Özdevinirler Kuramı ve Biçimsel Diller

1. ve 2. Haftaların Özeti

1. Sonlu Durumlu Tanıyıcı Modeli
(Kısaca Sonlu Özdevinir dendiğinde de bu model anlaşılır)

$$M = < Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$$

Durumlar kümesi

Giriş alfabesi (giriş simgeleri kümesi)

Durum geçiş işlevi

$Q \times \Sigma \Rightarrow Q$ (deterministik)

$Q \times \Sigma \Rightarrow Q$’nun altkümelerine (deterministik değil)

Başlangıç Durumu $q_0 \in Q$

Uç durumlar kümesi $F \subseteq Q$

Örnek

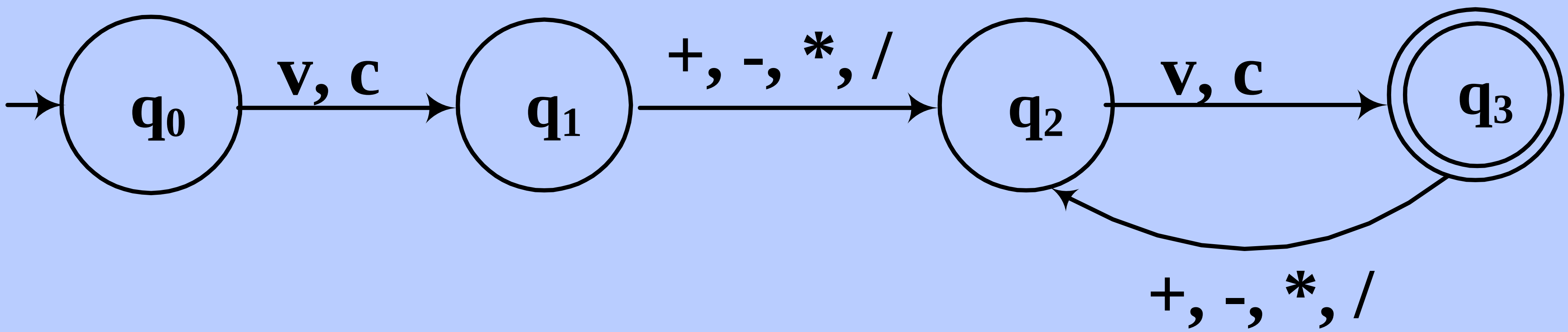
Aritmetik deyimleri tanıyan sonlu özdevinir (tanıyıcı)

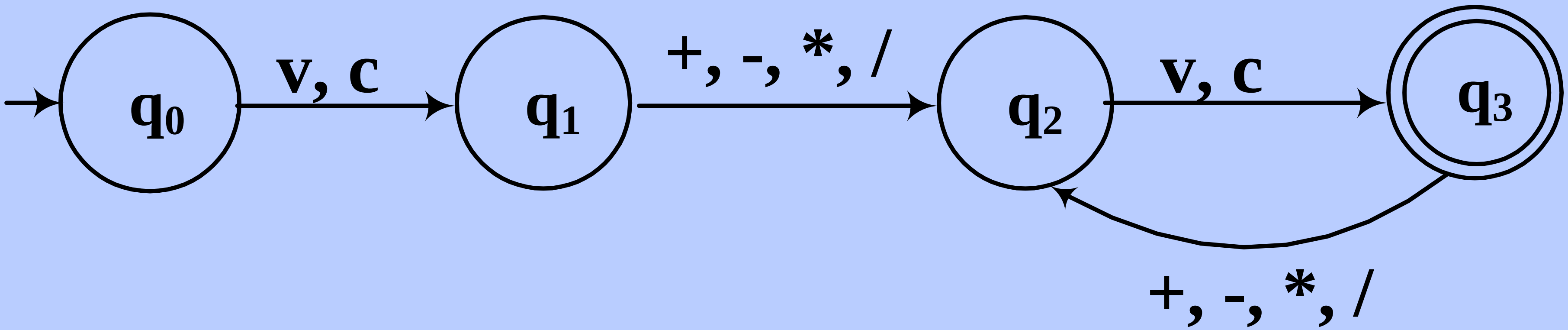
$M = < Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$

$Q = \{ q_0, q_1, q_2, q_3 \}$

$\Sigma = \{ v, c, +, -, *, / \}$

$F = \{ q_3 \}$



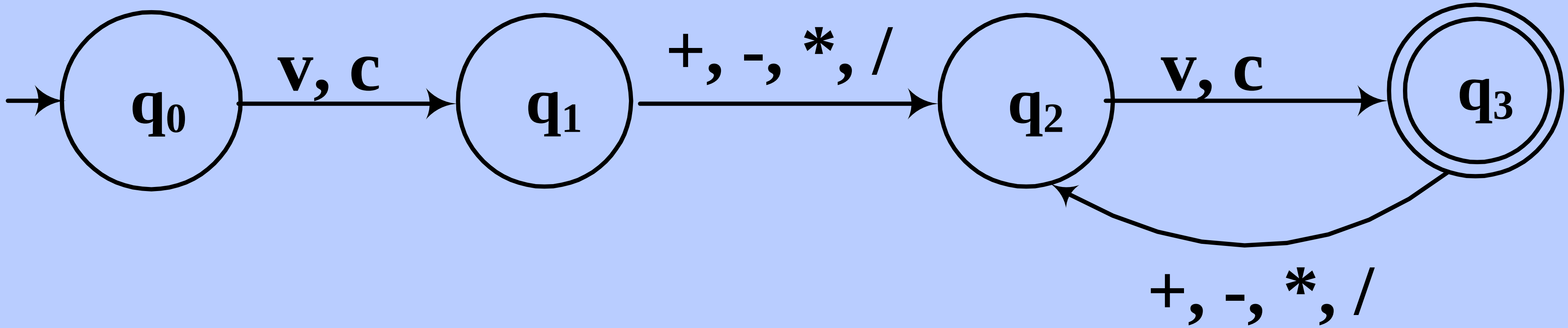


Dizgi örneklerinin işlenmesi: $w_1 = v * c + v - v / c$

Giriş simgeleri →		v		*		c		+		v		-		v		/		c	
Durumlar →	q_0		q_1		q_2		q_3		q_2		q_3		q_2		q_3		q_2		q_3

Dizginin tamamı işlenip bir uç duruma ulaşıldığı için

$w_1 = v * c + v - v / c$ bu makine tarafından tanınır.



Dizgi örneklerinin işlenmesi: $w_2 = v + c + v\ c - v$

Giriş simgeleri →		v		+		c		+		v		c
Durumlar →	q_0		q_1		q_2		q_3		q_2		q_3	

q_3 durumunda c simgesi işlenemediği için makine durur.

Dizginin tamamı işlenip bir uç duruma ulaşılamadığı için
$w_2 = v + c + v\ c - v$ bu makine tarafından tanınmaz.

1. ve 2. Haftaların Özeti

2. Çıkış Üreten Özdevinirler (deterministik)

2.1. Moore Makinesi

$$M = < Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda, q_0 >$$

Durumlar kümesi

Giriş alfabesi

Çıkış alfabesi

Durum geçiş İşlevi

$$Q \times \Sigma \Rightarrow Q$$

(deterministik)

Çıkış işlevi

$$Q \Rightarrow \Delta$$

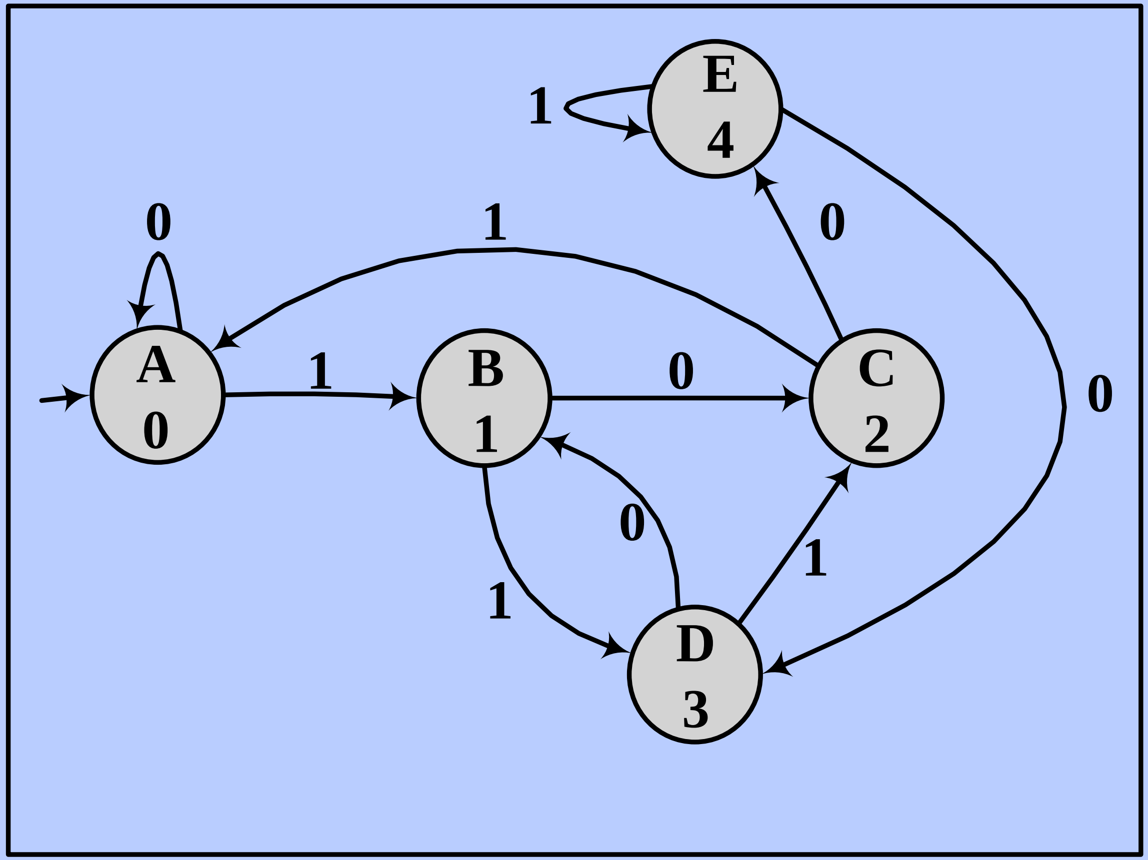
Başlangıç Durumu

$$q_0 \in Q$$

- Örnek. Girişine uygulanan ikili sayı X ise, çıkışında z = Mod(X, 5) değerini üreten makine: $M_{1.8} = < Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda, q_0 >$

ŞD	SD x = 0	 x = 1	z
→ A	A	B	0
B	C	D	1
C	E	A	2
D	B	C	3
E	D	E	4

Durum Çizelgesi



Durum Çizeneği

ŞD	SD x = 0	SD x = 1	z
→ A	A	B	0
B	C	D	1
C	E	A	2
D	B	C	3
E	D	E	4

Durum Çizelgesi

- **Örnek Giriş Dizgisinin işlenmesi:**

  X = 1 1 0 0 0

Girişler	1	1	0	0	0	
Durumlar	A	B	D	B	C	E
Çıkışlar	0	1	3	1	2	4

1. ve 2. Haftaların Özeti

2. Çıkış Üreten Özdevinirler (deterministik)

2.2. Mealy Makinesi

$$M = < Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda, q_0 >$$

Durumlar kümesi

Giriş alfabesi

Çıkış alfabesi

Durum geçiş İşlevi

$Q \times \Sigma \Rightarrow Q$

(deterministik)

Çıkış işlevi

$Q \times \Sigma \Rightarrow \Delta$

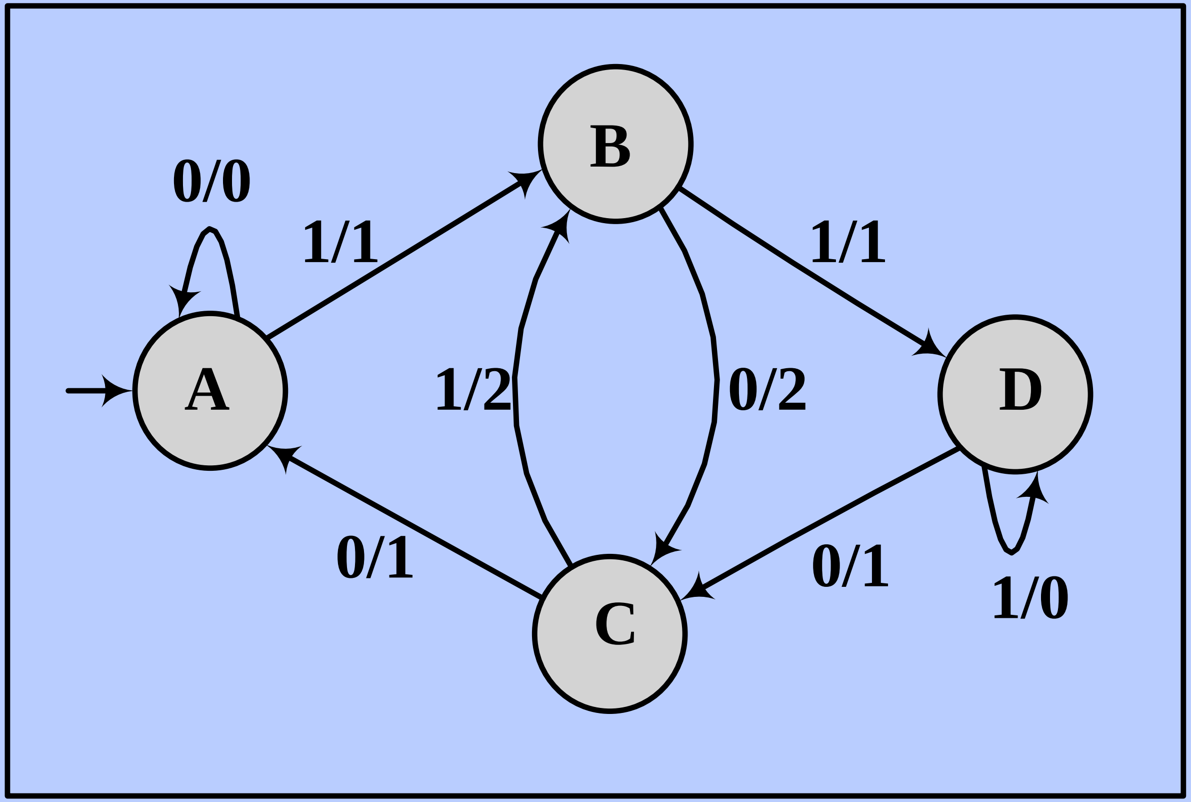
Başlangıç Durumu

$q_0 \in Q$

- **Örnek Mealy Makinesi: $M_{1.9} = < Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda, q_0 >$**

ŞD	SD, z x = 0	 x = 1
→ A	A, 0	B, 1
B	C, 2	D, 1
C	A, 1	B, 2
D	C, 1	D, 0

Durum Çizelgesi



Durum Çizeneği

ŞD	SD, z	
	x = 0	x = 1
→ A	A, 0	B, 1
B	C, 2	D, 1
C	A, 1	B, 2
D	C, 1	D, 0

Durum Çizelgesi

- Örnek Giriş Dizgisinin işlenmesi:

X = 1 0 0 0 1 0

Girişler		1	0	0	0	1	0
Durumlar	A	B	C	A	A	B	C
Çıkışlar		1	2	1	0	1	2

$$A \xrightarrow[Z\ =\ 1\ 2\ 1\ 0\ 1\ 2]{X\ =\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0} C$$

Moore ve Mealy Makinelerinin Eşdeğerliği

- **Moore Makinesine Eşdeğer Mealy Makinesinin Bulunması**

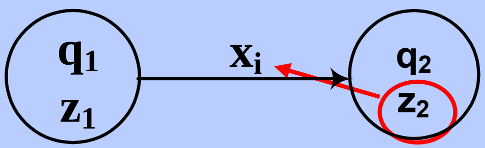
Giriş Dizgisi	$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \ldots\ldots\ldots x_k$
Moore makinesi çıkışı:	$z_0 \quad z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad z_4 \quad z_5 \ldots\ldots\ldots z_k$
Mealy makinesi çıkışı	$z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad z_4 \quad z_5 \ldots\ldots\ldots z_k$

$M_1 = < Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda, q_0 >$ **bir Moore makinesi olsun.**

$M_2 = < Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda', q_0 >$ **eşdeğer Mealy makinesi**

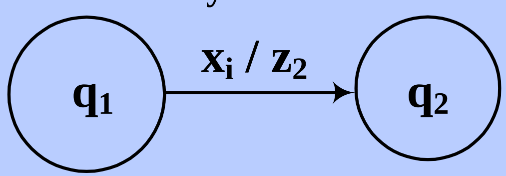
$$\lambda'(q, a) = \lambda(\delta(q, a))$$

Moore Makinesi



□

Mealy Makinesi



- **Mealy Makinesine Eşdeğer Moore Makinesinin Bulunması**

$M_2 = < Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda, q_0 >$ **bir Mealy makinesi olsun.**

$M_1 = < Q', \Sigma, \Delta, \delta', \lambda', q'_0 >$ **eşdeğer Moore Makinesi**

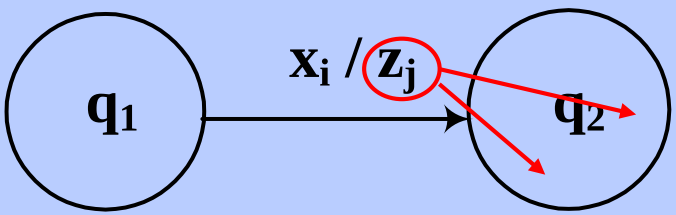
$Q' = Q \times \Delta$

$q'_0 = [q_0, z_j]$ **(z_j = çıkış simgelerinden rasgele seçilmiş biri)**

$\delta'([q_i, z_k], x_j) = [\delta(q_i, x_j), \lambda(q_i, x_j)]$

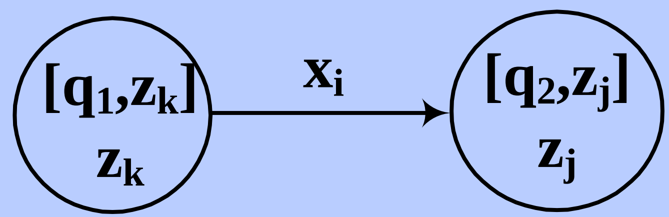
$\lambda'([q_i, z_k]) = z_k$

Mealy Makinesi



$\surd\ z_k \in \Delta$ □

Moore Makinesi



1.3. Sonlu Özdevinirlerin İndirgenmesi

1.3.1.Ardıl, Öncel, Denk ve Ayırdedilebilir Durum Tanımları

- **Bir durumun x ve X ardılları**

$$A \xrightarrow[z\,=\,1]{x\,=\,1} B \qquad\qquad A \xrightarrow[Z\,=\,1\;2\;1\;0\;1\;2]{X\,=\,1\;0\;0\;0\;1\;0} C$$

A'nın 1-ardılı B'dir.

A'nın 100010-ardılı C'dir.

Bir durumun x ve X öncelleri

B'nın 1-öncellerinden biri A'dır.

C'nin 100010-öncellerinden biri A'dır.

1.3. Sonlu Özdevinirlerin İndirgenmesi

1.3.1.Ardıl, Öncel, Denk ve Ayırdedilebilir Durum Tanımları

- **M makinesi S_1 ve S_2 durumlarından herhangi birinde iken, hangi giriş simgesi uygulanırsa uygulansın makine hep aynı çıkış simgesini üretiyorsa, bu durumlara 1-denk durumlar denir.**
- **M makinesi S_1 ve S_2 durumlarından herhangi birinde iken, uzunluğu n ya da daha kısa olan hangi giriş dizgisi uygulanırsa uygulansın, makine hep aynı çıkış dizgisini üretiyorsa, bu durumlara n-denk durumlar denir.**
- **Tüm n'ler için n-denk olan durumlara denk durumlar denir.**
- **n-ayırdedilebilir durumlar, Ayırdedilebilir durumlar.**

1.3.2. İndirgeme Yöntemi

- **Sonlu özdevinirlerin indirgenmesi için denklik bölümlemeleri (*equivalence partitions*) kullanılır. Bir M makinesi için, P_k ile gösterilen k-denklik bölümlemesi, k-denk durumların aynı bölümde yer aldığı bir bölümlemedir.**

- **P_k denklik bölümlemsinden, P_{k+1} denklik bölümlenmesinin türetilmesi için aşağıdaki Teorem'den yararlanılır.**

- **Teorem: M makinesinin S_1 ve S_2 durumunun (k+1)-denk olması için aşağıdaki iki koşulun sağlanması gerekli ve yeterlidir.**

  1. S_1 ve S_2 k-denk olmalı (P_k denklik bölümlemesinde aynı bölümde bulunmalı).

  2. Tüm x giriş simgeleri için S_1 ve S_2 durumlarının x-ardılları da k-denk olmalı (P_k denklik bölümlemesinde aynı bölümde bulunmalı).

- **Eğer $P_{k+1} = P_k$ bulunursa, Denklik Bölümlemesi elde edilmiş olur : $P = P_k$**

Örnek 1.11. Mealy türü makine ($M_{1.11}$)

	Önceki Durum	
ŞD	x = 0	x = 1
A	A, 0	D, 1
B	C, 0	E, 1
C	G, 0	E,1
D	G, 0	F, 1
E	E, 1	C, 0
F	B, 0	D, 1
G	B, 0	E, 1

- A nın 0 ardılı A dır.
- A nın 1 ardılı D dir.
- A nın 010 ardılı G dir.
- D nin 1 öncelleri A ve F dir.
- A ve B 1-denktir.
- D ve E 1-ayırdedilebilirdir.
- A ile B 2-ayırdedilebilirdir.

$$A \xrightarrow[1\,1]{1\,1} F \qquad B \xrightarrow[1\,0]{1\,1} C$$

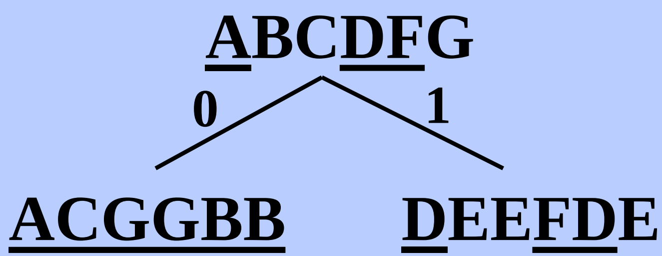
- C ve G denktir.

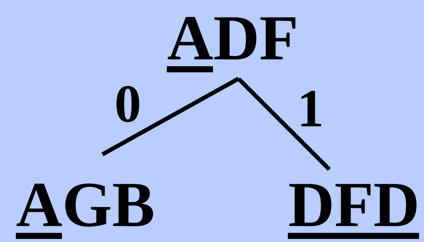
1.3.2.1. Mealy Makinelerinin İndirgenmesi

- **Örnek 1.11. Mealy türü $M_{1.11}$ makinesinin indirgenmesi**

	Önceki Durum	
ŞD	x = 0	x = 1
A	A, 0	D, 1
B	C, 0	E, 1
C	G, 0	E,1
D	G, 0	F, 1
E	E, 1	C, 0
F	B, 0	D, 1
G	B, 0	E, 1

P_0 = (ABCDEFG)
P_1 = (ABCDFG)(E)
P_2 = (ADF)(BCG)(E)
P_3 = (A)(DF)(BCG)(E)
P_4 = P_3 = (A)(DF)(BCG)(E)
P = (A)(DF)(BCG)(E)





ŞD	Önceki Durum x = 0	Önceki Durum x = 1
A	A, 0	D, 1
B	C, 0	E, 1
C	G, 0	E,1
D	G, 0	F, 1
E	E, 1	C, 0
F	B, 0	D, 1
G	B, 0	E, 1

Denklik bölümlenmesi:
P = (A)(DF)(BCG)(E)

- **A** için S_0,
  DF için S_1,
  BCG için S_2,
  E için S_3

ŞD	SD, z x = 0	SD, z x = 1
S_0	S_0, 0	S_1, 1
S_1	S_2, 0	S_1, 1
S_2	S_2, 0	S_3, 1
S_3	S_3, 1	S_2, 0

1.3.2.2. Moore Makinelerinin İndirgenmesi

- **Örnek 1.12. Moore türü M1.12 makinesinin indirgenmesi**

$$P_0 = (A)(BDGH)(CEF)$$

$$P_1 = (A)(BG)(DH)(C)(EF)$$

$$P_2 = P_1 = (A)(BG)(DH)(C)(EF)$$

$$P = (A)(BG)(DH)(C)(EF)$$

	SD		
ŞD	x = 0	x = 1	z
A	C	B	0
B	B	D	1
C	A	H	2
D	E	G	1
E	C	D	2
F	C	H	2
G	G	H	1
H	F	B	1

1.3.2.2. Moore Makinelerinin İndirgenmesi

- **Örnek 1.12. Moore türü M1.12 makinesinin indirgenmesi**

ŞD	SD x = 0	SD x = 1	z
A	C	B	0
B	B	D	1
C	A	H	2
D	E	G	1
E	C	D	2
F	C	H	2
G	G	H	1
H	F	B	1

Denklik bölümlemesi:

P = (A)(BG)(DH)(C)(EF)

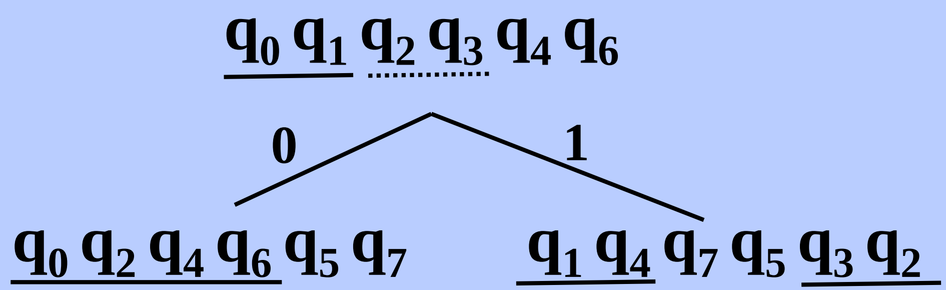
A için S_0,
BG için S_1,
DH için S_2,
C için S_3
EF için S_4

ŞD	SD, z x = 0	SD, z x = 1	z
S_0	S_3	S_1	0
S_1	S_1	S_2	1
S_2	S_4	S_1	1
S_3	S_0	S_2	2
S_4	S_3	S_2	2

1.3.2.3. Deterministik Sonlu Özdevinirlerin (DFA) İndirgenmesi

ŞD	SD x = 0	SD x = 1
$\rightarrow q_0$	q_0	q_1
q_1	q_2	q_4
q_2	q_4	q_7
q_3	q_6	q_5
q_4	q_5	q_3
q_5	q_5	q_7
q_6	q_7	q_2
q_7	q_7	q_5

$$P_0 = (q_0\ q_1\ q_2\ q_3\ q_4\ q_6)(q_5\ q_7)$$
$$P_1 = (q_0\ q_1)(q_2\ q_3)(q_4\ q_6)(q_5\ q_7)$$
$$P_2 = (q_0)(q_1)(q_2\ q_3)(q_4\ q_6)(q_5\ q_7)$$
$$P_3 = P_2 = (q_0)(q_1)(q_2\ q_3)(q_4\ q_6)(q_5\ q_7)$$
$$P = (q_0)(q_1)(q_2\ q_3)(q_4\ q_6)(q_5\ q_7)$$



1.3.2.3. Deterministik Sonlu Özdevinirlerin (DFA) İndirgenmesi

ŞD	SD x = 0	SD x = 1
→ q_0	q_0	q_1
q_1	q_2	q_4
q_2	q_4	q_7
q_3	q_6	q_5
q_4	q_5	q_3
q_5	q_5	q_7
q_6	q_7	q_2
q_7	q_7	q_5

Denklik bölümlemesi:

P = $(q_0)(q_1)(q_2\ q_3)(q_4\ q_6)(q_5\ q_7)$

q_0 için S_0,

q_1 için S_1,

$q_2\ q_3$ için S_2,

$q_4\ q_6$ için S_3,

$q_5\ q_7$ için S_4

ŞD	SD x = 0	SD x = 1
→ S_0	S_0	S_1
S_1	S_2	S_3
S_2	S_3	S_4
S_3	S_4	S_2
S_4	S_4	S_4