# BMÜ-421 BENZETIM VE MODELLEME STOKASTİK ÜRETEÇLER

İlhan AYDIN

# RASGELE SAYI ÜRETEÇLERİ

- Deterministik terimler ile doğayı tanımlamak geleneksel bir yoldur.
- Doğa ve mühendislik sistemleri kesin olarak tahmin edilebilir bir tarzda değildirler.
- Sistemler genelde gürültü içerir bu yüzden bir sistemi gerçekçi modellemek için rastgeleliğin bir derecesi modele eklenmelidir.
- Olay tahmin edilmese bile sonraki olayların nasıl dağıtılacağı tahmin edilebilir.
- Verilen veriden ortalama, standart sapma ve benzeri hesaplamaların yapıldığı geleneksel istatistik analizinden farklı olarak bu bölümde ön tanımlı istatisiklere sahip veri kümesi üretme işleminden bahsedilecektir.

# RASGELE SAYI ve DEĞİŞKEN ÜRETİMİ

- Gerçek sistemlerin olasılıklı stokastik davranışı her zaman düzgün (uniform) dağılımla açıklanamaz.
- Bir sistem içinde karşılaşılan stokastik işlemler uniform dağılımdan daha çok diğer teorik dağılımlarla (üstel, normal, gamma v.b.) açıklanabilmektedir.
- Bu nedenle uniform dağılımdan [0,1] aralığında elde edilen rassal sayıların teorik veya deneysel dağılımlara dönüştürülmesi gerekir.
- Bunun için bir dönüşüm tekniği kullanılarak 0-1 aralığında düzgün dağılımdan üretilen **rassal sayı** istenilen dağılım türünden bir **rassal değişkene** dönüştürülür.

# RASTGELE SAYI:

- Herhangi bir dağılımdan rassal değişken üretmek veya bir rassal süreç üretmek için U(0,1) rassal değikenleri gereklidir. Bu nedenle kullanılan bilgisayarda istatistiksel olarak güvenilir bir rassal sayı üreteci olmalıdır. Eğer yoksa bir alt program olarak hazırlanıp yüklenebilir.
- Stokastik faaliyetleri konu alan benzetim modellerinde , olasılık dağılımlarından rassal değişken üretmek için rassal sayılar gereklidir. Bu nedenle bazı yazarlar MONTE-CARLO yöntemini , rassal sayılara dayalı deneylerle uğraşan deneysel matematiğin bir dalı olarak tanımlarlar.

# RASSAL SAYI ÜRETEÇLERİNDEN İSTENİLEN ÖZELLİKLER:

- Rassallık
- Büyük Period
- Yeniden Üretilebilirlik (Reproducibility )
- Hesaplama Etkinliği

# TEKDÜZE DAĞITIMLI RASTGELE SAYILAR

- Dil derleyicileri [0,1] aralığında tekdüze dağılımlı rastgele sayılar için olanak sağlar.
- Böyle yordamlar U [0,1] üreteçleri olarak bilinir.
- Örneğin; BASIC dilinde RND çağrısı 0<=x<=1 aralığında bir x kesiri döndürecektir.
- Kesin konuşmak gerekirse, bu ayrık bir rastgele değişkendir.
- Fakat pratikte sürekli olduğu varsayılır
- 100 defa RND fonksiyonunu çağırırsanız kabaca %10'u 0 ile 0.1 arasında, %10'u 0.1 ile 0.2 arasında vb. dağılımlar oluşacaktır.

# RASSAL SAYI ÜRETİMİ İÇİN TEKNİKLER

## 1) ORTA KARE YÖNTEMİ

- 1916’da Von Neumann ve Metropolis tarafından önerilen “ORTAKARE” yöntemidir
- Bu yöntemde , (m) basamaklı ve genellikle tek olan bir sayı başlangıç değeri olarak alınır
- İkinci aşamada, bu sayının karesi alınarak bulunan sayının ortasındaki m kadar basamaklı sayı alınır
- Bu bir rassal sayı olarak kayıt edilir
- Tekrar bu rassal sayının karesi alınır ve yine ortadaki m basamaklı sayı bir rassal sayı olarak kaydedilir
- Bu işlem , istenilen sayıda rassal sayı elde edilinceye kadar devam eder.

# Örnek:

**$X_0 = 5497$** olarak seçilsin.

$X_0^2 = (5497)^2 = 30.217.0,09 \Rightarrow$ **$X_1 = 2170$**

$U_1 = 0.2170$

$X_1^2 = (2170)^2 = 4.708.900 \Rightarrow$ **$X_2 = 7089$**

$U_2 = 0,7089$

$X_2^2 = (7089)^2 = 50.253.921 \Rightarrow$ **$X_3 = 2539$**

$U_3 = 0,2539$

# Bu tekniğin dezavantajları ;

- İlk sayı ve dizinin tekrar uzunluğu arasındaki ilişkiyi (peryod) önceden bilmek mümkün değildir. Çoğu kez tekrar uzunluğu kısadır
- Elde edilen sayılar rassal olmayabilir
- Yani dizide dejenerasyon söz konusu olabilir.
- Bu yöntemle belirli bir sayı aritmetik işleme başlangıç değeri (seed) olarak verilmekte ve buna bağlı olarak bir sayı hesaplanmaktadır
- Hesaplanan sayı , bu kez başlangıç değeri olarak alınmakta ve yeni bir sayı üretilmektedir
- Böylece her üretilen sayıdan yeni bir sayı üretilerek bir sayı dizisi elde edilmektedir

# TEKDÜZE DAĞITIMLI RASTGELE SAYILAR

- Tek düze rastgele sayı üreteçlerinin çoğu LCG (Linear Congruential Generators) – Lineer Eşleşiksel Üreteçler – şeklindedir.
- Bunlar genelde deterministik olup bir algoritmaya dayalıdır.
- LCG, tahmin edilemez gibi görünen bir dizi sayılar oluşturur.
- Başlamak için bir ilk değer çekirdeğe $Z_0$ ihtiyaç duyar.
- Bu çekirdek ve $Z_k$ dizisinin ardışıl terimleri bir LCG formülüne uygulanır.
- Ardından, $Z_k$, $0 \leq U_k \leq 1$ aralığında bir $U_k$ çıkışına normalize edilir.
- Yani,

$$Z_0 = \text{"çekirdek"}\ , \quad Z_{k+1} = (aZ_k + c) mod(m)$$

$$U_k = \frac{Z_k}{m}$$

a : çarpan, c: artım ve m: genlik

# TEKDÜZE DAĞITIMLI RASTGELE SAYILAR

- Örnek: a=5, c=3, m=16 ve $Z_0$= 7 değerleri ile LCG kullanarak oluşturulan sayı dizisini belirleyelim.

$$U_0 = \frac{Z_0}{m} = \frac{7}{16} \approx 0.437$$

$$Z_{k+1} = (5Z_k + 3)mod(16)$$

Z0=7➔ Z1=(5*7+3) mod 16=6 U1=6/16=0.375 olur.

- Benzer şekilde k=1 için Z2=1 ve U2=0.062 elde edilir.
- Burada Zk m ile bölünme sonucu elde edildiğinden, sadece m adet kalan vardır.
- Dolayısıyla bu örnekte maksimum 16 rastgele sayı mümkündür.
- Büyük m değerleri iyi bir seri elde etmek için gereklidir.
- m adet tekrar için m farklı sayının oluştuğu durumda seçilen LCG'nin tam periyoda sahip olduğu söylenir.
- Bu her bir Zk bir kez tekrar ettiği için tam periyot oluşmaktadır. Yukarıda verilen örnek tam periyoda sahip olup elde edilen rastgele sayılar aşağıdaki tabloda verilmiştir.

| LCG ile oluşturulmuş sözde rastgele dizi | | |
|---|---|---|
| k | $Z_k$ | $U_k$ |
| 0 | 7 | 0.437 |
| 1 | 6 | 0.375 |
| 2 | 1 | 0.062 |
| 3 | 8 | 0.500 |
| | | |
| 4 | 11 | 0.688 |
| 5 | 10 | 0.625 |
| 6 | 5 | 0.313 |
| 7 | 12 | 0.750 |
| | | |
| 8 | 15 | 0.938 |
| 9 | 14 | 0.875 |
| 10 | 9 | 0.563 |
| 11 | 0 | 0.000 |
| | | |
| 12 | 3 | 0.188 |
| 13 | 2 | 0.125 |
| 14 | 13 | 0.813 |
| 15 | 4 | 0.250 |

Dizinin ilk 16 elemanı tablodaki gibidir.

m tekrarlı bir durum için, m farklı rastgele sayı oluştuğunda LCG seçimi tam periyoda sahiptir.

$Z_k$ nın bir tekrarında tam bir döngü izler.

Buradaki, LCG, tam periyoda sahiptir.

# Hull-Dobell Teoremi

- Parametrelerin seçiminde Hull-Dobell teoremi oldukça kullanışlıdır.
- Bu teorem tam periyodu elde etmek için gerekli ve yeterli şartları sağlar.
- LCG ancak ve ancak aşağıdaki üç şartı sağlarsa tam periyoda sahiptir.
  - I. a ve c asal olmalı
  - II. m sayısının bölünebildiği bütün asal sayılara a-1 de bölünebilmelidir.
  - III. Eğer m dörde bölünüyorsa a-1 de 4'e bölünebilir.
- Önceki örnekte
  - 5 ve 3 asal olduğu için şart (I),
  - m=16 olduğundan 16 sadece 2 asal sayısına bölünür ve a-1=5-1=4 de 2 ye bölünür(şart II).
  - 16 dörde bölünmekte ve a-1 de dörde bölünmektedir (şart III).
- Bütün şartlar sağlandığı için tam periyoda sahiptir.
- Bir bilgisayar uygulaması, bu algoritmayı donanım aşamasında ele alır. Çünkü, işlemler hesaplama ve hız odaklıdır.
- İşlem makineye shift register kullanılarak yaptırılır.
- $m$, 2'nin kuvveti şeklinde alınır.

# TEKDÜZE DAĞITIMLI RASTGELE SAYILAR

Örnek: Önceki örnekteki problemi düşünelim. Değişkenler a=5, c=3, ve $m = 16 = 2^4$ . Dolayısıyla LCG 4-bit shift register ile tam sayıları gösterebilir. R=[$r_{-1}$ $r_{-2}$ $r_{-3}$ $r_{-4}$].

Register içeriği 4 bit olacaktır.

$Z_6 = 5$ olduğundan R:[0101] dir

$Z_7$'yi elde etmek için $5Z_6 + 3 = \text{R:}\,[1\;\; 1100] = 28$

Burada baştaki 1 shift-register 4 bit olduğundan kaybedilir.

$28 \bmod(16) = 12 = \text{R:}\,[1100]$

R←5R+3: [1 1 1 1] elde edilir Z8=15 olur.

İkili nokta uygulandığında $(0.1100)_2 = 0.75$

- Gerçek bilgisayarlarda farklı ölçüde üreteçler vardır.
- IBM'in RANDU üreteçleri, $a = 2^{16} + 3$, $c = 0$ ve $m = 2^{31}$ sahiptir.

# U[0,1] ÜRETEÇLERİN İSTATİSTİKSEL ÖZELLİKLERİ

# Üreteçlerin İstatistiksel Özellikleri

- Donanım hesaplanabilirliği için seçilen mod işlemi ve geniş bir periyoda sahip olmanın yanı sıra bir U[0,1] üreteci istatistiksel anlamda iyi davranmalıdır.
- Şu iki özelliğin sağlanması önemlidir:
  - Üreteç tekdüze olmalı: Herhangi bir L uzunluk aralığında oluşan sayıların miktarı, diğer bir L uzunluk aralığında oluşan miktara yakın olmalı.
  - Dizi bağımsız olmalı: Özellikle, herhangi bir sayı bir sonrakine etkisini göstermemelidir. Aksi halde dizi boşluk veya gruplama eğilimi gösterir.
- Üreteçleri test etmek için teorik ve deneysel araçlar vardır.
- Birinci özelliği test etmek için chi-square (Ki-Kare) testi uygulanır.
- Ki-Kare testi; beklenen frekans değerler ile gözlenen frekans değerlerinin karşılaştırılıp, aradaki uyuma bakılmasıdır.

| Frekans Dağıtım Tablosu | | | |
|---|---|---|---|
| Aralık sayısı k | Aralık | Deneysel frekans $f_k$ | Beklenilen frekans $e_k$ |
| 1 | $[0, 1/m]$ | $f_1$ | $e_1$ |
| 2 | $[1/m, 2/m]$ | $f_2$ | $e_2$ |
| 3 | $[2/m, 3/m]$ | $f_3$ | $e_3$ |
| . | . | . | . |
| . | . | . | . |
| . | . | . | . |
| $m$ | $[(m-1)/m, 1]$ | $f_m$ | $e_m$ |

- Bu test için, FDT (Frequency Distribution Table) – Frekans Dağıtım Tablosu- faydalanılır.

- m rastgele sayı oluşturularak ve her birini bir m sınıfına atayarak $f_1, f_2, \ldots f_m$ frekansları çizelgeye geçirilir.

- Her bir sınıf için beklenen $e_k = \frac{n}{m}$ frekansı ile karşılaştırılır.

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{m} \frac{(f_k - e_k)^2}{e_k}$$

$$= \frac{m}{n} \sum_{k=1}^{m} (f_k - \frac{n}{m})^2$$

v=m-1 bağımsızlık derecesidir.

# Üreteçlerin İstatistiksel Özellikleri

- Örnek: SNAFU olarak isimlendirilen U[0,1] üreteci 100 sayı üretilerek test edilmiş ve frekansları sayılmıştır. Frekans değerleri aşağıda verilmiştir.

$0.00 \le x < 0.25$
$0.25 \le x < 0.50$
$0.50 \le x < 0.75$
$0.75 \le x < 1.00$

- Sonuçlar f1=21, f2=31, f3026, f4=22 şeklindedir. Üretecin uniform olup olmadığını bulunuz?

n=100 m=4 sınıf var. n/m=25 sayı her sınıfta olmalıdır. Ki-kare testi ile aşağıdaki gibi bir sonuç elde edilir.

$$\chi^2 = \frac{4}{100}[(21-25)^2 + (31-25)^2 + (26-25)^2 + (22-25)^2] = 2.48.$$

Bağımsızlık derecesi v=4-1=3 $\chi^2$ *değeri* $\alpha = 95\%$ $\chi_c^2$ =7.81(Appendix F) olduğu ki-kare tablosundan bulunabilir.

$\chi^2 < \chi_c^2$ olduğundan uniform olduğu söylenebilir.

## Appendix F THE CHI-SQUARE DISTRIBUTION FUNCTION

**Values of $x$ for given $1 - F(x)$ with $\nu$ degrees of freedom**

| | Complemented distribution, $1 - F(x)$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| Degrees of freedom $\nu$ | 0.10 | 0.05 | 0.02 | 0.01 |
| 1 | 2.706 | 3.841 | 5.412 | 6.635 |
| 2 | 4.605 | 5.991 | 7.824 | 9.210 |
| 3 | 6.251 | 7.815 | 9.837 | 11.341 |
| 4 | 7.779 | 9.488 | 11.688 | 13.277 |
| 5 | 9.236 | 11.070 | 13.388 | 15.086 |
| 6 | 10.645 | 12.592 | 15.033 | 16.812 |
| 7 | 12.017 | 14.067 | 16.622 | 18.475 |
| 8 | 13.362 | 15.507 | 18.168 | 20.090 |
| 9 | 14.684 | 16.919 | 19.679 | 21.666 |
| 10 | 15.987 | 18.307 | 21.161 | 23.209 |
| 11 | 17.275 | 19.675 | 22.618 | 24.725 |
| 12 | 18.549 | 21.026 | 24.054 | 26.217 |
| 13 | 19.812 | 22.362 | 25.472 | 27.688 |
| 14 | 21.064 | 23.685 | 26.873 | 29.141 |
| 15 | 22.307 | 24.996 | 28.259 | 30.578 |
| 16 | 23.542 | 26.296 | 29.633 | 32.000 |
| 17 | 24.769 | 27.587 | 30.995 | 33.409 |
| 18 | 25.989 | 28.869 | 32.346 | 34.805 |
| 19 | 27.204 | 30.144 | 33.687 | 36.191 |
| 20 | 28.412 | 31.410 | 35.020 | 37.566 |
| 21 | 29.615 | 32.671 | 36.343 | 38.932 |
| 22 | 30.813 | 22.924 | 37.659 | 40.289 |
| 23 | 32.007 | 35.172 | 38.968 | 45.638 |
| 24 | 33.196 | 36.415 | 40.270 | 42.980 |
| 25 | 34.382 | 37.652 | 41.566 | 44.314 |
| 26 | 35.563 | 38.885 | 42.856 | 45.642 |
| 27 | 36.741 | 40.113 | 44.140 | 46.963 |
| 28 | 37.916 | 41.337 | 45.419 | 48.278 |
| 29 | 39.087 | 42.557 | 46.693 | 49.588 |
| 30 | 40.256 | 43.773 | 47.962 | 50.892 |

# TEKDÜZE OLMAYAN RASGELE DEĞİŞKENLERİN ÜRETİMİ

# TEKDÜZE OLMAYAN RASGELE DEĞİŞKENLERİN ÜRETİMİ

- İstatistiksel dağıtımda, isteğe bağlı sayıları oluşturabilmek önemlidir. Bunu yapabilmek için bazı bilinen algoritmalar vardır.
  - Ters Dönüşüm Metodu
  - Ret Metodu
  - Konvolüsyon Metodu

# Ters Dönüşüm Tekniği

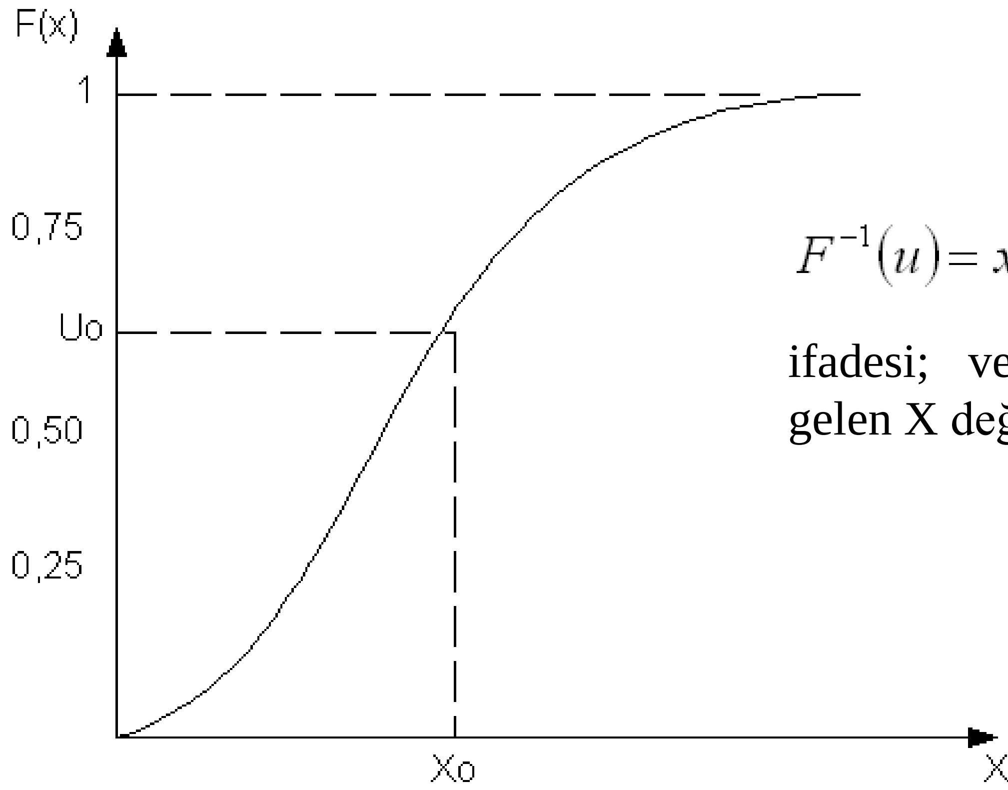
- f(x) olasılık yoğunluk fonksiyonunun verildiğini kabul edelim.
- Amaç f(x) ‘ten bir rassal değişken üretmektir.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \quad 0 \leq F(x) \leq 1$$

$$u = F(x) \quad için \quad x = F^{-1}(u) \rightarrow ters \;\; fonksiyon$$

$$u \sim u(0,1)$$

# Ters Dönüşüm Tekniği




$$F^{-1}(u) = x$$

ifadesi; verilen U değerine karşılık gelen X değerini belirler.

$\boxed{0 \leq F(x) \leq 1}$ dir. F(x) artan bir fonksiyondur.

# TERS DÖNÜŞÜM TEKNİĞİ:

- **Algoritma:**

$1.\ u \sim u(0,1)\ r.d.\quad \ddot{u}ret$

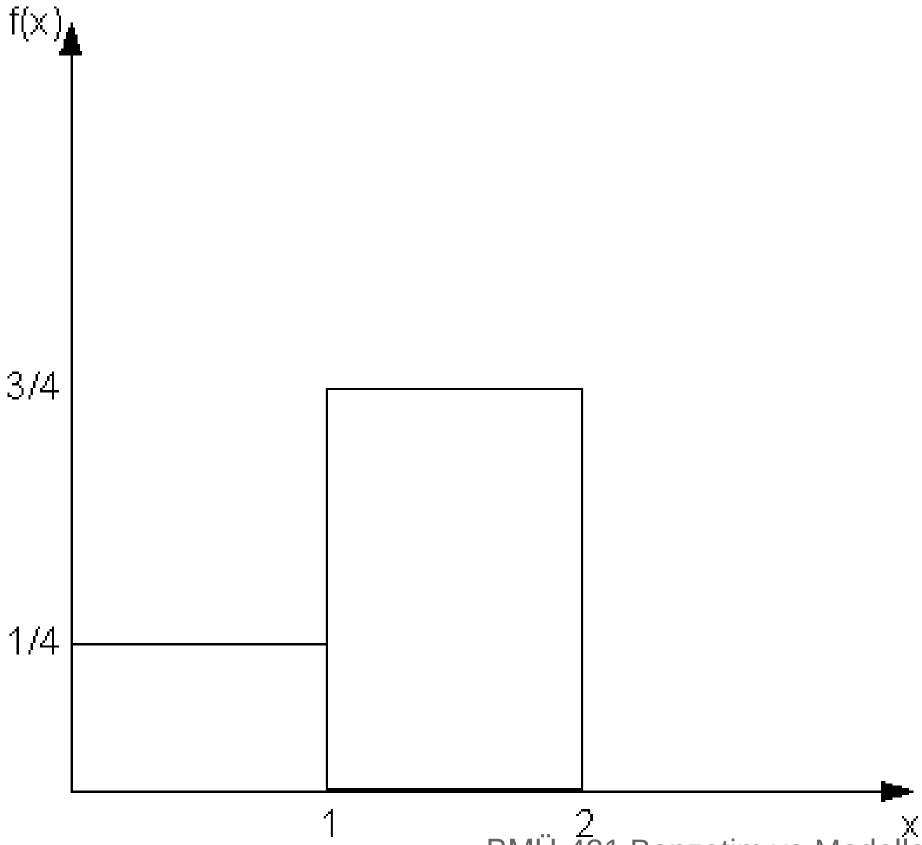
$2.\ x = F^{-1}(u)\ den \qquad X\ r.d.ni$

$ni \quad hesapla$

$3.\ RETURN$

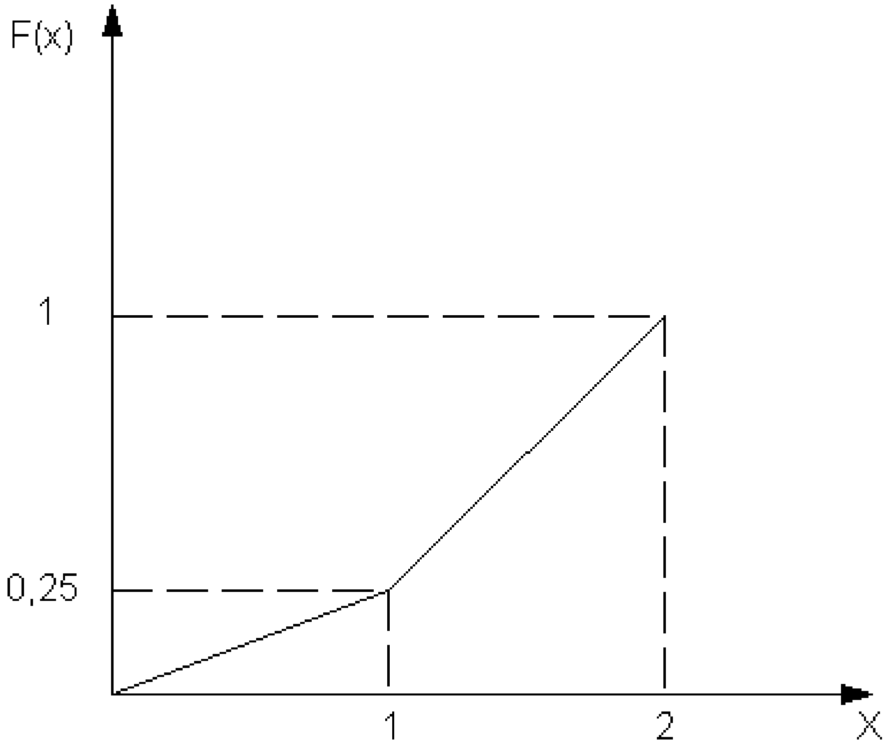
# Ters Dönüşüm Tekniği

## Örnek:




$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4} & 0\le x<1\\[2mm] \dfrac{3}{4} & 1\le x<2\end{cases}$$

# Ters Dönüşüm Tekniği




$$u = F(x) = \int_0^x \frac{1}{4}\,dt \quad 0 \le x \le 1$$

$$= \frac{1}{4}t\Big|_0^x = \frac{1}{4}x$$

$$x = 4u \quad 0 \le u < \frac{1}{4}; \qquad \text{yani} \qquad \left\{ \begin{matrix} x = 0 & u = 0 \\ x = 1 & u = \dfrac{1}{4} \end{matrix} \right\}$$

# Ters Dönüşüm Tekniği

$$u=\int_0^1 \frac{1}{4}dt+\int_1^x \frac{3}{4}dt=\frac{1}{4}t\Big|_0^1+\frac{3}{4}t\Big|_1^x=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$$

$$u=\frac{3}{4}x-\frac{2}{4}\Rightarrow x=\frac{4}{3}u+\frac{2}{3}$$

$$x=\frac{4}{3}u+\frac{2}{3};\ \ \frac{1}{4}\le u<1\ \ ;\text{buradan}\quad \left\{\begin{matrix} x=1 & u=\frac{1}{4} \\ x=2 & u=1 \end{matrix}\right\}dir$$

$$F^{-1}(u)=\begin{cases} 4u & 0\le u<\frac{1}{4} \\ \frac{4}{3}u+\frac{2}{3} & \frac{1}{4}\le u<1 \end{cases}$$

# Ters Dönüşüm Tekniği

ALGORİTMA

$$1.\ u \sim u(0,1)$$

$$2.\ if\ \ u < \frac{1}{4} \Rightarrow x = 4u$$

$$3.\ if\ \ u \geq \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{4}{3}u + \frac{2}{3}$$

4. *RETURN*

# Ters Dönüşüm Tekniği

## Örnek 2:

**Üstel dağılımdan rassal değişken üreten algoritmayı yazın.**

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta}e^{\frac{-x}{\beta}} & x>0\\ 0 & dd\end{cases}$$

$$\mu=\frac{1}{\beta}$$

$$\sigma^2=\frac{1}{\beta^2}$$

$$u=F(x)=\int_0^x\frac{1}{\beta}e^{\frac{-x}{\beta}}=-e^{\frac{-x}{\beta}}\Big|_0^x=-e^{\frac{-x}{\beta}}+1$$

# Ters Dönüşüm Tekniği

$$u = F(x) = 1 - e^{\frac{-x}{\beta}} \Rightarrow$$

$$e^{\frac{-x}{\beta}} = 1 - F(x)$$

$$\frac{-x}{\beta} = \ln(1 - F(x))$$

$$x = -\beta \ln(1 - F(x))$$

$$x = -\beta \ln(1 - u) \;\; veya \;\; x = -\beta \ln(u)$$

# Ters Dönüşüm Tekniği

**Algoritma:**

$$1.\quad u \sim u(0,1)$$

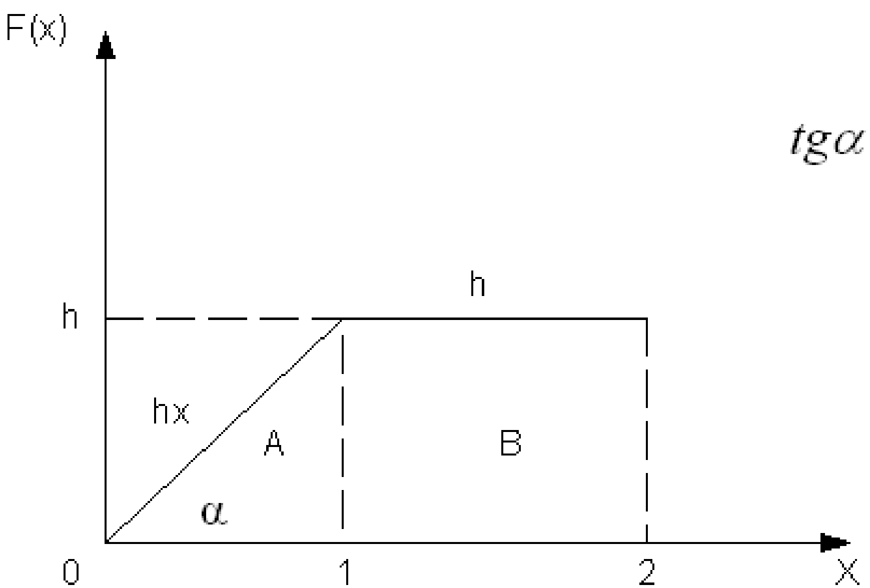
$$2.\quad x = -\beta \ln(u)$$

$$3.\quad RETURN$$

# Ters Dönüşüm Tekniği

## Örnek 2:

Aşağıda verilen olasılık yoğunluk fonksiyonuna uygun rassal değişken üreten algoritmayı ters dönüşüm tekniğiyle çıkarınız




$$tg\alpha = \frac{h}{1} = h$$

Orijinden geçen doğru hx

# Ters Dönüşüm Tekniği

$$f_1(x) = hx \quad f_2(x) = h$$

$$f(x) = \begin{cases} hx & 0 \le x \le 1 \\ h & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

A+B=1 olması gerekir.

A+B; f(x) altındaki toplam alandır.

$$\frac{1}{2}.h.1 + h.1 = 1 \Rightarrow \frac{3}{2}h = 1 \Rightarrow h = \frac{2}{3}$$

Üçgen ve kare alanının hesabından h bulunur

# Ters Dönüşüm Tekniği

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x & 0\le x\le 1\\[2mm] \dfrac{2}{3} & 1\le x\le 2\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^x \frac{2}{3}t\,dt=\frac{1}{3}x^2 & 0\le x\le 1\\[2mm] \displaystyle\int_0^1 \frac{2}{3}t\,dt+\int_1^x \frac{2}{3}t\,dt=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}(x-1) & 1\le x\le 2\end{cases}$$

$$x=F^{-1}(u)\qquad u=\frac{1}{3}x^2\Rightarrow x=\sqrt{3u}\qquad 0\le x\le\frac{1}{3}$$

$$u=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}(x-1)\Rightarrow x=\frac{3}{2}u+\frac{1}{2}\qquad \frac{1}{3}\le u\le 1$$

# Ters Dönüşüm Tekniği

$$x = F^{-1}(u) = \begin{cases} \sqrt{3u} & 0 \le u \le \frac{1}{3} \\ \frac{3}{2}u + \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \le u \le 1 \end{cases}$$

ALGORİTMA

$1.\, u \sim u(0,1)$

$2.\, if\ u < \frac{1}{3} \Rightarrow x = \sqrt{3u}$

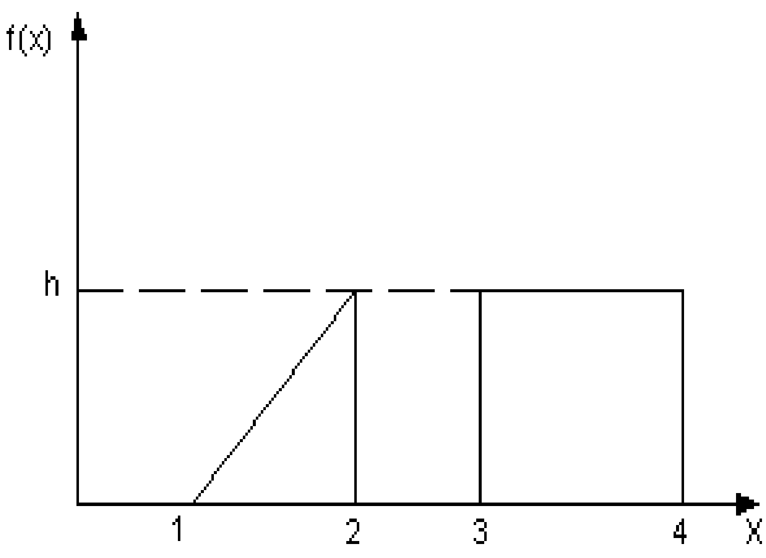
$3.\, if\ u > \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{3}{2}u + \frac{1}{2}$

$4.\, RETURN$

# Ters Dönüşüm Tekniği

## Örnek:

Şekilde görülen f(x) fonksiyonundan ters dönüşüm tekniği ile rassal değişken üreten algoritmayı yazınız




$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & 1 \le x \le 2 \\ f_2(x) & 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

$$A+B=1 \Rightarrow \frac{1}{2}.h.1+h.1=1 \quad \Rightarrow h=\frac{2}{3} \quad m=\frac{2}{3}$$

$$f_1(x)=m(x-x_1) \Rightarrow f_1(x)=\frac{2}{3}(x-1)$$

# Ters Dönüşüm Tekniği

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}(x-1) & 1\le x\le 2\\ \frac{2}{3} & 2\le x\le 4\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}\left(\begin{array}{c}\int_1^x \frac{2}{3}(x-1)dx\\ \int_1^2 \frac{2}{3}(x-1)dx+\int_3^x \frac{2}{3}dx\end{array}\right)\end{cases}$$

# Ters Dönüşüm Tekniği

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}\left(x^2-2x+1\right) & 1\le x\le 2\\ \frac{1}{3}+\frac{2}{3}(x-3) & 3\le x\le 4\end{cases}$$

$$\frac{1}{3}\left(x^2-2x+1\right)\rightarrow\begin{cases}x=1\Rightarrow & u=0\\ x=2\Rightarrow & u=\frac{1}{3}\end{cases}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}(x-3)\rightarrow\begin{cases}x=3\Rightarrow & u=\frac{1}{3}\\ x=4\Rightarrow & u=1\end{cases}$$

# Ters Dönüşüm Tekniği

$$F(x)=u \Rightarrow x = F^{-1}(u)= x$$

$$F^{-1}(u)=\begin{cases} \sqrt{3u}+1 & 0 \le u_1 \le \frac{1}{3} \\ \frac{3}{2}u-\frac{1}{2}+3 & \frac{1}{3} \le u_1 \le 1 \end{cases}$$

**ALGORİTMA**

1. $u \sim u(0,1)$
2. $if\ 0 \le u < \frac{1}{3} \Rightarrow x = \sqrt{3u}+1$
3. $if\ \frac{1}{3} \le u \le 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2}u - \frac{1}{2} + 3$
4. *RETURN*

# Reddetme Tekniği

Reddetme tekniği , sürekli ve sınırlı olan herhangi bir f(x) olasılık yoğunluk fonksiyonundan rassal değişken üretmek için kullanılan genel bir metottur.

Sürekli bir x rassal değişkeni için;

$$\boxed{0 \leq f(x) \leq f\max \qquad a \leq x \leq b}$$

dir.

Reddetme tekniği direk teknikler başarısız veya etkin olmadığında kullanılır.

# Reddetme Tekniği

## Reddetme Tekniğinin Adımları:

- Bu teknikte öncelikle bir t fonksiyonunun tanımlanması gerekir.
- Her $x_i$ için $t(x) \geq f(x)$ olmalıdır.

$$c = \int_{-\infty}^{\infty} t(x)dx \geq \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

t(x) fonksiyonu bir olasıllık yoğunluk fonksiyonu değildir.
Çünkü **$c > 1$**

# Reddetme Tekniği

$r(x) = \frac{t(x)}{c}$ bir olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

Çünkü ;

$$r(x) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t(x)\,dx}{c} = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty} t(x)\,dx = \frac{1}{c}.c = 1$$

# Reddetme Tekniği

r(x) olasılık yoğunluk fonksiyonundan y rassal değişkeni aşağıdaki algoritma ile üretilebilir.

*ALGORİTMA*

1) $r(x)$ *yoğunluk fonksiyonundan y rassaldeğişkeni üret.*

$u_1 \sim u(0,1);\ y = x$

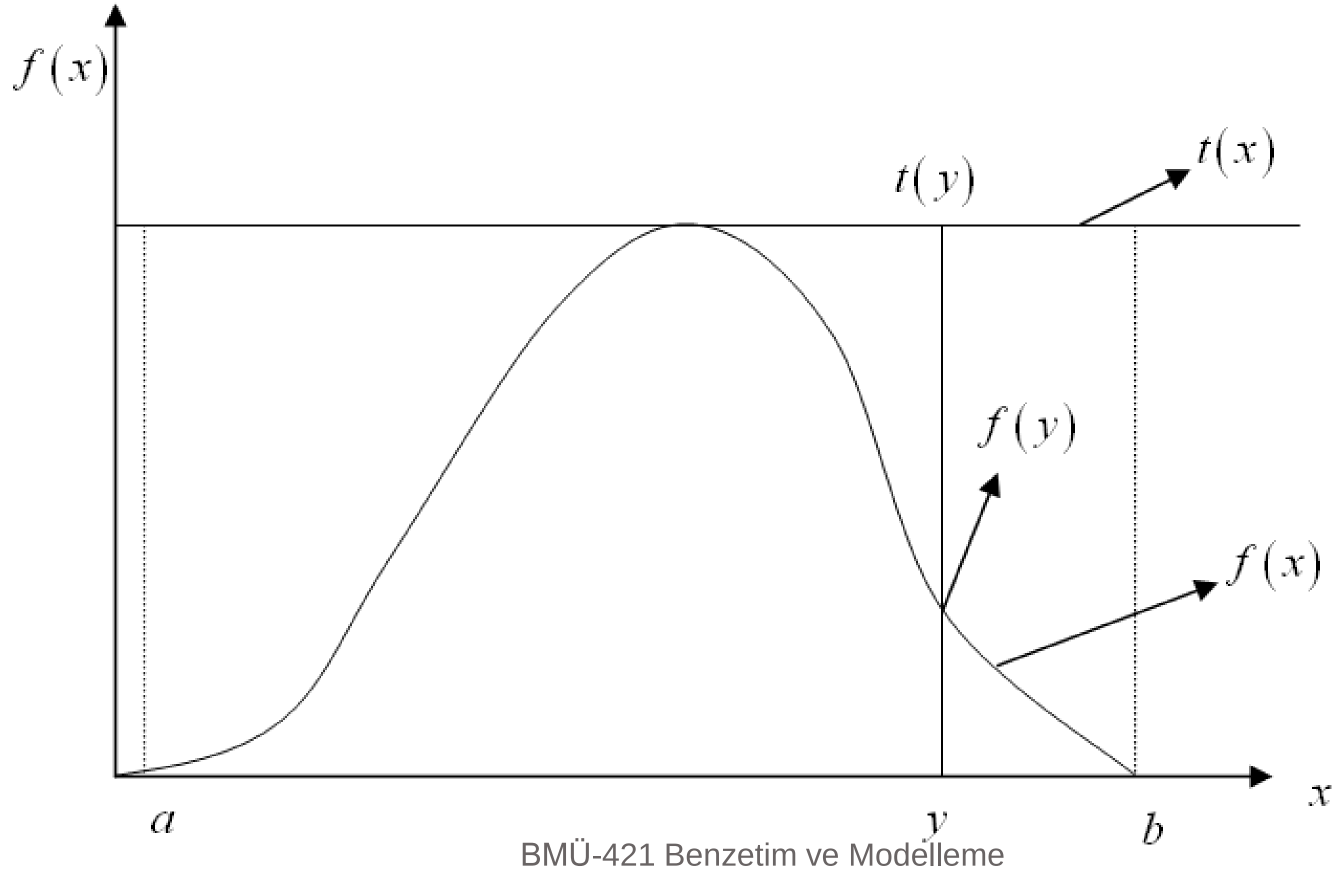
2) $u_2 \sim u(0,1)$ *üret (y'den bağımsız)*

3) $u_2 \leq \dfrac{f(y)}{t(y)}$ *ise*, $x = y$ and return

değilse go to 1 (yeniden dene)

# Reddetme Tekniği

## Örnek:



# Reddetme Tekniği

$$t(x) = q \quad olsun$$

$$c = \int_a^b t(x)dx = \int_a^b q dx = q(b-a)$$

$$r(x) = \frac{t(x)}{c} = \frac{q}{q(b-a)} = \frac{1}{(b-a)}$$

$$r(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)} & a \le x \le b \\ 0 & dd \end{cases}$$

# Reddetme Tekniği

- Ters dönüşüm metodu kullanılarak r(x) yoğunluk fonksiyonundan [a , b] aralığında bir değişken üretilebilir.

$$R(x)=\int_a^y r(x)\,dx=u$$

$$=\int_a^y \frac{1}{b-a}\,dx=\frac{x-a}{b-a}=u \;\Rightarrow\; y=u(b-a)+a$$

# Reddetme Tekniği

*ALGORİTMA*

1) $u_1 \sim u(0,1)$ *üret.* $y = a + u_1(b-a)$

2) $u_2 \sim u(0,1)$ *üret*

3) $u_2 \leq \dfrac{f(y)}{t(y)}$ *ise*, $x = y$

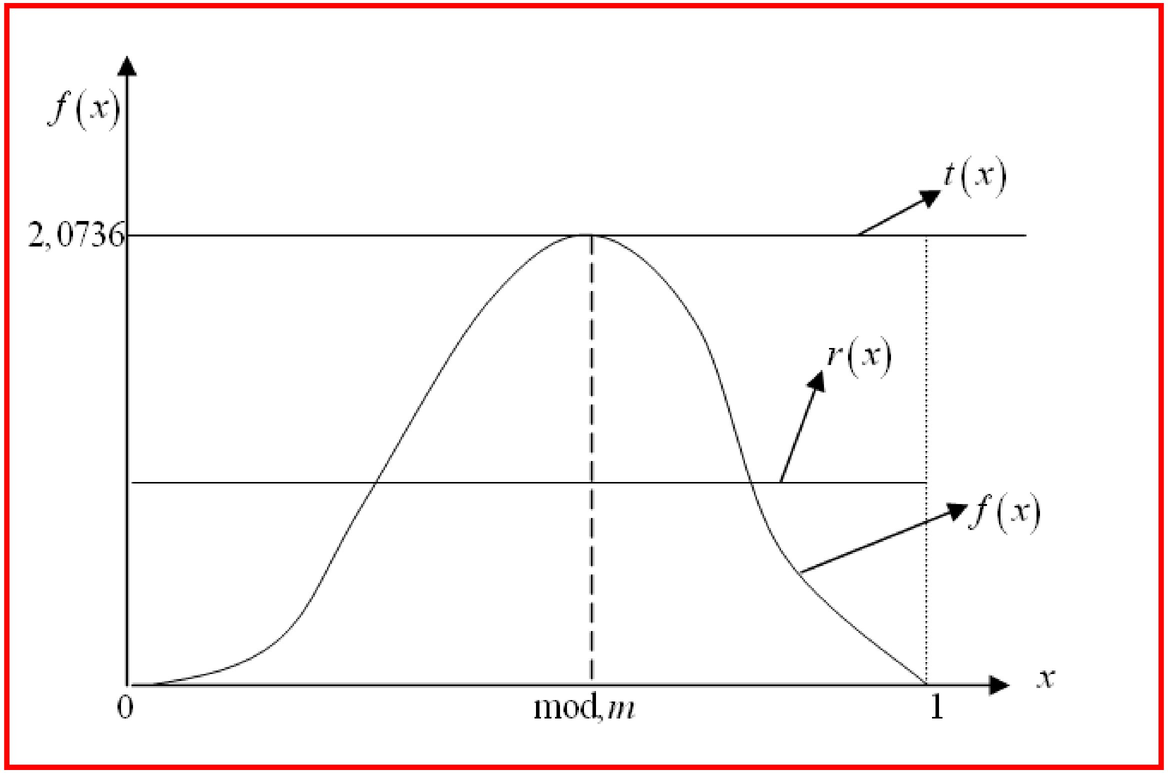
Return

*değilse GoTo* 1

# Reddetme Tekniği

## Örnek:

Beta (4,3) dağılımından rassal değişken üreten algoritmayı reddetme yöntemine göre düzenleyin.



# Reddetme Tekniği

$$f(x)=\frac{x^3(1-x)^2}{B(\alpha_1,\alpha_2)}$$

$$B(\alpha_1,\alpha_2)=\frac{\Gamma(4)\Gamma(3)}{\Gamma(7)}$$

$$\frac{\Gamma(4)\Gamma(3)}{\Gamma(7)}=\frac{3!2!}{6!}=\frac{1}{60}=B(\alpha_1,\alpha_2)$$

Bilgi:
For x>2;
$\Gamma(x)=(x-1)\Gamma(x-1)$
$\Gamma(1)=1$

# Reddetme Tekniği

$$f(x)=\begin{cases}60x^3(1-x)^2 & 0<x<1\\ 0 & dd\end{cases}$$

Maksimum $f(x)$ için; $f'(x)=0$

$$f'(x) = -120x^3(1-x)+180x^2(1-x)^2$$
$$= 60x^2(1-x)(3-5x)=0$$

Çözüm Kümesi: $x=0, x=1, x=0.6$ ve $f(0.6)=2.0736$

$$t(x)=\begin{cases}2,0736 & 0\le x\le 1\\ 0 & dd\end{cases}$$

$$c=\int_0^1 2,0736dx = 2,0736x\Big|_0^1 = 2,0736$$

# Reddetme Tekniği

$$r(x)=\frac{t(x)}{c}=\frac{2,0736}{2,0736}=1$$

$$r(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 0 & dd\end{cases}$$

$$R(x)=\int_0^x 1dx=1x\Big|_0^x=x\Rightarrow u=x$$

# Reddetme Tekniği

*ALGORİTMA*

1) $u_1 \sim u(0,1)$ *üret* $y = x = u_1$

2) $u_2 \sim u(0,1)$ *üret*

3) $u_2 \leq \dfrac{60y^3(1-y)^2}{2,0736}$ *ise* , $x = y$

Return

*değilse* Go To 1

# Reddetme Tekniği

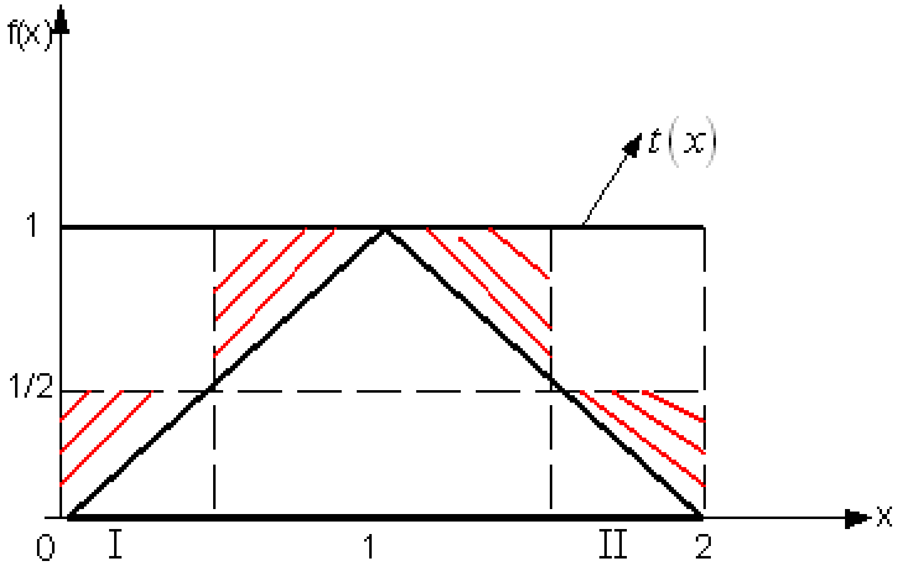
Aşağıdaki $u_1$ ve $u_2$ değerleri için algoritmayı kullanırsak;

| $U_1$ | $U_2$ | y | f(y) | t(y) | $U_2{*}t(u)$ | $U_2 \le f(y)/t(y)$ | | x |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,35 | 0,97 | 0,35 | 1,087 | 2,0736 | 2,011 | 0,524 | Hayır | - |
| 0,22 | 0,15 | 0,22 | 0,389 | 2,0736 | 0,311 | 0,187 | Evet | 0,22 |
| 0,60 | 0,43 | 0,60 | 2,0736 | 2,0736 | 0,891 | 1 | Evet | 0,60 |
| 0,79 | 0,52 | 0,79 | 1,305 | 2,0736 | 1,078 | 0,629 | Evet | 0,79 |
| 0,81 | 0,65 | 0,81 | 1,151 | 2,0736 | 1,347 | 0,555 | Hayır | - |
| 0,20 | 0,57 | 0,20 | 0,307 | 2,0736 | 1,181 | 0,148 | Hayır | - |

# Reddetme Tekniği

## Örnek:

$$f(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le 1 \\ 2-x & 1< x\le 2 \\ 0 & dd \end{cases}$$




$$t(x)=\begin{cases} 1 & 0\le x\le 2 \\ 0 & dd \end{cases}$$

$$c=\int_0^2 1dx = 2$$

$$r(x)=\frac{t(x)}{c}=\frac{1}{2}$$

# Reddetme Tekniği

$$r(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & 0\le x\le 2\\ 0 & dd\end{cases}\qquad R(x)=\int_0^x \frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}x=u \;\Rightarrow\; x=2u$$

*ALGORİTMA*

1) $u_1 \sim u(0,1)$ *üret.* $y=x=2u_1$

2) $u_2 \sim u(0,1)$ *üret*

3) $y\le 1 \quad ve \quad u_2 \le \frac{y}{1} \;\Rightarrow\; x=y$

$y>1 \quad ve \quad u_2 \le \frac{(2-y)}{1} \;\Rightarrow\; x=y$

*ve* Re*turn*

*değilse GoTo*1

# Convolution (Konvolüsyon) Metodu

- Bağımsız ve özdeş dağıtılan ($X_1, X_2, \ldots X_n$ rasgele değişkenlerinin toplamı olan $X$ değişkenidir.
- Eğer $X_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ için aynı yoğunluk fonksiyonu $f_i(x)$'e sahip ise $X$'in yoğunluk fonksiyonu $f(x)$, $n$ tabanlı yoğunluk fonksiyonlarının her biri için konvolüsyondur.

# Konvolüsyon Metodu

- Yani;

$$X = \sum_{k=1}^{n} X_k \quad ise, f(x) = f_1(x) \otimes f_2(x) \otimes \ldots \otimes f_n(x)$$

$f_i(x), X'$in yoğunluk fonksiyonu

$\otimes$ , konvolüsyon ifadesidir.

# Konvolüsyon Metodu

$$f_1(x) \otimes f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda) f_2(x-\lambda) d\lambda$$

- Rasgele değişken kendini, $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$ $n$ tane IID değişkenine ekleyerek bulur.
- Konvolüsyon metodu için özel bir durum, $m$ –Erlang dağıtımıdır.

# $m$ –Erlang Dağıtımı

- $m$ adet IID exponansiyel rasgele değişkenin toplamı olarak tanımlanır.
- Bu dağıtımın ortalaması;

$$\mu = E[\sum_{k=1}^{m} X_k] = \sum_{k=1}^{m} E[X_k] = \frac{m}{\lambda}.$$

$\lambda$ , exponansiyel dağıtımın ortalamasının matematiksel karşıtıdır.

# $m$ –Erlang Dağıtımı

- Rasgele bir $m$ –Erlang değişkeni oluşturma algoritması;

$$x = 0$$

$$for\ k = 1\ \ to\ m$$

$$x = x - \mu \ln(RND)/m$$

$$next\ k$$

$$print\ x$$

# Örnek

- Ortalaması 5 olan 1000 elemanlı $2-$Erlang dizisi oluşturalım ve Ki-Kare testi ile kıyaslama yapalım.

- Çözüm:

$2-$Erlang dağıtımı $\alpha = 2$ ile Gamma dağıtımının özel bir durumudur.

# Örnek:

- Ortalama 5 ise,

$$\frac{2}{\lambda} = 5, \qquad \lambda = 0.4 \text{ olur.}$$

2 –Erlang dağıtımı için yoğunluk fonksiyonu;

$$f(x) = \frac{4}{25} x e^{-2x/5} \quad , \quad x \geq 0 \text{ olur.}$$

### *m*-Erlang

This is a special case of the Gamma distribution with $\alpha = m$ a positive integer ( ) and $\beta = 1/\lambda$. $m$ (a positive integer) is the number of IID exponential variates;

Parameters:

$$\lambda (\lambda > 0).$$

Density function:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{\lambda^m x^{m-1} e^{-\lambda x}}{(m-1)!}, & x \geqslant 0. \end{cases} \tag{C.13}$$

Distribution function:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} \displaystyle\sum_{i=0}^{m-1} \frac{(\lambda x)^i}{i!}, & x \geqslant 0. \end{cases} \tag{C.14}$$

Mean: $\dfrac{m}{\lambda}$.

Mode: $\dfrac{m-1}{\lambda}$.

Variance: $\dfrac{m}{\lambda^2}$.

Maximum likelihood estimators:

$$\hat{\lambda} = \frac{mn}{\sum_{i=1}^{n} x_i}. \tag{C.15}$$

# Konvolüsyon Metodu

- Konvolüsyon metoduna göre, bir Erlang rasgele değişkeni $-2.5\ln(RND)$ ve $-2.5\ln(RND)$ ‘nin toplamıdır.
- Cebirsel karşılığı $-2.5\ln(RND * RND)$

- Sonuçların doğrulanması için gerekli $n = 1000$ rasgele değişken frekans dağıtım tablosunda özetlemiştir.

# Konvolüsyon Metodu

- Her bir aralıktaki beklenilen frekans;

$$E_{[a,b]} = n\int_a^b f(x)dx = \frac{4n}{25}\int_a^b xe^{-2x/5}dx$$

$$= n[e^{-2x/5}(1 - \frac{2x}{5})]_a^b$$

$$= n\left[\left(e^{-2b/5} - e^{-2a/5}\right) + \frac{2}{5}(ae^{-2a/5} - be^{-2b/5})\right].$$

# Frekans Dağıtım Tablosu

| Frekans Dağıtım Tablosu | | |
|---|---|---|
| **Aralık** | Deneysel frekans | Beklenilen frekans |
| **[0.0, 0.5]** | 8 | 17.52 |
| **[0.5, 1.0]** | 37 | 44.03 |
| **[1.0, 1.5]** | 56 | 60.35 |
| **[1.5, 2.0]** | 64 | 69.31 |
| **[2.0, 2.5]** | 76 | 73.03 |
| **[2.5, 3.0]** | 64 | 73.13 |
| **[3.0, 3.5]** | 77 | 70.79 |
| **[3.5, 4.0]** | 78 | 66.90 |
| **[4.0, 4.5]** | 64 | 62.09 |
| **[4.5, 5.0]** | 49 | 56.83 |
| **[5.0, 5.5]** | 53 | 51.44 |
| **[5.5, 6.0]** | 46 | 46.13 |
| **[6.0, 6.5]** | 50 | 41.06 |
| **[6.5, 7.0]** | 35 | 36.31 |
| **[7.0, 7.5]** | 27 | 31.93 |
| **[7.5, 8.0]** | 29 | 27.95 |
| **[8.0, 8.5]** | 21 | 24.36 |
| **[8.5, 9.0]** | 22 | 21.15 |
| **[9.0, 9.5]** | 9 | 18.31 |
| **[9.5, 10.0]** | 25 | 15.80 |
| **[10.0, 10.5]** | 21 | 13.60 |
| **[10.5, 11.0]** | 9 | 11.68 |
| **[11.0, 11.5]** | 4 | 10.01 |
| **[11.5, 12.0]** | 6 | 8.56 |
| **[12.0, 12.5]** | 3 | 7.30 |
| **[12.5, 13.0]** | 5 | 6.22 |
| **[13.0, 13.5]** | 10 | 5.30 |
| **[13.5, 14.0]** | 10 | 4.50 |
| **[14.0, 14.5]** | 5 | 3.82 |
| **[14.5, 15.0]** | 5 | 3.24 |

# Grafiksel Gösterim