Vize NOTLARI (önemli detaylar)

$\cos x = \frac{1}{2}\left[e^{jx} + e^{-jx}\right]$ → çift.

$\sin x = \frac{1}{2j}\left[e^{jx} - e^{-jx}\right]$ → Tek

$e^{jx} = \cos x + j\sin x$, $e^{-jx} = \cos x - j\sin x$

$x_e(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) + x(-t)\right]$

$x_o(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) - x(-t)\right]$

konvolüsyon: $y(t) = x(t) * h(t)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot h(n-k)$$

Sonlu Toplam

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} \alpha^k = \frac{\alpha^{N_1} - \alpha^{N_2+1}}{1-\alpha}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n - 1$$

Sonsuz Toplam

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}, \quad |\alpha| < 1$$

$\delta(t) = [u(t)]'$

Fourier Serisi: → ayrıkta 0'dan N-1'e.

$$x(t) \longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

Bir periyot kadar.

∇ periyot için frekansı en küçük olana bak.

$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)n + \frac{1}{2}\cos\frac{3\pi}{4}n + \frac{1}{6}\cos\pi n$

$$N = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$$

Önemli Detaylar - final -

Fourier Transform

Sürekli.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t}\, dt.$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{j\omega t}\, d\omega$$

Ayrık.

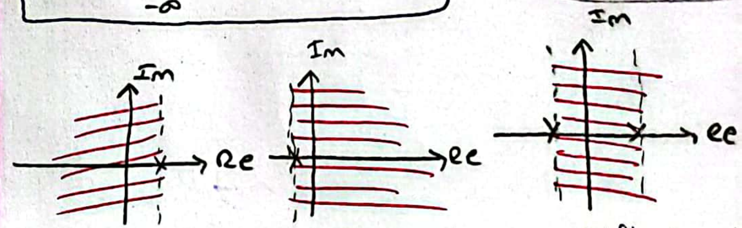
$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot e^{-j\Omega n}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) \cdot e^{j\Omega n}\, d\Omega$$

LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-st}\, dt$$

$s = \sigma + j\omega$ → normalde $\sigma = 0$ alıyoduk. σ'nın 0 olmadığı durumlar Laplace.



Sol taraflı | Sağ taraflı | Çift taraflı

∇ Bir sistemin nedensel olması sağ dü-
lemli ve rasyonel olması ile belirlenebilir
(LAPLACE için.)

$$\frac{\cdots}{(s+a)^n} = \frac{k_1}{s+a} + \frac{k_2}{(s+a)^2} + \cdots \frac{k_n}{(s+a)^n} = X(s)$$

$$k_i = \frac{1}{(n-i)!}\left(\frac{d}{ds}\right)^{n-i}\left[(s+a)^n X(s)\right]\Bigg|_{s=-a}$$

Çift taraflı Laplace için:

$y'(t) = sY(s)$

Tek taraflı Laplace için:

$y'(t) = sY(s) - y(0)$

$y''(t) = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$

$y'''(t) = s^3Y(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0)$

$\frac{d}{dt}u(t) = \delta(t)$ ∇

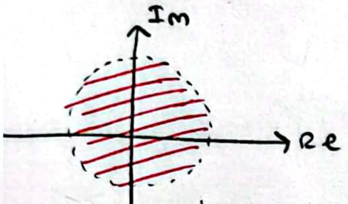
→ Laplace'da kararlı olması için sanal ekseni (Im) içermesi gerekir.

z dönüşümü

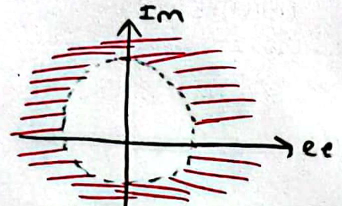
$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \cdot z^{-n} \qquad (z = e^{\sigma} \cdot e^{j\Omega}) \quad (z = e^{s})$$

z dönüşümünde bir sistemin nedensel olması için sağ taraflı yani çemberin dışında olması lazım.
Ve payın derecesi paydanın derecesinden büyük olmamalı.

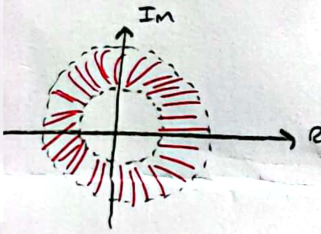
H, ROC'un birim çemberi içermesi durumunda BIBO kararlı.



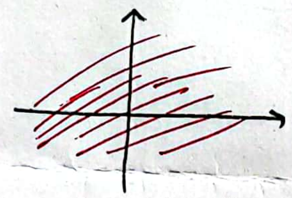
Sol taraflı



Sağ taraflı



İki taraflı



Sınırlı süreli

Tek taraflı z dönüşümünde:

$y(n-1) = z^{-1} \cdot y(z) + y(-1)$

$y(n-2) = z^{-2} \cdot y(z) + z^{-1} y(-1) + y(-2)$

$y(n-3) = z^{-3} \cdot y(z) + z^{-2} \cdot y(-1) + z^{-1} \cdot y(-2) + y(-3)$

Çift taraflıda

$y(n-1) = z^{-1} y(z)$

$y(n-2) = z^{-2} \cdot y(z)$

Zamanda türev $\longrightarrow$ Laplace : $sX(s)$

$-t\,x(t) \longrightarrow \frac{d}{ds} X(s)$

z'de türev

$n \cdot x(n) \longrightarrow -z \frac{d}{dz} X(z)$

$x(n) - x(n-1) \longrightarrow (1 - z^{-1}) X(z)$

$x(-n) \longrightarrow X\left(\frac{1}{z}\right)$

Zamanda türev $\rightarrow$ fourierde : jw ile çarp

Zamanda : $t \cdot x(t) \rightarrow$ fourierde : $j \cdot \frac{d}{dw} X(w)$

$x(t-t_0) \longrightarrow e^{-jwt_0} \cdot X(w)$

$e^{-jw_0 t} x(t) \longrightarrow X(w - w_0)$

Bazı önemli Dönüşüm Çiftleri

* $\delta(t) = \delta(n) \longrightarrow 1$ (fourier, z, laplace)

Fourier (sürekli)	Fourier (ayrık)
* $u(t) \rightarrow \pi \cdot \delta(w) + \frac{1}{jw}$	* $u(n) \rightarrow \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega} - 1}$
* $1 \rightarrow 2\pi \delta(w)$	* $1 \rightarrow 2\pi\, \delta(\Omega)$
* $e^{-at} u(t) \rightarrow \frac{1}{a + jw}$	* $a^n u(n) \longrightarrow \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega} - a}$
* $\mathrm{rec}\left(\frac{t}{T}\right) \rightarrow \lvert T \rvert \mathrm{sinc}\left(\frac{Tw}{2}\right)$	* $\frac{B}{\pi} \mathrm{sinc}(Bn) \longrightarrow \mathrm{rect}\left(\frac{\Omega}{2B}\right)$
* $\mathrm{sinc}\left(a\frac{t}{2}\right) \rightarrow \frac{1}{\lvert a \rvert} 2\pi \mathrm{rect}\left(\frac{w}{a}\right)$	

Laplace	z
* $u(t) \rightarrow \frac{1}{s}$	* $u(n) \rightarrow \frac{z}{z-1}$
* $e^{-at} \rightarrow \frac{1}{s+a}$	* $n \cdot u(n) \rightarrow \frac{z}{(z-1)^2} = -z \cdot [U(z)]'$
* $t^n \cdot u(t) \rightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$	* $a^n u(n) \longrightarrow \frac{z}{z-a}$
* $\cos(w_0 t) u(t) \rightarrow \frac{s}{s^2 + w_0^2}$	
* $\sin(w_0 t) u(t) \rightarrow \frac{w_0}{w_0^2 + s^2}$	

$X(t)$	$X(w)$	$X(s)$
$\delta(t)$	1	1
$u(t)$	$\pi\delta(w)+\frac{1}{jw}$	$\frac{1}{s}$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a+jw}$	$\frac{1}{s+a}$
$rect\left(\frac{t}{T}\right)$	$\lvert T\rvert sinc\left(\frac{Tw}{2}\right)$	
$sinc\left(a\frac{t}{2}\right)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}2\pi rect\left(\frac{w}{a}\right)$	
$x(t-t_0)$	$e^{-jwt_0}\cdot X(w)$	$e^{-st_0}X(s)$
$e^{jw_0t}x(t)$, $e^{s_0t}\cdot x(t)$	$X(w-w_0)$	$X(s-s_0)$
$x(a.t)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{w}{a}\right)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{s}{a}\right)$
$\frac{d}{dt}x(t)$	$jw\,X(w)$	$s.X(s)$
$t.x(t)$	$j.\frac{d}{dw}X(w)$	$-\frac{d}{ds}X(s)$

$X(n)$	$X(\Omega)$	$X(z)$
$\delta(n)$	1	1
$u(n)$	$\frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-1}$	$\frac{z}{z-1}$
$a^n u(n)$	$\frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-a}$	$\frac{z}{z-a}$
$n.a^n u(n)$	$\frac{a.e^{j\Omega}}{(e^{j\Omega}-a)^2}$	$\frac{a.z}{(z-a)^2}$
$x(n-n_0)$	$e^{-j\Omega n_0}X(\Omega)$	$z^{-n_0}X(z)$
$e^{j\Omega_0 n}.x(n)$	$X(\Omega-\Omega_0)$	
$x(-n)$		$X\left(\frac{1}{z}\right)$
$n.x(n)$	$j.\frac{d}{d\Omega}X(\Omega)$	$-z\frac{d}{dz}X(z)$
$x(n)-x(n-1)$	$(1-e^{-j\Omega})X(\Omega)$	$(1-z^{-1})X(z)$

formüller ve önemli ...

$\sin(\omega t+\theta)$

$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$

Sinyallerde nedensellik
$\forall t<0$ için $x(t)=0$ ise

$\cos x = \frac{1}{2}\left[e^{jx}+e^{-jx}\right]$

$\sin x = \frac{1}{2j}\left[e^{jx}-e^{-jx}\right]$

sin : tek
cos : çift

$\cos(-\theta) = \cos\theta$
$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

euler

$e^{jx} = \cos x + j\sin x$

$e^{-jx} = \cos x - j\sin x$

Çift sinyal $\Rightarrow x(t) = x(-t)$

Tek sinyal $\Rightarrow x(t) = -x(-t)$

$x_e(t) = \frac{1}{2}\left[x(t)+x(-t)\right]$

$x_o(t) = \frac{1}{2}\left[x(t)-x(-t)\right]$

KONVOLÜSYON : $y(t) = x(t) * h(t)$

$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot h(t-\tau)\,d\tau$

$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\cdot h(n-k)$

$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0$

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$

$x * \delta(t) = x$

$x * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$

$x(t)\,\delta(t-t_0) = x(t_0)\,\delta(t-t_0)$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = f(a)$

$h(n) * h_1(n) = \delta(n)$
ters

$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$

$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt < \infty$ ise enerji ...

$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2\,dt < \infty$ ise güç.

sürekli

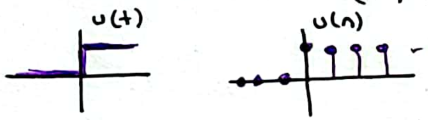
Belletli Sistem $\Rightarrow$ Çıkış geçmişe bağlı ise

Nedensel $\Rightarrow$ Girişin o anki değeri çıkışa eşit veya küçükse

Kararlı sistem $\Rightarrow$ Belirli bir aralıktaysa kararlı. Sonsuza gidiyorsa kararsız. (sınırlı girdi-sınırlı çıktı)

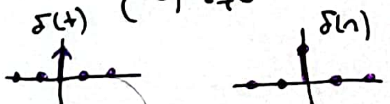
Birim Basamak fonk. $u(t)$ → 0'dan büyük yerlerde=1. 0'dan küçükse 0.

$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}, \quad u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n<0 \end{cases}$



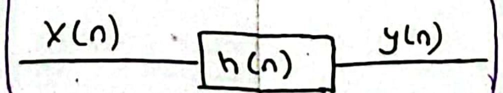
Birim Dürtü fonk $\delta(t)$ $\Rightarrow$ $t=0$ anında 1. diğer durumlarda 0.

$\delta(t) = \begin{cases} 1, & t=0 \\ 0, & t\neq 0 \end{cases}, \quad \delta(n) = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n\neq 0 \end{cases}$



$x(t) = u(t-a) - (t-b)$

$= \begin{cases} 1, & a \leq t < b \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$



$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n)$

$P = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1}\sum_{n=-M}^{M} x^2(n)$

Sonlu toplam

$\sum_{k=N_1}^{N_2} \alpha^k = \frac{\alpha^{N_1} - \alpha^{N_2+1}}{1-\alpha}$

Sonsuz Toplam

$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}, \quad |\alpha| < 1$

Birim dürtü tepkisi:
Girişi x, çıkışı y ve birim dürtü tepkisi h olan LTI sistem için : $y = x * h$

Birim basamak tepkisi:
$\mathcal{H}$ sisteminin u girişine verdiği tepki S olan. ($S = \mathcal{H}(u)$)

• Dürtü yanıtı h ve basamak tepkisi S olan LTI sistem

$h(t) = \frac{dS(t)}{dt}$ } sürekli

$h(n) = S(n) - S(n-1)$ } ayrık

LTI sistemler için birim basamak tepkisi ile dürtü tepkisi arasında:

$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)$ → dürtü
↓
basamak

$\delta(t) = \left[u(t)\right]'$

fourier

$x(t) \longleftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\cdot e^{jk\omega_0 t}$

$c_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\cdot e^{-jk\omega_0 t}\,dt$

→ Bir periyot boyunca

c_0 → ortalama değer.

$x(n) \longleftrightarrow \sum_{k=\langle N\rangle} c_k\cdot e^{jk\frac{2\pi}{N}\cdot n}$

$= \sum_{k=0}^{N-1} c_k\cdot e^{jk\frac{2\pi}{N}\cdot n}$

$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x(n)\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$

$x(n) \longleftrightarrow a_k \qquad y(n) \longleftrightarrow b_k$

$x(n)\,y(n) \longleftrightarrow a \circledast b(k)$
dairesel konv.

Karmaşık üsteller LTI sistemin öz fonksiyonu.

$\underbrace{\mathcal{H}\{e^{j\omega t}\}(t)}_{\text{öz fonk}} = \underbrace{H(\omega)}_{\text{öz değer}} e^{j\omega t}$

$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\cdot e^{-j\omega t}\,dt$
↓
frekans tepkisi

$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{c_k\cdot H(k\omega)}_{b_k} e^{jk\omega t}$

$x(t) \longleftrightarrow c_k$ ise

$y(t) \longleftrightarrow H(k\omega)\,c_k$

fourier zamanda kaydırma

zaman	fourier
$x(n-n_0)$ $\longrightarrow$	$a_k \cdot e^{-jk\omega_0 n_0}$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} \, dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} \, d\omega$$

CTFT

fark denklemi) Bir dizinin değerinin önceki değere bağlı olduğu.

↳ NEDENSEL.

$$\arg c_k = \tan^{-1} \frac{\text{sanal kısım}}{\text{reel kısım}} \longrightarrow \text{faz spek}$$

ck

$$|c_k| = \sqrt{(\text{sanal})^2 + (\text{reel})^2} \longrightarrow \text{genlik spek}$$

frekans spektrumu

⇒ karmaşık üsteller LTI sistemlerin özfonksiyonu

$$\underbrace{\mathcal{H} e^{st}}_{\text{öz fonk}} = \underbrace{H(s)}_{\text{öz değer}} \cdot e^{st}$$

$$\underbrace{H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-st} \, dt}_{\text{sürekli}}$$

$$\mathcal{H} z^n = H(z) \cdot z^n$$

$$\underbrace{H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) = z^{-n}}_{\text{ayrık}}$$

$$a_1 e^{s_1 t} \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow a_1 \cdot H(s_1) e^{s_1 t}$$

$$x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t} \longrightarrow y(t) = \sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t}$$

→ eğer giriş karmaşık üstel ise çıkış bu formülle bulunur.