

BMÜ-421

BENZETİM VE MODELLEME

DİNAMİK SİSTEMLER

İLHAN AYDIN

Dinamik Sistemler

- Sürekli sistemlerin matematiksel modelleri sıklıkla diferansiyel denklemler ile ifade edilir.
- Diferansiyel denklemler belirli bir duyarlılık ile sürekli dinamik ortamları tanımlayabilir.
- Gerçek hayatta diferansiyel denklemleri kesin bir şekilde çözmek mümkün olmasına rağmen bu nadir bir durumdur.
- Pratikte sayısal fark metotlarını kullanan makul yaklaşımlar etkilidir.
- Dolayısıyla bu derste bilgisayar kullanımı ile tahmin edilebilen modeller üzerinde durulacaktır.

Başlangıç Değer Problemleri

- Modellerin genel bir sınıfı dinamik sistemlerdir.
- Dinamik sistemler kendi sistem durumu ile tanımlanır ve sıklıkla diferansiyel denklemlerin bir kümesi ile tanımlanır.
- Eğer başlangıç koşulları ile birleştirilmiş diferansiyel denklemler sistemi tanımlıyorsa başlangıç koşulları ile tanımlanan değişkenler sistem durum değişkenlerini oluşturur.
- Genelde m diferansiyel denklem için her bir denklem n_i . derece ile temsil edilir.
- $n = \sum_{i=1}^m n_i$, başlangıç koşullarıdır. Eşit bir şekilde n tane birinci dereceden diferansiyel denklem vardır.

<u>Denklem</u>	<u>Sıra</u>
1	n_1
2	n_2
:	:
m	n_m

- Birinci dereceden diferansiyel denklemlerin her birinin çıkış değişkenleri, bir başlangıç durumları ile birlikte sistem durum değişkenlerinin bir kümesini oluşturur.

Başlangıç Değer Problemleri

Birinci dereceden başlangıç değer problemi ile başlayacağız.

$$dx/dt=f(t,x) ,$$

$$x(t_0)=x_0 \quad (2.1)$$

- $X(t)=[x_1(t),x_2(t),\dots,x_n(t)] \rightarrow$ Sistem durum vektörü
- $X(0)=[x_1(0),x_2(0),\dots,x_n(0)] \rightarrow$ İlgili başlangıç durumları

Başlangıç Değer Problemleri

Örnek 2.1: Aşağıdaki denklemler ile gösterilen bir sistem düşünelim.

$$\ddot{\alpha} + 2\beta\dot{\alpha} + \beta^2\alpha = \cos t, \\ \dot{\beta} + \alpha\beta = 4, \quad (2.2)$$

Başlangıç durumlarına bağlı

$$\alpha(0) = 2, \\ \dot{\alpha}(0) = -1, \\ \beta(0) = 1. \quad (2.3)$$

İki dinamik durum değişkenleri ve birinci ve ikinci dereceden diferansiyel denklemler olduğu için üçüncü dereceden bir sistemdir.

Bu yüzden üç tane birinci dereceden bir diferansiyel denklem sistemi olarak tekrar tanımlamak mümkündür:

Başlangıç Değer Problemleri

$x_1=\alpha(t)$, $x_2=\dot{\alpha}(t)$, $x_3=\beta(t)$ denklem(2.2) de yerlerine yazılırsa,

$$\dot{x}_2+2x_2x_3+x_3^2x_1=\cos t,$$

$$\dot{x}_3+x_1x_3=4.$$

Denklemde x_2 , x_1 in türevidir. Denklem(2.2) ve (2.3) deki birinci dereceden diferansiyel denklemler sistemi aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$\dot{x}_1=x_2,$$

$$\dot{x}_2=-2x_2x_3-x_3^2x_1+\cos t,$$

$$\dot{x}_3=-x_1x_3+4;$$

$$x_1(0)=2,$$

$$x_2(0)=-1,$$

$$x_3(0)=1.$$

Başlangıç Değer Problemleri

3 birleşik durum vektörü $x=[x_1, x_2, x_3]$ olarak tanımlanır, bu sistem denklem(2.1)'de yerine yazılırsa,

$$f=[x_2, -2x_2x_3-x_3^2x_1+\cos t, -x_1x_3+4],$$

$$x_0=[2, -1, 1],$$

$$t_0=0.$$

Çok sayıda sistemlere bu tekniği genelleştirmek mümkündür.

Euler Yöntemi

Denklem(2.1) in skaler versiyonunu düşünelim. $dx/dt=f(t,x)$

Türevin tanımını kullanacak olursak,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h)-x(t)}{h} = f(t,x).$$

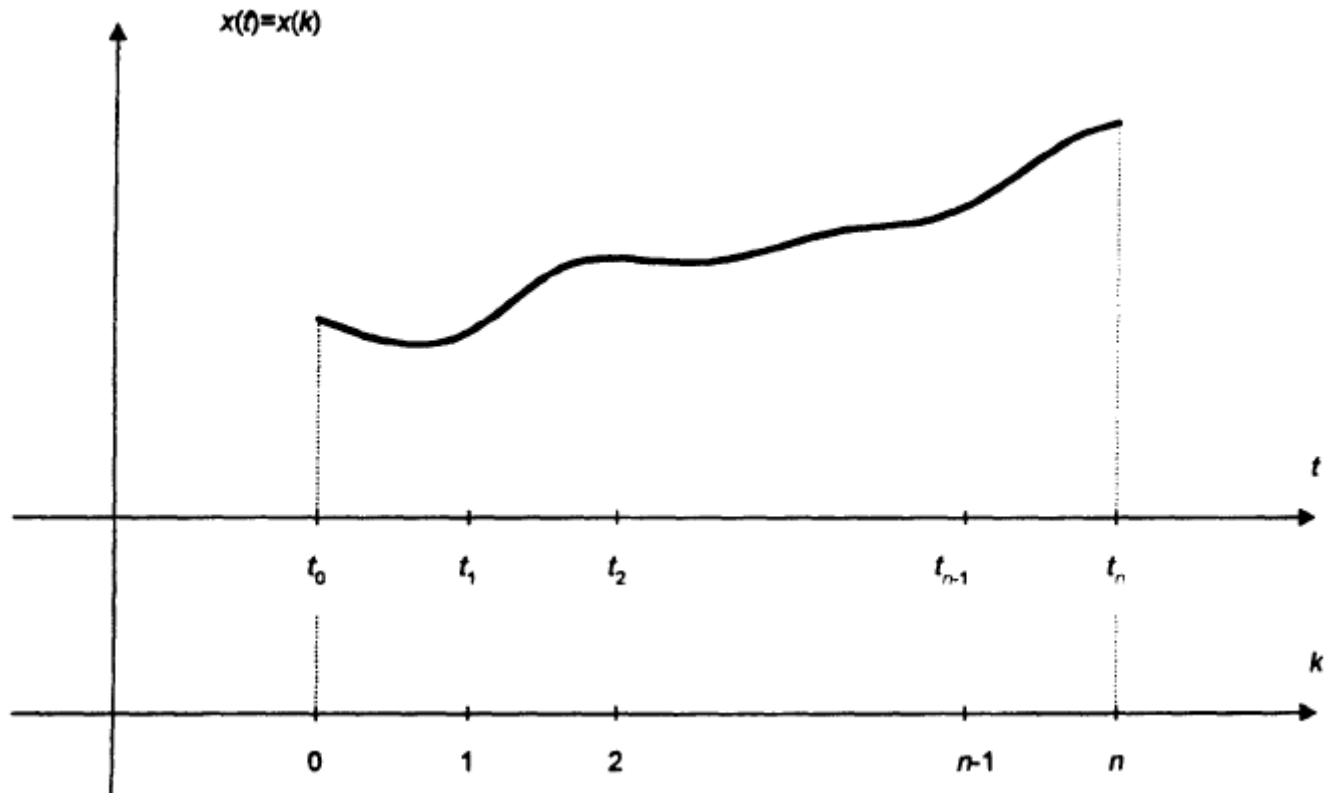
- $x(t+h) \approx x(t) + hf(t,x) \Rightarrow$ Küçük h değerleri için
 $t_0 \leq t \leq t_n$ ve $k=0,1,2,\dots,n$ için $t \equiv t_k = hk + t_0$, gibi sürekli zamanlı t yerine yeni bir ayrık k değişkeni tanımlamak uygundur.
- Bu liner zaman dönüşümü şekil 2.1’de gösterildiği gibi $n+1$ örnekleme noktalarındaki t bağımsız örnekleme zaman değişkeni olarak düşünülebilir.

$$x(h(k+1)+t_0) \approx x(hk+t_0) + hf[hk+t_0, x(hk+t_0)]. \quad (2.5)$$

- Yeni bir ayrık $x(k)$ değişkenini de şu şekilde gösterebiliriz.

$$x(k+1) = x(k) + hf[t(k), x(k)], k=0,1,2,\dots,n \quad (2.6)$$

Euler Yöntemi



Şekil 2.1: Sürekli zaman t ile ayırık k örnekleme zamanı arasındaki ilişki

Euler Yöntemi

- Zaman değişkeni t ise; sinyal, sürekli ya da analog olarak alınmıştır ve durum $x(t)$ 'dir.
- Zaman ayırık(kesikli) ise; durum değişkeni $x(k)$ 'dir. Sürekli zamanın ayırık zamanla yer değiştirdiği bu işleme “*ayrıklaştırma*” adı verilir.
- Buna göre yeterince küçük h adım uzunluğu için , $x(k) \approx x(tk) \equiv x(t)$ 'dir.
- Denklem(2.6)'yı kullanarak Denklem (2.5)'i çözmek Denklem(2.1)'in yaklaşık çözümü olacaktır.
- Dikkat edilirse Denklem(2.6)'nın sağ tarafındaki değişkenler k zamanda olmasına karşın sol tarafındakiler $k+1$ zamandadır.
- Bu yüzden bu durumu x değişkeninin bir güncelleştirilmesi olarak ifade ederiz.
- Örneğin bir bilgisayar programı yazılımında, tipik bir atama ifadesi $x = x + hf(t, x)$ yani x 'in recursive olarak güncellenmesini ifade eder.
- Bir t güncellemesi de $t = t + h$ şeklindedir. Atamaların sağ tarafındaki x ve t değişkenleri “*eski*”, sol tarafındakiler “*yeni*” olarak adlandırılır. Bu teknik **Euler Yöntemidir**.

Euler Yöntemi

Örnek 2.2: $\dot{x}=x^2t$, $x(1)=3$, (2.7)

Şeklinde tanımlanmış bir sistemi düşünelim. Temel teknikleri kullanarak bu sistem gerçek çözümünü göstermek kolaydır;

$$\frac{dx}{dt} = x^2t \text{ ve } x(1) = 3$$

- $\int_3^x \frac{dx}{x^2} = \int_1^t t dt = -\frac{1}{x} \Big|_3^x = \frac{t^2}{2} \Big|_1^t \Rightarrow$
- $\frac{-1}{x} + \frac{1}{3} = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow \text{ise } x(t) = \frac{6}{5-3t^2}$

çözüm olarak bulunur.

Euler Yöntemi

Örnek 2.2: $\dot{x}=x^2t,$
 $x(1)=3,$ (2.7)

Fakat, açık çözümün bilinmediğini farz edersek euler yöntemini çıkarabiliriz. Keyfi verilmiş $h=0.05$ adım uzunluğu ile eşit ayırık sistem başlangıç koşulları ile karakterize edilmiştir.

$$t(0)=1,$$

$$x(0)=3$$

ve fark denklemleri

$$t_{k+1}=t_k+1/20,$$

$$x(k+1)=x(k)+1/20x^2(k)t_k, \quad k=1,2,\dots,n$$

Euler Yöntemi

Dikkat edilirse t 'nin eski değeri x güncelleşmesine ihtiyaç duyar fakat x , t 'nin güncellemesine ihtiyaç duymaz.

Bu örnek algoritmik olarak şu şekilde çözülür,

```
t=1
x=3
print t,x
for k=1 to n
    x=x+hx2t
    t=t+h
    print t,x
next k
```

MATLAB PROGRAMI

```
t0=1; %başlangıç zamanı
x0=3; %başlangıç koşulu
x=[x0];
t=[t0];
xg=[6/(5-3*t0^2)]; % Mutlak çözüm
h=0.05;
for i=1:5
    xyeni=x0+h*x0^2*t0;
    t0=t0+h;
    xg=[xg 6/(5-3*t0^2)];
    x=[x xyeni];
    t=[t t0];
    x0=xyeni;
end
plot(t,x,'r-d')
hold on
plot(t,xg,'k-s')
```

Euler Yöntemi

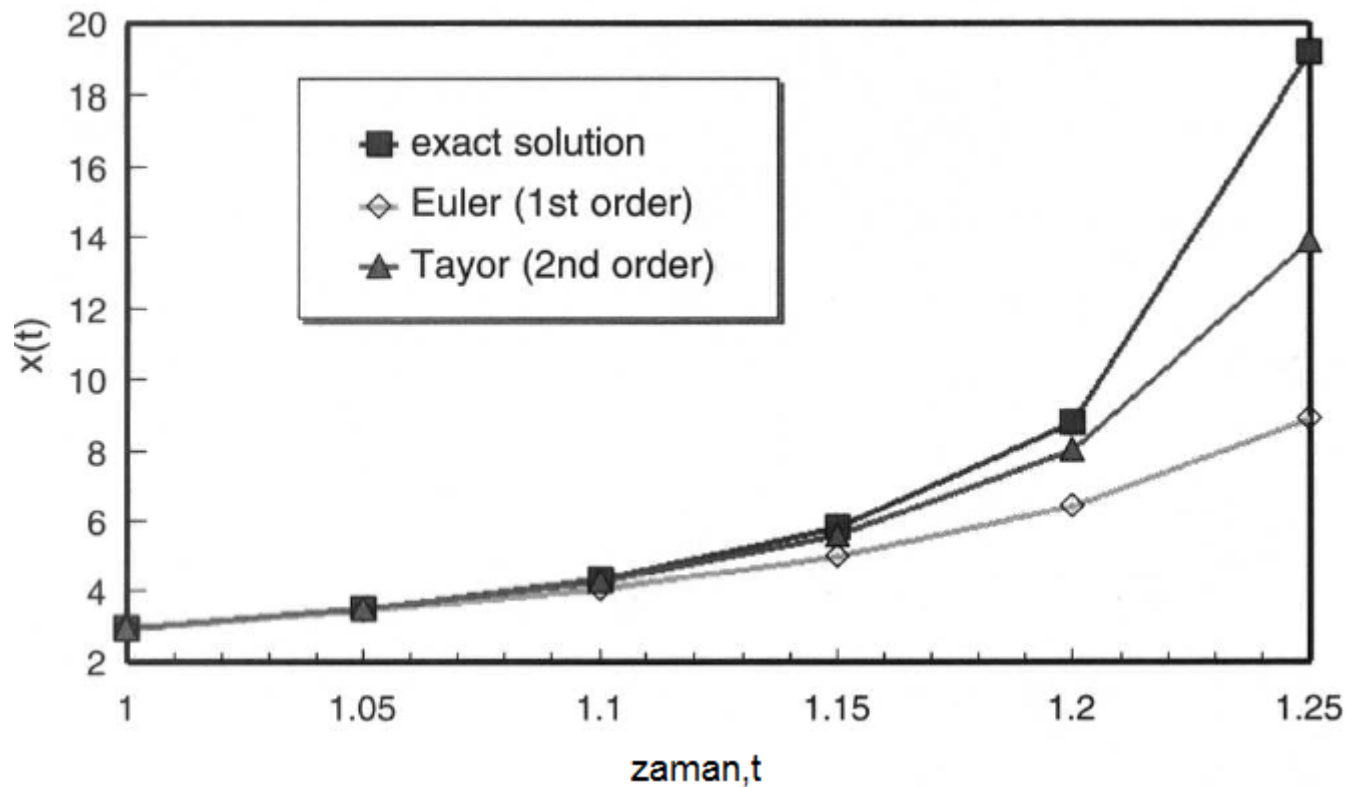
Denklem (2.8) tarafından verilen tam çözüm ve $n=6$ için verilen algoritmanın yaklaşık çözümü Tabloda gösterilmiştir.

Tablo: Euler Yöntemi kullanarak sistem (2.7)'nin çözümü

k	0	1	2	3	4	5	6
t_k	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30
$x(t)$	3.00	3.55	4.38	5.81	8.82	19.20	-85.71
$x(k)$	3.00	3.45	4.07	4.99	6.42	8.89	13.83

- Bu veriler grafik olarak Şekil 2.2 de gösterilmiştir. Yaklaşık çözüm tam olarak $t_0=1$ de başlamasına rağmen sıralı adım gerçek çözümden daha fazla uzaklaşır.
- Bu yüzden, euler yönteminin uygulanması başlangıç noktasından daha çok sapmaması için önemlidir, aynı zamanda h adım uzunluğunun hassas seçilmesi gereklidir.

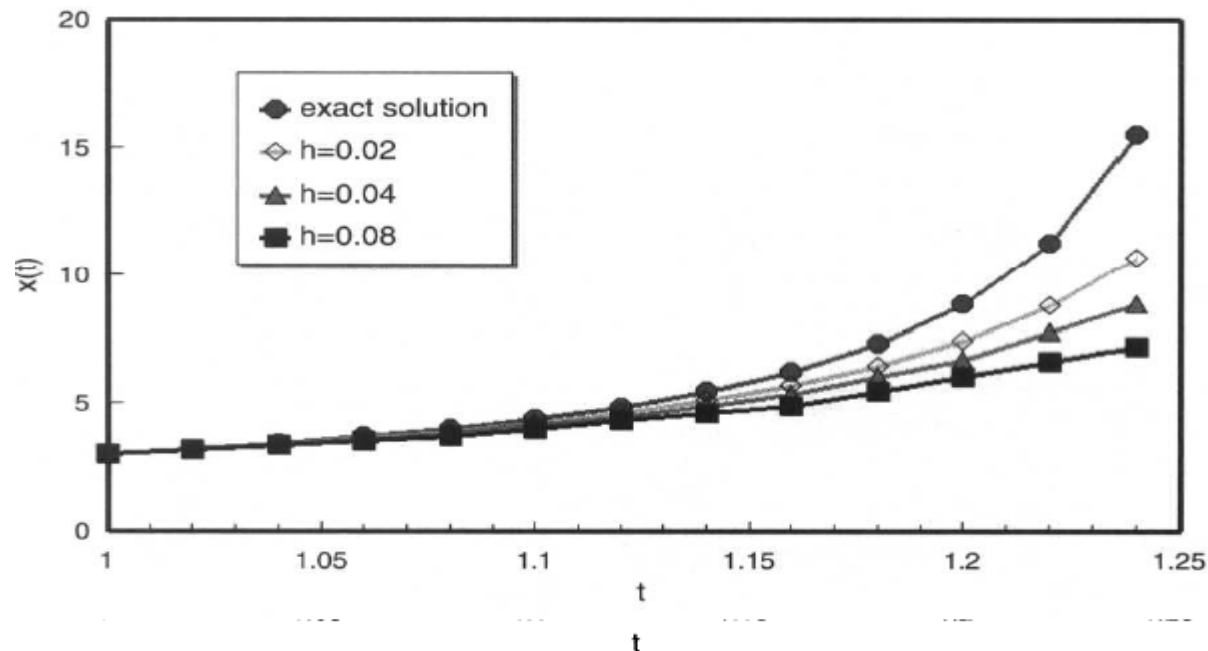
Euler Yöntemi



Şekil 2.2: Farklı tekniklerin doğruluk bağlantısı

Euler Yöntemi

- Doğru çözüm elde etmenin bir yolu h adım uzunluğunun azaltılmasıdır.
- Bunun çözüme etkisi şekil 2.3'de gösterilmiştir. h değerinin azaltılması iki büyük engele sahiptir.
- İlki, verilen bir noktadaki çözümü tahmin etmek için daha fazla hesaplama gerekecektir.
- İkincisi, veri gösteriminde bir sonraki makine sınırlamalarından dolayı, h çok fazla küçük olabilir.



Euler Yöntemi

Örnek 2.3: Her hesaplamanın sonucunda bir prosedürün sonuçlarının çıktısını almaktan ziyade, hesapların periyodik sonuç çıktıklarının alınması daha yararlıdır.

Bu, "*kontrol break*" adı verilen bir işlem uygulanarak gerçekleştirilir. Bir *kontrol break* iç içe döngüler yoluyla çalışır.

t=1	Dış döngü i(i=1,2,...,n) indeksi
x=3	kullanarak kontrol eder, iç döngü
print t,x	j(j=1,2,...,m) indeksi kullanır.
for i=1 to n	
for j=1 to m	
$x=x+hx^2t$	
t=t+h	
next j	
print t,x	
next i	

Taylor Yöntemi

Euler yöntemi, Taylor teoreminin özel bir durumu olarak düşünülebilir.

$$x(t + h) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{(i)}(t)}{i!} h^i \quad (2.9)$$

- $\dot{x}=f(t,x)$ olduğunu hatırlayalım. Denklem (2.9), Euler güncelleştirme formülüne çevrilir, $x(t+h)=x(t)+hf(t,x)$.
- Bu formül daha yüksek mertebeli yaklaşım kullanarak genişletilebilir. Mesela ikinci dereceden yaklaşım şu formülü verir

$$x(t+h) \approx x(t) + h\dot{x}(t) + \frac{1}{2}h^2\ddot{x}(t)$$

Taylor Yöntemi

Denklem (2.1) kullanırsak,

$$\ddot{x} = \frac{d}{dt} f(t, x) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} f(t, x)$$

Buna göre,

$$X(t+h) \approx x(t) + h f(t, x) + \frac{1}{2} h^2 \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} f(t, x) \right]$$

Bu formül aşağıdaki şekilde Euler gibi ayrıklaştırılabilir:

$$\begin{aligned} t_{k+1} &= t_k + h \\ x(k+1) &= x(k) + h f + \frac{1}{2} h^2 \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} f \right) \end{aligned}$$

Taylor Yöntemi

Örnek 2.4: Sistem (2.7) 'ye Taylor tekniğini uygulayınız.

$\partial f/\partial t = x^2$ ve $\partial f/\partial x = 2xt$ olduğu için denklem (2.10) şu formüle dönüştürülür,

$$x(k+1) = x(k) + x^2(k)t_k h + x^2(k)[x(k)t_k^2 + 1/2]h^2$$

Adım uzunluğu $h=0.05$ olarak düşünülürse, Taylor tabloda gösterilmiş verileri elde eder. Taylor, Euler yöntemine göre daha doğru sonuçlar elde eder(Şekil 2.2)

Tablo: Taylor Yöntemi kullanarak sistem (2.7)'nin çözümü

k	0	1	2	3	4	5	6
t_k	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30
$x(t)$	3.00	3.55	4.38	5.81	8.82	19.20	-85.71
$x(k)$	3.00	3.53	4.32	5.61	8.05	13.89	36.66

Runge-Kutta Yöntemi

- Daha önceki örneklerde birinci dereceden denklemlere Euler, ikinci dereceden denklemlere Taylor teknikleri uygulanıp karşılaştırıldı.
- Dördüncü dereceden bir yaklaşım sıklıkla şu şekilde kullanılır:

$$x(t+h)=x(t)+h\dot{x}(t)+\frac{1}{2}h^2\ddot{x}(t)+\frac{1}{6}h^3x^{(3)}(t)+\frac{1}{24}h^4x^{(4)}(t)$$

- Bununla birlikte bu formülü uygulamak için, Taylor için yapıldığı gibi ilk önce f 'i birkaç kez ayırmak gereklidir.
- f için bir analitik formül kullanılamıyor olabileceği için çoğu zaman bu imkansızdır ve en iyi ihtimalle sıkıcı olabilir.
- Türevlerini değil yalnızca sinyal değerlerini doğrudan ölçebildiğimiz için, bu gerçek sistemlerde sıklıkla yaşanan bir durumdur.

Runge-Kutta Yöntemi

$$K_1 = f(t_k, x(k)),$$

$$K_2 = f\left(t_k + \frac{1}{2}h, x(k) + \frac{1}{2}hK_1\right),$$

$$K_3 = f\left(t_k + \frac{1}{2}h, x(k) + \frac{1}{2}hK_2\right),$$

$$K_4 = f(t_k + h, x(k) + hK_3); \quad (2.11)$$

$$t_{k+1} = t_k + h,$$

$$x(k+1) = x(k) + \frac{1}{6}h(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4). \quad (2.12)$$

Bu, klasik bir Runge-Kutta algoritmasıdır. İki avantajı vardır: doğru çözümdür (dördüncü dereceden Taylor'a eşdeğerdir) ve türev hesaplaması gerektirmediğinden kullanımı kolaydır.

Runge-Kutta Yöntemi

Örnek 2.5: Sistem (2.7) 'ye Runge-Kutta tekniğini uygulayınız.

Runge-Kutta uygulamak için bir program algoritması:

K_1 , K_2 'den K_2 , K_3 'den K_3 , K_4 den x güncelleştirmesinden önce hesaplanmalıdır.

```
input t,x
```

```
print t,x
```

```
for k=1 to n
```

$$K_1 = tx^2$$

$$K_2 = (t + \frac{1}{2}h) (x + \frac{1}{2}h K_1)^2$$

$$K_3 = (t + \frac{1}{2}h) (x + \frac{1}{2}h K_2)^2$$

$$K_4 = (t + h) (x + h K_3)^2$$

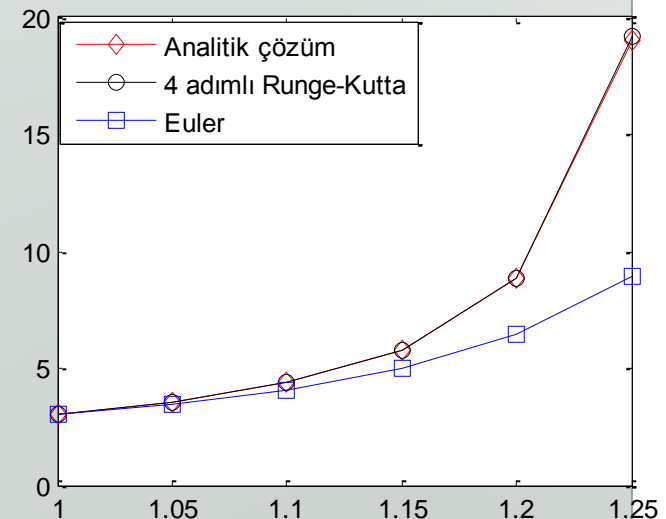
$$x = x + \frac{1}{6}h(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$$t = t + h$$

```
print t,x
```

```
next
```

```
t0=1; %başlangıç zamanı
x0=3; %başlangıç koşulu
x=[x0];
t=[t0];
xg=[6/(5-3*t0^2)]; % Mutlak çözüm
h=0.05;
for i=1:5
    K1=t0*x0^2;
    K2=(t0+(1/2)*h)*(x0+(1/2)*h*K1)^2;
    K3=(t0+(1/2)*h)*(x0+(1/2)*h*K2)^2;
    K4=(t0+h)*(x0+h*K3)^2;
    xyeni=x0+(1/6)*h*(K1+2*K2+2*K3+K4);
    t0=t0+h;
    xg=[xg 6/(5-3*t0^2)];
    x=[x xyeni];
    t=[t t0];
    x0=xyeni;
end
plot(t, x, 'r-d')
hold on
plot(t,xg, 'k-s')
```

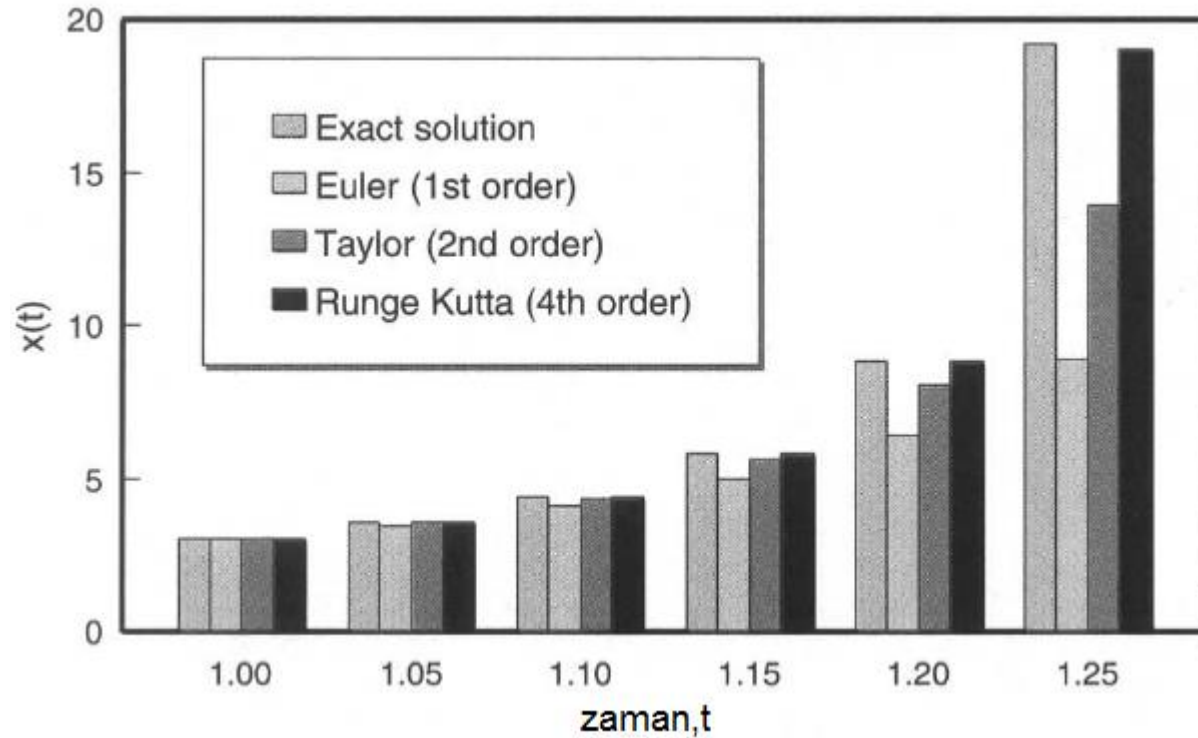


Runge-Kutta Yöntemi

Bir karşılaştırma maksadıyla aşağıdaki tabloda ve şekilde adım uzunluğu $h=0.05$ alınarak anlatılan yaklaşımlar ve sonuçları gösterilmiştir.

k	0	1	2	3	4	5	6
t_k	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30
Euler(1.dereceden)	3.00	3.45	4.07	4.99	6.42	8.89	13.83
Taylor(2.dereceden)	3.00	3.53	4.32	5.61	8.05	13.89	36.66
Runge-Kutta(4.dereceden)	3.00	3.55	4.38	5.81	8.82	18.98	392.55
Gerçek Çözüm	3.00	3.55	4.38	5.81	8.82	19.20	-85.71

Runge-Kutta Yöntemi



Şekil 2.5: Tüm tekniklerin karşılaştırılması

Adaptif Runge-Kutta Yöntemi

- Daha popüler heuristiklerden biri dördüncü ve beşinci dereceden farklı mertebelerin kullanımı ile bir çözüm hesaplamaktır.
- Eğer sonuçlar benzer ise integrasyon gevşetilmiş adım boyutu (tipik olarak 3h) ile ilerletilir. Diğer taraftan eğer sonuçlar önemli derecede farklı ise adım boyutu azaltılır (h'ı 10 ile bölme)
- Eğer f fonksiyonu yeterince düzgün ise büyük adım boyutları kullanılır. Bununla birlikte yüzey kabalaştıkça daha küçük adım boyutları doğruluğun kaybolmamasını sağlar.
- Beşinci dereceden Fehlberg Runge-Kutta yöntemi aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= x(k) + h\left(\frac{25}{216}\kappa_1 + \frac{1408}{2565}\kappa_3 + \frac{2197}{4104}\kappa_4 - \frac{1}{5}\kappa_5\right), \\ y(k+1) &= x(k) + h\left(\frac{16}{135}\kappa_1 + \frac{6656}{12825}\kappa_3 + \frac{28561}{56430}\kappa_4 - \frac{9}{50}\kappa_5 + \frac{2}{55}\kappa_6\right); \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= f(t_k, x(k)), \\ \kappa_2 &= f\left(t_k + \frac{1}{4}h, x(k) + \frac{1}{4}h\kappa_1\right), \\ \kappa_3 &= f\left(t_k + \frac{3}{8}h, x(k) + h\left[\frac{3}{32}\kappa_1 + \frac{9}{32}\kappa_2\right]\right), \\ \kappa_4 &= f\left(t_k + \frac{12}{13}h, x(k) + h\left[\frac{1932}{2197}\kappa_1 - \frac{7200}{2197}\kappa_2 + \frac{7296}{2197}\kappa_3\right]\right), \\ \kappa_5 &= f\left(t_k + h, x(k) + h\left[\frac{439}{216}\kappa_1 - 8\kappa_2 + \frac{3680}{513}\kappa_3 - \frac{845}{4104}\kappa_4\right]\right), \\ \kappa_6 &= f\left(t_k + \frac{1}{2}h, x(k) + h\left[-\frac{8}{27}\kappa_1 + 2\kappa_2 - \frac{3544}{2565}\kappa_3 + \frac{1859}{4104}\kappa_4 - \frac{11}{40}\kappa_5\right]\right). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Adaptif Runge-Kutta Yöntemi

t=t0

x=x0

print t, x

for k=1 to n

[1] 4. dereceden Runge-Kutta'yı hesapla denklem (2.11), (2.12); x

5. dereceden Runge-Kutta'yı hesapla denklem (2.13), (2.14); y

if $|x-y| < \varepsilon$ then

x=y

t=t+h

h=3h

else

h=h/10

goto [1]

end if

print t, x

next k

2.2 Yüksek Dereceden Sistemler

- Örnek 2.1’de gösterildiği gibi herhangi bir diferansiyel denklemler toplamını birinci dereceden denklemler kümesine eşdeğer hale getirmek mümkündür.
- Bu yapıldıktan sonra, daha önceden anlatılan teknikler çözüme sayısal bir yaklaşım elde etmek için uygulanabilir.
- Örneğin, iki tane birinci dereceden denklem bir sistem aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\dot{x} = f(t, x, y),$$

$$\dot{y} = g(t, x, y),$$

$$x(t_0) = x_0,$$

$$y(t_0) = y_0.$$

- Daha önce anlatıldığı gibi x değişkenini K_1, K_2, K_3 ve K_4 değerleriyle, y değişkenini $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ve λ_4 ile ilişkilendirerek bu sisteme Runge-Kutte yöntemini uygulamak basittir.

2.2 Yüksek Dereceden Sistemler

Ayrık çözüm denklem 2.11 ve 2.11'den aşağıdaki gibi genişletilerek elde edilmiştir:

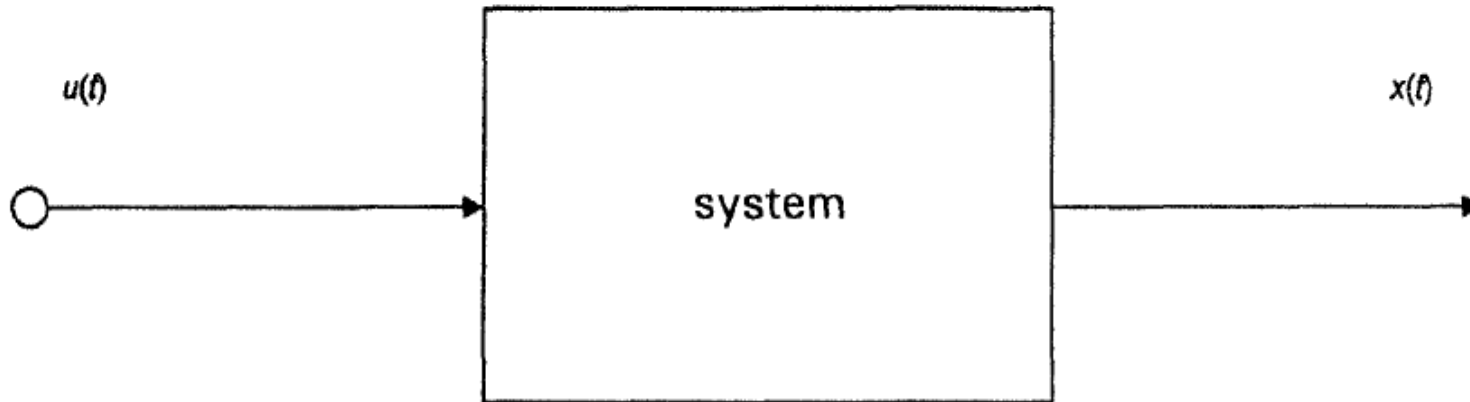
$$\begin{aligned}
 \kappa_1 &= f(t_k, x(k), y(k)), \\
 \lambda_1 &= g(t_k, x(k), y(k)), \\
 \kappa_2 &= f(t_k + \frac{1}{2}h, x(k) + \frac{1}{2}h\kappa_1, y(k) + \frac{1}{2}h\lambda_1), \\
 \lambda_2 &= g(t_k + \frac{1}{2}h, x(k) + \frac{1}{2}h\kappa_1, y(k) + \frac{1}{2}h\lambda_1), \\
 \kappa_3 &= f(t_k + \frac{1}{2}h, x(k) + \frac{1}{2}h\kappa_2, y(k) + \frac{1}{2}h\lambda_2), \\
 \lambda_3 &= g(t_k + \frac{1}{2}h, x(k) + \frac{1}{2}h\kappa_2, y(k) + \frac{1}{2}h\lambda_2), \\
 \kappa_4 &= f(t_k + h, x(k) + h\kappa_3, y(k) + h\lambda_3), \\
 \lambda_4 &= g(t_k + h, x(k) + h\kappa_3, y(k) + h\lambda_3);
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}
 x(k+1) &= x(k) + \frac{1}{6}h(\kappa_1 + 2\kappa_2 + 2\kappa_3 + \kappa_4), \\
 y(k+1) &= y(k) + \frac{1}{6}h(\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4).
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

2.2 Yüksek Dereceden Sistemler

Örnek 2.6: Aşağıdaki şekilde bir blok diyagramı ile gösterilen sistemi düşünelim.

$$\begin{aligned}\ddot{x} + 3x\dot{x} &= u(t), \\ u(t) &= t, \quad t \geq 0, \\ x(0) &= 2, \\ \dot{x}(0) &= 1.\end{aligned}\tag{2.17}$$



2.2 Yüksek Dereceden Sistemler

Çözüm: İkinci dereceden bir diferansiyel denklem olduğu için iki durum değişkeni olmalıdır. Bunlardan birini $x(t)$ çıkışı olarak, diğerini $y(t)=\dot{x}(t)$ olarak tanımlarız. Böylece,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= y, \\ \dot{y} &= t - 3xy, \\ x(0) &= 2, \\ y(0) &= 1.\end{aligned}\tag{2.18}$$

Euler yöntemini kullanarak, ayrıklaştırılmış sistem;

$$\begin{aligned}t_{k+1} &= t_k + h, \\ x(k+1) &= x(k) + hy(k), \\ y(k+1) &= y(k) + h[t_k - 3x(k)y(k)].\end{aligned}$$

2.2 Yüksek Dereceden Sistemler

Sistemin Euler çözümü,

```
t=0
x=2
y=1
print t, x, y
for k=1 to n
    x1=x+hy
    y1=y+h(t-3xy)
    x=x1
    y=y1
    t=t+h
    print t, x, y
next k
```

2.2 Yüksek Dereceden Sistemler

Sistemin Runge-Kutta çözümü,

```

t=0
x=2
y=1
print t, x, y
for k=1 to n
     $\kappa_1 = y$ 
     $\lambda_1 = t - 3xy$ 
     $\kappa_2 = y + \frac{1}{2}h\lambda_1$ 
     $\lambda_2 = t + \frac{1}{2}h - 3(x + \frac{1}{2}h\kappa_1)(y + \frac{1}{2}h\lambda_1)$ 
     $\kappa_3 = y + \frac{1}{2}h\lambda_2$ 
     $\lambda_3 = t + \frac{1}{2}h - 3(x + \frac{1}{2}h\kappa_2)(y + \frac{1}{2}h\lambda_2)$ 
     $\kappa_4 = y + h\lambda_3$ 
     $\lambda_4 = t + h - 3(x + h\kappa_3)(y + h\lambda_3)$ 
     $x = x + \frac{1}{6}h(\kappa_1 + 2\kappa_2 + 2\kappa_3 + \kappa_4)$ 
     $y = y + \frac{1}{6}h(\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4)$ 
    t=t+h
    print t, x, y
next k

```

2.3 OTONOM DİNAMİK SİSTEMLER

- Simülasyon açısından bakıldığında çoğu sistemler dinamiktir. Bu sistemler basit statik yapılardan çok, zaman ile değişirler.
- Türevler değişkenlerin değişim oranlarını gösterdiği için, bu sistemleri modellemek için zaman içindeki diferansiyel denklemleri kullanırız.
- Örneğin Newton kuralından bahsedecek olursak momentum, kütle ve hızın zaman ile değişim oranıdır: $p = d(mv)/dt$.
- Sistemler ya endojen (iç) veya eksojen (dış) girişler tarafından sürülebilir.
- Sistem zaman odaklı ise bu girişler eş zamanlıdır, olay tabanlı ise eş zamanlı değildir.
- Örneğin klasik ikinci dereceden bir liner sistem $\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2 x = r(t)$, $r(t)$ girişine, $x(t)$ çıkışına, ζ ve ω sabitlerine sahiptir. $r(t)$, $r(t)=4-t$ gibi bir deterministik zaman fonksiyonu ise sistem zaman odaklıdır.
- Diğer yandan, eğer $r(t)$ aşağıdaki şekilde rastgele bir işlem gibi stokastik olarak tanımlanırsa model olay odaklıdır:

$$r(t) = \begin{cases} 1, & \text{event occurs,} \\ 0, & \text{event does not occur,} \end{cases}$$

2.3 OTONOM DİNAMİK SİSTEMLER

- Bir sistemin hiçbir girişe sahip olmaması da mümkündür. Böyle sistemler dış etkilerden bağımsız olduğu için, *otonom* olarak adlandırılırlar.
- Buna göre otonom bir sistemin çözümü, sistemin doğal tepkisi olarak adlandırılır.
- Sistem liner yani doğrusal ise üç tip doğal tepkiden bahsedebiliriz:
 - (1) **Kararlı**- Kısa bir geçiş evresinden sonra çıktı sifıra doğru yaklaşır.
 - (2) **Kararsız**-Sınırlama olmaksızın doğal tepki artar.
 - (3) **Marjinal**- Tepki periyodik ve sınırlıdır.

2.3 OTONOM DİNAMİK SİSTEMLER

- $r(t)$ 'nin giriş olduğu sabit katsayıları olan ikinci dereceden bir denklem sistemi düşünelim: $\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2x = r(t)$.
- Doğal tepki durumunda $r(t)=0$ dır. ζ ve ω sabitlerine bağlı çözümün üç tipten biri olduğu gösterilebilir. Özellikle,

$$x(t) = \begin{cases} Ae^{-\zeta\omega t} \cos(\omega\sqrt{1-\zeta^2}t) + Be^{-\zeta\omega t} \sin(\omega\sqrt{1-\zeta^2}t), & |\zeta| < 1, \\ A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t), & |\zeta| = 1, \\ Ae^{\zeta\omega t} + Be^{-\zeta\omega t}, & |\zeta| > 1, \end{cases} \quad (2.19)$$

- Burada A ve B sabitleri başlangıç koşullarından belirlenir.
- Otonom olmayan sistem durumunda süperpozisyon prensibi uygulanır.
- Bir sonraki örnekte gösterileceği gibi, doğrusal bir sistemin toplam çözümü doğal ve zorunlu tepkilerin toplamı ile verilir.

2.3 OTONOM DİNAMİK SİSTEMLER

Örnek 2.7: Aşağıdaki ikinci dereceden sistemi düşünelim:

$$\begin{aligned}\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x &= 15t + 22, \\ x(0) &= 0, \\ \dot{x}(0) &= 1.\end{aligned}\tag{2.20}$$

Süperpozisyon kullanarak sistemi çözün. Bunu yaparken, (1) başlangıç koşullarını içeren fakat girişten bağımsız bir terim ve (2) giriş içeren fakat başlangıç koşullarından bağımsız bir terim şeklinde iki terimin toplamının toplam çözüm olduğunu gösteriniz?

Çözüm: Doğal tepki, $\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0$ denkleminin çözümüdür. Böylece, $\omega = \sqrt{5}$ ve $\zeta = 2/\sqrt{5}$ dir. Denklem (2.19) kullanarak,

$$x_{\text{natural}}(t) = Ae^{-2t}\cos t + Be^{-2t}\sin t$$

Giriş doğrusal ve türevi sabit olduğu için $X_{\text{forced}} = C + Dt$ olacaktır.

Denklem (2.20) ve katsayıları yerine koyduğumuzda $X_{\text{forced}} = 3t + 2$ olur.

2.3 OTONOM DİNAMİK SİSTEMLER

Süperpozisyonu kullanarak, toplam çözüm $x(t) = 2e^{-2t}\cos t - e^{-2t}\sin t + 3t + 2$ olarak elde edilir. A ve B sabitleri başlangıç şartları yerine koyularak bulunmuştur.

Genel olarak kararlı doğrusal sistemlerde,

$$x(t) = x_{\text{natural}}(t) + x_{\text{forced}}(t)$$

Burada, $x_{\text{natural}}(t)$ yalnızca başlangıç koşullarına bağlıdır; $x_{\text{forced}}(t)$ ise yalnızca girişe bağlıdır.

2.3 OTONOM DİNAMİK SİSTEMLER

- Belirli bir türün popülasyon dinamiğini modelleyen bir sistem düşünün.
- Bu popülasyonu kontrol eden çok sayıda faktör olmasına rağmen, bir popülasyon büyüklüğünün artma oranı, herhangi bir zamandaki popülasyon büyüklüğü ile kabaca orantılıdır.
- $x(t)$, t zamandaki popülasyon büyüklüğünü ve λ sabit orantıyı gösterir:
- $\dot{x} = \lambda x$. $t=0$ zamanındaki başlangıç büyüklüğünü x_0 olarak kabul edersek, $t \geq 0$ için $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$ dir.
- Açıktır ki bu popülasyon zaman içinde katlanarak artar. Bu model *Malthusian* modeli olarak adlandırılır.
- Popülasyon büyüklüğüne ek olarak, çevre kapasitesi, mücadele ve enerji gibi önemli faktörler vardır.
- Örneğin, bir popülasyon kendisine yiyecek temini için çok büyük olabilir veya yaşadığı bölgede avcılar olabilir.

2.3 OTONOM DİNAMİK SİSTEMLER

- Sistemin desteklediği maksimum popülasyon büyüklüğü x_m taşıma kapasitesidir. $x(t)/x_m$ sistemin doluluk oranıdır ve $1 - x(t)/x_m$ büyüme için geriye kalan kullanılabilir sistem oranıdır.

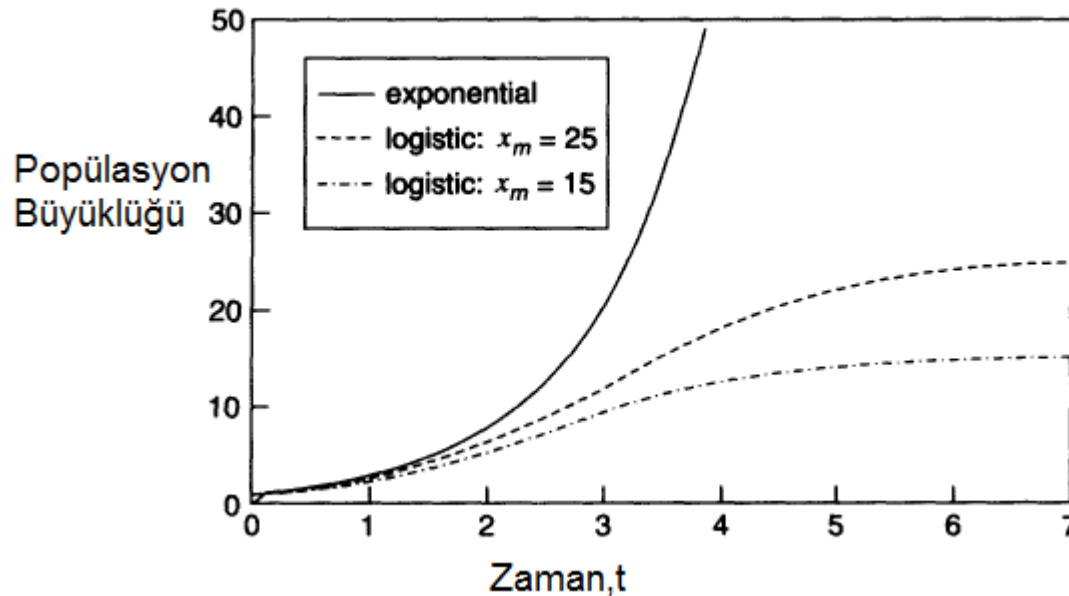
$$\dot{x} = \lambda x \left(1 - \frac{x}{x_m} \right). \quad (2.21)$$

- Bu denklem *lojistik denklem* olarak adlandırılır ve doğrusal değildir. $x(t)$ küçük ise, $1 - x(t)/x_m \approx 1$ olduğu için denklem *Malthusian* dır.
- Benzer şekilde, popülasyon büyüklüğü kapasiteye yakın olduğunda $1 - x(t)/x_m \approx 0$ olur ve büyüme oranı düşer.
- Temel matematik ile aşağıdaki formül elde edilebilir:

$$x(t) = \frac{x_m}{1 - (1 - x_m/x_0)e^{-\lambda t}}.$$

2.3 OTONOM DİNAMİK SİSTEMLER

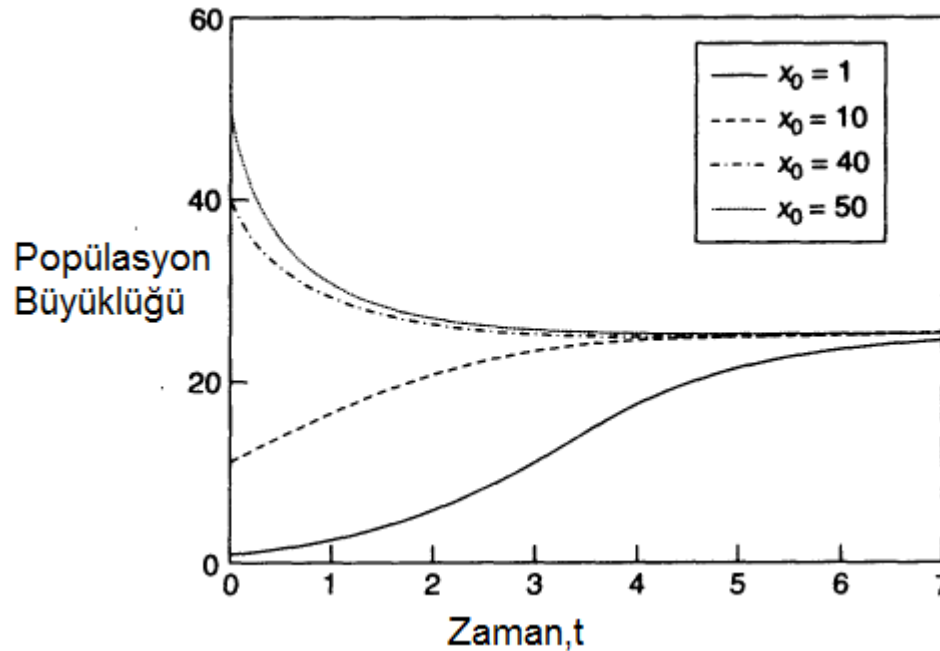
Şekil 2.7, farklı başlangıç büyüklükleri ve $x(m)=25$ değeri için $x(t)$ değerini gösterir. x_0, x_m 'den daha küçük ise $x(t)$ büyümesi asimptotik olarak x_m taşıma kapasitesine yaklaşırken, x_0, x_m 'den daha büyük ise, eğri yukarıdan x_m 'e yaklaşır.



Şekil 2.7: Farklı başlangıç popülasyonları için lojistik denklem

2.3 OTONOM DİNAMİK SİSTEMLER

Şekil 2.8, farklı x_m değerleri için $x_0 = 1$ de sabitli x_0 için $x(t)$ değerini gösterir. Başlangıç değerine bakılmaksızın her durumda $x(t)$, x_m taşıma kapasitesine yaklaşır.



Şekil 2.8: Farklı taşıma kapasiteleri için lojistik denklem

2.3 OTONOM DİNAMİK SİSTEMLER

- Lojistik model sınırlı yiyecek kaynağının ve bir popülasyonun olduğu ortamlarda iyi bir performans sergiler.
- Bununla birlikte, yiyerek ve yenilmeyerek hayatta kalan av ve bir avcının var olduğu ortam daha tipik durumlardan biridir.
- $x(t)$ ve $y(t)$ sırasıyla av ve avcı popülasyon büyüklüğünü gösterebilir.
- Av-avcı etkileşim sayısı $x(t)y(t)$ çarpımı ile orantılıdır.
- Av-avcı popülasyonunun büyüme oranı şu şekilde verilir:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha_1 x \left(1 - \frac{y}{\beta_1}\right), \\ \dot{y} &= \alpha_2 y \left(-1 + \frac{x}{\beta_2}\right),\end{aligned}\tag{2.22}$$

- α_1 , α_2 , β_1 ve β_2 her popülasyon için pozitif kapasite sabitleridir.
- Bu denklemler Lotka-Volterra denklemleri olarak adlandırılır.
- Bu denklemler doğrusal değildir ve bilinen analitik bir çözümü yoktur.
- Bu yüzden daha önceden anlatılan sayısal teknikler kullanılabilir.

2.3 OTONOM DİNAMİK SİSTEMLER

- Daha önceden anlatılan Euler yöntemini uygulayabiliriz.
- İki denklem çifti olduğu için geçici değişkenler kullanılır, değişkenler hesaplandıktan sonra güncellenir.
- Uygun bir h adım uzunluğunu varsayarsak bu algoritma şu şekilde gösterilir;

```

read t, x, y
print t, x, y
for k=1 to n
     $x_1 = x(1 + \alpha_1 h - \alpha_1 h y / \beta_1)$ 
     $y_1 = y(1 - \alpha_2 h + \alpha_2 h x / \beta_2)$ 
     $x = x_1$ 
     $y = y_1$ 
     $t = t + h$ 
    print t, x, y
next k

```

(Lotka- Volterra modelinin benzetimi)

- Sonuçların $[t_0, t_n]$ zaman aralığında ve h aralığı olduğunu düşünürsek $n=(t_n-t_0)/h$ oldukça büyük olur
- Örneğin $t_0=0$, $t_n=10$ ve $h=0.001$ ise $n=10\ 000$ örnek gerekir. Muhtemelen sadece 50 tanesi yeterli olacaktır.

2.3 OTONOM DİNAMİK SİSTEMLER

- Bu problem bir kontrol break ile çözülebilir.
- Böylece $[t_0, t_n]$ zaman aralığında $m \times n$ hesaplama yapılır.
- Adım boyutu h olmaz üzere $m = (t_n - t_0)/nh$ olarak seçilir.
- Aşağıda Lotka_voltera sisteminin kontrol break kullanılarak çözümü verilmiştir.

```
read t, x, y
print t, x, y
for i=1 to n
  for j=1 to m
     $x_1 = x (1 - \alpha_1 h + \alpha_1 h x / \beta_1)$ 
     $y_1 = y (1 - \alpha_2 h + \alpha_2 h x / \beta_2)$ 
     $x = x_1$ 
     $y = y_1$ 
     $t = t + h$ 
  next j
print t, x, y
next i
```

2.3 OTONOM DİNAMİK SİSTEMLER

- Örnek: Aşağıda verilen Lotka-Volterra sistemini $[0,5]$ aralığında sayısal çözümünü veriniz?

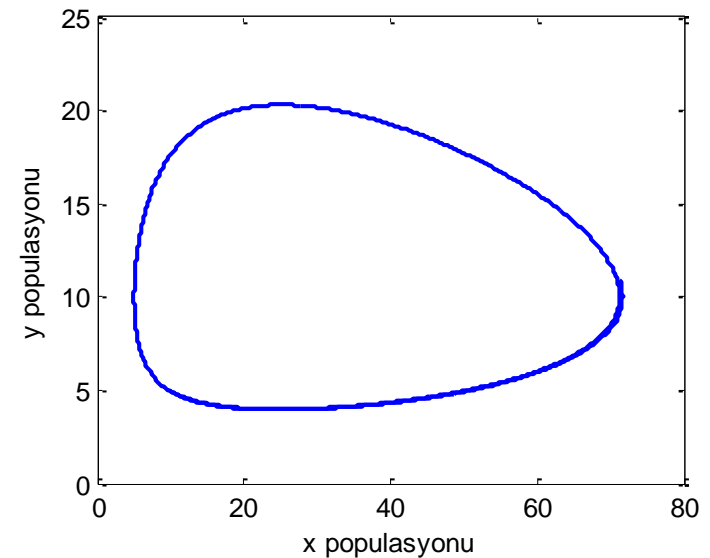
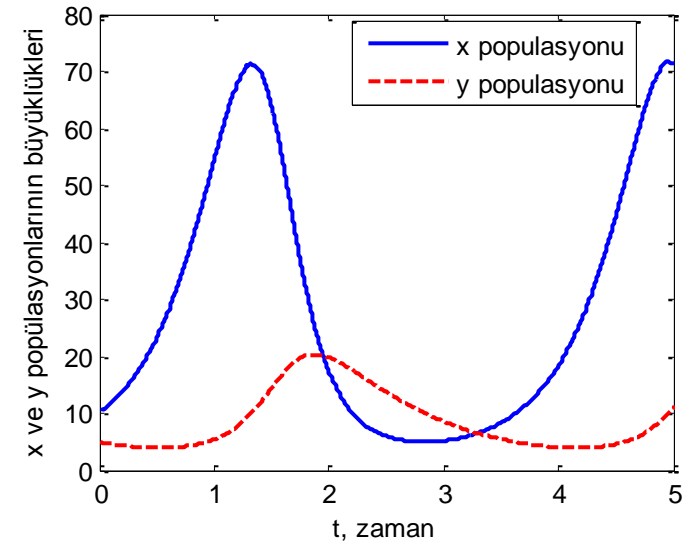
$$\begin{aligned}\dot{x} &= 3x(1 - \frac{1}{10}y), \\ \dot{y} &= 1.2y(-1 + \frac{1}{25}x), \\ x(0) &= 10, \\ y(0) &= 5.\end{aligned}$$

- Çözüm:** $h=0.001$ alalım. Grafik 5 birim zaman kadar olacak ve her bir aralıkta 10 örnek yeterlidir. Dolayısıyla 50 örnek iyidir. $m=(5-0)/(50*0.001)=100$ güncelleme olur. Toplamda 5000 güncelleme olur.

```
function [t,x,y]=lotka_volterra(h,x0,y0,n)
x=[x0];
y=[y0];
t=0;
for i=1:n
    for j=1:100
        xx=x0*(1+3*h-3*h*y0/10);
        yy=y0*(1-1.2*h+1.2*h*x0/25);
        x0=xx;
        y0=yy;
        x=[x;xx];
        y=[y;yy];
        t=t+h;
    end
end
plot(x)
hold on
plot(y, 'r-')
```

2.3 OTONOM DİNAMİK SİSTEMLER

- Lotka-volterra sonucu popülasyonların değişimi yan tarafta verilmiştir.
- Diğer bir gösterim ise x ve y 'nin birbirine göre faz çizimidir.
- Avcının yiyecek kaynağı arttıkça avcı popülasyonu artmaktadır. Fakat avın harcanmasıyla avcı popülasyonu düşer.
- Dolayısıyla bir popülasyon bol bir besin kaynağına ulaştığında kendi başarısının kurbanı olur.
- Bu kapalı çevrim bir faz çizimi olur. Böyle bir döngü sonsuz periyodik bir çevrim ifade eder.
- Bu doğrusal olmayan durumda kararlılık terimi popülasyonun ne baskın ne de neslinin tükendiği anlamına gelir.



2.4 ÇOKLU ZAMAN TABANLI SİSTEMLER

- Dinamik sistemlerdeki önemli değişken zamandır. Bütün oranlar ve böylece bütün türevler zamana bağlı olarak değişir.
- Bitkiler gerçek kronolojik zamandan ziyade ısı enerjisini(sıcaklık) miktarına göre büyür ve gelişirler.
- Bu ısı enerjisi fizyolojik zaman olarak düşünülür ve dinamik denklemler kronolojik zamandansa fizyolojik zamana göre oranları ölçerler.
- Bazı sistemlerde, her bir alt sistem zamanı farklı ölçer.
- t zaman içinde farklı $T(t)$ sıcaklık değerleri gösteren bir ortamda belirli bakterilerin var olduğu biyolojik bir büyüme modelini düşünelim.
- Belirli bir T_0 eşik sıcaklığı altında, büyümenin olmadığı gözlenmiştir.
- Fakat T_0 'dan daha yüksek sıcaklıklar için bağlantılı büyüme oranı \dot{x}/x , $T(t) - T_0$ ile birlikte artmaktadır
- Bu durum matematiksel olarak;

$$\frac{\dot{x}}{x} = \begin{cases} 0, & T(t) < T_0, \\ r[T(t) - T_0], & T(t) \geq T_0, \end{cases} \quad (2.24)$$

2.4 ÇOKLU ZAMAN TABANLI SİSTEMLER

Aşağıdaki gibi fizyolojik süre τ olarak adlandırılan yeni bir zaman belirlememiz gereklidir;

$$\tau(t) = \int_{\Gamma} [T(t) - T_0] dt. \quad (2.25)$$

Burada $\tau(t) = \{t | T(t) \geq T_0\}$ sıcaklığın eşik değerini aşması durumudur. Bu tanımdan fizyolojik sürenin kümülatif bir sıcaklık birimi olduğunu açıkça görebiliriz. Böylece denklem 2.24'ü düzenleyerek $\tau(t)$ için günlük sıcaklık derecesi;

$$\frac{d\tau}{dt} = \begin{cases} 0, & T(t) < T_0, \\ T(t) - T_0, & T(t) \geq T_0, \end{cases}$$

$\dot{x}/x = r \, d\tau/dt$ olduğundan aşağıdaki eşitliği elde ederiz;

$$x(\tau) = x_0 e^{r\tau}. \quad (2.26)$$

2.4 ÇOKLU ZAMAN TABANLI SİSTEMLER

- Denklem 2.26, önceki kronolojik zaman için tanımlı üstel büyümedir ve fizyolojik zaman için de geçerlidir. Aslında lojistik ve Lotka-Volterra modelleri dahil olmak üzere daha önce gösterilmiş olan tüm büyüme modelleri aynı davranışı gösterir
- Uygun aktivite fonksiyonlarının olduğu bir sonraki tabloda, her bir büyüme modeli gösterilmiştir:

Model İsmi	Kronolojik zaman tanımı	Fizyolojik zaman tanımı
Malthusian	$\frac{\dot{x}}{x} = r \frac{d\tau}{dt}$	$\frac{dx}{d\tau} = rx(\tau)$
Logistic	$\frac{\dot{x}}{x(1 - x/x_m)} = r \frac{d\tau}{dt}$	$\frac{dx}{d\tau} = rx(\tau) \left[1 - \frac{x(\tau)}{x_m} \right]$
Lotka–Volterra	$\frac{\dot{x}}{x(1 - y/y_m)} = r_1 \frac{d\tau}{dt}$	$\frac{dx}{d\tau} = r_1 x(\tau) \left[1 - \frac{y(\tau)}{y_m} \right]$
	$\frac{\dot{y}}{y(-1 + x/y_m)} = r_2 \frac{d\tau}{dt}$	$\frac{dy}{d\tau} = r_2 y(\tau) \left[-1 + \frac{x(\tau)}{y_m} \right]$

2.4 ÇOKLU ZAMAN TABANLI SİSTEMLER

Örnek :Sıcaklık profili aşağıda verilen ideal bir model düşünün.

$$T(t) = A \sin\left(\pi \frac{t - t_1}{t_4 - t_1}\right),$$

A genlik, t_1 ve t_4 sıfır-geçiş noktalarıdır. T_0 eşik değeri varsayarak, fizyolojik süre için bir formül bulunuz.

Çözüm: $|\rho| < 0$ için $\rho = T_0 / A$ diyebiliriz. Çözümü zor olmasa da $|\rho| > 0$ durumuyla genellikle karşılaşılmaz. Şekil 2.16'da eşik değeri ve bu profili gösteren bir grafik verilmiştir.

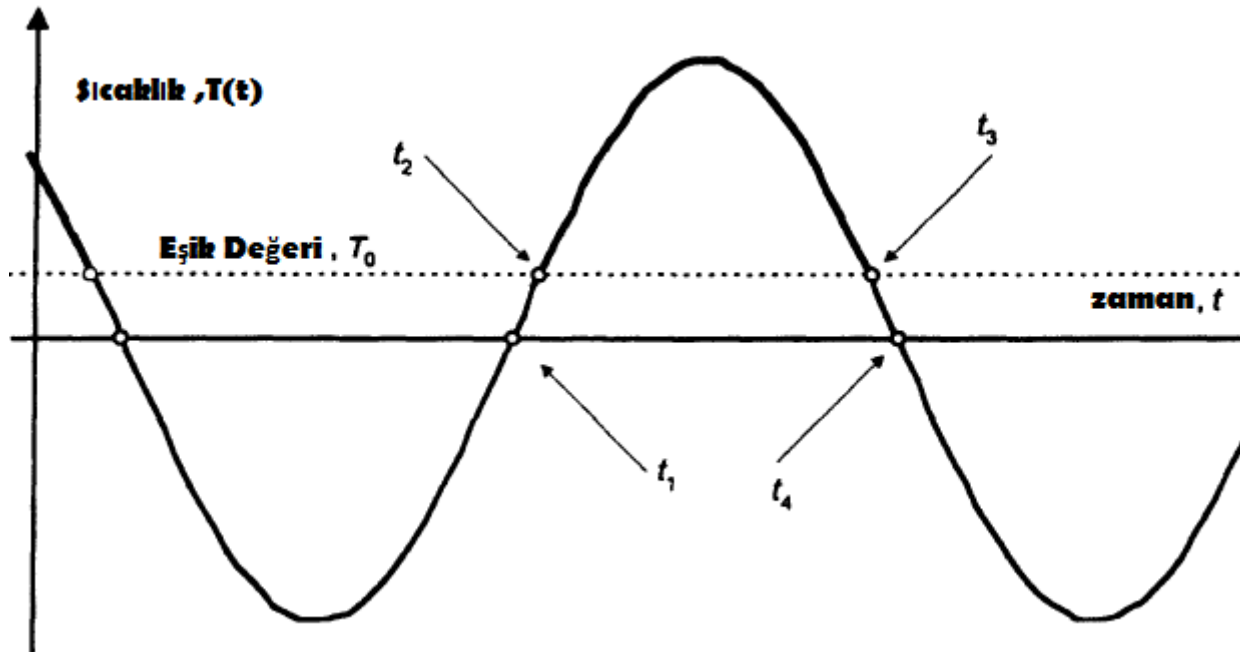
$-A < T_0 < A$ olduğunu farz edelim ($|\rho| < 1$ için). Sıcaklık profili $T(t)$, yalnızca t_2 ve t_3 noktaları arasında T_0 eşik değerini aşar. Bu iki nokta aşağıdaki formül çözümünden hesaplanır:

$$A \sin\left(\pi \frac{t - t_1}{t_4 - t_1}\right) = T_0$$

2.4 ÇOKLU ZAMAN TABANLI SİSTEMLER

Bu formül iki kuralı verir:

$$t_2 = t_1 + \frac{t_4 - t_1}{\pi} \sin^{-1} \rho, \quad t_3 = t_4 - \frac{t_4 - t_1}{\pi} \sin^{-1} \rho.$$



Şekil 2.16: Sıcaklık profili ve eşik değeri

2.4 ÇOKLU ZAMAN TABANLI SİSTEMLER

$\psi(t)=\pi(t - t_1)/(t_4 - t_1)$ olarak tanımlarsak, şu şekilde gösterebiliriz:

$$\sin \psi(t_2) = \rho,$$

$$\sin \psi(t_3) = \rho,$$

$$\cos \psi(t_2) = \sqrt{1 - \rho^2},$$

$$\cos \psi(t_3) = -\sqrt{1 - \rho^2}.$$

Fizyolojik sürenin tanımından, $t < t_2$ ise $\tau(t)=0$ 'dır. $t_2 < t < t_3$ için, fizyolojik süre yalnızca t_2 ve t_3 arasındaki bu zamanı aştığında kümülatif sıcaklıktır. Böylece,

$$\begin{aligned}\tau(t) &= \int_{t_2}^t \left[A \sin\left(\pi \frac{t-t_1}{t_4-t_1}\right) - T_0 \right] dt \\ &= \frac{A(t_4-t_1)}{\pi} [\cos \psi(t_2) - \cos \psi(t)] - T_0(t-t_2) \\ &= \frac{A(t_4-t_1)}{\pi} [\cos \psi(t_2) - \cos \psi(t)] - T_0(t-t_1) + \frac{T_0(t_4-t_1)}{\pi} \sin^{-1} \rho \\ &= \frac{A(t_4-t_1)}{\pi} [\sqrt{1-\rho^2} + \rho \sin^{-1} \rho - \cos \psi(t) - \rho \psi(t)].\end{aligned}$$

2.4 ÇOKLU ZAMAN TABANLI SİSTEMLER

$t > t_3$ için, sıcaklık eşik değerin altında kaldığı için fizyolojik süre sabit kalır. Böylece,

$$\tau(t) = \tau(t_3) = \frac{A(t_4 - t_1)}{\pi} (2\sqrt{1 - \rho^2} + 2\rho \sin^{-1} \rho - \pi\rho).$$

$\psi(t) = \pi(t - t_1)/(t_4 - t_1)$ ve $\rho = T_0 / A$ için genelleştirecek olursak,

$$\tau(t) = \begin{cases} 0, & t < t_2, \\ \frac{A(t_4 - t_1)}{\pi} (\sqrt{1 - \rho^2} + \rho \sin^{-1} \rho - \rho\psi - \cos \psi), & t_2 \leq t \leq t_3, \\ \frac{A(t_4 - t_1)}{\pi} (2\sqrt{1 - \rho^2} + 2\rho \sin^{-1} \rho - \pi\rho), & t > t_3, \end{cases}$$

2.5. DENEYSEL VERİ İŞLEME

- Modeller olayların idealleştirilmesi olmasına rağmen gerçekçi benzetimler oluşturmak için modele gerçek veriyi uygulamak istenir.
- Lojistik modelde popülasyonun aşağıdaki denkleme göre büyüdüğünü varsayalım.

$$\frac{d\tau}{dt} = ax\left(1 - \frac{x}{x_m}\right)$$

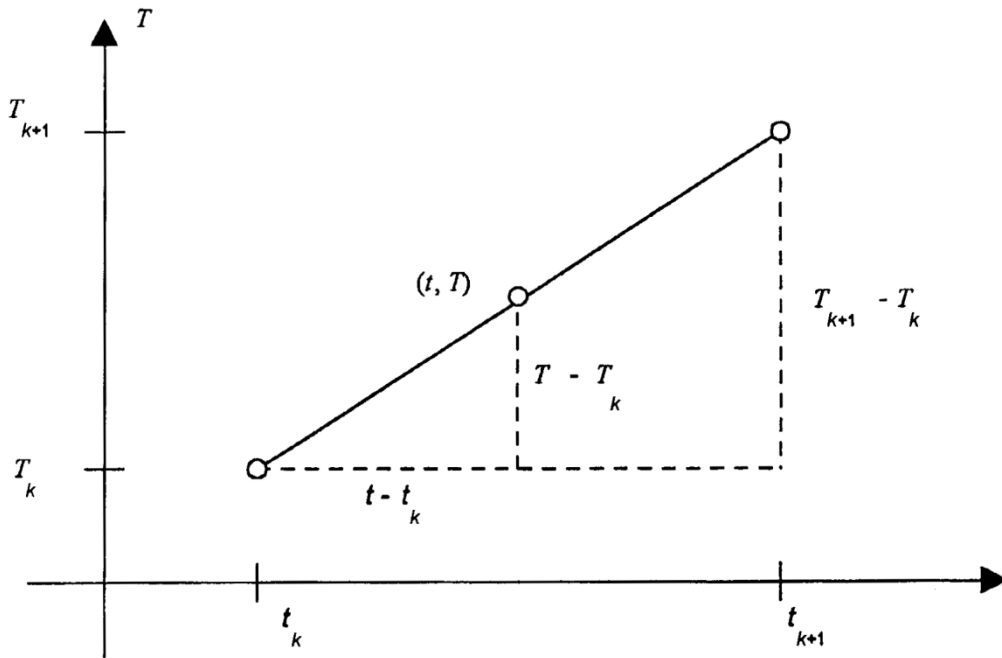
- Gerçek sıcaklık profili fiziksel ölçümlerden alınarak elde edilebilir.
- Bu ölçümler daha gerçekçi sonuçlara yol açar.
- $T(t)$ 'nin değerleri bitişik veri noktaları arasında bilinmezken $n+1$ ile n arasındaki çizgi segmentlerine lineer interpolasyon uygulamak mümkündür.

t	$\hat{T}(t)$
T_0	\hat{T}_0
T_1	\hat{T}_1
T_2	\hat{T}_2
..	..
t_n	\hat{T}_n

2.5. DENEYSEL VERİ İŞLEME

- Aşağıdaki şekilde iki bitişik (t_k, \hat{T}_k) ile (t_{k+1}, \hat{T}_{k+1}) veri noktalarını gösteren fonksiyon parçasını düşünelim. Benzer üçgen teoreminden aşağıdaki ilişki yazılabilir.

$$\frac{T - \hat{T}_k}{t - t_k} = \frac{\hat{T}_{k+1} - \hat{T}_k}{t_{k+1} - t_k} \Rightarrow \text{ise } T(t) = \frac{\hat{T}_{k+1} - \hat{T}_k}{t_{k+1} - t_k}(t - t_k) + \hat{T}_k$$



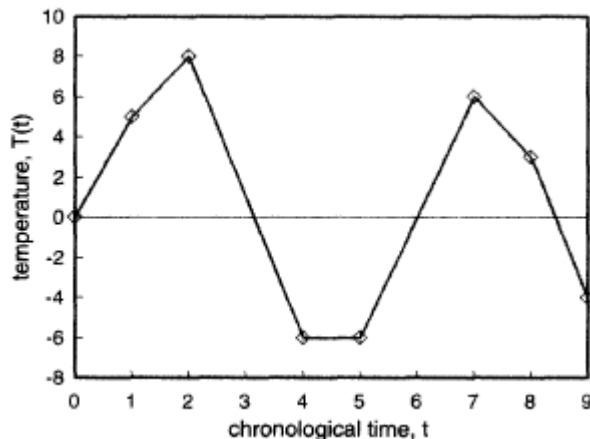
2.5. DENEYSEL VERİ İŞLEME

- Örnek: Aşağıda bir sıcaklık profilinden alınan veri kümesini düşünelim. Veri kümesine lineer interpolasyon uygulayınız.

k	t _k	\hat{T}_k
0	0	0
1	1	5
2	2	8
3	4	-6
4	5	-6
5	7	6
6	8	3
7	9	-4

```
function interp(t)
    if t<0 then "undefined"
    if 0 ≤ t<1 then interp=5t
    if 1 ≤ t<2 then interp=3t+2
    if 2 ≤ t<4 then interp=-7t+22
    if 4 ≤ t<5 then interp=-6
    if 5 ≤ t<7 then interp=6t-36
    if 7 ≤ t<8 then interp=-3t+27
    if 8 ≤ t<9 then interp=-7t+59
    if t>9 then "undefined"
return
```

$$T(t) = \begin{cases} \text{undefined}, & t < 0, \\ 5t, & 0 \leq t < 1, \\ 3t + 2, & 1 \leq t < 2, \\ -7t + 22, & 2 \leq t < 4, \\ -6, & 4 \leq t < 5, \\ 6t - 36, & 5 \leq t < 7, \\ -3t + 27, & 7 \leq t < 8, \\ -7t + 59, & 8 \leq t \leq 9, \\ \text{undefined}, & t > 9. \end{cases}$$



```
function interp(t)
    input t
    if t<t(0) or t>t(n) then
        "error"
    else
        k=1
        while t>t(k) and t ≤ t(n)
            k=k+1
        end while
        interp =  $\frac{\hat{T}_{k+1} - \hat{T}_k}{t_{k+1} - t_k} (t - t_k) + \hat{T}_k$ 
    end if
return
```

SONUÇLAR

- Modelleme ve benzetim aşağıdaki özellik ve adımlara yönelmiştir.

- **Model biçimini tanımlama**

Modelde olacak veya olmayacak sınırları belirleme. Modelleme girişlerini tanımlayan denklemler burada geliştirilir.

- **Geçmiş giriş ve çıkışları modelleme**

- **Sistem tanımlama:** modelin sabit ve parametrelerinin değerlendirilmesi
- **Model değerlendirme:** test ve değerlendirme modeli kullanmadan önce yapılmalıdır.
- **Gelecek girişleri modelleme:** modeli kullanmak için gerçekçi veri gereklidir.
- **Ortaya atılacak soruların bir kümesini oluşturma:** Bu zaman serisi tahmini ve diğer sorular gibi kararlılık, geçici ve kararlı durum davranışlarını içermelidir.