姓名：＿＿＿＿ 准考证号：＿＿＿＿ 考场号：＿＿＿＿ 座位号：＿＿＿＿

密封线内不得答题

绝密 ★ 启用前

辅礽第一卷 · 2025 辅礽复仇赛

试卷类型：主编特供版

2025 Fureng Olympic Revenge

本试卷共 2 页，6 题．全卷满分 300 分．考试时间 12 天．

出卷方：辅礽教育考试院

审卷方：皖辅教育集团

注意事项：

1. 本卷所有题均为原创题，且首发于此试卷．
2. 本赛事仿照巴西复仇赛（Brazil Olympic Revenge），但题型和考点参照全国高中数学联合竞赛（第二试）．
3. 答题前，先将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在试卷上．
4. 解答题的作答：直接写在试卷上的答题区域．
5. 考试结束后，请将本试卷以及草稿纸一并上交，不上交者按照零分处理．
6. 本次考试时长为 12 天，每两天有且仅有一道题目，考生可自行选择做题顺序．
7. 本卷的题目顺序按照 CMO 标准，第 1 至 3 题由易到难，第 4 至 6 题由易到难．
8. 考试严禁作弊，包括但不限于传抄答案，使用电子设备等，一经发现按照零分处理．

一、第一天（陈宇涵供题）

1.（50 分）

设 $\triangle ABC$ 对应边 a,b,c, 分别对应的高为 h_a,h_b,h_c，且满足 $\sqrt{a+h_b}+\sqrt{b+h_c}+\sqrt{c+h_a}=\sqrt{a+h_c}+\sqrt{b+h_a}+\sqrt{c+h_b}$.

（1） 证明：$\triangle ABC$ 为等腰三角形；

（2） 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90^\circ$，I 为其内心，D 为 BC 的中点，E,F 分别在直线 BI,CI 上，满足 $\angle EDF=90^\circ$．求证：$\angle EAF=45^\circ$.

解答

(1) 我们记等式中，从左到右依次为 x,y,z,x_1,y_1,z_1．由题意易知 $x^2+y^2+z^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2$ 且 $(x+y+z)^2=(x_1+y_1+z_1)^2$. ………… 3 分

故 $xy+yz+zx=x_1y_1+y_1z_1+z_1x_1$. ………… 5 分

记 $\triangle ABC$ 的面积为 s.

故 $x^2y^2z^2=(a+h_b)(b+h_c)(c+h_a)=(a+\frac{2S}{b})(b+\frac{2S}{c})(c+\frac{2S}{a})=\frac{(ab+2s)(bc+2s)(ca+2s)}{abc}$. ………… 8 分

同理，$x_1^2y_1^2z_1^2=\frac{(ab+2s)(bc+2s)(ca+2s)}{abc}$. ………… 10 分

由韦达定理可知，(x,y,z) 和 (x_1,y_1,z_1) 同为一个三次方程的三个实根．………… 20 分

故 $x=x_1$ 或 y_1 或 z_1. ………… 23 分

当 $x=x_1$ 时，$b=c$；………… 24 分

当 $x=z_1$ 时，$a=c$；………… 25 分

当 $x=y_1$ 时，则 $a+h_b=b+h_a$，即

$$a+\frac{2s}{b}=b+\frac{2s}{a}$$

.

于是有

$$a-b=\frac{2s}{a}-\frac{2s}{b}=\frac{2s(b-a)}{ab}$$

,

因此有 a = b. ………… 29 分

综上，$\triangle ABC$ 为等腰三角形．………… 30 分

(2) 本题方法过于多样，在此不提供解法，考生可自行选择建系，复数，集合，三角函数等多种方法进行解题．………… 50 分

□

二、第二天（缪语博供题）

2.（50 分）

已知 $f(n)=\dfrac{1}{\dfrac{2}{\tan^2\frac{\pi}{n}}+\dfrac{2}{\tan^2\frac{2\pi}{n}}+\dfrac{2}{\tan^2\frac{3\pi}{n}}+\cdots+\dfrac{2}{\tan^2\frac{(n-1)\pi}{n}}}$，$S_n=\sum_{i=3}^{n}(n-i+1)f(i)$.

求证：$2S_n+3<3(n-\ln n)$.

解答

首先，我们来简化 $f(n)$.

注意到：令 $\theta=\frac{\pi i}{n}, i\in\mathbb{N}^+$，那么 $\sin\theta\cdot n=0$ ………… 5 分

而我们又有：

$$\begin{aligned}\sin n\theta &= Im(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)\\ &= Im((\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n)\\ &= C_n^1\sin\theta\cos^{n-1}\theta-C_n^3\sin^3\theta\cos^{n-3}\theta+C_n^5\sin^5\theta\cos^{n-5}\theta-\cdots\end{aligned}$$ ………… 13 分

两边同时除以 $\sin^n\theta$，得：

$C_n^1\cot^{n-1}\theta-C_n^3\cot^{n-3}\theta+C_n^5\cot^{n-5}\theta-C_n^7\cot^{n-7}\theta+\cdots=\frac{\sin n\theta}{\sin^n\theta}=0$ ………… 18 分

考虑方程：

$C_n^1t^{n-1}-C_n^3t^{n-3}+C_n^5t^{n-5}-C_n^7t^{n-7}+\cdots=0$,

则其零点为：$\cot\frac{\pi}{n},\cot\frac{2\pi}{n},\cot\frac{3\pi}{n},\cdots$ ···························· 23 分

由韦达定理可得：

$$\sum_{i=1}^{n-1}\cot^2\frac{i\pi}{n}=(\sum_{i=1}^{n-1}\cot\frac{i\pi}{n})^2-2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\cot\frac{i\pi}{n}\cdot\cot\frac{j\pi}{n}=-2\left(-\frac{C_n^3}{C_n^1}\right)=\frac{1}{3}(n-1)(n-2)$$ ········ 27 分

故 $f(n)=\dfrac{3}{2(n-1)(n-2)}$ ···························· 32 分

而我们注意到：$f(n)=\dfrac{3}{2(n-1)(n-2)}=\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{n-2}-\dfrac{1}{n-1}\right)$ ···························· 35 分

注意到，$S_n=\sum_{i=3}^{n}(n-i+1)f(i)=\sum_{i=3}^{n}\sum_{j=3}^{i}f(j)$

所以，记 $g(n)=\sum_{i=3}^{n}f(i)$，故 $g(n)=\dfrac{3}{2}(1-\dfrac{1}{n-1})$ ···························· 37 分

所以，$S_n=\sum_{i=3}^{n}g(i)=\dfrac{3}{2}\sum_{i=3}^{n}(1-\dfrac{1}{n-1})=\dfrac{3}{2}\left((n-2)-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\cdots\right)\right)$

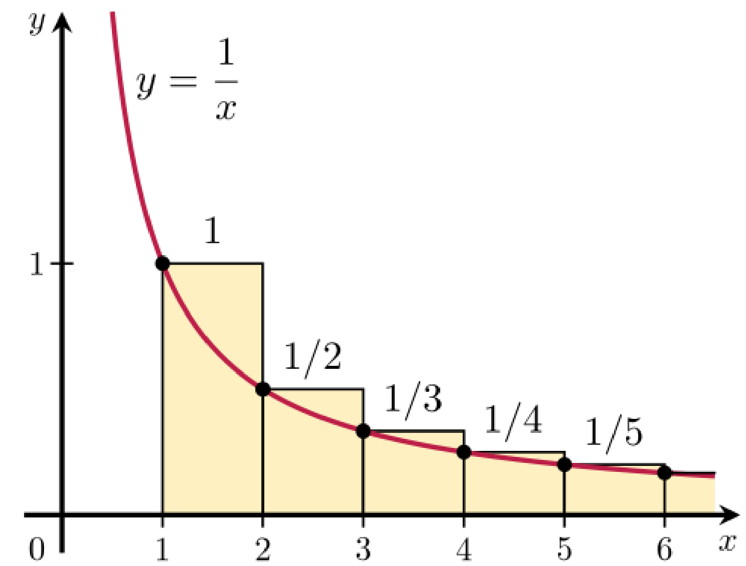
下面我们来求 $h(x)+1=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$ 这个式子的值，我们称这个函数为「调和级数」将调和级数与一个 **定积分**比较．考虑解答最下方图中长方形的排列：长方形宽 1 单位、高 $\frac{1}{n}$ 单位（换句话说，每个长方形的面积都是 $\frac{1}{n}$），所有长方形的总面积就是调和级数的和：························ 42 分

矩形面积和 $=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$

调和级数的面积真包含于（换言之，小于）长方形总面积，长方形的总面积也必定趋于无穷．更准确说，这证明了 $h(n)>\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\,dx=\ln(k+1)$ ···························· 46 分

所以可以求得：$S_n<\dfrac{3}{2}(n-1-\ln n)$ ···························· 49 分

故 $2S_n+3<3(n-\ln n)$，即为所求．···························· 50 分



□

三、第三天（童彦宸供题）

3.（50 分）

已知：$\sum_{i=1}^{m}x_i=1$，$x_1,x_2,\cdots,x_m$ 为非负实数．a,b,c 为两两互素的正整数．记 $f(n)$ 为方程 $ax+by+cz=n$ 的非负整数解 (x,y,z) 的个数．定义 $g(n)=\alpha n^2+\beta n+\gamma,(\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}),\lambda(n)=4n^2-2$，设 $\sum_{i=1}^{m}\left\{\left\{\left[\lambda\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)x_i+x_i^2+1\right]\left[\lambda\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)x_i+x_i^2+1\right]-1\right\}\cdot\sum_{j=1,j\neq i}^{m}x_j\right\}$ 的最大值为 T．证明：$\exists\alpha,\beta,\gamma$，使得对于任意 $n\in\mathbb{N}$，均有 $\dfrac{|f(n)-g(n)|}{a+b+c}<T$．

友情提示：本题要用到第二天的某个结论．

解答

本题共分为两部分进行，其中第一步有两种证明方法，可酌情给考生部分分．

step 1 先证明：$f(n)-g(n)<\dfrac{1}{12}(a+b+c)$ ························ 35 分

证法一我们考虑序列 $f(n)$ 的母函数

$$G(t)=\sum_{n=0}^{\infty}g(n)t^n=(1+t^a+t^{2a}+\cdots)(1+t^b+t^{2b}+\cdots)(1+t^c+t^{2c}+\cdots)=\frac{1}{(1-t^a)(1-t^b)(1-t^c)^a}$$

由于 a,b,c 两两互质，分母多项式 $(1-t^a)(1-t^b)(1-t^c)$ 除了 $(1-t)^3$ 外没有其他重因式．设 $\omega=e^{2\pi i/a},\tau=e^{2\pi i/b},\rho=e^{2\pi i/c}$ 分别是 a,b,c 次本原单位根，我们考虑部分分式:

$$\frac{1}{(1-t^a)(1-t^b)(1-t^c)}=\frac{h_0}{(1-t)}+\frac{h_1}{(1-t)^2}+\frac{h_2}{(1-t)^3}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{d_k}{1-\omega^kt}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{e_k}{1-r^kt}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f_k}{1-\rho^kt}$$

其中各项分子 $h_0,h_1,h_2,d_1,\cdots,d_{n-1},e_1,\cdots,e_{n-1},f_1,\cdots,f_{n-1}$ 都是复数．我们计算 □ 项分子 d_k，给上述两端同时乘 $(1-\omega^kt)$ 之后，再取 $t\to\omega^{-k}$ (或者直接认为 $1-\omega^kt=0$ 也行)．此时部分分式的其余项都是 0，所以

$$d_k=\lim_{t\to\omega^{-k}}\frac{1-\omega^kt}{(1-(\omega^kt)^a)(1-t^b)(1-t^c)}$$

$$=\frac{1}{a}\times\frac{1}{(1-\omega^{-kb})(1-\omega^{-kc})}$$

这样我们计算 $G(t)$ 的展开式的 t^n 项系数:

$$f(n)=h_0+h_1\times(n+1)+h_2\times\frac{(n+1)(n+2)}{2}+\sum_{k=1}^{a-1}d_k\omega^{kn}+\sum_{k=1}^{b-1}e_k\tau^{kn}+\sum_{k=1}^{c-1}f_k\rho^{kn}$$

注意到

$$\left|\sum_{k=1}^{a-1}d_k\omega^{kn}\right|\leqslant\sum_{k=1}^{a-1}|d_k|$$

$$=\frac{1}{a}\times\sum_{k=1}^{a-1}\frac{1}{|1-\omega^{-kb}||1-\omega^{-kc}|}$$

$$\leqslant\frac{1}{a}\times\sum_{k=1}^{a-1}\frac{1}{|1-\omega^{k}|^2}$$

$$=\frac{a^2-1}{12a}<\frac{a}{12}$$

这里，最后一步的等号要用到后面证明的引理.

同理可证 $\left|\sum_{k=1}^{b-1}e_k\tau^{kn}\right|<\frac{b}{12}$ 和 $\left|\sum_{k=1}^{c-1}f_k\rho^{kn}\right|<\frac{c}{12}$. 我们取 $\beta_2=\frac{h_2}{2}$，$\beta_1=h_1+\frac{3}{2}h_2$，$\beta_0=h_0+h_1+h_2$，有：

$|\beta_2n^2+\beta_1n+\beta_0-f(n)|\leqslant\left|\sum_{k=1}^{a-1}d_k\omega^{kn}\right|+\left|\sum_{k=1}^{n-1}e_k\tau^{kn}\right|+\left|\sum_{k=1}^{n-1}f_k\rho^{kn}\right|<\frac{a+b+c}{12}$.

倒数第二步需要【引理】，对任意正整数 m，有 $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}=\frac{m^2-1}{3}$

这等价于证明

$\sum_{k=1}^{n-1}\cot^2\frac{k\pi}{m}=\frac{m^2-3m+2}{3}$

由第二天的结论可证，这里不再赘述.

因此 $m-1$ 个根的平方和为 $\sum_{k=1}^{n-1}\cot^2\frac{k\pi}{m}=\sigma_1^2-2\sigma_2=\frac{m^2-3m+2}{3}$.

证法二由对称性不妨设 $a\leqslant b\leqslant c$. 若 $a=b=c=1$，则 $f(n)$ 等于把 n 写成三个非负整数和的方法数，即 C_{n+2}^2，此时取 $\alpha=\frac{1}{2}$，$\beta=\frac{3}{2}$，$\gamma=1$ 可使误差永远为 0，此时结论成立.

下面假设 $c>1$. 对非负整数 m，设 $g(m)$ 是不定方程 $ax+by=m$ 的非负整数解 (x,y) 的个数.

首先想办法算出 $g(m)$.

设 $x\equiv ka\pmod b$，$m\equiv\ell b\pmod a$，其中 $k\in\{0,1,\cdots,b-1\}$，$\ell\in\{0,1,\cdots,a-1\}$. 易知 $x\equiv k\pmod b$，$y\equiv\ell\pmod a$. 设 $x=k+ub$，$y=\ell+va$，则

$$m=ka+\ell b+(u+v)ab$$

即 $u+v=\frac{m-(ka+\ell b)}{ab}$. 这样 (u,v) 的组数为 $\frac{m-(ka+\ell b)}{ab}+1$（注意 $\frac{m-(ka+\ell b)}{ab}$ 是整数且大于 -2，当 $\frac{m-(ka+\ell b)}{ab}=-1$ 时，有关组数的结论依然成立）.

因此，$g(m)=\frac{m-(ka+\ell b)}{ab}+1$，下面考虑 $f(n)$.

若不定方程 $ax+by+cz=n$ 中，z 已给定 $(cz\leqslant n)$，那么 $ax+by=n-cz$ 的解的个数为 $g(n-cz)$，因此，

$$f(n)=\sum_{i=0}^{\lfloor n/c\rfloor}g(n-ic)$$

对整数 i，定义 $k_i\in\{0,1,\cdots,b-1\}$ 和 $\ell_i\in\{0,1,\cdots,a-1\}$ 使得

$$n-ic\equiv k_ia\pmod b,\quad n-ic\equiv\ell_ib\pmod a$$

则

$$f(n)=\sum_{i=0}^{\lfloor n/c\rfloor}g(n-ic)=\sum_{i=0}^{\lfloor n/c\rfloor}\left(\frac{(n-ic)-(k_ia+\ell_ib)}{ab}+1\right)$$

$$=\left\lfloor\frac{n}{c}\right\rfloor\cdot\left(\frac{n}{ab}+1\right)-\frac{c}{2ab}\left\lfloor\frac{n}{c}\right\rfloor\left(\left\lfloor\frac{n}{c}\right\rfloor+1\right)-\left(\frac{1}{b}\sum_{i=0}^{\lfloor n/c\rfloor}k_i+\frac{1}{a}\sum_{i=0}^{\lfloor n/c\rfloor}\ell_i\right)$$

注意到 a,b,c 两两互质，故 $i=0,1,\cdots,b-1$ 时，$n-ic$ 跑遍模 b 的完系，因此 k_ia 跑遍模 b 的完系，故 k_i 跑遍模 b 的完系. 另外，当 i 增加或减少一个 b 的倍数时，易见 k_i 不改变.

由此可以考虑 $\sum_{i=0}^{\lfloor n/c\rfloor}\left(k_i-\frac{b-1}{2}\right)$，被求和的部分在 i 跑遍一个模 b 的完系时和为 0，故 $\sum_{i=0}^{\lfloor n/c\rfloor}\left(k_i-\frac{b-1}{2}\right)=\sum_{i=0}^{s}\left(k_i-\frac{b-1}{2}\right)$. 这里，$s$ 是 $\left\lfloor\frac{n}{c}\right\rfloor$ 模 b 的最小非负剩余. 在和式 $\sum_{i=0}^{s}\left(k_i-\frac{b-1}{2}\right)$ 中，所有加项两两不同，且均取自集合 $\left\{\frac{1-b}{2},\frac{3-b}{2},\cdots,\frac{b-3}{2},\frac{b-1}{2}\right\}$，故 $\left|\sum_{i=0}^{s}\left(k_i-\frac{b-1}{2}\right)\right|$ 不超过此集合中所有正数之和（因为此集合中正负数对称出现），即 $\frac{b^2-1}{8}$（b 是奇数时）或 $\frac{b^2}{8}$（b 是偶数时）. 因此

$$\left|\sum_{i=0}^{\lfloor n/c\rfloor}\left(k_i-\frac{b-1}{2}\right)\right|\leqslant\frac{b^2}{8}$$

同理，

$$\left|\sum_{i=0}^{\lfloor n/c\rfloor}\left(\ell_i-\frac{a-1}{2}\right)\right|\leqslant\frac{a^2}{8}$$

由上面两个式子得：

$$\left|\left(\frac{1}{b}\sum_{i=0}^{\lfloor n/c\rfloor}k_i+\frac{1}{b}\sum_{i=0}^{\lfloor n/c\rfloor}\ell_i\right)-\left(\left\lfloor\frac{n}{c}\right\rfloor+1\right)\left(\frac{b-1}{2b}+\frac{a-1}{2a}\right)\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{b}\left|\sum_{i=0}^{\lfloor n/c\rfloor}\left(k_i-\frac{b-1}{2}\right)\right|+\frac{1}{a}\left|\sum_{i=0}^{\lfloor n/c\rfloor}\left(\ell_i-\frac{a-1}{2}\right)\right|\leqslant\frac{a+b}{8}$$

设 r 是 n 模 c 的最小非负剩余, 则

$$\left\lfloor\frac{n}{c}\right\rfloor\cdot\left(\frac{n}{ab}+1\right)-\frac{c}{2ab}\left\lfloor\frac{n}{c}\right\rfloor\cdot\left(\left\lfloor\frac{n}{c}\right\rfloor+1\right)-\left(\left\lfloor\frac{n}{c}\right\rfloor+1\right)\left(\frac{b-1}{2b}+\frac{a-1}{2a}\right)$$

$$=\frac{(n-r)(n+ab)}{abc}-\frac{(n-r)(n-r+c)}{2abc}-\frac{(2ab-a-b)(n-r+c)}{2abc}$$

$$=\frac{n^2-(a+b+c)n-(2abc+ac+bc)-r(r+a+b-c)}{2abc}$$

在 r 取遍 $0,1,\cdots,c-1$ 时, 设 $r(r+a+b-c)$ 的最大值为 $A+B$, 最小值为 $A-B$, 则由上面两个式子，有

$$\left|f(n)-\frac{n^2-(a+b+c)n-(2abc+ac+bc)-A}{2abc}\right|\leqslant\frac{a+b}{8}+\frac{B}{2abc}$$

以下令

$$\alpha=\frac{1}{2abc},\quad\beta=-\frac{a+b+c}{2abc},\quad\gamma=-\frac{2abc+ac+bc+A}{2abc}$$

我们对 a,b,c 分情况讨论证明误差

$$\left|f(n)-(\alpha n^2+\beta n+\gamma)\right|<\frac{a+b+c}{12}$$

情况一: $a=b=1$ 且 $c>1$, 则讨论开口和对称轴易知

$$A+B=c-1,\quad A-B\geqslant-\frac{(c-2)^2}{4}$$

故 $B\leqslant\frac{c^2}{8}$. 另外注意此时①和②的左边恒为 0, 故不产生误差, 因此误差

$$\left|f(n)-(\alpha n^2+\beta n+\gamma)\right|\leqslant\frac{c^2}{8\cdot 2abc}=\frac{c}{16}<\frac{a+b+c}{12}$$

即此时结论成立;

情况二: $a=1,b>1$, 且 $c\geqslant a+b$, 同样考虑开口和对称轴易知

$$A+B=b(c-1),\quad A-B\geqslant-\frac{(c-1-b)^2}{4}$$

故 $B\leqslant\frac{(b+c-1)^2}{8}$. 另外注意此时①的左边恒为 0, 故不产生误差, 因此误差

$$\left|f(n)-(\alpha n^2+\beta n+\gamma)\right|\leqslant\frac{b}{8}+\frac{(b+c-1)^2}{8\cdot 2abc}=\frac{b}{8}+\frac{b^2+2bc+c^2-2b-2c+1}{16bc}$$

$$=\frac{b}{8}+\frac{3bc+c^2-2b-2c+1-b(c-b)}{16bc}\leqslant\frac{b}{8}+\frac{3bc+c^2-2b-2c+1-(c-1)}{16bc}$$

$$<\frac{b}{8}+\frac{2bc+c^2-3c}{16bc}=\frac{b}{8}+\frac{3}{16}+\frac{c-3}{16b}\leqslant\frac{b}{8}+\frac{3}{16}+\frac{c-3}{32}$$

$$=\frac{a+b+c}{12}-\frac{5a-4b-1}{96}<\frac{a+b+c}{12}$$

即此时结论成立;

情况三: $a>1$ 且 $c\geqslant a+b-2$, 同样考虑开口和对称轴易知

$$A+B=(a+b-1)(c-1),\quad A-B=-\frac{(c-a-b)^2}{4}$$

故 $B\leqslant\frac{(a+b+c-2)^2}{7}<\frac{c^2}{2}$. 因此误差

$$\left|f(n)-(\alpha n^2+\beta n+\gamma)\right|<\frac{a+b}{8}+\frac{c^2}{4abc}=\frac{a+b}{8}+\frac{c}{4ab}$$

$$\leqslant\frac{a+b}{8}+\frac{c}{24}=\frac{a+b+c}{12}-\frac{c-a-b}{24}\leqslant\frac{a+b+c}{12}$$

即此时结论成立;

情况四: $a>1$ 且 $c\leqslant a+b-3$, 则 $r(r+a+b-c)$ 在 $r\geqslant 0$ 时严格递增, 故 $2B=(c-1)(a+b-1)$, 因此

$$B=\frac{(c-1)(a+b-1)}{2}<\frac{(a+b)c}{2}$$

由 $c\leqslant a+b-3\leqslant a+c-4$ 知 $a\geqslant 4$, 故误差

$$\left|f(n)-(\alpha n^2+\beta n+\gamma)\right|<\frac{a+b}{8}+\frac{(a+b)c}{4abc}=\frac{a+b}{8}+\frac{1}{4a}+\frac{1}{4b}$$

$$<\frac{a+b}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{20}<\frac{a+b+1}{8}=\frac{3a+3b+3}{24}$$

$$<\frac{2a+2b+(a+b+3)}{24}\leqslant\frac{2a+2b+2c}{24}=\frac{a+b+c}{12}$$

即此时结论成立.

综上所述, 命题得证.

step 2 处理其他部分. .... 50 分

注意到, $\left[\lambda\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)x_i+x_i^2+1\right]\left[\lambda\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)x_i+x_i^2+1\right]-1=x_i^4$

又 $\sum\limits_{i\neq j, j=1}^{m} x_j = 1 - x_i$

所以原题中，$T = max\left[\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^4(1-x_i)\right] = max\left[\sum\limits_{i=1}^{m}(x_i^4 - x_i^5)\right]$

记 $p(x) = x^4 - x^5$

待求 $F = p(x_1) + p(x_2) + \cdots + p(x_n)$

下面讨论 $p(x)$ 的凹凸性.

$p''(x) = 20x^2\left(\frac{3}{5} - x\right)$

故 $p(x)$ 在 $(0, \frac{3}{5})$ 上为凸函数，在 $(\frac{3}{5}, 1)$ 上为凹函数.

故当 F 取最大值时，有：

1. $x_1 = \cdots = x_k = 0$
2. 可能有 $0 < x_{k+1} < \frac{3}{5}$
3. $\frac{3}{5} < x_{k+2} = \cdots = x_m = a$

又 $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 1$，故最多有一个点在 $\left(\frac{3}{5}, 1\right)$ 之间.

所以 F 取最大值的必要条件为 x_1 到 x_n 中有 $(m-2)$ 个 0.

从而令

$$F = p^4 - p^5 + q^4 - q^5 = p^4(1-p) = q^4(1-q) = pq(p^3 + q^3)$$

$$= pq(p+q)[(p+q)^2 - 3pq] = pq(1-3pq) = \frac{1}{3} \times 3pq(1-3pq)$$

$$\leqslant \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{12}$$

.

其中，$p + q = 1$

取等：$p = \frac{3+\sqrt{3}}{6}, q = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$ 或者反过来.

即为所求.

□

四、第四天（高扬供题）

4.（50 分）

设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$，其零点分别为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$. 其中，$a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.

设 $S_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$. 求证：$\sum\limits_{i=1}^{n-1}(a_i - a_0) \cdot S_{i+2} = 0$.

解答

先证明一个引理：牛顿公式.

首先考虑 $n = 2$ 的情形.

为了简单起见，可以假设 $a = 1$

则 $x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$.

由韦达定理可知，$x_1 + x_2 = -b, x_1x_2 = c$.

又 $x_1^2 + bx_1 + c = 0$，$x_2^2 + bx_2 + c = 0$.

两式相加，得到：

$S_2 + bS_1 + 2c = 0, S_2 = -(bS_1 - 2c) = b^2 - 2c$. ………………………………………… 5 分

我们可以知道 $x_1^3 + bx_1^2 + cx_1 = 0$，$x_2^3 + bx_2^2 + cx_2 = 0$

两式相加，得到：

$S_3 = -b^3 + 3bc$.

对于任意 n 的情形, 我们也可以同样进行. 下面我们引进符号 $\sum$,

例如用 $\sum x_1^{k-1}x_2$ 表示

$$\left(\begin{array}{l} x_1^{k-1}x_2 + \cdots + x_1^{k-1}x_n + x_2^{k-1}x_1 + \cdots \\ +x_2^{k-1}x_n + \cdots + x_n^{k-1}x_1 + \cdots + x_n^{k-1}x_{n-1}, \end{array}\right)$$

当 $k \leqslant n$, 就有

$$s_{k-1}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = s_k + \sum x_1^{k-1}x_2,$$

$$s_{k-2}(x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n) = \sum x_1^{k-1}x_2 + \sum x_1^{k-2}x_2x_3, \tag{1}$$

$$\vdots$$

$$s_{k-1}(x_1x_2\cdots x_i + \cdots) = \sum x_1^{k-i+1}x_2\cdots x_i + \sum x_1^{k-i}x_2\cdots x_{i+1},$$

$$\vdots$$

$$s_1(x_1x_2\cdots x_{k-1} + \cdots) = \sum x_1^2x_2\cdots x_{k-1} + k\sum x_1x_2\cdots x_k. \text{………………} 15 \text{ 分}$$

以 $-1, +1, -1, \cdots$ 依次乘各式, 然后加起来, 就得到

$$-s_{k-1}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + s_{k-2}(x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n) + \cdots + (-1)^{k-1}s_1(x_1x_2\cdots x_{k-1} + \cdots)$$

$$= -s_k + (-1)^{k-1}k\sum x_1x_2\cdots x_k,$$

或

$$s_k - s_{k-1}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + s_{k-2}(x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n) + \cdots + (-1)^{k-1}s_1(x_1x_2\cdots x_{k-1} + \cdots)$$

$$+(-1)^k k(x_1x_2\cdots x_k + \cdots) = 0,$$

或

$$a_0s_k + a_1s_{k-1} + a_2s_{k-2} + \cdots + ka_k = 0. \text{………………………} 25 \text{ 分}$$

若 $k > n$, 那么 (1) 式中最后一式应是

$$s_{k-n}(x_1x_2\cdots x_n) = \sum x_1^{k-n+1}x_2\cdots x_n,$$

从而得到

$$s_k - s_{k-1}(x_1+x_2+\cdots+x_n) + s_{k-2}(x_1x_2+\cdots+x_{n-1}x_n) + \cdots + (-1)^n s_{k-n}(x_1x_2\cdots x_n) = 0,$$

或

$$a_0s_k + a_1s_{k-1} + a_2s_{k-2} + \cdots + a_ns_{k-n} = 0. \cdots\cdots\cdots\cdots 35 \text{ 分}$$

现取 $k=n+1$.

$\Rightarrow a_nS_{n+1} + a_1S_n + a_2S_{n-1} + \cdots + a_0S_1 = 0$

即

$$\sum_{i=0}^{n} a_iS_{i+1} = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots 40 \text{ 分}$$

.

由 Abel 求和:

设

$$T_n = \sum_{i=1}^{n-1} S_i$$

则

$$\sum_{i=0}^{n} a_iS_{i+1} = a_0T_n + \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)S_{k+2}$$

$$\therefore a_0T_n = \sum_{k=0}^{n-1}(a_k-a_{k+1})S_{k+2}$$

$$=(a_0-a_1)S_2+(a_1-a_2)S_3+\cdots+(a_{n-1}-a_n)S_{n+1}$$

$$=a_0S_2+a_1S_3+\cdots+a_{n-1}S_{n+1}-(a_1S_2+a_2S_3+\cdots+a_nS_{n+1})$$

$$=a_0S_2+a_1S_3+\cdots+a_{n-1}S_{n+1}+a_0S_1 \cdots\cdots\cdots\cdots 45 \text{ 分}$$

又

$$T_n = \sum_{j=1}^{n-1} S_j$$

$$\therefore a_0(S_1+S_2+\cdots+S_{n+1}) = a_0S_2+a_0S_3+a_1S_3+\cdots+a_{n-1}S_{n+1}$$

$$\therefore a_0S_3+a_0S_4+\cdots+a_0S_{n+1} = a_1S_3+a_2S_4+\cdots+a_{n-1}S_{n+1}$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n-1}(a_i-a_0)S_{i+2} = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots 50 \text{ 分}$$

□

五、第五天（窦世杰供题）

5.（50 分）

给定 $r+1$ 位 p 进数 $n=(\overline{n_r\cdots n_\alpha \underbrace{00\cdots0}_{\alpha\ zeros}})_p$ 和正整数 $k, n\geqslant k, V_p(n)=\alpha, V_p(k)=\beta, \alpha\geqslant\beta$. 若

$$v_p\left(\binom{n}{k}\right)=r-\beta$$

则称 $\binom{n}{k}$ 为 p 幂最大组合数. 试求 p 幂最大组合数 $\binom{n}{k}$ 的个数.

注：设 p 为一个质数，n 为一个正整数，$V_p(n)$ 表示 n 中所含有的 p 的最大幂次，即：

$$V_p(n)=\max\{k\in\mathbb{N}\mid p^k\mid n\}$$

换句话说，$V_p(n)$ 是使得 p^k 整除 n 的最大整数 k.

解答

记 $q=p-1$, $k=(\overline{k_rk_{r-1}\cdots k_\beta\underbrace{00\cdots0}_{\beta\ zeros}})_p$.

(1) 若 $\alpha>\beta$，则 $\alpha\geqslant1$. 由 Kummer 定理知 $\binom{n}{k}$ 为 p 幂最大组合数等价于 $n-k$ 的 p 进制减法有 $r-\beta$ 位退位，此时 $v_p\left(\binom{n}{k}\right)=r-\beta$. $\cdots\cdots\cdots\cdots$ 5 分

对于每一个 β，

k_β 可取 $1,2,\cdots,q$，有 $p-1$ 种选择；

$k_{\beta+1},\cdots,k_{\alpha-1}$ 可取 $0,1,2,\cdots,q$，各有 p 种选择；

k_α 可取 $n_\alpha, n_\alpha+1,\cdots,q$，有 $p-n_\alpha$ 种选择；

$\cdots\cdots$;

k_{r-1} 可取 $n_{r-1}, n_{r-1}+1,\cdots,q$，有 $p-n_{r-1}$ 种选择；

k_r 可取 $0,1,2,\cdots,n_r-1$，有 n_r 种选择.

由乘法原理知 k 有 $(p-1)p^{\alpha-\beta-1}(p-n_\alpha)\cdots(p-n_{r-1})n_r$ 种选择. $\cdots\cdots\cdots\cdots$ 20 分

(2) 若 $\alpha=\beta$，则 $k=(\overline{k_rk_{r-1}\cdots k_\alpha\underbrace{00\cdots0}_{\alpha\ zeros}})_p$. 由 Kummer 定理知 p 幂最大等价于 $n-k$ 的 p 进制减法有 $r-\alpha$ 次退位，此时 $v_p\left(\binom{n}{k}\right)=r-\alpha$. $\cdots\cdots\cdots\cdots$ 25 分

k_α 可取 $n_\alpha+1, n_\alpha+2,\cdots,q$，有 $p-1-n_\alpha$ 种选择；

$k_{\alpha+1}$ 可取 $n_{\alpha+1}, n_{\alpha+1}+1,\cdots,q$，有 $p-n_{\alpha+1}$ 种选择；

$\cdots$; k_{r-1} 可取 $n_{r-1}, n_{r-1}+1,\cdots,q$，有 $p-n_{r-1}$ 种选择；

k_r 可取 $0,1,2,\cdots,n_r-1$，有 n_r 种选择.

由乘法原理知 k 有 $(p-1-n_\alpha)(p-n_{\alpha+1})\cdots(p-n_{r-1})n_r$ 种选择. $\cdots\cdots\cdots\cdots$ 40 分

于是由加法原理知 p 幂最大组合数 $\binom{n}{k}$ 数为

$$\sum_{\beta=0}^{\alpha-1}[(p-1)p^{\alpha-\beta-1}(p-n_\alpha)\cdots(p-n_{r-1})n_r]+(p-1-n_\alpha)(p-n_{\alpha+1})\cdots(p-n_{r-1})n_r$$

$$= (p-n_{\alpha+1})\cdots(p-n_{r-1})n_r\left[(p-1)(p-n_\alpha)\sum_{\beta=0}^{\alpha-1}p^{\alpha-\beta-1}+(p-1-n_\alpha)\right]$$

$$= (p-n_{\alpha+1})\cdots(p-n_{r-1})n_r\left[(p-1)(p-n_\alpha)\frac{1-p^\alpha}{1-p}+(p-1-n_\alpha)\right]$$

$$= (p-n_{\alpha+1})\cdots(p-n_{r-1})n_r[(p-n_\alpha)(p^\alpha-1)+(p-1-n_\alpha)]$$

$$= (p-n_{\alpha+1})\cdots(p-n_{r-1})n_r[(p-n_\alpha)p^\alpha-1]$$

故 p 幂最大组合数 $\binom{n}{k}$ 个数为 $(p-n_{\alpha+1})\cdots(p-n_{r-1})n_r[(p-n_\alpha)p^\alpha-1]$. ………………… 50 分

□

六、第六天（方逸宸供题）

6.（50 分）

对于一个长度为 n，元素互不相同的序列 $\{a_i\}$. 称一种交换操作为：将数列中的 a_i 与 a_j 交换 $(i<j)$. 易知下标不同的交换操作有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 种. 现在请你构造这 $\frac{n(n-1)}{2}$ 种交换操作的顺序，使得按照该顺序对序列进行交换，交换完成后的序列与原序列相同. 对于任意正整数 n，构造方案或说明无解.

解答

step 1

考虑 $n\equiv 2,3 \mod 4$.

我们记：(i,j) 表示将 a_i 和 a_j 交换一次. 另：(a_i,a_j) 也表示将 a_i 和 a_j 交换一次.

而我们注意到：一次交换发生后，逆序对个数的奇偶性改变. ………………………………… 5 分

注：两个值相对于其他值的逆序对数量奇偶性不变，两个值之间的逆序对奇偶性改变.

故总交换数不为奇数.

又总共有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 次交换，

当 $n\equiv 2 \mod 4$ 时，$n(n-1)\equiv 2 \mod 4$，故 $\frac{n(n-1)}{2}\equiv 1 \mod 2$，为奇数. ……………… 7 分

当 $n\equiv 3 \mod 4$ 时，$n(n-1)\equiv 6 \mod 4$，即 $n(n-1)\equiv 2 \mod 4$，故 $\frac{n(n-1)}{2}\equiv 1 \mod 2$，为奇数. ………………………………………………………………………………………… 9 分

故 $n\equiv 2,3 \mod 4$ 不成立. ……………………………………………………………… 10 分

step 2

考虑 $n\equiv 0 \mod 4$.

将相邻 4 个下标分为一组，共 $\frac{n}{4}$ 组.

考虑对 $\{t,t+1,t+2,t+3\}(t\equiv 1 \mod 4)$ 的组内交换.

注意到：按如下顺序交换其中两项的顺序，交换完成后，仍为 $\{t,t+1,t+2,t+3\}$.

$(t,t+1)$、$(t+2,t+3)$、$(t,t+3)$、$(t+1,t+2)$、$(t,t+2)$、$(t+1,t+3)$. ………………… 20 分

接下来考虑对形如 $\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ 和 $\{b_1,b_2,b_3,b_4\}$ 的组进行组间交换.

注意到，按如下顺序交换可成立：

(a_1,b_1)、(a_2,b_2)、(a_1,b_2)、(a_2,b_1)、(a_1,b_3)、(a_2,b_4)、(a_1,b_4)、(a_2,b_3)、(a_3,b_1)、(a_4,b_2)、(a_3,b_2)、(a_4,b_1)、(a_3,b_3)、(a_4,b_4)、(a_3,b_4)、(a_4,b_3). ……………………………………………………… 35 分

故 $n\equiv 0 \mod 4$ 成立.

step 3

考虑 $n\equiv 1 \mod 4$.

前 $(n-1)$ 个数按照 $n\equiv 0 \mod 4$ 的情况进行分组. 组内交换作如下变动：

$(t,t+1)\to(t,n),(t,t+1),(t+1,n)$

$(t+2,t+3)\to(t+2,n),(t+2,t+3),(t+3,n)$

依次，恰好用尽多出的 $(n-1)$ 次交换. ……………………………………………………… 49 分

故 $n\equiv 1 \mod 4$ 成立.

综上所述

当 $n\equiv 0 \mod 4$ 或 $n\equiv 1 \mod 4$ 时成立，当 $n\equiv 2 \mod 4$ 或 $n\equiv 3 \mod 4$ 时不成立. ····· 50 分

□