姓名：______ 准考证号：______ 考场号：______ 座位号：______

密封线内不得答题

**绝密 ★ 启用前**

# 辅初第一卷 · 2025 辅初复仇赛

试卷类型：Eric-熊特供版

# 2025 Fureng Olympic Revenge

本试卷共 2 页，6 题．全卷满分 300 分．考试时间 12 天．

出卷方：辅初教育考试院

审卷方：皖辅教育集团

**注意事项：**

1. 本卷所有题均为原创题，且首发于此试卷．

2. 本赛事仿照巴西复仇赛（Brazil Olympic Revenge），但题型和考点参照全国高中数学联合竞赛（第二试）．

3. 答题前，先将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在试卷上．

4. 解答题的作答：直接写在试卷上的答题区域．

5. 考试结束后，请将本试卷以及草稿纸一并上交，不上交者按照零分处理．

6. 本次考试时长为 12 天，每两天有且仅有一道题目，考生可自行选择做题顺序．

7. 本卷的题目顺序按照 CMO 标准，第 1 至 3 题由易到难，第 4 至 6 题由易到难．

8. 考试严禁作弊，包括但不限于传抄答案，使用电子设备等，一经发现按照零分处理．

## 一、第一天（陈宇涵供题）

1.（50 分）

设 $\triangle ABC$ 对应边 $a,b,c$，分别对应的高为 $h_a,h_b,h_c$，且满足 $\sqrt{a+h_b}+\sqrt{b+h_c}+\sqrt{c+h_a}=\sqrt{a+h_c}+\sqrt{b+h_a}+\sqrt{c+h_b}$．

（1） 证明：$\triangle ABC$ 为等腰三角形；

（2） 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90^\circ$，$I$ 为其内心，$D$ 为 $BC$ 的中点，$E,F$ 分别在直线 $BI,CI$ 上，满足 $\angle EDF=90^\circ$．求证：$\angle EAF=45^\circ$．

## 二、第二天（缪语博供题）

2.（50 分）

已知 $f(n)=\dfrac{1}{\dfrac{2}{\tan^2\dfrac{\pi}{n}}+\dfrac{2}{\tan^2\dfrac{2\pi}{n}}+\dfrac{2}{\tan^2\dfrac{3\pi}{n}}+\cdots+\dfrac{2}{\tan^2\dfrac{(n-1)\pi}{n}}}$，$S_n=\sum\limits_{i=3}^{n}(n-i+1)f(i)$．

求证：$2S_n+3<3(n-\ln n)$．

## 三、第三天（童彦宸供题）

3.（50 分）

已知：$\sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1$，$x_1, x_2, \cdots, x_m$ 为非负实数．$a, b, c$ 为两两互素的正整数．记 $f(n)$ 为方程 $ax+by+cz=n$ 的非负整数解 $(x,y,z)$ 的个数．定义 $g(n)=\alpha n^2+\beta n+\gamma, (\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}), \lambda(n)=4n^2-2$，设 $\sum\limits_{i=1}^{m}\left\{\left\{\left[\lambda\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)x_i+x_i^2+1\right]\left[\lambda\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)x_i+x_i^2+1\right]-1\right\}\cdot\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{m}x_j\right\}$ 的最大值为 $T$．证明：$\exists\alpha,\beta,\gamma$，使得对于任意 $n\in\mathbb{N}$，均有 $\dfrac{|f(n)-g(n)|}{a+b+c}<T$．

友情提示：本题要用到第二天的某个结论．

## 四、第四天（高扬供题）

4.（50 分）

设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$，其零点分别为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$．其中，$a_0<a_1<a_2<\cdots<a_n$．设 $S_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k$．求证：$\sum\limits_{i=1}^{n-1}(a_i-a_0)\cdot S_{i+2}=0$.

## 五、第五天（窦世杰供题）

5.（50 分）

给定 $r+1$ 位 $p$ 进数 $n=(\overline{n_r\cdots n_\alpha\underbrace{00\cdots0}_{\alpha\ zeros}})_p$ 和正整数 $k, n\geqslant k, V_p(n)=\alpha, V_p(k)=\beta, \alpha\geqslant\beta$.

若

$$v_p\left(\binom{n}{k}\right)=r-\beta$$

则称 $\binom{n}{k}$ 为 p 幂最大组合数. 试求 p 幂最大组合数 $\binom{n}{k}$ 的个数.

注：设 $p$ 为一个质数，$n$ 为一个正整数，$V_p(n)$ 表示 $n$ 中所含有的 $p$ 的最大幂次，即：

$$V_p(n)=\max\{k\in\mathbb{N}\mid p^k\mid n\}$$

换句话说，$V_p(n)$ 是使得 $p^k$ 整除 $n$ 的最大整数 $k$.

## 六、第六天（方逸宸供题）

6.（50 分）

对于一个长度为 $n$，元素互不相同的序列 $\{a_i\}$．称一种交换操作为：将数列中的 $a_i$ 与 $a_j$ 交换 $(i<j)$．易知下标不同的交换操作有 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 种．现在请你构造这 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 种交换操作的顺序，使得按照该顺序对序列进行交换，交换完成后的序列与原序列相同．对于任意正整数 $n$，构造方案或说明无解．