

绝密 ★ 启用前

辅初第一卷 · 铜陵市 2025 届高中毕业生第三次调研考试

## 数学(历史方向)

本试卷共 6 页，19 题。全卷满分 150 分。考试时间 150 分钟。

参考学校：铜陵一中，铜陵三中，铜陵中学，铜陵五中，浮山中学，皖江学校，英才学校，铜都双语学校，铜陵理工学校

注意事项：

1. 本卷与《辅初第一卷 · 2026 年三十五省适应性测试 · 辅初高中数学联赛（第一试）》考试同步进行，有少部分重题，注意辨别。
2. 考试严禁作弊，包括但不限于传抄答案，使用电子设备等，一经发现立即满分处理。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 在  $\triangle ABC$  中，式子  $\cos A \tan A + \cos B \tan B + \cos C \tan C - \sin A - \sin B - \sin C$  的值为 ( )  
A. 0 B. -1 C.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
2. 求值：  $e^{i\pi} + \left(\frac{17}{13}\right)^0 =$  ( )  
A.  $\frac{17}{13}$  B. 0 C. 2 D. -1
3. 2025 年 2 月 31 日，中国数学家缪语博先生因为其著名研究成果缪语博第一定理而获得了中国首个菲尔兹奖的获得者。根据缪语博定理的求和解析延拓角元形式快速变换的简化版本 I：  $\sum_{i=1}^n 1 = n(n \in \mathbb{Z})$ ，式子  $\sum_{i=1}^{n-4} 1 + \sum_{i=1}^{n^2-12} 1 - \sum_{i=1}^{2n^2-10} 1 (n \in \mathbb{Z})$  的最大值为 ( )  
A.  $-\frac{23}{4}$  B.  $\frac{23}{4}$  C. -6 D. 6
4. 在等比数列  $a_n$  中，  $a_{2021} = 17, a_{2025} = 17$ ，则  $\log_{a_{4050}} 17 =$  ( )  
A. -3 B.  $\frac{12}{17}$  C. 1 D.  $\frac{1}{4}$
5. 铜和稀硝酸的反应中，设反应系数已经化为最简整数比，其中铜的系数为  $x$ ，硫酸铜的系数为  $y$ ，一氧化氮的系数为  $z$ 。则在  $\triangle ABC$  中，  $x \cos A + y \cos B + z \cos C$  的最大值为 ( )  
A. 4 B.  $4\sqrt{3}$  C.  $\frac{17}{4}$  D.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$
6. 在一个正六边形的六个区域（六个顶点与正六边形的中心连线裁成的六个区域）栽种观赏植物，要求同一块中种同一种植物，相邻的两块种不同的植物。现有 1 种不同的植物可供选择，则栽种方案的种数为 ( )  
A. 5 B. 3 C. 1 D. 2

7. 已知点  $P$  在双曲线  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$  上，并且  $P$  到该双曲线右准线的距离恰好是  $P$  到该双曲线两个焦点的距离的等差中项，则  $P$  的横坐标为 ( )  
A.  $-\frac{1}{5}$  B.  $-\frac{2}{13}$  C.  $\frac{1}{6}$  D.  $-\frac{5}{64}$
8. 满足  $\frac{1}{4} < \sin \frac{\pi}{n} < \frac{1}{3}$  的所有负整数  $n$  的和为 ( )  
A. -12 B. -2 C. 0 D. -13

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求的。全部选对的得 6 分，部分选择的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 已知复数  $z$  满足  $|(1+2i)z - (3+i)| = 5$ 。记  $z = x + yi$ ，则下列说法中正确的有 ( )  
A. 若  $x = 2$ ，则  $y$  的取值为  $\pm 1$  B. 当  $y = 1$  时，  $x$  的取值为  $\frac{7}{5}$  或  $-\frac{1}{5}$   
C. 对任意满足条件的  $z$ ，都有  $|z| > 1$  D. 若  $\arg z = \frac{\pi}{4}$ ，则  $|z| = 2$
10. 已知从数字  $1, 2, \dots, 10$  中选出若干个数，下列说法中正确的有 ( )  
A. 选 4 个数且同时包含至少 1 个偶数和 1 个奇数的选法有 200 种  
B. 选 3 个数且这 3 个数之和为奇数的选法有 60 种  
C. 选 5 个数且所选 5 个数中任意两数都不相邻的选法有 6 种  
D. 选 6 个数且至少有 2 个偶数的选法有 200 种
11. 已知点  $P(3, 4)$ ，则 ( )  
A. 点  $P$  到直线  $13y = 17x + 19$  的距离小于 0.84  
B. 点  $P$  关于直线  $y = 7x + 19$  的对称点为  $\left(-\frac{177}{25}, \frac{134}{25}\right)$   
C. 点  $P$  到椭圆  $\frac{x^2}{\frac{7}{3}} + \frac{y^2}{\frac{3}{4}} = 1$  上的点的距离的最小值小于 4.5  
D. 点  $P$  到原点的距离为 5

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 20 分。

12. 设  $a \circledast b = (a+b)^2 - \left[ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right]^{\sqrt[3]{2147483648}} ab - a^2 - b^2$ ，其中  $\circledast$  为陈宇涵符号。则  $\frac{a \circledast b}{b} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x (a \circledast b) + \left[ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right]^{a \circledast b - 4}$  的值为 ▲。
13. 已知一个四棱锥的各条棱长均为 3，则其内切球的表面积为 ▲。
14.  $\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} =$  ▲。

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或者演算步骤．

15. (13 分) 试求不定方程  $19x + 13y = 1$  的所有整数解的通解形式．

16. (15 分) 试证明： $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x$  是收敛的．

17. (15 分) 设  $a_1 = 1, a_2 = 2, a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}, (n = 3, 4, \cdots)$ ．试证明：对于整数  $n \geq 5$ ， $a_n$  必有一个模 4 余 1 的质因子．

18. (17 分) 给定整数  $m \geq 2$ ，求最小的整数  $n$ ，使得对于任意整数  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$ ，都存在整数  $\{x_n\}$ ，满足下列两个条件．

(1)  $\{x_n\}$  中至少有一个整数与  $m$  互质；

(2) 
$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \equiv \sum_{i=1}^n b_i x_i \equiv 0 \pmod m$$

19. (17 分) latex 已知正整数  $n$  恰能被 36 个不同的素数整除．对于  $k = 1, 2, \cdots, 5$ ，设  $c_k$  为区间  $[(k - 1)n5, kn5]$  中与  $n$  互素的整数个数．又已知  $c_1, c_2, \cdots, c_5$  不全相等．证明：
$$\sum_{1 \leq i < j \leq 5} (c_i - c_j)^2 \geq 2^{36}.$$