Z Transform

Z dönüşümü ayrık zamanlı sistemlerin analizi için kullanılır

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n} \qquad x[n] \xleftrightarrow{z} X(z)$$

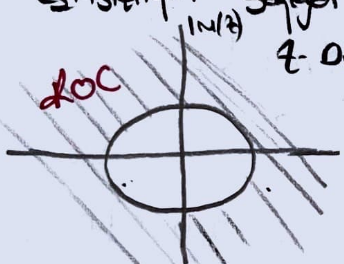
Yakınsaklık Bölgesi : ROC

Verilen herhangi bir dizinin Z-dönüşümünün yakınsak olduğu z-değerlerinin karmaşık düzlemde oluşturduğu küme, o dönüşümün yakınsaklık bölgesi olarak adlandırılır.

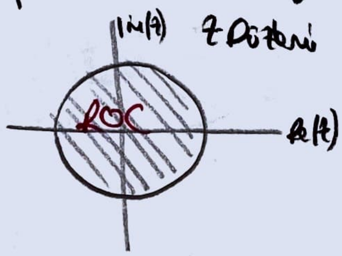
Düzenli yakınsaklık, dizinin mutlak değerlerinin toplamının sonlu olması gerekir

Yani,
$$\sum_{-\infty}^{\infty} \left| x[n] z^{-n} \right| < \infty$$

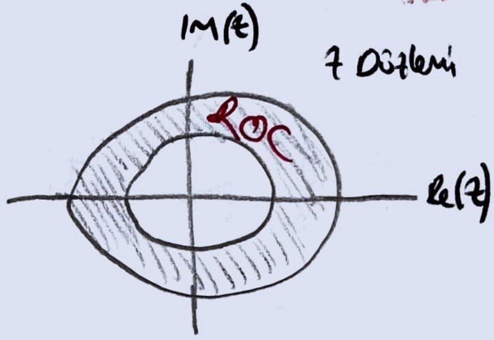
eşitsizliğini sağlayan tüm z değerleri ROC oluşturur.



Sağ Taraflı Dizi
$|z| > a$



Sol taraflı Dizi
$|z| < a$

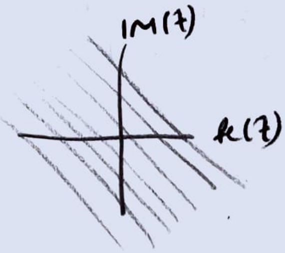


iki taraflı Dizi
$a < |z| < b$

ÖRN: $x[n] = \delta[n]$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] \cdot z^{-n} = 1$$

$$ROC: \quad 0 < |z| < \infty$$



X(z)'nin iki polinomun oranı biçiminde z'nin rasyonel fonksiyon olması durumları

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

$P(z) \longrightarrow$ Sıfırları

$Q(z) \longrightarrow$ kutupları

$P(z) = 0$ pay polinomunun kökleri $\Longrightarrow$ $X(z)$'nin sıfırları

$Q(z) = 0$ payda polinomunun kökleri $\Longrightarrow$ $X(z)$'nin kutupları

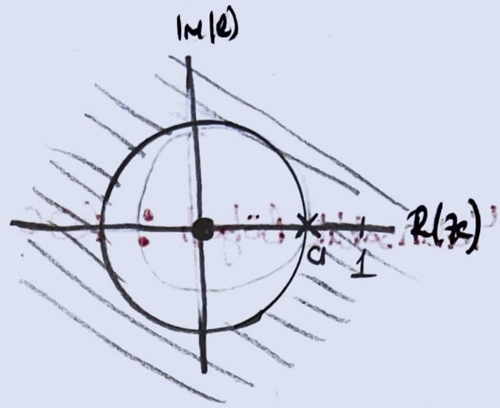
Z2

ÖRN: Sağ taraflı üstel $x[n]=a^n u[n]$ dizisi için z-dönüşümü $|a|<1$

$$X(z)=\sum_{0}^{\infty}(a.z^{-1})^n=$$

ROC: $|az^{-1}|<1 \Rightarrow |a|<|z|$

$$X(z)=\frac{1}{1-a.z^{-1}}=\frac{z}{z-a}$$ $z=0$, 1 sıfır; $z=a$, 1 kutup



$z>a$ olduğunda yakınsama bölgesi çemberin dışı oluyor.

ÖRN: $x[n]=-\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$

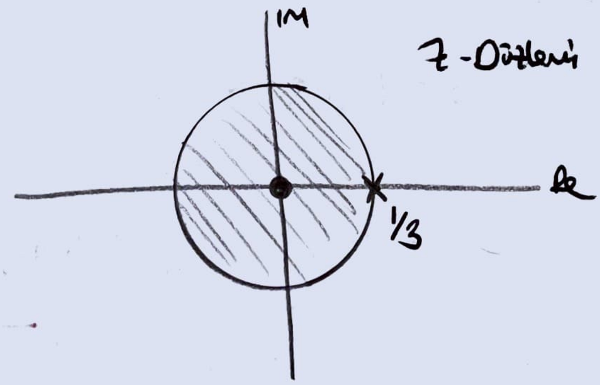
$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}-\left(\frac{1}{3}\right)^n z^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}-\left(\frac{1}{3}\right)^{-n}z^n$$ $n-1=k$

$$X(z)=-\sum_{k=0}^{\infty}(3z)^{k+1}=-3z.\frac{1}{1-3z}=\frac{-3z}{1-3z}=\frac{z}{z-\frac{1}{3}}$$ $\to z=0$, sıfır; $\to z=\frac{1}{3}$, kutup

Bu eşitlikte $\sum_{0}^{\infty}r^n=\frac{1}{1-r}$ kullanabilmemiz için $|r|<1$ olmalıdır.

$|3z|<1$

$|z|<\frac{1}{3}$



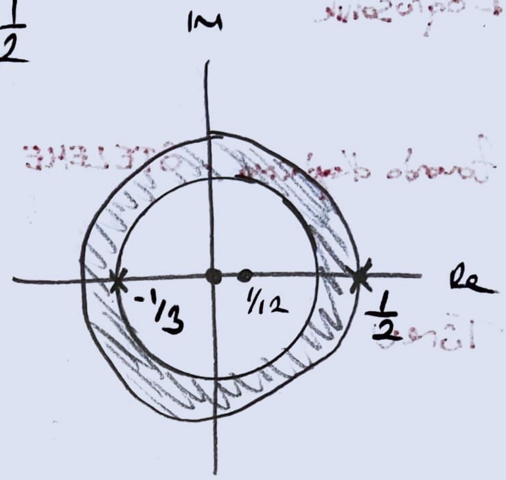
Z3

ÖRN! $x[n] = \underbrace{\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]}_{1} - \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]}_{2}$

① : $X_1(z) = \dfrac{z}{z+\frac{1}{3}}$ ROC$_1$: $\left|-\frac{1}{3}\right| < z$

② : $X_2(z) = \dfrac{z}{z-\frac{1}{2}}$ ROC$_2$: $|z| < \frac{1}{2}$

$\frac{1}{3} < z < \frac{1}{2}$



$X(z) = \dfrac{z}{z+\frac{1}{3}} + \dfrac{z}{z-\frac{1}{2}}$ ROC: ROC$_1$ $\cap$ ROC$_2$

Payda Eşitlenirse $X(z) = \dfrac{z(2z-\frac{1}{6})}{(z+\frac{1}{3})(z-\frac{1}{2})}$ $\longrightarrow z = 0, \frac{1}{12}$ sıfırlar $\longrightarrow z = -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ kutuplar

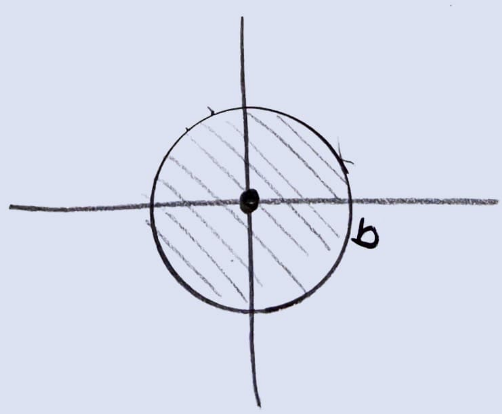
ÖRN! $x[n] = \begin{cases} 0 & n \geq 0 \\ b^n & n \leq -1 \end{cases}$ $X(z) = ?$

$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} (bz^{-1})^n$

$= 0 + \sum_{n=1}^{\infty} (b^{-1}z)^n$

$= 0 + b^{-1}z \sum_{k=0}^{\infty} (b^{-1} \cdot z)^k$

$= + \dfrac{z}{b} \cdot \dfrac{1}{1-\frac{z}{b}}$



$X(z) = \dfrac{z}{b-z}$ $\longrightarrow z = 0$ sıfırlar $\longrightarrow z = z$ kutuplar

ROC: $|b^{-1}z| < 1$

$|z| < |b|$

Z-Dönüşümü Özellikler

$$x_1[n] \longrightarrow X_1(z) \qquad x_2[n] \longrightarrow X_2(z)$$

ROC: R_{x_1} $\quad$ R_{x_2}

Doğrusallık

$$a x_1[n] + b x_2[n] \longrightarrow a X_1(z) + b X_2(z) \qquad R_{x_1} \cap R_{x_2}$$

Zamanda Kaydırma - ÖTELEME

$$x[n-n_0] \longrightarrow z^{-n_0} . X(z) \qquad R_x$$

Türev

$$n . x[n] \longrightarrow -z \frac{dX(z)}{dz} \qquad R_x$$

Zamanda Tersleme

$$x[-n] \longrightarrow X\left(\frac{1}{z}\right) \qquad \frac{1}{R_x}$$

Konvolüsyon

$$x_1[n] * x_2[n] \longrightarrow X_1(z) . X_2(z) \qquad R_{x_1} \cap R_{x_2}$$

ÖRN:

$$x[n] = a^{n-2} u[n] \qquad X(z) = ?$$

$$X(z) = \sum_{0}^{\infty} a^{n-2} . z^{-n} = a^{-2} \sum_{0}^{\infty} (a z^{-1})^n = a^{-2} \frac{1}{1 - a z^{-1}} = a^{-2} . \frac{z}{z-a}$$

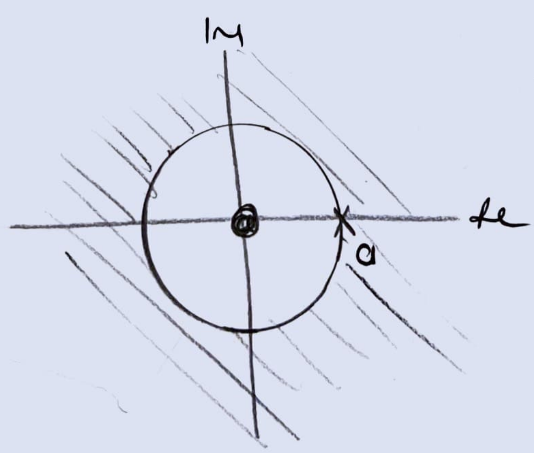
$z \rightarrow z = 0$ sıfırları

$z - a \rightarrow z = a$ kutupları

ROC: $|a z^{-1}| < 1$

$|a| < |z|$

$z > a$ old. dan çemberin dışını çiziyoruz.



Z-5

$$\boxed{a^n . u[n] = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}}$$

ÖRN: $x[n] = a^n u[n-2]$ $X(z) = ?$

$$x[n] = a^{-2} . a^{+2} . a^n u[n-2] = a^2 . a^{[n-2]} . u[n-2]$$

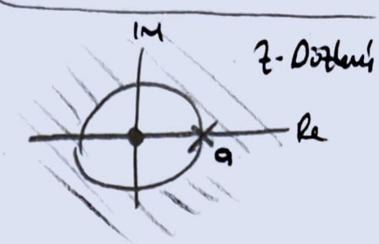
$$X(z) = a^2 . z^{-2} . \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{(az^{-1})^2}{1-az^{-1}}$$

$\longrightarrow z=0$ sıfırları

$\longrightarrow z=a$ kutupları

ROC: $|z| > |a|$

Z-Düzlemi



ÖRN:

$x_1[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$, $x_2[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$, $y[n] = x_1[n] * x_2[n]$?

$$\left.\begin{aligned} X_1(z) &= 1 + 2 . z^{-1} + z^{-2} \\ X_2(z) &= 1 - z^{-1} \end{aligned}\right\} \quad X_1(z) . X_2(z) = (1+2z^{-1}+z^{-2})(1-z^{-1})$$

$$y(z) = 1 - z^{-1} - z^{-2} - z^{-3}$$

$$y[n] = \delta[n] - \delta[n-1] - \delta[n-2] - \delta[n-3]$$

ÖRN: $x[n] = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]} - \underbrace{u[-n-1]}$, $X(z) = ?$

$-n-1 \geq 0$

$-n \geq 1$

$n \leq -1$

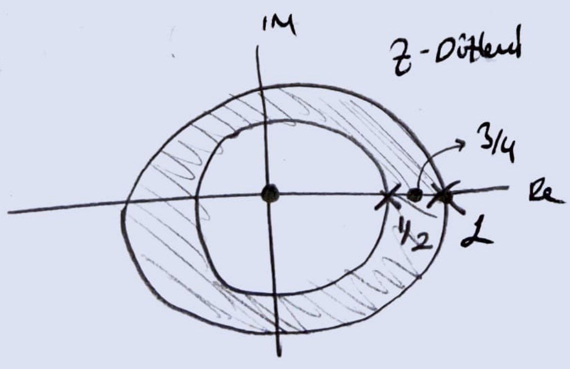
$$\underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}} \qquad = \sum_{n=-\infty}^{-1} z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n = z . \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

$$= z . \frac{1}{1-z} = \frac{z}{1-z}$$

ROC: $|z| > \frac{1}{2}$ $\cap$ $|z| < 1$ $\hookrightarrow$ $\frac{1}{2} < |z| < 1$ //

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{z}{1-z} = \frac{2z}{2z-1} - \frac{z}{1-z} = \frac{2z-2z^2-2z^2+z}{2z-1-2z^2+z} = \frac{z(-4z+3)}{(2z-1)(-z+1)}$$

Z-Düzlemi



$z=0$, $z=\frac{3}{4}$ $\rightarrow$ Sıfırları

$z=\frac{1}{2}$, $z=1$ $\rightarrow$ kutupları

Ters Z Dönüşümü

ÖRN: $X(z) = \dfrac{1}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$ $\quad |z| > \frac{1}{2}$

$= \dfrac{A}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \dfrac{B}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \dfrac{A - \frac{1}{2}Az^{-1} + B - \frac{1}{4}Bz^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$

$(1-\frac{1}{2}z^{-1}) \qquad (1-\frac{1}{4}z^{-1})$

$A + B = 1$ $\quad -\frac{1}{2}A - \frac{1}{4}B = 0$

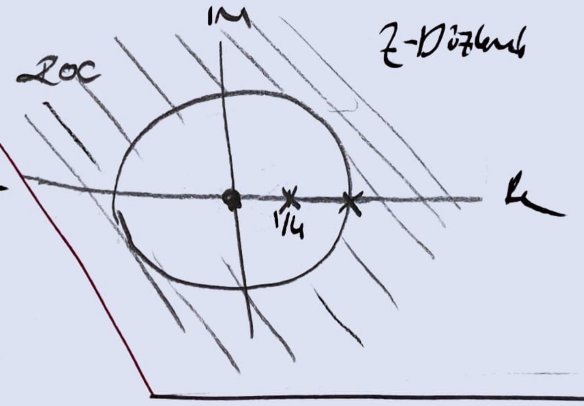
$A = -B$ $\quad \boxed{A = -1}$ $\quad \boxed{B = 2}$

$X(z) = \dfrac{-1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \dfrac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$ $\qquad x[n] = -\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

$= \dfrac{-1 + \frac{1}{2}z^{-1} + 2 - \frac{1}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})} = \dfrac{1}{\left(\frac{z-\frac{1}{4}}{z}\right)\left(\frac{z-\frac{1}{2}}{z}\right)} = \dfrac{z^2}{(z-\frac{1}{4})(z-\frac{1}{2})}$

$z^2 \longrightarrow z = 0$, sıfırlar

$(z-\frac{1}{4})(z-\frac{1}{2}) \longrightarrow z = \frac{1}{4}, \; z = \frac{1}{2}$ kutuplar



ÖRN: $X(z) = \dfrac{1}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$, $\frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{2}$

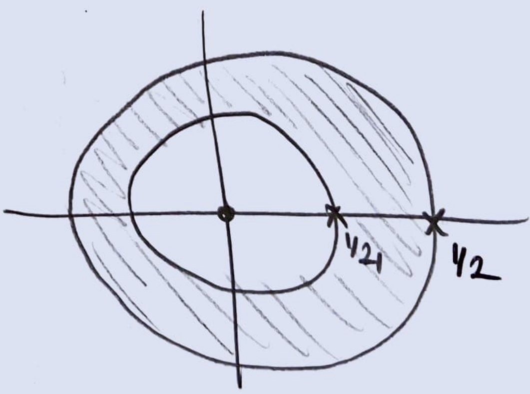
$X(z) = \dfrac{-1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \dfrac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$ $\qquad X(z) = \dfrac{z^2}{(z-\frac{1}{4})(z-\frac{1}{2})}$

sıfırlar $\rightarrow 0 = z$

kutuplar $\rightarrow \frac{1}{4}, \frac{1}{2} = z$

$\underbrace{\frac{1}{2} > |z|}_{\text{ters}} \underbrace{> \frac{1}{4}}_{\text{düz}}$

$x[n] = -\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]\right) - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$



Tip 2

→ Pay Derecesi > Payda derecesi ve kutupların tamamı birinci dereceden
→ önce bölme işlemi sonra kesirlere açılım işlemi gerçekleştirilir.

$P(z) \Rightarrow M$
$Q(z) \Rightarrow N$

$$X(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}=\sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r}+\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1-d_k z^{-1}}$$

ÖRN:
$$X(z)=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}} \qquad |z|>1$$

$$=\frac{(1+z^{-1})^2}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-z^{-1})}$$

Polinom bölmesi $\Big\}$ $X(z)=2+\dfrac{-1+5z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-z^{-1})}=2+\dfrac{A}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})}+\dfrac{B}{(1-z^{-1})}$

$$X(z)=\frac{A(1-z^{-1})+B(1-\frac{1}{2}z^{-1})}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-z^{-1})}$$

$A+B=-1$
$-A-\frac{1}{2}B=5$
$A=-9 \quad B=8$

$$X(z)=2+\frac{-9}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{8}{1-z^{-1}}$$

$$x[n]=2\delta[n]+9\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+8\,u[n]$$

ÖRN: $X(z)=\dfrac{1}{z-\frac{1}{4}} \qquad |z|>\frac{1}{4} \qquad x[n]=?$

$$X(z)=\frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

Polinom bölmesi $\Big\}$

$z^{-1} \;\big|\; -\frac{1}{4}z^{-1}+1$
$-\;\; z^{-1}-4 \;\big|\; -4$
$+4$

$$X(z)=-4+\frac{4}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$x[n]=-4\,\delta[n]+4\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

Yanında birşey kalmadığı için u[n] olarak yazabiliyoruz.

ÖRN: $H(z)=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$ $|z|>\frac{1}{2}$ Sistemin fark denklemi?

$$\boxed{H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}}$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$Y(z)-\frac{1}{2}z^{-1}Y(z)=X(z)$$

$$Y(z)=\frac{1}{2}z^{-1}Y(z)+X(z) \longrightarrow y[n]=\frac{1}{2}y[n-1]+x[n]$$

ÖRN!

$h[n]$'nin Z dönüşümü $H(z)=\dfrac{z^{-1}+z^{-2}}{1+z^{-1}}$, $|z|>1$ Sistemin fark denklemi? Tüm "n"ler için $h[n]$? Sistem kararlı mı?

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z^{-1}-z^{-2}}{1+z^{-1}}$$

$$Y(z)+z^{-1}Y(z)=z^{-1}X(z)-z^{-2}X(z)$$

$$Y(z)=z^{-1}X(z)-z^{-2}X(z)-z^{-1}Y(z) \longrightarrow y[n]=x(n-1)+x[n-2]-y[n-1]$$