\}=\{a\}$ 或 $\{a,b\}=\{a,d\}$. 由于 $a\neq b$, 因此 $\{a,b\}\neq\{a\}$. 所以 $\{a,b\}=\{a,d\}$. $b=a$ 或 $b=d$, 已知 $a\neq b$, 所以 $b=d$. 得证. □

定义 3.1.2 (笛卡尔积) *给定集合 X 和 Y, 称集合 $\{(x,y)\mid x\in X\wedge y\in Y\}$ 为集合 X 和 Y 的笛卡尔积 (Cartesian product) 或直积 (Direct product), 记作 $X\times Y$.*

命题 3.1.2 *给定任意非空集合 X 和 Y, $P(x,y)$ 是一个关于 $x\in X$ 和 $y\in Y$ 的性质, 对于任意 $x\in X$, 至少存在一个 $y\in Y$ 使得 $P(x,y)$ 成立. 那么存在一个选择函数 $f\colon X\to Y$, 使得对于任意 $x\in X$, $P(x,y)$ 成立.*

证明. 给定任意集合 X 和 Y. 根据概括公理, 对于任意 $x\in X$, 存在集合 $Z_x=\{(x,y)\in X\times Y\mid P(x,y)\}\}$. 根据外延公理, Z_x 是唯一的. 根据替换公理, 存在集合 $Z=\{Z_x\mid x\in X\}$. 由于 X 是非空集合, 所以集合 Z 也是非空集合. 根据选择公理, 存在一个选择函数 $f\colon X\to Y$, 使得对于任意 $x\in X$, $P(x,y)$ 成立. □

定义 3.1.3 (二元关系) *给定集合 X 和 Y, 集合 $G(R)$ 是 X 和 Y 的笛卡尔积的子集, $G(R)\subseteq X\times Y$, 称 $R=(X,Y,G(R))$ 为集合 X 和 Y 上的二元关系 (Relation), 称 $G(R)$ 为二元关系 R 的图 (Graph). 如果给定任意 $x\in X$ 和 $y\in Y$, $(x,y)\in R$, 称 x 和 y 有二元关系 R, 记作 $R(x,y)$ 或 aRb; 称 $\{x\in X\mid existsy\in Y(xRy)\}$ 为二元关系 R 的定义域 (Domain/Domain of definition), 记为 $\operatorname{dom}R$; 称 Y 为二元关系 R 的上域/陪域 (Codomain); 称 $\{y\in Y\mid\exists x\in X(xRy))\}$ 为二元关系 R 的值域, 记为 $\operatorname{dom}R$, 称 $\operatorname{dom}R\cup\operatorname{ran}R$ 为二元关系 R 的域, 记为 $\operatorname{fld}R$.*

命题 3.1.3 *给定二元关系 R, 对于任意 $(x,y)\in R$, $x\in\bigcup\bigcup R$, $y\in\bigcup\bigcup R$, $\operatorname{fld}R=\bigcup\bigcup R$.*

证明. TBD □

推论 3.1.1 二元关系 R 的任一子集也是二元关系.

证明. 给定任意二元关系 R. 取 R 的任一子集 $R' \subseteq R$. 对于任意 $(x, y) \in R'$, 可知 $(x, y) \in R$. 所以 R' 构成从 X 到 Y 上的二元关系. $\operatorname{dom} R' = \{x \in \operatorname{dom} R \mid xR'y\}$, $\operatorname{ran} R' = \{y \in \operatorname{ran} R \mid xR'y\}$. □

定义 3.1.4 (逆关系) 给定集合 X 和 Y 上的二元关系 R, 称集合 $R^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}$ 为关系 R 的逆关系 *(Inverse relation)*, 逆关系的定义域为 $DomR$, 上域为 X, 值域为.

定义 3.1.5 给定任意一个集合 S, 从 S 到 S 的任意一个二元关系 R 称为 S 上的二元关系 R.

如果 R 是空集, 称 R 为 S 上的空关系 *(empty relation)*.

如果对于任意 $x \in S$, $(x, x) \in R$, 且对于任意 $r \in R$, 存在 $y \in S$, $r = (y, y)$, 称 R 为 S 上的恒等关系 *(identity relation)*.

如果对于任意 $x \in S$, $x \, R \, x$, 称 R 是自反的 *(reflexive)*.

如果对于任意 $x \in S$, $x \not R \, x$, 称 R 是反自反的 *(irreflexive)*.

如果对于任意 $x, y \in S$, 如果 $x \, R \, y$, 那么 $y \, R \, x$, 称 R 是对称的 *(symmetric)*.

如果对于任意 $x, y \in S$, 如果 $x \, R \, y$ 且 $y \, R \, x$, 那么 $x = y$, 称 R 是反对称的 *(antisymmetric)*.

如果对于任意 $x, y \in S$, 如果 $x \, R \, y$, 那么 $y \not R \, x$, 称 R 是非对称的 *(asymmetric)*.

如果对于任意 $x, y, z \in S$, 如果 $x \, R \, y$ 且 $y \, R \, z$, 那么 $x \, R \, z$, 称 R 是传递的 *(transitive)*.

如果对于任意 $x, y \in S$, 如果 $x \, R \, y$ 或 $x = y$ 或 $y \, R \, x$, 称 R 是连通的 *(connected)*.

如果对于任意 $x, y \in S$, 如果 $x \, R \, y$ 或 $y \, R \, x$, 称 R 是强连通的 *(strongly connected)*.

命题 3.1.4 给定任意一个集合 S 和 S 上任意一个的二元关系 R, R 是强连通的当且仅当 R 是连通的且 R 是自反的.

证明. 充分性: 假设 R 是连通的且 R 是自反的. R 是连通的, 所以对于任意 $x, y \in S$, $x \, R \, y$ 或 $x = y$ 或 $y \, R \, x$. 如果 $x = y$, 因为 R 是自反的, 所以 $x \, R \, y$. 所以对于任意 $x, y \in S$, $x \, R \, y$ 或 $y \, R \, x$, R 是强连通的.

必要性: 假设 R 是强连通的, 对于任意 $x, y \in S$, $x \, R \, y$ 或 $y \, R \, x$, 那么 $x \, R \, y$ 或 $x = y$ 或 $y \, R \, x$, R 是连通的. □

第四章 偏序关系和全序关系

4.1 偏序关系

定义 4.1.1 (偏序关系) *给定任意一个集合 S 和 S 上任意一个二元关系 R, 若 R 满足:*

1. *反对称性 (Anti-symmetric): $\forall a, b \in S(a\,R\,b \wedge b\,R\,a \to a = b)$;*

2. *传递性 (Transitive): $\forall a, b, c \in S(a\,R\,b \wedge b\,R\,c \to a\,R\,c)$,*

则称 R 是 S 上的偏序关系 (partial order relation), 称 S 是关于 R 的偏序集 (partial order set), 称 (S, R) 为偏序结构 (partial order structure).

定义 4.1.2 (非严格偏序关系) *给定任意一个集合 S 和 S 上任意一个二元关系 $\preccurlyeq$, 若 $\preccurlyeq$ 满足:*

1. *自反性 (Reflexive): $\forall a \in S(a \preccurlyeq a)$;*

2. *反对称性 (Anti-symmetric): $\forall a, b \in S(a \preccurlyeq b \wedge b \preccurlyeq a \to a = b)$;*

3. *传递性 (Transitive): $\forall a, b, c \in S(a \preccurlyeq b \wedge b \preccurlyeq c \to a \preccurlyeq c)$,*

则称 $\preccurlyeq$ 是 S 上的非严格偏序关系 (non-strict partial order relation), 弱偏序关系 (weak partial order relation) 或自反偏序关系 (reflexive partial order relation), 称 S 为关于 R 的非严格偏序集 (non-strict partial order set), 弱偏序集 (weak partial order set) 或自反偏序集 (reflexive partial order set), 称 $(S, \preccurlyeq)$ 为非严格偏序结构 (non-strict partial order structure).

根据定义, 空集是一个关于空关系的非严格偏序集, 只含有一个元素的单例集 (Singleton) 也是非严格偏序集.

命题 4.1.1 *集合 X 上的包含关系构成 X 上的非严格偏序关系.*

证明. 集合 X 上的包含关系 $\subseteq$ 满足以下条件:

1. 对于任意 $a \in X$, $a \subseteq a$;

2. 对于任意 $a, b \in X$, $a \subseteq b$ 且 $b \subseteq a$ 蕴含 $a = b$;

3. 对于任意 $a, b, c \in X$, $a \subseteq b$ 且 $b \subseteq c$ 蕴含 $a = c$.

所以集合 X 上的包含关系构成 X 上的非严格偏序关系. □

定义 4.1.3 (严格偏序关系) *给定集合 S, "$\preccurlyeq$" 是 S 上的二元关系, 若 "$\preccurlyeq$" 满足:*

1. *反自反性 (Irreflexive/Anti-reflexive): $\forall a \in S, \neg(a \prec a)$;*

2. *非对称性 (Asymmetric): $\forall a, b \in S, a \prec b \to \neg(b \prec a)$;*

3. *传递性 (Transitive): $\forall a, b, c \in S, a \prec b \wedge b \prec c \to a \prec c$;*

则称 “$\prec$” 是 S 上的严格偏序或反自反偏序, 称 $(S,\prec)$ 为严格偏序结构.

根据定义, 空集是一个严格偏序集, 只含有一个元素的单例集 (Singleton) 也是严格偏序集.

严格偏序与有向无环图 (DAG) 有直接的对应关系。一个集合上的严格偏序的关系图就是一个有向无环图。

定义 4.1.4 (偏序关系) *给定集合 S, R 是 S 上的二元关系, 若 R 满足:*

1. *反对称性 (Anti-symmetric): $\forall a,b\in S$, $aRb\wedge bRa\to a=b$;*

2. *传递性 (Transitive): $\forall a,b,c\in S, aRb\wedge bRc\to aRc$;*

则称 R 是 S 上的偏序关系, 称 S 为 R 偏序集, 称 (S,R) 为偏序结构.

命题 4.1.2 *非严格偏序关系和严格偏序关系是偏序关系.*

证明. 给定集合 S 和 S 上的非严格偏序关系 R. 根据定义, R 满足反对称性和传递性, 所以 R 是偏序关系.

给定集合 S 和 S 上的强偏序关系 R'. 对于任意 $a,b\in S$, 如果 $aR'b$, 那么 $\neg(bR'a)$, $aR'b\wedge bR'a$ 为假, 所以 $aRb\wedge bRa\to a=b$. R' 满足传递性, 所以 R' 是偏序关系. □

下面的命题是否成立? “偏序关系要么是非严格偏序关系, 要么是严格偏序关系.” 答案是否定的. 给定集合 $S=\{a,b,c\}$, 给定 S 上的偏序关系 $R=\{(a,a)\}$. 可以验证, R 是偏序关系, 但是 R 不满足自反性, 也不满足反自反性.

命题 4.1.3

1. *给定集合上的一个非严格偏序 “$\preccurlyeq$”, 可以诱导出 S 上的一个严格偏序 “$\prec$”, 只需按如下方式定义: $\forall a,b\in S,(a\prec b\leftrightarrow a\preccurlyeq b\wedge a\neq b)$;*

2. *给定集合上的一个严格偏序 “$\prec$”, 可以诱导出 S 上的一个非严格偏序 “$\preccurlyeq$”, 只需按如下方式定义: $\forall a,b\in S,(a\preccurlyeq b\leftrightarrow a\prec b\vee a=b)$;*

3. *给定集合上的一个非严格偏序 “$\preccurlyeq$”, 其逆关系 “$\succcurlyeq$” 也是 S 上的一个非严格偏序;*

4. *给定集合上的一个严格偏序 “$\prec$”, 其逆关系 “$\succ$” 也是 S 上的一个非严格偏序.*

TBD: 证明.

定义 4.1.5 *给定任意一个偏序结构 $(X,\preccurlyeq)$.*

如果存在 $a\in X$, 对于任意 $b\in X$, 都有 $b\preccurlyeq a\to a=b$, 那么称 a 是 X 上的极小元 (minimal element).

如果存在 $a\in X$, 对于任意 $b\in X$, 都有 $a\preccurlyeq b\to a=b$, 那么称 a 是 X 上的极大元 (maximal element).

如果存在 $a\in X$, 对于任意 $b\in X$, 都有 $a\preccurlyeq b$, 那么称 a 是 X 上的最小元 (least element).

如果存在 $a\in X$, 对于任意 $b\in X$, 都有 $b\preccurlyeq a$, 那么称 a 是 X 上的最大元 (greatest element).

由外延公理可知, 如果 X 上存在最小元或最大元, 这个最小元或最大元是唯一的.

定义 4.1.6 *给定任意一个严格偏序结构 $(X,\prec)$.*

如果存在 $a\in X$, 对于任意 $b\in X$, 都有 $b\nprec a$, 那么称 a 是 X 上的严格极小元 (strictly minimal element).

如果存在 $a\in X$, 对于任意 $b\in X$, 都有 $a\nprec b$, 那么称 a 是 X 上的严格极大元 (strictly maximal element).

如果存在 $a\in X$, 对于任意 $b\in X$, 都有 $a\prec b$ 或 $a=b$, 那么称 a 是 X 上的严格最小元 (strictly least element).

如果存在 $a \in X$, 对于任意 $b \in X$, 都有 $b \prec a$ 或 $b = a$, 那么称 a 是 X 上的严格最大元 (strictly greatest element).

由外延公理可知, 如果 X 上存在严格最小元或严格最大元, 这个严格最小元或严格最大元是唯一的.

极小元和极大元的概念是建立在非严格偏序关系上的. 极小元和极大元的概念还可以进一步推广到集合上的一般二元关系上, 这些二元关系可能不是非严格偏序关系. 给定集合 X 和 X 上的二元关系 R, 如果存在 $a \in X$, 对于任意 $b \in X$, 如果 $a \mathrel{R} b \to a = b$, 那么称 a 是 X 上的极大元 (maximal element); 如果存在 $a \in X$, 对于任意 $b \in X$, 如果 $b \mathrel{R} a \to a = b$, 那么称 a 是 X 上的极小元 (minimal element).

给定集合 X 和 X 上的二元关系 R. 使用一阶逻辑, X 上有关于 R 的极小元表述如下:

$$\exists a \in X, \forall b \in X((b \mathrel{R} a) \to a = b).$$

X 上没有对于 R 的极小元表述如下:

$$\forall a \in X, \exists b \in X((b \mathrel{R} a) \land a \neq b).$$

X 上有对于 R 的极大元表述如下:

$$\exists a \in X, \forall b \in X((a \mathrel{R} b) \to a = b).$$

X 上没有对于 R 的极大元表述如下:

$$\forall a \in X, \exists b \in X((a \mathrel{R} b) \land a \neq b).$$

建立了广义的极小元和极大元的概念后, 我们回顾下正则公理. 给定集合 X, 我们考虑集合上的 “$\in$” 关系. 正则公理实际上是说, 对于任意非空集合 X, X 上必然存在 “$\in$” 这个二元关系上的极小元.

严格极小元和严格极大元的概念是建立在严格偏序关系上的. 严格极小元和严格极大元的概念还可以进一步推广到集合上的一般二元关系上, 这些二元关系可能不是严格偏序关系. 给定集合 X 和 X 上的二元关系 R, 如果存在 $a \in X$, 对于任意 $b \in X$, 都有 $b \not\mathrel{R} a$, 那么称 a 是 X 上的严格极小元 (strictly maximal element); 如果存在 $a \in X$, 对于任意 $b \in X$, 都有 $a \not\mathrel{R} b$, 那么称 a 是 X 上的严格极大元 (minimal element).

给定集合 X 和 X 上的二元关系 R. 使用一阶逻辑, X 上有关于 R 的严格极小元表述如下:

$$\exists a \in X, \forall b \in X(b \not\mathrel{R} a).$$

X 上没有对于 R 的严格极小元表述如下:

$$\forall a \in X, \exists b \in X(b \mathrel{R} a).$$

X 上有对于 R 的严格极大元表述如下:

$$\exists a \in X, \forall b \in X(a \not\mathrel{R} b).$$

X 上没有对于 R 的严格极大元表述如下:

$$\forall a \in X, \exists b \in X(a \not\mathrel{R} b).$$

根据定义可知, 在集合 X 的一般二元关系 R 上, R 的严格极小元是极小元, R 的严格极大元是极大元.

命题 4.1.4 *给定任意集合 A 和 B, $\neg(A \in B) \land (B \in A)$ 是重言式.*

证明. 如果 $A \in B$, 令 $C = \{A, B\}$. 可知 $B \cap C = A$. B 不是 C 的极小元. 根据正则公理, 非空集合必有极小元, 那么 A 是 C 的极小元. 所以 $B \notin C$. $(A \in B) \wedge (B \in A)$ 是矛盾式, 所以 $\neg(A \in B) \wedge (B \in A)$ 是重言式.

如果 $A \notin B$, $(A \in B) \wedge (B \in A)$ 是矛盾式, 所以 $\neg(A \in B) \wedge (B \in A)$ 是重言式.

综合以上两种情况, $\neg(A \in B) \wedge (B \in A)$ 是重言式. □

定义 4.1.7 *给定偏序集 $(X, \preccurlyeq)$, Y 是 X 的任意子集.*

如果存在 $M \in X$, 对于任意 $y \in Y$, 都有 $y \preccurlyeq M$, 那么称 M 是 Y 的上界 (Upper bound), 称 Y 是有上界的 (Bounded from above). 如果存在 $m \in X$, 对于任意 $y \in Y$, 都有 $m \preccurlyeq y$, 那么称 m 是 Y 的下界 (Lower bound), 称 Y 是有下界的 (Bounded from below). 如果 Y 既有上界, 又有下界, 则称 Y 是有界的 (Bounded).

定义 4.1.8 (全序关系) *给定集合 S, "$\leq$" 是 S 上的二元关系, 若 "$\leq$" 满足:*

1. *自反性 (Reflexivity): $\forall a \in S, a \leq a$;*
2. *反对称性 (Anti-symmetry): $\forall a, b \in S, a \leq b \wedge b \leq a \to a = b$;*
3. *传递性 (Transitivity): $\forall a, b, c \in S, (a \leq b \wedge b \leq c) \to (a \leq c)$;*
4. *完全性 (Strongly Connected): $\forall a, b \in S, (a \leq b \vee b \leq a)$;*

则称 "$\leq$" 是 S 上的全序关系 (Total order).

根据定义, 空集是一个全序集, 只含有一个元素的单例集 (Singleton) 也是全序集.

如果全序集上存在最大元, 通常称该最大元为最大值. 如果全序集上存在最小元, 通常称该最小元为最小值.

命题 4.1.5 *全序集的任意子集也是全序集.*

证明. 给定全序集 X 以及 X 的任意子集 Y. 如果 Y 是空集, 根据定义, 空集是全序集.

如果 Y 不是非空集, 则 Y 的任意元素也是 X 的元素. 所以 Y 满足全序关系要求的四个条件, Y 也是全序集. □

定义 4.1.9 (链) *给定偏序集合 $(S, \preccurlyeq)$, 集合 S 上任一子集如果满足 "$\preccurlyeq$" 上的全序关系, 则称该子集为链 (Chain).*

根据定义, 空集是一个链, 只含有一个元素的单例集 (Singleton) 也是链.

定义 4.1.10 *给定任意一个非严格偏序结构 $(X, \preccurlyeq)$. 称 R 的一个链 C 是降链, 如果 C 上没有最小元. 易证 C 是无穷集合, 也称 C 为无穷降链. 称 R 的一个链 C 是升链, 如果 C 上没有最大元. 易证 C 是无穷集合, 也称 C 为无穷升链.*

降链和升链也可以推广到一般的集合 X 和 X 的二元关系 R 上.

定义 4.1.11 *给定任意一个集合 X 和 X 上的任意一个二元关系 R. 如果对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $a_{n+1} \, R \, a_n$, 称 (a_n) 是 X 上关于 R 的一个可数降链. 如果对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $a_n \, R \, a_{n+1}$, 称 (a_n) 是 X 上关于 R 的一个可数升链.*

定义 4.1.12 *给定任意一个全序结构 $(X, \leq)$ 和 X 上的一个数列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.*

如果对于任意 $n \in \mathbb{N}$, 都有 $a_{n+1} \leq a_n$, 称数列 (a_n) 为递减数列 (descending sequence/decreasing sequence) 或非增数列 (non-increasing sequence) 或单调非增数列 (monotone non-increasing sequence).

如果对于任意 $n \in \mathbb{N}$, 都有 $a_{n+1} < a_n$, 称数列 (a_n) 为严格递减数列 (strictly descending sequence/strictly decreasing sequence).

如果对于任意 $n \in \mathbb{N}$, 都有 $a_n \leq a_{n+1}$, 称数列 (a_n) 为递增数列 *(ascending sequence/increasing sequence)* 或非减数列 *(non-decreasing sequence)* 或单调非减数列 *(monotone non-decreasing sequence)*.

如果对于任意 $n \in \mathbb{N}$, 都有 $a_n < a_{n+1}$, 称数列 (a_n) 为严格递增数列 *(strictly ascending sequence/strictly increasing sequence)*.

命题 4.1.6 给定任意一个全序结构 $(X, \leq)$ 和 X 上的一个数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, (a_n) 是递减数列当且仅当对于任意 $m, n \in \mathbb{N}$, 如果 $m \leqslant n$, 都有 $a_n \leq a_m$.

证明. 充分性: 假设对于任意 $m, n \in \mathbb{N}$, 如果 $m \leqslant n$, 都有 $a_n \leq a_n$. 对于任意 $i \in \mathbb{N}$, 取 $m = i$, $n = i + 1$, 可知 $m \leq n$, 所以 $a_n \leqslant a_m$, 也即 $a_{i+1} \leq a_i$, 所以 (a_i) 是递减数列.

必要性: 假设 (a_n) 是递减数列. 对于任意 $i \in \mathbb{N}$, 都有 $a_{i+1} \leq a_i$. 对于任意 $m, n \in \mathbb{N}$, 假设 $m \leqslant n$. 如果 $m = n$, $a_n = a_m$, 所以 $a_n \leq a_m$. 如果 $m < n$, 那么 $m \leqslant m+1 \leqslant \cdots \leqslant n$, 所以 $a_n \leq \cdots \leq a_{m+1} \leq a_m$, $a_n \leq a_m$. 综合以上两种情况, $a_n \leq a_m$. □

4.2 良基关系/严格良基关系

定义 4.2.1 给定任意集合 X 和 X 上的任意二元关系 R, 如果 X 的任意非空子集都有 R 上的极小元, 称 R 是 X 上的良基关系 *(well-founded relation)*, 称 X 是关于 R 的良基集.

定义 4.2.2 给定任意集合 X 和 X 上的任意二元关系 R, 如果 X 的任意非空子集都有 R 上的严格极小元, 称 R 是 X 上的严格良基关系 *(strictly well-founded relation)*, 称 X 是关于 R 的严格良基集.

根据定义可知, 严格良基关系是良基关系.

命题 4.2.1 给定集合 X 和 X 上的二元关系 R, 如果 R 是 X 上的严格良基关系, 那么 R 满足反自反性和非对称性.

证明. 如果 R 是 X 上的严格良基关系, 对于 X 的任意非空子集 A, 存在 $a \in A$, 对于任意 $x \in A$, $x \not R\, a$. 如果 X 是空集, R 满足反自反性和非对称性. 下面考虑 X 不是空集的情况.

X 是 X 的非空子集, 所以存在 $a \in X$, 对于任意 $x \in X$, $x \not R\, a$. 如果 R 不满足反自反性, 那么存在 $b \in X$, $b\, R\, b$. 考虑集合 $B = \{b\}$, B 是 X 的非空子集. 因为 X 是关于 R 的严格良基集, 所以 B 有严格极小元. 对于任意 $y \in b$, $y \not R\, y$. $b \in B$, 所以 $b \not R\, b$. 出现矛盾. 所以 R 满足反自反性.

如果 R 不满足非对称性, 对于任意 $c, d \in X$, 如果 $c\, R\, d$, 那么 $d \not R\, c$. 考虑集合 $C = \{c, d\}$, C 是 X 的非空子集. 因为 X 是关于 R 的严格良基集, 所以 C 有严格极小元. 如果 $c\, R\, d$, d 不是 C 的严格极小元. 那么 c 是 C 的严格极小元, 所以对于任意 $z \in C$, $z \not R\, c$. $d \in C$, 所以 $d \not R\, c$. 所以 R 满足反自反性.

综合以上情况, 无论 X 是否是空集, R 满足反自反性和非对称性. □

命题 4.2.2 给定集合 X 和 X 上的二元关系 R, 如果 R 是 X 上的良基关系且 R 满足反自反性, 那么 R 是 X 上的严格良基关系.

证明. 如果 R 是 X 上的良基关系且 R 满足反自反性, 对于 X 的任意非空子集 A, 存在 $a \in A$, 对于任意 $x \in A$, 如果 $x\, R\, a$, 那么 $x = a$, 即 $x\, R\, x$. 又 R 满足反自反性, 对于任意 $x \in A$, $x \not R\, x$. 所以对于任意 $x \in A$, $x \not R\, a$. 所以 a 是 A 上的严格极小元, R 是 X 上的严格良基关系. □

命题 4.2.3 给定集合 X 和 X 上的二元关系 R, R 是 X 上的严格良基关系当且仅当 X 上没有关于 R 的可数无穷降链.

证明. 充分性: 假设 S 上没有关于 R 的可数无穷降链. 假设 R 不是 X 上的严格良基关系, 所以存在一个 S 的非空子集 A, A 上没有严格极小元. 对于任意 $a \in A$, 存在 $b \in A$, $b\, R\, a$. 所以在 A 上存在一个关于 R 的右全关系. 根据依赖选择公理, 在 A 上存在一个数列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 满足: 对任意 $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1}\, R\, x_n$ 成立.

这个数列就是 A 上的可数无穷降链. A 是 S 的子集, 所以这个数列也是 S 上的可数无穷降链, 与假设矛盾. 所以 R 是 X 上的严格良基关系.

必要性: 假设 R 是 X 上的严格良基关系. 如果 X 是空集, X 上没有关于 R 的可数无穷降链. 下面考虑 X 不是空集的情况. 假设 X 上有关于 R 的可数无穷降链 C, 对于任意 $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1}\ R\ a_n$. 考虑集合 $C = \{a_n \in X \mid n \in \mathbb{N} \wedge a_{n+1}\ R\ a_n\}$. C 是 X 的非空子集, 所以 C 上存在严格极小元, 不防设为 a_i, 其中 $i \in \mathbb{N}$. 但是根据 C 的定义, 存在 a_{i+1}, $a_{i+1}\ R\ a_i$. a_i 不是 C 的严格极小元, 与假设矛盾. 所以 X 上没有关于 R 的可数无穷降链. □

定义 4.2.3 (良偏序集) *给定任意一个偏序结构 (S, R), 如果 R 是 S 上的良基关系, 则称 S 为关于 R 的良偏序集 (well-founded partial order).*

定义 4.2.4 (良序集) *给定全序集 $(S, \leq)$, 如果 S 的任意非空子集存在最小值, 则称 S 为关于 $\leq$ 的良序集 (well-ordered set).*

根据定义可知, 空集是良序集, 只含有一个元素的单例集 (Singleton) 也是良序集.

命题 4.2.4 *良序集的任意子集也是良序集.*

证明. 给定良序集 X 以及 X 的任意子集 Y. 如果 Y 是空集, Y 是 X 上的良序集.

如果 Y 是非空集, 则 Y 也是全序集. Y 的任意非空子集都是 X 的非空子集, X 是良序集, 根据定义, 良序集的任意非空子集都有最小元. 所以 Y 的任意非空子集有最小元. 因此 Y 是 X 上的良序集. □

命题 4.2.5 *非空偏序集存在非空良序子集.*

证明. 给定任意非空偏序集 X, 根据选择公理, 可以元素 $x \in X$. 单元素集合 $\{x\}$ 即是 X 的良序子集. $\{x\}$ 是 X 的子集, 且符合全序集的全部要求. 对于任意 $x \in \{x\}$, $x \preccurlyeq x$, 所以 x 是 $\{x\}$ 的最小值. □

命题 4.2.6 *设 X 是偏序集, Y 和 Y' 是 X 上的良序子集, 则 $Y \cup Y'$ 是良序集当且仅当 $Y \cup Y'$ 是全序集.*

证明. 充分性: 如果 $Y \cup Y'$ 是全序集, 对任意 $Y \cup Y'$ 的非空子集 Z, $Z = Z \cap (Y \cup Y') = (Z \cap Y) \cup (Z \cap Y')$. Z 是 X 上的良序子集, 所以 $Z \cap Y$ 和 $Z \cap Y'$ 都是 X 上的良序子集. 设 $Z \cap Y$ 上有最小元 y, $Z \cap Y'$ 上有最小元 y'. 由于 $Y \cup Y'$ 是全序集, 所以 y 和 y' 可比, 设 $m = \min(y, y')$. 对于任意 $x \in Y \cup Y'$, 如果 $x \in Y$, $y \preccurlyeq x$, 又 $m \preccurlyeq y$, 所以 $m \preccurlyeq x$; 如果 $x \in Y'$, $y' \preccurlyeq x$, 又 $m \preccurlyeq y'$, 所以 $m \preccurlyeq x$. 所以 m 就是 Z 上的最小元.

必要性: 根据定义可知, 如果 $Y \cup Y'$ 是良序集, 那么 $Y \cup Y'$ 是全序集. □

定义 4.2.5 (链) *给定偏序集合 $(S, \preccurlyeq)$, 集合 S 上任一子集如果满足 "$\preccurlyeq$" 上的全序关系, 则称该子集为链 (Chain).*

命题 4.2.7

1. *给定集合上的一个非严格偏序 "$\preccurlyeq$", 可以诱导出 S 上的一个严格偏序 "$\prec$", 只需按如下方式定义: $\forall a, b \in S, (a \prec b \leftrightarrow a \preccurlyeq b \wedge a \neq b)$;*

2. *给定集合上的一个严格偏序 "$\prec$", 可以诱导出 S 上的一个非严格偏序 "$\preccurlyeq$", 只需按如下方式定义: $\forall a, b \in S, (a \preccurlyeq b \leftrightarrow a \prec b \vee a = b)$;*

3. *给定集合上的一个非严格偏序 "$\preccurlyeq$", 其逆关系 "$\succcurlyeq$" 也是 S 上的一个非严格偏序;*

4. *给定集合上的一个严格偏序 "$\prec$", 其逆关系 "$\succ$" 也是 S 上的一个非严格偏序.*

4.3 预序关系

定义 4.3.1 (预序关系) *给定集合 S, "$\precsim$" 是 S 上的二元关系, 若 "$\precsim$" 满足:*

1. *自反性 (Reflexive): $\forall a \in S$, $a \preccurlyeq a$;*

2. *传递性 (Transitive): $\forall a, b, c \in S$, $a \preccurlyeq b \wedge b \preccurlyeq c \to a \preccurlyeq c$;*

则称 "$\precsim$" 是 S 上的预序关系或先序关系 (preorder/quasiorder relation), 称 $(S, \precsim)$ 为预序关系结构.

给定整数 p, 正整数 q, 定义 $p//q$ 为小于等于 p/q 的最大整数. 定义自然数 $\mathbb{N}$ 上的关系如下: 给定 $c \in \mathbb{N}$ 且 $c \neq 0$, 对于任意 $a, b \in \mathbb{N}$, aRb 当且仅当 $a//c \leqslant b//c$. 可以验证 R 是 $\mathbb{N}$ 上的预序关系. 以 $c = 4$ 为例, 可知 $0R1$, $1R0$, 但是 $0 \neq 1$. R 不满足反对称性.

给定预序集 X, 定义在 X 上的等价关系 $\sim$ 如下: 对于任意 $a, b \in X$, $a \sim b$ 当且仅当 $a \precsim b$ 且 $b \precsim a$. 定义商集 $X/\sim$ 上的关系 R' 如下: $[a]R'[b]$ 当且仅当 aRb. 可以验证 R' 是 $X/\sim$ 上的偏序关系.

4.4 函数

定义 4.4.1 (函数) *给定集合 X 和 Y 上的二元关系 R, 如果对于任一 $x \in X$, 有且仅有一个 $y \in Y$ 满足 xRy, 称 R 是集合 X 和 Y 上的函数 f, 记作:*

$$\begin{aligned} f \colon X &\to Y \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

称 X 为函数 f 的定义域 (Domain/Domain of definition), 记作 $\operatorname{dom} f$; 称集合 Y 为函数 f 的上域/陪域 (Codomain); 称集合 $\{f(x) \mid x \in X\}$ 为函数 f 的值域 (Domain of range), 记作 $\operatorname{ran} f$.

命题 4.4.1 *函数是一个关系, 这个关系是唯一的.*

证明. 给定函数 $f \colon X \to Y$. 根据函数的定义可知, 函数本身就是关系. 假设有两个关系 R 和 R' 都是函数 f. 对于任意 $(x, y) \in R$, 可知 $y = f(x)$, 所以 $(x, y) \in R'$. 同理, 对于任意 $(x, y) \in R'$, 可知 $y = f(x)$, 所以 $(x, y) \in R$. 所以 $R = R'$. □

推论 4.4.1 *对于任意 $x \in X$, 有且仅有一个 $y \in \operatorname{dom} f$ 满足 $y = f(x)$.*

证明. 给定函数 $f \colon X \to Y$. 根据函数的定义可知, 对于任意 $x \in X$, 有且仅有一个 $y \in Y$ 满足 $y = f(x)$. 由函数的值域的定义可知, 对于对于任意 $x \in X$, $f(x) \in \operatorname{dom} f$, 所以 $y \in \operatorname{dom} f$. □

定义 4.4.2 (单射) *给定函数 $f \colon X \to Y$. 如果对于任意 $a, b \in X$, 如果 $a \neq b$, 则 $f(a) \neq f(b)$, 那么称函数 f 是单射 (Injection), 或者一对一的 (One to one).*

推论 4.4.2 *单射的一个等价定义是: 给定函数 $f \colon X \to Y$. 对于任意 $a, b \in X$, 如果 $f(a) = f(b)$, 则 $a = b$, 那么函数 f 是单射.*

证明. 充分性: 假设函数 f 是单射. 如果 $f(a) = f(b)$, 且 $a \neq b$, 由于 f 是单射, 可知 $f(a) \neq f(b)$, 与已知条件矛盾. 所以 $a = b$.

必要性: 对于任意 $a, b \in X$, 如果 $f(a) = f(b)$, 则 $a = b$. 如果 $a \neq b$, 那么 $f(a) \neq f(b)$. 否则, 如果 $f(a) = f(b)$, 可得 $a = b$, 与假设矛盾. 所以 f 是单射. □

推论 4.4.3 *单射的另一个等价定义是: 给定函数 $f \colon X \to Y$. 对于任意 $y \in Y$, 如果存在 $x \in X$, 满足 $f(x) = y$, 那么这个 x 是唯一的. 那么函数 f 是单射.*

证明. 充分性: 如果函数 f 是单射, 对于任意 $y \in Y$, 如果存在 $x \in X$, 满足 $f(x) = y$, 那么这个 x 是唯一的. 否则如果存在 $x' \neq x$, 且 $f(x') = y$, 可知函数 f 不是单射, 与已知条件矛盾.

必要性: 对于任意 $y \in Y$, 如果存在 $x \in X$, 满足 $f(x) = y$, 那么这个 x 是唯一的. 如果 $a \neq b$, $f(a) \neq f(b)$. 否则, $f(a) = f(b)$, 与假设矛盾. 所以 f 是单射. □

定义 4.4.3 (满射) *给定函数 $f\colon X \to Y$. 如果对于任意 $y \in Y$, 存在 $x \in A$, 满足 $f(x) = y$, 那么称函数 f 是满射 (Surjection), 或者是到上 (Onto).*

根据满射的定义可知, 给定函数 $f\colon X \to Y$, 如果 f 是满射, 则 $\operatorname{ran} f = Y$.

定义 4.4.4 (一一映射) *如果函数 f 既是单射, 又是满射, 那么称函数 f 是一一映射 (Bijection).*

命题 4.4.2 *一一映射的逆关系也是一一映射.*

证明. 给定一一映射 $f\colon X \to Y$. 假设 f 代表的关系为 R, R 的逆关系为 R'. 由于 f 是满射, 对于任意 $y \in Y$, 存在 $x \in X$, 满足 $f(x) = y$, 即 xRy, 也即 $yR'x$. 所以关系 R' 的定义域是 Y. 由于 f 是单射, 对于任意 $y \in Y$, 仅存在一个 $x \in X$, 满足 $f(x) = y$, 即 xRy, 也即 $yR'x$. 所以关系 R' 是一个函数. 设这个函数为 f^{-1}. 由于 f 是函数, 对于任意 $x \in X$, 存在一个 $y \in Y$, 满足 $f(x) = y$, 即 xRy, 也即 $yR'x$, 所以函数 f^{-1} 是满射, f^{-1} 的值域是 X. 由于 f 是函数, 对于任意 $x \in X$, 仅存在一个 $y \in Y$, 满足 $f(x) = y$, 即 xRy, 也即 $yR'x$, 所以函数 f^{-1} 是单射. f^{-1} 是单射也是满射, 所以 f^{-1} 是一一映射. □

定义 4.4.5 *给定一一映射 $f\colon X \to Y$, 称函数 f 的逆关系为函数 f 的反函数 (Inverse Function), 记作 f^{-1}.*

根据一一映射的定义, 给定一一映射 f 和 f 的反函数 f', $\operatorname{ran} f' = \operatorname{dom} f$, $\operatorname{dom} f' = \operatorname{ran} f$.

命题 4.4.3 *给定函数 $f\colon X \to Y$. 存在一个函数 f' 是从集合 X 到 $\operatorname{ran} f$ 的满射.*

证明. 给定函数 $f\colon X \to Y$. 取 $f' = \{(x, y) \in f \mid y \in \operatorname{ran} f\}$. 对于任意 $(x, y) \in f'$, $(x, y) \in f$. 对于任意 $(x, y) \in f$, $y \in \operatorname{ran} f$, 所以 $(x, y) \in f'$. f 和 f' 的映射关系相同, 仅仅是值域不同. 根据函数值域的定义, 对于任意 $y \in Ranf$, 存在 $x \in X$ 满足 $y = f(x)$, 所以 f' 是从集合 X 到 $\operatorname{ran} f$ 的满射. □

命题 4.4.4 *给定单射 $f\colon X \to Y$. 存在一个函数 f' 是从集合 X 到 $\operatorname{ran} f$ 的一一映射.*

证明. 给定函数 $f\colon X \to Y$. 取 $f' = \{(x, y) \in f \mid y \in \operatorname{ran} f\}$. f' 是从集合 X 到 $\operatorname{ran} f$ 的满射. f 和 f' 的映射关系相同, 仅仅是值域不同. f 是单射, 所以 f' 是从集合 X 到 $\operatorname{ran} f$ 的单射. f 是满射, f 是单射, 所以 f' 是从集合 X 到 $\operatorname{ran} f$ 的一一映射. □

命题 4.4.5 *给定集合 X 和 Y, 如果存在一个从 X 到 Y 的单射, 那么存在一个从 Y 到 X 的满射.*

证明. 如果存在一个从 X 到 Y 的单射 f, 取 $f' = \{(x, y) \in f \mid y \in \operatorname{ran} f\}$, f' 是从集合 X 到 $\operatorname{ran} f$ 的一一映射. $(f')^{-1}$ 是从集合 $\operatorname{ran} f$ 到 X 的一一映射, 也是从集合 $\operatorname{ran} f$ 到 X 的满射. 设 $g\colon Y \to X$. 如果 $y \in \operatorname{ran} f$, 规定 $g(y) = (f')^{-1}$. 如果 $y \notin \operatorname{ran} f$, 根据选择公理, 可以从集合 X 中任意选择一个元素 a, 规定 $g(y) = a$. 对于任意 $y \in Y$, 有且仅有唯一的 $x \in X$, 满足 $x = g(y)$. 对于任意 $x \in X$, 都有 $y \in Y$ 满足 $x = g(y)$. 所以 $x = g(y)$ 是从 Y 到 X 的满射. □

定义 4.4.6 *给定集合 X, 称*

$$f\colon X \to X$$

$$x \mapsto x$$

为 X 上的恒等映射 (Identity mapping/Identity function/Identity transformation), 记作 I_X.

命题 4.4.6 给定集合 X 和 X 上的函数 f 和 g, 如果 $g \circ f = I_X$, 那么 f 是单射, g 是满射.

证明. 如果 $g \circ f = I_X$, 对于任意 $x \in X$, $g \circ f(x) = x$. 如果 f 不是单射, 那么存在 $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, $f(x_1) = f(x_2)$. 那么 $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$. 又 $g \circ f(x_1) = x_1$, $g \circ f(x_2) = x_2$, $x_1 \neq x_2$, 所以 $g \circ f(x_1) \neq g \circ f(x_2)$. 出现矛盾, 所以 f 是单射. 对于任意 $x \in X$, $g \circ f(x) = x$, $\operatorname{ran} g = X$, 所以 g 是满射. □

命题 4.4.7 给定集合 X 和 X 上的函数 f, f 是单射当且仅当存在 X 上的函数 g, 使得 $g \circ f = I_X$, 且 g 必然是满射.

证明. 充分性: 如果 $g \circ f = I_X$, 那么 f 是单射, g 是满射.

必要性: 如果 X 是空集, 那么 f 是空函数, 任意 X 上的函数 g 也是空函数, 因此 $g \circ f = I_x$. 空函数是满射, 所以 g 是满射. 下面考虑 X 不是空集的情况. 任取 $x_0 \in X$. f 是单射, f 是从 X 到 $\operatorname{ran} f$ 的一一映射. 令

$$g(x) = \begin{cases} f^{-1}(x), & x \in \operatorname{ran} f \\ x_0, & x \notin \operatorname{ran} f. \end{cases}$$

g 是 X 上的函数. 对于任意 $x \in X$, $g \circ f(x) = x$, 所以 $g \circ f = I_X$, g 是满射. 综合以上两种情况, $g \circ f = I_X$, g 是满射. □

第五章　佐恩定理

5.1　佐恩定理

定义 5.1.1 给定偏序集 $(S, \preccurlyeq)$, X 是 S 的任意子集. 如果 M 是 X 的上界, 且 $M \notin X$, 则称 a 是 X 的严格上界 *(Strict upper bound)*.

引理 5.1.1 给定非空偏序集 $(X, \preccurlyeq)$, 对于任意 $m \in X$, X 存在一个良序子集 Y, m 是 Y 的最小元, 并且 Y 没有严格上界.

证明. 使用反证法, 假设每个以 m 为最小元的良序子集 Y 都有严格上界. 使用选择公理, 对于每个以 m 为最小元的良序子集 Y 指定一个严格上界 $s(Y) \in X$.

设性质 $P(Y)$ 为: Y 是 X 的良序子集, 以 m 为最小元, 且满足: 对于任意 $x \in Y \setminus \{m\}$, $x = s(\{y \in Y \mid y < x\})$. 对于任意 $x \in Y \setminus \{m\}$, 集合 $\{y \in Y \mid y < x\}$ 是 X 的子集, 也是良序集, 以 m 为最小元.

设 $Z = \{Y \subseteq X \mid P(Y)\}$. $\{m\} \in Z$, 所以 Z 是非空集. 设 $Y, Y' \in Z$, 且 $P(Y)$ 和 $P(Y')$ 都成立. 下面证明 $Y \setminus Y'$ 的每个元素都是 Y' 的严格上界, $Y' \setminus Y$ 的每个元素都是 Y 的严格上界. 给定任意 $Y, Y' \in Z$, $Y \setminus Y'$ 和 $Y' \setminus Y$ 至少有一个是空集. 设 $Y = \{y \in Y \mid y < x_1\})$, $Y' = \{y \in Y \mid y < x_2\})$. 由于 X 是全序集, $x_1 \preccurlyeq x_2$ 和 $x_2 \preccurlyeq x_1$ 必有一成立. 不防设 $x_1 \preccurlyeq x_2$. 那么对于任意 $y \in Y$ 必有 $y \preccurlyeq x_1$, 所以 $y \preccurlyeq x_2$, 即 $y \in Y'$, 也即 $Y \subseteq Y'$. 所以对于任意 $z \in Y' \setminus Y$, $y \prec z$. z 是 Y 的严格上界. 同理, 如果 $x_2 \preccurlyeq x_1$, $Y' \subseteq Y$, 对于任意 $z \in Y \setminus Y'$, $y \prec z$. z 是 Y 的严格上界. 因此, 集合 Z 以集合的包含关系构成全序集, 给定 Z 的任意子集 Y 和 Y', $Y \subseteq Y'$ 和 $Y' \subseteq Y$ 必有一成立.

令 $W^* = \bigcup Z$. $m \in W^*$. 对于任意 $w \in W^*$, 可知存在 $z \in Z$, $w \in z$, 所以 $P(z)$ 成立, z 是 X 的良序子集, 以 m 为最小元. 所以 $w \in X$, W^* 是 X 的子集, m 是 W^* 的最小值. 对于任意 $w' \in W^*$, 可知存在 $z' \in Z$, $w' \in z'$, 所以 $P(z')$ 成立, z' 是 X 的良序子集, 以 m 为最小元. 又 $z \subseteq z'$ 和 $z' \subseteq z$ 必有一成立. 不防假设 $z \subseteq z'$, 那么 $w, w' \in z'$, w 和 w' 可比, 因此 W^* 满足全序集要求的全部条件.

取 W^* 的任意非空子集 W. 对于任意 $w \in W$, 可知存在 $Y \in Z$, $w \in Y$, 所以 $P(Y)$ 成立, Y 是 X 的良序子集, 以 m 为最小元. 因此 $w \in W \cap Y$, $W \cap Y$ 是非空集. 对于任意 $Y \in Z$, Y 是 X 的良序子集. 所以 $W \cap Y$ 也是 X 的非空良序子集. 因此存在 $u \in W \cap z$, u 是最小元.

对于任意的 $Y' \in Z$, 如果 $Y \subseteq Y'$, 那么 $A \cap Y' = A \cap (Y \cup (Y' \setminus Y)) = (A \cap Y) \cup (A \cap (Y' \setminus Y))$. 对于任意 $a \in Y$, $b \in Y' \setminus Y$, $a \preccurlyeq b$, 那么对于任意 $a \in A \cap Y$, $b \in A \cap (Y' \setminus Y)$, $a \preccurlyeq b$. u 是 $A \cap Y$ 的最小元, u 也是 $A \cap (Y' \setminus Y)$ 的最小元. 因此 u 是 $A \cap Y'$ 的最小值. 如果 $Y' \subseteq Y$, 那么 u 也是 $A \cap Y'$ 的最小值. 因此 W^* 的任意非空子集 W 总有最小值 u. W^* 是全序集, W^* 的任意非空子集有最小值, W^* 是 X 的良序子集, 以 m 为最小值.

根据假设, W^* 有严格上界 $s(W^*)$. 下面证明 $W^* \cup \{s(W^*)\}$ 是良序集. W^* 是 X 上的良序子集. 根据定义可知, 单元素集是良序集. 只要 $W^* \cup \{s(W^*)\}$ 是全序集, 那么 $W^* \cup \{s(W^*)\}$ 就是良序集. 根据严格上界的定义, 对于任意 $w \in W^*$, $w \prec s(W^*)$. 对于任意 $a, b, c \in W^* \cup \{s(W^*)\}$, 如果 $a, b, c \in W^*$, 自然满足全序集的要求. 如果有一个元素, 设 $a \in \{s(W^*)\}$, 仍然满足全序集的要求. 所以 $W^* \cup \{s(W^*)\}$ 是 X 上的良序子集, m 是其最小元. 根据假设, $W^* \cup \{s(W^*)\}$ 存在严格上界 $s(W^* \cup \{s(W^*)\})$.

令 $S = W^* \cup \{s(W^*)\}$. 下面证明 $P(S)$ 成立, 也即证明对于任意 $x \in (W^* \cup \{s(W^*)\}) \setminus \{m\}$, 有

$x = s(\{y \in W^* \cup \{s(W^*)\} \mid y \prec x\})$. 如果 $x = s(W^*)$, 那么 $\{y \in W^* \cup \{s(W^*)\} \mid y \prec x\} = W^*$, $s(\{y \in W^* \cup \{s(W^*)\} \mid y \prec x\}) = s(W^*) = x$. 所以 $P(W^* \cup \{s(W^*)\})$ 成立. 如果 $x \in W^*$, 那么存在 $Y \in Z$, $P(Y)$ 成立, $x \in Y$. 对于这个 X 的良序子集 Y, $\{y \in W^* \cup \{s(W^*)\} \mid y \prec x\} = \{y \in Y \mid y \prec x\}$. 由于 $P(Y)$ 成立, 对于任意 $x \in Y \setminus \{m\}$, $x = s(\{y \in Y \mid y < x\})$, 这也是我们要证明的目标. 综合以上两种情况, 对于任意 $x \in Y \setminus \{m\}$, $P(W^* \cup \{s(W^*)\})$ 成立. 所以 $W^* \cup \{s(W^*)\} \in Z$. 因此 $s(W^*) \in W^*$, 这和严格上界的定义矛盾. □

佐恩原理 (Zorn's lemma) 是数学研究中非常重要的一个定理.

引理 5.1.2 (佐恩引理) *给定偏序集 X, 如果 X 上的每个链都有上界, 则 X 上有极大元.*

证明. 根据定义. 空集是一个链. 空集在 X 上有上界, 这意味着 X 非空.

使用反证法, 假设 X 不含有极大元. 因此对于任意 $x \in X$, 存在 $x' \in X$, $x \prec x'$. 因此, 给定非空偏序集 X, 如果 X 上的每个链都有上界, 则 X 上的每个链都有严格上界. 良序集是一种特殊的链, 所以 X 上的每个良序子集都有严格上界. X 是非空集, 根据定理 5.1.1 , 对于任意 $m \in X$, X 存在一个良序子集 Y, Y 没有严格上界, 与假设矛盾. □

定义 5.1.2 *给定偏序集 $(X, \preccurlyeq)$, 称 $s(x) = \{y \in X \mid y \prec x\}$ 为 x 的前段 (Initial segment), 称 $\overline{s}(x) = \{y \in X \mid y \preccurlyeq x\}$ 为 x 的弱前段 (Weak initial segment).*

命题 5.1.1 *前段和弱前段是一一映射.*

证明. 证明前段是一一映射.

对于任意 $x \in X$, 根据概括公理, 集合 $s(x)$ 存在. 如果有两个 $y = s(x)$ 和 $y' = s(x)$ 存在. 对于任意 $z \in y$, 可知 $z \in y'$. 同理, 对于任意 $z \in y'$, 可知 $z \in y$. 因此, $y = y'$. 所以对于任意 $x \in X$, 有且仅有一个 $s(x)$ 存在, s 是个函数.

如果对于任意 $x, x' \in X$, $s(x) = \{y \in X \mid y \prec x\}$, $s(x') = \{y \in X \mid y \prec x\}$. 如果 $x \neq x'$, 不失一般性, 不防设 $x \prec x'$, 那么 $x' \notin \{y \in X \mid y \prec x\}$, 所以 $s(x) \neq s(x')$. 所以 $s(x)$ 是单射. 对于任意 $\{y \in X \mid y \prec x\}$, 可知存在 $x \in X$, $s(x) = \{y \in X \mid y \prec x\}$. 所以 $s(x)$ 是满射. 因此 $s(x)$ 是一一映射.

同理可证, 弱前段也是一一映射. □

命题 5.1.2 *给定偏序集 X, 令 $Y = \{\overline{s}(x) \mid x \in X\}$, Y 上的包含关系构成 Y 上的偏序关系. $\overline{s}(x) \preccurlyeq \overline{s}(y)$ 当且仅当 $x \preccurlyeq y$.*

证明. 充分性: 如果 $x \preccurlyeq y$, $\overline{s}(x) = \{a \in X \mid a \preccurlyeq x\}$, $\overline{s}(y) = \{a \in X \mid a \preccurlyeq y\}$. 所以对于任意 $z \in \overline{s}(x)$, $z \in \overline{s}(y)$, $s(x) \subseteq s(y)$, 也即 $\overline{s}(x) \preccurlyeq \overline{s}(y)$.

必要性: 如果 $\overline{s}(x) \preccurlyeq \overline{s}(y)$, 即 $\overline{s}(x) \subseteq \overline{s}(y)$. 假设 $x \preccurlyeq y$ 不成立, 即 $y \prec x$, 那么 $y \preccurlyeq x$, 所以 $\overline{s}(y) \preccurlyeq \overline{s}(x)$. 又 $x \neq y$, 所以 $\overline{s}(x) \neq \overline{s}(y)$. 因此 $\overline{s}(y) \prec \overline{s}(x)$. 这与假设矛盾. $x \preccurlyeq y$. □

命题 5.1.3 *给定偏序集 X, 令 $Y = \{\overline{s}(x) \mid x \in X\}$, Y 上的包含关系构成 Y 上的偏序关系. $\overline{s}(x) = \overline{s}(y)$ 当且仅当 $x = y$.*

证明. 充分性: 如果 $x = y$, 根据 $\overline{s}$ 的定义可知 $\overline{s}(x) = \overline{s}(y)$.

必要性: 如果 $\overline{s}(x) = \overline{s}(y)$. 假设 $x \neq y$, 不失一般性, 不防假设 $x \prec y$. 根据 $\overline{s}$ 的定义可知, $y \in \overline{s}(y)$, 但 $y \notin \overline{s}(x)$, 所以 $\overline{s}(x) \neq \overline{s}(y)$, 这与假设矛盾. 所以 $x = y$. □

命题 5.1.4 *给定偏序集 X, 令 $Y = \{\overline{s}(x) \mid x \in X\}$, Y 上的包含关系构成 Y 上的偏序关系. x 是 X 上的极大元当且仅当 $\overline{s}(x)$ 是 Y 上的极大元.*

证明. 充分性: 如果 $\overline{s}(x)$ 是 Y 上的极大元, 对于任意 $\overline{s}(y) \in Y$, 如果 $\overline{s}(x) \preccurlyeq \overline{s}(y)$, $\overline{s}(x) = \overline{s}(y)$. $\overline{s}(x) \preccurlyeq \overline{s}(y)$ 当且仅当 $x \preccurlyeq y$. 所以如果 $x \preccurlyeq y$, 那么 $\overline{s}(x) \preccurlyeq \overline{s}(y)$, 继而 $\overline{s}(x) = \overline{s}(y)$. 如果 $\overline{s}(x) = \overline{s}(y)$, 那么 $x = y$. x 是 X 上的极大元.

必要性: 如果 x 是 X 上的极大元, 那么如果 $x \preccurlyeq y$, 则 $x = y$. 如果 $\overline{s}(x) \preccurlyeq \overline{s}(y)$, 那么 $x \preccurlyeq y$, 继而 $x = y$, $\overline{s}(x) = \overline{s}(y)$. 所以 $\overline{s}(x)$ 是 Y 上的极大元. □

佐恩原理的另一个证明方法, 参见 Paul Halmos 的著作 *Naive Set Theory*.

证明. 根据定义. 空集是一个链. 空集在 X 上有上界, 这意味着 X 非空.

令 $\mathscr{X}$ 是 X 上所有链的集合. 因为空集和 X 上的单例子集都是一个链, 所以 $\mathscr{X}$ 不是空集. 对于任意 $x \in \mathscr{X}$, 根据前提可知, x 在 X 上有上界 U. 因此对于任意 $y \in x$, $y \preccurlyeq U$, 继而 $\overline{s}(y) \subseteq \overline{s}(U)$. 根据定义 $y \in \overline{s}(y)$, 因此 $y \in \overline{s}(U)$. 所以 $x \subseteq \overline{s}(U)$.

对于 $\mathscr{X}$ 上由集合的包含关系构成的一个链 $\mathscr{C}$, 令 $Y = \bigcup_{C \in \mathscr{C}} C$.

如果 $\mathscr{C} = \varnothing$, 那么 $Y = \varnothing$, 因此 $Y \in \mathscr{X}$.

如果 $\mathscr{C} \neq \varnothing$, 对于任意 $x, y \in Y$, 存在 $C_x, C_y \in \mathscr{C}$, 满足 $x \in C_x$, $y \in C_y$. $\mathscr{C}$ 是一个链, 因此 C_x 和 C_y 是可比的, 不失一般性, 不防假设 $C_x \subseteq C_y$. 那么 $x \in C_y$. x 和 y 也是可比的. 由于 C_x 和 C_y 是集合 X 上的链, 因此 $x, y \in X$, Y 也是 X 上的一个链, $Y \in \mathscr{X}$. 综合两种情况, 无论 $\mathscr{C}$ 是否是空集, 都有 $Y \in \mathscr{X}$. 对于任意 $c \in \mathscr{C}$, $c \in \mathscr{X}$. c 和 Y 是可比的. 对于任意 $d \in c$, $d \in Y$, 所以 $c \subseteq Y$, Y 是 $\mathscr{C}$ 上的最大元. 因此 $\mathscr{X}$ 上每个链都有最大元.

假设 $\mathscr{X}$ 上有极大元 M, 那么 M 是 X 上的一个链, 根据前提可知, M 在 X 上有上界. 根据选择公理, 任意选择

$\mathscr{C}$ 是在 $\mathscr{X}$ 上的链, 根据前提可知, $\mathscr{C}$ 在 $\mathscr{X}$ 上有上界 $\mathscr{M}$. □

第六章　同态和同构

6.1　同构

命题 6.1.1 *给定任意一个严格线序结构 $(S, <_S)$, S 具备下列性质:*

1. 对于任意 $x \in S$, 都存在 $y \in S$, 满足 $x < y$;

2. S 的每个非空子集都有关于 $<_S$ 的最小元;

3. S 的每个非空有界子集都有关于 $<_S$ 的最大元,

那么 $(S, <_S)$ 和 $(\omega, <_\omega)$ 同构.

证明. 我们使用递归定理构造关于 $(S, <_S)$ 和 $(\omega, <_\omega)$ 的同构映射 f. 设 m 是 S 关于 $<_S$ 的最小元, $g(x)$ 是 $\{y \in S \mid x <_S y\}$ 的最小元. 根据前提可知, $\{y \in S \mid x <_S y\}$ 是 S 的非空子集, S 的每个非空子集都有关于 $<_S$ 的最小元. 线序结构的最小元是唯一的, 所以 $g(x)$ 是良构的.

定义函数 $f \colon \omega \to S$ 如下:

1. $f(0) = m$;

2. $f(S(n)) = g(f(n))$.

根据递归定理, 对于任意 $n \in \omega$, $f(n) <_S f(S(n))$. 根据数学归纳法还可以进一步推出, 对于任意 $m, n \in \omega$, 如果 $m <_\omega n$, 那么 $f(m) <_S f(n)$. 如果 $m \neq n$, 那么 $f(m) \neq f(n)$. f 是单射. 假设 f 不是满射. 令 $A = \{x \in S \mid \forall n \in \omega(f(n) \neq x)\}$. f 不是满射, 所以 A 是 S 的非空子集. A 存在关于 $<_S$ 的最小元, 设该最小元为 A_m. 令 $B = \{x \in S \mid x <_S A_m\}$. $m \in B$. B 是 S 的非空子集. A_m 是 B 的上界. 根据假设, B 有关于 $<_S$ 的最大元, 设该最大元为 B_M. 因为存在 $a \in \omega$, $f(a) = B_M$. $f(S(a)) = g(f(a))$. $g(f(a)) \in S$, 且存在 $S(a)$ 是 $g(f(a))$ 在 f 下的原像. $B_M <_S g(f(a))$, $g(f(a)) \notin B$. $g(f(a)) \notin A$. 所以 $g(f(a))$ 是 A 的上界. $A_m \in A$, 所以 $A_m <_S g(f(a))$. $f(a) <_S A_m$. $g(f(a) <_S A_m$ 或 $g(f(a) = A_m$. 出现矛盾. 所以 f 是满射. 因此 f 是从 ω 到 S 的一一映射. 如果 $m <_\omega n$, 那么 $f(m) <_S f(n)$, 所以 $(S, <_S)$ 和 $(\omega, <_\omega)$ 同构. □

第七章　传递关系

7.1　传递集

定义 7.1.1 一个集合 S 被称为是传递的 *(Transitive)*, 如果满足下面的条件:

$$\forall a(a \in S \to a \subseteq S). \tag{7.1}$$

传递的集合称为传递集 *(Transitive set)*.

根据定义可知, 空集是传递集.

命题 7.1.1 集合 S 是传递集, 当且仅当:

$$\forall a \forall b(a \in S \land b \in a \to b \in S). \tag{7.2}$$

证明. 充分性: 给定集合 S, 对于任意 $a \in S$, 对于任意 $b \in a$, 由前提可知 $b \in S$, 所以 $a \subseteq S$. S 是传递集.

必要性: 如果 S 是传递集. 如果 $a \in S$, 那么 $a \subseteq S$. 因为 $b \in a$, 所以 $b \in S$. □

命题 7.1.2 集合 S 是传递集, 当且仅当:

$$\bigcup S \subseteq S. \tag{7.3}$$

证明. 充分性: 给定集合 S, 对于任意 $a \in S$, 如果 $b \in a$, 那么 $b \in \bigcup S$. 由前提可知 $\bigcup S \subseteq S$, 所以 $b \in S$. S 是传递集.

必要性: 假设 S 是传递集. 对于任意 $c \in \bigcup S$, 存在 $d \in S$ 且 $c \in d$. S 是传递集, 所以 $c \in S$. 所以 $\bigcup S \subseteq S$. □

命题 7.1.3 集合 S 是传递集, 当且仅当:

$$S \subseteq \mathscr{P}(S). \tag{7.4}$$

证明. 充分性: 给定集合 S, 对于任意 $a \in S$, $a \in \mathscr{P}(S)$, $a \subseteq S$. 所以 S 是传递集.

必要性: 假设 S 是传递集. 对于任意 $a \in S$, $a \subseteq S$, $a \in \mathscr{P}(S)$. 所以 $S \subseteq \mathscr{P}(S)$. □

传递集的以上定义方式是等价的. 因此我们可以在证明的时候选择方便的定义.

命题 7.1.4 传递集的交集是传递集.

证明. 给定非空集族 $\{A_i \mid i \in I\}$, 对于任意 $i \in I$, A_i 都是传递集. 令 $S = \bigcap_{i \in I} A_i$. 对于任意 $a \in S$, 对于任意 $i \in I$, $a \in A_i$, 因此 $a \subseteq A_i$. 可以推出 $a \subseteq S$. 否则假设 $a \nsubseteq S$, 那么存在 $b \in a$ 且 $b \notin S$. $b \in a$, 那么对于任意 i, $b \in A_i$. $b \notin S$, 那么存在 j, $b \notin A_j$, 这就产生矛盾. 因此 $a \subseteq S$. S 是传递集. □

命题 7.1.5 传递集的并集是传递集.

证明. 给定非空集族 $\{A_i \mid i \in I\}$, 对于任意 $i \in I$, A_i 都是传递集. 令 $S = \bigcup_{i\in I} A_i$. 对于任意 $a \in S$, 存在 $i \in I$, $a \in A_i$, 因此 $a \subseteq A_i$. 因为 $A_i \subseteq S$, 所以 $a \subseteq S$. S 是传递集. □

命题 7.1.6 给定传递集 S, $\bigcup S$ 是传递集.

证明. 如果 S 是传递集, 那么 $\bigcup S \subseteq S$. 所以 $\bigcup\bigcup S \subseteq \bigcup S$. 所以 $\bigcup S$ 是传递集. 以此类推, $\bigcup\bigcup S$, $\bigcup\bigcup\bigcup S$ 等等都是传递集. □

命题 7.1.7 如果 X, Y 是传递集, 那么 $X \cup Y \cup \{X, Y\}$ 是传递集.

证明. 对于任意 $a \in X\cup Y\cup\{X, Y\}$, 如果 $a \in X$, 因为 X 是传递集, 所以 $a \subseteq X$, 继而 $a \subseteq X\cup Y\cup\{X, Y\}$. 同理, 如果 $a \in Y$, $a \subseteq X\cup Y\cup\{X, Y\}$. 如果 $a = X$, $a \subseteq X\cup Y\cup\{X, Y\}$. 如果 $a = Y$, $a \subseteq X\cup Y\cup\{X, Y\}$. 综合以上情况, $a \subseteq X \cup Y \cup \{X, Y\}$. 所以 $X \cup Y \cup \{X, Y\}$ 是传递集. □

命题 7.1.8 给定传递集 S, $S \cup \bigcup S$ 是传递集.

传递集的后继是传递集, 但是如果 S 是传递集, S 不一定是某个传递集的后继. $\varnothing$ 是个传递集, 但是 $\varnothing$ 不是任何集合的后继.

证明. 如果 S 是传递集, 那么 $\bigcup S$ 是传递集. 两个传递集的并集是传递集, 所以 $S \cup \bigcup S$ 是传递集. □

命题 7.1.9 S 是传递集当且仅当 $\mathscr{P}(S)$ 是传递集.

证明. 充分性: 对于任意 $a \in S$, $\{a\} \subseteq S$, 所以 $\{a\} \in \mathscr{P}(S)$. 如果 $\mathscr{P}(S)$ 是传递集, 那么 $\{a\} \subseteq \mathscr{P}(S)$, 所以 $a \in \mathscr{P}(S)$, 继而 $a \subseteq S$. 所以 S 是传递集.

必要性: 对于任意 $a \in S$, $a \subseteq S$. 对任意 $b \in \mathscr{P}(S)$, $b \subseteq S$. 对于任意 $c \in b$, $c \in S$. S 是传递集, 所以 $c \subseteq S$, 因而 $c \in \mathscr{P}(S)$. 所以 $\mathscr{P}(S)$ 是传递集. □

但是, 如果 S 是传递集, S 的每个元素不一定是传递集. 如 $S = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$ 是传递集. 但 $\{\{\varnothing\}\}$ 不是传递集. S 的每个子集也不一定是传递集. $\{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}\}$ 不是传递集.

注意, 如果 S 是传递集, 这并不意味着 “$\in$” 是 S 上具备传递性的二元关系. 实际上, 传递集这个名字具备一定的误导性.

定义 7.1.2 给定集合 X, 传递闭包是在集合的包含关系上最小的.

定义 7.1.3 给定任意集合 X, 对任意集合 $x \in X$, 定义 $S(x) \coloneqq a \cup \{x\}$.

命题 7.1.10 S 是集合 X 上的函数.

证明. 对于任意 $x \in X$, 根据配对公理, 存在集合 $\{x\}$; 根据并集公理, 存在集合 $x \cup \{x\}$. 如果存在 $y, y' \in X$, 满足 $y = x \cup \{x\}$ 且 $y' = x \cup \{x\}$, 那么对于任意 $z \in y$, $z \in y'$, 所以 $y \subseteq y'$. 同理, 对于任意 $z' \in y'$, $z' \in y$, 所以 $y' \subseteq y$. 因此 $y = y'$. 综上所述, 对于任意 $x \in X$, 有且仅有一个 $y \in X$, 满足 $y = S(x)$, 所以 S 是函数. □

命题 7.1.11 $\bigcup(S \cup \{S\}) = S$.

证明. 对于任意 $a \in S$, $a \in S \cup \{S\}$. 所以 $S \subseteq \bigcup(S \cup \{S\})$.

对于任意 $a \in S \cup \{S\}$, 可知 $a \in S$ 或 $a = S$. 如果 $a \in S$, 那么 $a \subseteq S$. 如果 $a = S$, 那么 $a \subseteq S$. 所以 $\bigcup(S \cup \{S\}) \subseteq S$.

$S \subseteq \bigcup(S \cup \{S\})$ 且 $\bigcup(S \cup \{S\}) \subseteq S$, 所以 $\bigcup(S \cup \{S\}) = S$. □

命题 7.1.12 传递集的后继集也是传递集.

证明. 给定任意传递集 S, $S(S) = S \cup \{S\}$. 因为 $\bigcup(S \cup \{S\}) = S$, 所以 $\bigcup(S \cup \{S\}) \subseteq (S \cup \{S\})$. 所以 $S \cup \{S\}$ 也是传递集. □

命题 7.1.13 给定任意非空集合 X, 如果 X 的每个元素都是传递集, 那么 $\bigcap X$ 也是传递集.

证明. 假设非空集合 X 的每个元素都是传递集. 对于任意 $x \in X$, 任意 $y \in \bigcap X$, $y \in x$. 因为 x 是传递集, 所以 $y \subseteq x$. 对于任意 $z \in y$, $z \in x$. 所以 $z \in \bigcap X$. 所以 $\bigcap X$ 是传递集. □

命题 7.1.14 给定任意集合 X, 如果 X 的每个元素都是传递集, 那么 $\bigcup X$ 也是传递集.

证明. 假设 X 的每个元素都是传递集. 如果 X 是空集, $\bigcup X = \varnothing$, $\bigcup X$ 是传递集. 下面考虑 X 不是空集的情况. 对于任意 $y \in \bigcup X$, 存在 $x \in X$, $y \in x$. 因为 x 是传递集, 所以 $y \subseteq x$. 对于任意 $z \in y$, $z \in x$. 所以 $z \in \bigcup X$. 所以 $\bigcup X$ 是传递集. □

命题 7.1.15 给定任意非空集合 X, 如果 X 是传递集, 那么 $\varnothing \in X$.

证明. 集合 X 非空, 假设 $\varnothing \notin X$. 任选 $x \in X$, $x \subseteq X$ 且 $x \neq \varnothing$. 所以存在 $y \in x$, 那么 $y \in X$. $y \in x \cap X$, 所以 $x \cap X \neq \varnothing$. 与正则公理出现矛盾. 所以 $\varnothing \in X$. □

命题 7.1.16 给定任意非空集合 X, 如果 X 是传递集, 那么 $\bigcap X = \varnothing$.

证明. 根据前提条件可知, $\varnothing \in X$. 对于任意 x, $x \notin \varnothing$, 所以 $\bigcap X = \varnothing$. □

7.2 配对函数

命题 7.2.1 $J(m,n) = \frac{1}{2}((m+n)(m+n+1)+2n)$

证明. $J(m,n) = (1+2+\cdots+(m+n))+n = \frac{1}{2}((m+n)(m+n+1)+2n)$. □

7.3 齐次关系

定义 7.3.1 (齐次关系) 定义在集合 S 和自身上的二元关系, 是 $S \times S$ 的子集, 称为 S 上的齐次关系 *(homogeneous relation)*. 齐次关系又称为内关系 *(endorelation)*.

定义 7.3.2 (全关系) 定义在集合 S 上的齐次关系 R, 称为全关系 *(Total relation)*, 如果满足以下条件: 给定任意 $x, y \in S$, 满足 xRy 或 yRx, 或二者皆成立. 上述性质也称为完全性 *(Totality)*.

根据定义可知, 完全性蕴含自反性, 满足完全性的非严格偏序关系是全序关系, 严格偏序关系不是全序关系.

定义 7.3.3 (左全关系) 定义在集合 S 上的齐次关系 R, 称为左全关系 *(Left-total relation)*, 如果满足以下条件: 给定任意 $x \in S$, 存在 $y \in S$, 满足 xRy.

定义 7.3.4 (右全关系) 定义在集合 S 上的齐次关系 R, 称为右全关系 *(Right-total relation)*, 如果满足以下条件: 给定任意 $y \in S$, 存在 $x \in S$, 满足 xRy.

7.4 闭包

定义 7.4.1 给定非空集合 X 和 X 上的二元关系 R, R 的自反 (对称/传递) 闭包是 X 上的二元关系 R', 且 R' 满足以下条件:

- R' 是自反 (对称/传递) 的;
- $R \subseteq R'$;
- X 上任意包含 R 的自反 (对称/传递) 关系 R'' 都满足 $R' \subseteq R''$.

给定集合 X 和 X 上的二元关系 R, 一般将 R 的自反闭包记作 $r(R)$, 将 R 的对称闭包记作 $s(R)$, 将 R 的传递闭包记作 $t(R)$.

命题 7.4.1 给定集合 X 和 X 上的二元关系 R, 则有

- $r(R) = R \cup R^0$;
- $s(R) = R \cup R^{-1}$;
- $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$.

证明. TBD □

第八章　集合的势

8.1　等势

定义 8.1.1 (等势) *如果集合 A 和 B 之间存在一一映射, 则称集合 A 和 B 是等势的 (Equinumerous), 记作 $|A| = |B|$. 如果集合 A 和 B 等势, 也称集合 A 和 B 是等价的 (Equivalent), 记作 $A \sim B$.*

康托定理 (Cantor's theorem) 指出了集合和它的幂集不等势.

定理 8.1.1 *给定集合 S, S 和 $\mathscr{P}(S)$ 不等势.*

证明. 假设集合 S 和 $\mathscr{P}(S)$ 等势, 那么存在一个从 S 到 $\mathscr{P}(S)$ 的一一映射, 设该映射为: $f\colon S \to \mathscr{P}(S)$. 令 $X = \{x \in S \mid x \notin f(x)\}$. X 是 S 的子集, 因此 $X \in \mathscr{P}(S)$. f 是从 S 到 $\mathscr{P}(S)$ 的一一映射, 因此 X 在 S 上存在一个原像 a, $f(a) = X$.

假设 $a \in X$, 那么 $a \notin f(a)$, 而 $f(a) = X$, 所以 $a \notin X$.

假设 $a \notin X$, 那么 $a \in f(a)$, 而 $f(a) = X$, 所以 $a \in X$.

所以 $a \in X$ 当且仅当 $a \notin X$, 出现矛盾, 所以不存在一个从 S 到 $\mathscr{P}(S)$ 的一一映射. □

8.2　有限集和无限集

定义 8.2.1 (有限集和无限集的定义 1) *如果集合 S 和某个集合 $N = \{x \in \mathbb{N} \mid n \in \mathbb{N} \wedge x \leqslant n\}$ 等势, 则称集合 S 是有限集 (Finite set), 称集合 S 的势 (Cardinality) 为 n. 如果集合 S 不是有限集, 则称集合 S 为无限集 (Infinite set).*

定义 8.2.2 (有限集和无限集的定义 2—戴德金的无限集定义) *如果集合 S 能和自身的某个真子集等势, 则称集合 S 是无限集 (Infinite set). 如果集合 S 不是有限集, 则称集集合 S 为有限集 (Finite set).*

定义 8.2.3 (可数集) *如果集合 S 和自然数集等势, 则称集合 S 是可数集 (Countable set).*

命题 8.2.1 *设 n 为自然数, 任一无限集去掉 n 个元素仍然是无限集.*

证明. 设无限集为 S. 根据数学归纳法, S 去掉 0 个元素就是 S 自身, 是无限集. 设 S 去掉 $0 - k$ 个元素是无限集. 令 S 去掉 $k+1$ 个元素得到 S_{k+1}. 假设在从 S 去掉 $k+1$ 个元素的过程中先去掉 k 个元素得到 S_k, 然后再从 S_k 中去掉 1 个元素得到 S_{k+1}. 根据假设可知 S_k 是无限集. 根据选择公理, 可以从 □

命题 8.2.2 *任一无限集必然包含一个可数子集.*

证明. 设无限集为 S. 根据选择公理, 存在选择函数 f, 我们可以从集合 S 中选择一个元素 $f(S)$. 令该元素为 a_0. 设集合 $S_1 = S\{a_0\}$. □

命题 8.2.3 *给定无穷集合 S, S 和 $S \times S$ 等势.*

证明. 令 $f\colon S \to S \times S; x \mapsto (x, x)$. 对于任意 $x \in S$, 存在唯一的元素

□

第九章　自然数

9.1　皮亚诺公理

皮亚诺公理 (Peano axioms), 也称皮亚诺公设 (Peano postulates), 是意大利数学家朱塞佩 · 皮亚诺 (Giuseppe Peano) 提出的关于自然数的五条公理系统. 根据这五条公理可以建立起一阶算术系统, 也称皮亚诺算术系统.

定义 9.1.1 *给定集合 X, 对任意集合 $x \in X$, 定义 $S(x) \coloneqq a \cup \{x\}$.*

命题 9.1.1 *给定集合 X, 如果对于任意 $x \in X$, $S(x) \in X$, 那么 S 是 X 上的函数.*

证明. 对于任意 $x \in X$, 根据配对公理, 存在集合 $\{x\}$; 根据并集公理, 存在集合 $x \cup \{x\}$. 根据前提, $x \cup \{x\} \in X$. 如果存在 $y, y' \in X$, 满足 $y = x \cup \{x\}$ 且 $y' = x \cup \{x\}$, 那么对于任意 $z \in y$, $z \in y'$, 所以 $y \subseteq y'$. 同理, 对于任意 $z' \in y'$, $z' \in y$, 所以 $y' \subseteq y$. 因此 $y = y'$. 综上所述, 对于任意 $x \in X$, 有且仅有一个 $y \in X$, 满足 $y = S(x)$, 所以 S 是 X 上的函数. □

称 S 为 X 上的后继函数.

定义 9.1.2 *给定集合 X, 如果 $\varnothing \in X$ 且对于任意 $x \in X$, $S(x) \in X$, 则称 X 为归纳集 (Induction set).*

无穷公理确定了至少存在一个归纳集.

公理 9.1 *称满足下面五条公理的集合 $\mathbb{N}$ 为自然数集:*

1. $0 \in \mathbb{N}$;
2. 如果 $n \in \mathbb{N}$, 则 $S(n) \in \mathbb{N}$;
3. 对于任意 $n \in \mathbb{N}$, $S(n) \neq 0$;
4. 如果 $m \neq n$, 则 $S(m) \neq S(n)$;
5. 如果 $M \subseteq \mathbb{N}$, 且满足下面的条件:
   - $0 \in M$;
   - 如果 $n \in M$, 则 $S(n) \in M$,

   则 $M = \mathbb{N}$.

从定义可知, $\mathbb{N}$ 是归纳集. 第一条公理确定了自然数的起点. 第二条公理确定了自然数的无限递增能力. 第三条公理和第四条公理确定了自然数从 0 出发构成了一条单向增长的 “链”, 不会分叉, 也不会在某个局部或整体上构成一个 “环”. 前面四条公理都比较容易理解, 第五条公理是数学归纳法的来源, 它确定了 $\mathbb{N}$ 是 “最小的” 归纳集. 考虑到我们还未引入序数的概念, 现在说 $\mathbb{N}$ 是 “最小的” 归纳集有些不太不严谨. 如果考虑基数的话, 理论上来说, 一切可数集都是等势的. 所以 $\mathbb{N}$ 这个 “最小的” 不是基数意义上的最

小. 还有一种说法是, $\mathbb{N}$ 是一切归纳集的交集. 这种说法实际上也不太严谨. 无穷公理只是确定了至少存在一个归纳集, 但是它并没有确定所有的归纳集构成一个集合. 因此, 我们也无法对所有的归纳集执行交运算. 严谨的说法是, $\mathbb{N}$ 是一切归纳集的子集.

定理 9.1.1 *根据无穷公理, 存在一个无穷归纳集 S. 存在唯一的非空归纳集 ω, $\omega = \{x \in S \mid$ 对于任意归纳集 $X, x \in X\}$.*

证明. 定义一元谓词 $P(x)$ 如下: x 是归纳集. 根据概括公理, 存在集合 X, $X = \{x \in S \mid \forall y(P(y) \to x \in y)\}$. $\varnothing \in X$, 所以 X 是非空集. 如果 $x \in X$, 那么 $\forall y(P(y) \to x \in y)$. 所以如果 y 是归纳集, $x \in y$, $X \subseteq y$. 根据外延公理, 归纳集 S 的选取不影响 ω 的唯一性. □

数学归纳法 (Principle of Mathematical Induction) 源于皮亚诺公理的第五条.

公理 9.2 (数学归纳法) *如果 P 是关于自然数的一个一元谓词, 且满足:*

- *$P(0)$ 成立;*

那么对于任意 $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ 成立.

命题 9.1.2 *对于任意 $m, n \in \mathbb{N}$, $m = n \leftrightarrow S(m) = S(n)$.*

证明. 充分性: 如果 $S(m) = S(n)$, 假设 $m \neq n$. 因为 $S(m) = m \cup \{m\}$, 所以 $m \in S(m)$, $m \in S(n)$. 因此 $m \in n$ 或 $m = n$. 根据假设 $m \neq n$, 所以 $m \in n$. 任意自然数都是传递集, 所以 $m \subseteq n$. 同理可证 $n \subseteq m$. $m \subseteq n$ 且 $n \subseteq m$, 所以 $m = n$, 与假设矛盾. 因此 $m = n$.

必要性: 如果 $m = n$, S 是 $\mathbb{N}$ 上的函数, 所以 $S(m) = S(n)$. □

命题 9.1.3 *对于任意 $m, n \in \mathbb{N}$, $m \in n \leftrightarrow S(m) \in S(n)$.*

证明. 充分性: 如果对于任意 $m, n \in \mathbb{N}$, $S(m) \in S(n)$. $m \in S(m)$. 因为任意自然数都是传递集, 所以 $S(n)$ 是传递集. 因此 $m \in S(n)$. $m \in n$ 或 $m = n$. 如果 $m = n$, 那么 $S(m) = S(n)$, 与前提矛盾. 所以 $m \in n$.

必要性: 令 $S = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall m \in \mathbb{N}(m \in n \to S(m) \in S(n))\}$. $\varnothing \in S$. 假设 $k \in S$, 即 $m \in k \to S(m) \in S(k)$. 如果 $m \in S(k)$, 那么 $m \in k$ 或 $m = k$. 如果 $m \in k$, 那么 $S(m) \in S(k)$. 又 $S(k) \in S(S(k))$, 所以 $S(m) \in S(S(k))$. 如果 $m = k$, 那么 $S(m) = S(k)$. 又 $S(k) \in S(S(k))$, 所以 $S(m) \in S(S(k))$. 所以 $S(k) \in S$. 因此对于任意 $m, n \in \mathbb{N}$, $m \in n \to S(m) \in S(n)$. □

命题 9.1.4 *对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 且 $n \neq \varnothing$, $\varnothing \in n$.*

证明. 令 $S' = \{n \in \mathbb{N} \mid n \neq \varnothing \wedge \varnothing \in n\}$, $S = \{\varnothing\} \cup S'$. $\varnothing \in S$. 假设 $k \in S$, 那么 $k = \varnothing$ 或 $k \in S'$. 如果 $k = \varnothing$, 那么 $S(k) = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}$, 所以 $S(k) \neq \varnothing$ 且 $\varnothing \in S(k)$, $S(k) \in S'$, $S(k) \in S$. 如果 $k \in S'$, 那么 $k \neq \varnothing$ 且 $\varnothing \in k$. $k \in S(k)$, $S(k)$ 是传递集, 所以 $\varnothing \in S(k)$. $k \neq \varnothing$, 所以 $S(k) \neq \varnothing$, $S(k) \in S'$, $S(k) \in S$. 对于任意 $n \in \mathbb{N}$, $n \in S$. 如果 $n \neq \varnothing$, $n \in S'$. 所以对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 且 $n \neq \varnothing$, $\varnothing \in n$. □

命题 9.1.5 *对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 且 $n \neq \varnothing$, 存在 $m \in \mathbb{N}$, 满足 $S(m) = n$. 称 m 为 n 的前驱 (Precessor).*

证明. 令 $S' = \{n \in \mathbb{N} \mid n \neq \varnothing \wedge \exists m \in \mathbb{N}(S(m) = n)\}$, $S = \{\varnothing\} \cup S'$. $\varnothing \in S$. 假设 $k \in S$, 那么 $k = \varnothing$ 或 $k \in S'$. 如果 $k = \varnothing$, 那么 $S(k) = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}$. 那么 $S(k) \neq \varnothing$, 且存在 $\varnothing \in \mathbb{N}$, $S(\varnothing) = S(k)$. 所以 $S(k) \in S'$, $S(k) \in S$. 如果 $k \in S'$, 那么 $k \neq \varnothing$, 且存在 $m \in \mathbb{N}$, $S(m) = k$. 那么存在 $S(m) \in \mathbb{N}$, $S(S(m)) = S(k)$, $S(k) \neq \varnothing$, 所以 $S(k) \in S'$, $S(k) \in S$. 对于任意 $n \in \mathbb{N}$, $n \in S$. 如果 $n \neq \varnothing$, $n \in S'$. 所以对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 且 $n \neq \varnothing$, 存在 $m \in \mathbb{N}$, 满足 $S(m) = n$. □

9.2 自然数的序

定理 9.2.1 任意自然数都是一个传递集.

证明. 根据自然数的定义, $0 = \varnothing$, 空集是传递集. 假设 k 是传递集. $S(k) = k \cup \{k\}$. 因为传递集的后继集是传递集, 所以 $S(k)$ 是传递集. 根据数学归纳法, 对于任意 $n \in N$, n 是传递集. □

定理 9.2.2 自然数集 $\mathbb{N}$ 是一个传递集.

证明. 对于任意 $n \in \mathbb{N}$, 如果 $n = 0$, 因为 $0 = \varnothing$, $\varnothing \subseteq \mathbb{N}$, 所以 $n \subseteq \mathbb{N}$. 如果 $n \neq 0$, 那么存在 $m \in \mathbb{N}$, 满足 $S(m) = m \cup \{m\} = n$. 对于任意 $x \in n$, 可知 $x \in m$ 或 $x = m$. 如果 $x \in m$, 那么 $x \subseteq m$. 又 $m \subseteq n$, 所以 $x \subseteq n$. 如果 $x = m$, 那么 $x \subseteq n$. 综合以上两种情况, $x \subseteq n$. 所以如果 $n \neq 0$, $\mathbb{N}$ 是传递集. 无论 n 是否等于 0, $\mathbb{N}$ 都是传递集, 所以 $\mathbb{N}$ 是传递集. □

定义 9.2.1 在 $\mathbb{N}$ 上规定二元关系 "$\leqslant$" 如下: 如果 $a, b \in \mathbb{N}$ 且 $a \subseteq b$, 称 $a \leqslant b$.

定义 9.2.2 在 $\mathbb{N}$ 上规定二元关系 "$\geqslant$" 如下: 对于任意 $a, b \in \mathbb{N}$, $b \geqslant a$ 当且仅当 $a \leqslant b$.

定义 9.2.3 在 $\mathbb{N}$ 上规定二元关系 "$<$" 如下: 对于任意 $a, b \in \mathbb{N}$, $a < b$ 当且仅当 $a \leqslant b$ 且 $a \neq b$.

定义 9.2.4 在 $\mathbb{N}$ 上规定二元关系 "$>$" 如下: 对于任意 $a, b \in \mathbb{N}$, $b > a$ 当且仅当 $a < b$.

根据定义可知, 对于任意 $a, b \in \mathbb{N}$, 如果 $a < b$, $a \leqslant b$; 如果 $a \leqslant b$, 要么 $a < b$, 要么 $a = b$, 两者必居其一; 如果 $a > b$, 那么 $a \geqslant b$; 如果 $a \geqslant b$, 要么 $a > b$, 要么 $a = b$, 两者必居其一.

命题 9.2.1 给定自然数 $a, b \in \mathbb{N}$, 如果 $a \leqslant b$, 且 $b \neq \varnothing$, 那么 $a \in b$.

证明. 令 $S = \{a \in \mathbb{N} \mid \forall b \in \mathbb{N}(a \leqslant b \wedge b \neq \varnothing \to a \in b\}$. 如果 $a = \varnothing$, 因为 $b \neq \varnothing$, 所以 $a \in b$. 因此 $\varnothing \in S$. 如果 $a = k \in S$, 那么 $k \leqslant b \wedge b \neq \varnothing \to k \in b$. 当 $a = S(k)$ 时, 如果 $S(k) \leqslant b$, 那么 $S(k) \subseteq b$. 对于任意 $x \in S(k)$, $x \in b$ 或 $x = k$. 如果 $x \in k$, 那么 $S(k) \subseteq b$. □

命题 9.2.2 给定自然数 $a, b \in \mathbb{N}$, $a \leqslant b$ 当且仅当 $S(a) \leqslant S(b)$.

证明. 充分性: 如果 $S(a) \leqslant S(b)$, 那么 $S(a) \subseteq S(b)$. 对于任意 $x \in a$, 因为 $a \in S(a)$, $S(a)$ 是传递集, 所以 $x \in S(a)$. 因为 $S(a) \subseteq S(b)$, 所以 $x \in S(b)$. 那么 $x \in b$ 或 $x = b$. 如果 $x \in b$, $a \subseteq b$, $a \leqslant b$. 如果 $x = b$, $b \in a$, $S(b) \in S(a)$. 所以 $S(b) \subseteq S(a)$, $S(a) = S(b)$, $a = b$, $a \subseteq b$, $a \leqslant b$. 综合以上的情况, $a \leqslant b$.

必要性: 令 $S = \{b \in \mathbb{N} \mid \forall a \in \mathbb{N}(a \leqslant b \to S(a) \leqslant S(b))\}$. 如果 $\varnothing \in S$, $a \leqslant \varnothing$, $a \subseteq \varnothing$, $a = \varnothing$. $a = \varnothing$, $b = \varnothing$, 所以 $S(a) = S(b)$, $S(a) \subseteq S(b)$, $S(a) \leqslant S(b)$. 所以 $\varnothing \in S$. 假设 $k \in S$, 即 $a \leqslant k \to S(a) \leqslant S(k)$. 如果 $a \leqslant S(k)$, 那么 $a \subseteq S(k)$. 对于任意 $x \in S(a)$, $x \in a$ 或 $x = a$. 如果 $x \in a$, 又 $a \subseteq S(k)$, 那么 $x \in S(k)$. $S(k) \in S(S(k))$, $S(S(k))$ 是传递集, 所以 $x \in S(S(k))$. $S(a) \subseteq S(S(k))$. $S(a) \leqslant S(S(k))$. 如果 $x = a$, 又 $a \leqslant S(k)$, 所以 $x \leqslant S(k)$, $x \subseteq S(k)$. $S(k) \in S(S(k))$, 所以 $S(k) \subseteq S(S(k))$. 所以 $x \subseteq S(S(k))$. $S(a) \subseteq S(S(k))$, $S(a) \leqslant S(S(k))$.

因此对于任意 $m, n \leqslant \mathbb{N}$, $m \in n$ 当且仅当 $S(m) \leqslant S(n)$. □

命题 9.2.3 给定自然数 $a, b \in \mathbb{N}$, 如果 $a < b$, 那么 $S(a) \leqslant b$.

证明. 令 $S = \{b \in \mathbb{N} \mid \forall a \in \mathbb{N}(a < b \to S(a) \leqslant b)\}$. $\varnothing \in S$. 假设 $k \in S$, 即对于任意 $a, b \in \mathbb{N}$, 如果 $a < k$, 那么 $S(a) \leqslant b$. 如果 $a < S(k)$, 那么 $a \leqslant S(k)$. 因为 $S(k) \neq \varnothing$, 所以如果 $a \in S(k)$. 那么 $a \in k$ 或者 $a = k$. 如果 $a \in k$, 那么 $S(a) \in S(k)$, $S(k)$ 是传递集, 所以 $S(a) \subseteq S(k)$. 如果 $a = k$, 那么 $S(a) = S(k)$. 综合以上两种情况, $S(a) \subseteq S(k)$, 也即 $S(a) \leqslant S(k)$. 所以 $S(k) \in S$. 所以对于任意 $b \in \mathbb{N}$, $b \in S$. 所以给定自然数 $a, b \in \mathbb{N}$, 如果 $a < b$, 那么 $S(a) \leqslant b$. □

下面的定理称为自然数的三歧性 (trichotomy).

定理 9.2.3 (自然数的三歧性) 对于任意 $a, b \in \mathbb{N}$, $a < b$, $a = b$, $a > b$ 有且仅有一个成立.

证明. 首先证明以上三个关系至少有一个成立. 对 a 使用归纳法. 当 $a = 0$ 时, 由于空集是任意集合的子集, 所以 $a \leqslant b$, 即 $a < b$ 或 $a = b$ 至少有一个成立, 那么以上三个关系至少有一个成立. 设当 $a = k$ 时, 以上三个关系至少有一个成立, 即 $k < b$, $k = b$, $k > b$ 中至少有一个成立. 下面考虑当 $a = S(k)$ 时的情况. 如果 $k < b$, 那么 $S(k) \leqslant b$. 如果 $k = b$, 因为 $k \subseteq S(k)$, 那么 $b \subseteq S(k)$, 即 $b \leqslant S(k)$. 如果 $k > b$, 那么 $b < k$, $b \leqslant k$, $b \subseteq k$, 又 $k \subseteq S(k)$, 所以 $b \subseteq S(k)$, 即 $b \leqslant S(k)$. 以上情况, 三个关系至少有一个成立.

其次证明以上三个关系至多有一个成立. 如果 $a < b$ 且 $a = b$, 从 $a < b$ 可知 $a \neq b$, 出现矛盾. 如果 $a < b$ 且 $a > b$, 那么 $a \subseteq b$ 且 $b \subseteq a$, 所以 $a = b$. 从 $a < b$ 可知 $a \neq b$, 出现矛盾. 如果 $a = b$ 且 $a > b$, 从 $a < b$ 可知 $a \neq b$, 出现矛盾.

因此以上三个关系有且仅有一个成立. □

定理 9.2.4 $\mathbb{N}$ 上的二元关系 "$\leqslant$" 是全序关系.

证明. 对于任意 $a \in \mathbb{N}$, $a \subseteq a$, 所以 $a \leqslant a$. "$\leqslant$" 满足自反性.

对于任意 $a, b \in \mathbb{N}$, 如果 $a \leqslant b$ 且 $b \leqslant a$, 那么 $a \subseteq b$ 且 $b \subseteq a$, 所以 $a = b$. "$\leqslant$" 满足对称性.

对于任意 $a, b, c \in \mathbb{N}$, 如果 $a \leqslant b$ 且 $b \leqslant c$, 那么 $a \subseteq b$ 且 $b \subseteq c$, $a \subseteq c$, 所以 $a \leqslant c$. "$\leqslant$" 满足传递性.

对于任意 $a, b \in \mathbb{N}$, $a < b$, $a = b$, $a > b$ 有且仅有一个成立. 如果 $a < b$, 那么 $a \leqslant b$. 如果 $a = b$, 那么 $a \leqslant b$. 如果 $a > b$, 那么 $b < a$, $b \leqslant a$. "$\leqslant$" 满足完全性. 所以 $\mathbb{N}$ 上的二元关系 "$\leqslant$" 是全序关系. □

定理 9.2.5 $\mathbb{N}$ 是良序集.

证明. 给定 $\mathbb{N}$ 的任意非空子集 S. 设 P 是关于自然数 n 的谓词, 表示 n 是 S 的下界. 设 $M = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\}$. 只要证明 $M \cap S$ 是非空集, 就能证明 S 有最小值.

假设 $M \cap S$ 是空集. 对于任意 $x \in S$, $\varnothing \subseteq x$, $\varnothing \leqslant x$, 所以 $\varnothing \in M$. 假设 $k \in M$, 那么 $k \leqslant x$ 且 $k \notin S$. 所以 $k \neq x$, $k < x$. 因此 $S(k) \leqslant x$, $S(k) \in M$. 对于任意 $n \in \mathbb{N}$, $n \in M$, $n \notin S$. S 为空集, 与前提矛盾. 因此 $M \cap S$ 不是空集. 由外延公理可知, $M \cap S$ 就是 S 上的最小元, 且是唯一的.

$\mathbb{N}$ 是全序集, 任意非空子集有最小值, 所以 $\mathbb{N}$ 是良序集. □

从数学归纳法可以推出第二数学归纳法 (The Second Principle of Mathematical Induction).

命题 9.2.4 *如果 P 是关于自然数的一个一元谓词, 且满足:*

- *$P(0)$ 不成立;*
- *对于任意 $k \in \mathbb{N}$, 如果 $P(k)$ 不成立, 那么 $P(S(k))$ 不成立,*

那么对于任意 $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ 不成立.

证明. 对于任意 $n \in \mathbb{N}$, 规定关于自然数的一元谓词 $Q(n) = \neg P(n)$. 那么:

- $Q(0)$ 成立;
- 对于任意 $k \in \mathbb{N}$, 如果 $Q(k)$ 成立, 那么 $Q(S(k))$ 成立.

根据数学归纳法可知, 对于任意 $n \in \mathbb{N}$, $Q(x)$ 成立, 所以 $P(n)$ 不成立. □

定理 9.2.6 (第二数学归纳法) *如果 P 是关于自然数的一个一元谓词, 且满足:*

- *$P(0)$ 成立;*
- *对于任意 $x \in \mathbb{N}$, 如果当 $x < k$ 时 $P(x)$ 都成立, 那么 $P(k)$ 成立,*

那么对于任意 $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ 成立.

证明. 令 $S = \{n \in \mathbb{N} \mid \neg P(x)\}$. 假设 S 不为空集. S 是 $\mathbb{N}$ 的非空子集, N 是良序集, 因此 S 上有最小值 m, $\neg P(m)$ 成立, 即 $P(m)$ 不成立. 那么对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 且 $0 \leqslant n < m$, $P(n)$ 成立. 根据假设, $P(m)$ 成立, 与前面的结论矛盾. 所以 S 为空集. 那么对于任意对于任意 $n \in \mathbb{N}$, $\neg P(n)$ 不成立, $P(n)$ 成立. $\square$

第十章　正则公理

公理 10.1 (正则公理) *给定任意非空集合 a, 存在一个集合 b, $b \in a$ 且 $a \cap b = \varnothing$. 一阶逻辑下, 正则公理表述如下:*

$$\forall a(\neg(a = \varnothing) \to \exists b(b \in a \wedge a \cap b = \varnothing)). \tag{10.1}$$

命题 10.0.1 $\forall a(\neg(a \in a))$.

证明. 假设存在一个集合 a, $a \in a$. 如果 a 为空集, 由空集的定义可知 $\neg(a \in a)$. 如果 a 不为空集, 由配对公理可知, 存在集合 b, $b = \{a\}$. $a \in \{a\}$, 故 $a \in b$. 由 $a \in a$ 且 $a \in b$ 可知, $a \cap b$ 不为空集. 与正则公理矛盾. 故命题得证. □

命题 10.0.2 *给定任意集合 X, $\neg(X = \{X\})$ 是重言式.*

证明. 如果 $X = \{X\}$, 那么 $X \in \{X\}$, 即 $X \in X$. 出现矛盾. 所以 $\neg(X = \{X\})$ 是重言式. □

命题 10.0.3 *给定集合 A 和 B, $\neg(A \in B \wedge B \in A)$ 是重言式.*

证明. 假设存在集合 A 和 B, $A \in B$ 且 $B \in A$. 根据配对公理, 存在集合 $X = \{A, B\}$. $B \in A \cap X$, 所以 $A \cap X \neq \varnothing$. $A \in B \cap X$, 所以 $B \cap X \neq \varnothing$. 与正则公理矛盾. 所以不存在集合 A 和 B 满足 $A \in B$ 且 $B \in A$. 因此 $\neg(A \in B \wedge B \in A)$ 是重言式. □

根据数学归纳法可证, 给定任意 n 个集合 $A_0, A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$, $\neg(A_0 \in A_1 \wedge A_1 \in A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \in A_{n+1} \wedge \cdots)$ 是重言式.

命题 10.0.4 *ω 没有前驱.*

证明. 假设 X 是 ω 的前驱, $X \cup \{X\} = \omega$, 所以 $X \in \omega$. ω 是 X 的后继, 所以 $\omega \in \omega$. 出现矛盾. 所以 ω 没有前驱. □

命题 10.0.5 $\bigcup \omega = \omega$

证明. 对于任意 $x \in \bigcup \omega$, 存在 $y \in \omega$, $x \in y$. 因为 ω 是传递集, 所以 $x \in \omega$, $\bigcup \omega \subseteq \omega$. 对于任意 $x \in \omega$, $S(x) \in \omega$, $x \in S(x)$, 所以 $x \in \bigcup \omega$, $\omega \subseteq \bigcup \omega$. 所以 $\bigcup \omega = \omega$. □

第十一章　有理数

11.1　有理数的属性

命题 11.1.1 $\sqrt{2}$ 不是有理数

证明. 设 r 是有理数, 且 $r^2 = 2$. 设 $r = \frac{p}{q}$, 且 $p, q \in \mathbb{Q}$, $p, q > 0$, p 与 q 互质. 则 $(\frac{p}{q})^2 > a$, $p^2 - aq^2 > 0$. 设 $c = \frac{p^2+aq^2}{2pq}$, 则 $c > 0$, 且 $b^2 - c^2 = (\frac{p}{q})^2 - (\frac{p^2+aq^2}{2pq})^2 = \frac{3p^4-2aq^2p^2-a^2q^4}{4p^2q^2} = \frac{(3p^2+aq^2)(p^2-aq^2)}{4p^2q^2} > 0$, 故 $b^2 > c^2 > a$. □

命题 11.1.2 (平方根的不可趋近性) 对于任意 $a, b \in \mathbb{Q}$, 且 $a, b > 0$, $b^2 > a$, 存在 $c \in \mathbb{Q}$, 且 $c > 0$, 满足 $b^2 > c^2 > a$.

证明. 设 $b = \frac{p}{q}$, 且 $p, q \in \mathbb{Q}$, $p, q > 0$, p 与 q 互质. 则 $(\frac{p}{q})^2 > a$, $p^2 - aq^2 > 0$. 设 $c = \frac{p^2+aq^2}{2pq}$, 则 $c > 0$, 且 $b^2 - c^2 = (\frac{p}{q})^2 - (\frac{p^2+aq^2}{2pq})^2 = \frac{3p^4-2aq^2p^2-a^2q^4}{4p^2q^2} = \frac{(3p^2+aq^2)(p^2-aq^2)}{4p^2q^2} > 0$, 故 $b^2 > c^2 > a$. □

定义 11.1.1 (支配) 给定集合 A 和 B, 称 A 被 B 支配, 当且仅当存在一个从 A 到 B 的单射.

命题 11.1.3 给定集合 A 和 B, A 被 B 支配, 当且仅当 $|A| \leqslant |B|$.

证明. 充分性: 如果 $|A| \leqslant |B|$, 那么存在一个从 A 到 B 的一一映射或单射. 一一映射也是单射, 所以这两种情况都存在一个从 A 到 B 的单射.

　　必要性: 如果 A 被 B 支配, 那么存在一个从 A 到 B 的单射, 所以 $|A| < |B|$. □