Olay-Tabanlı Modelleme

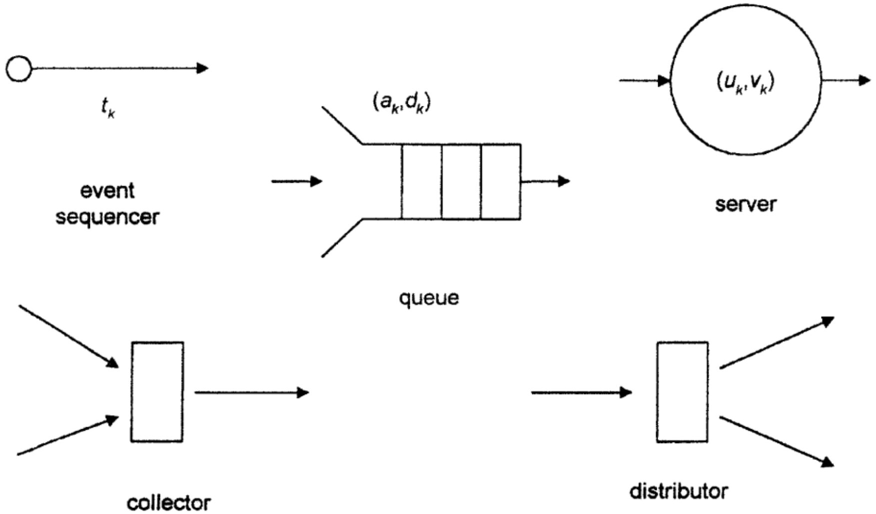
İlhan AYDIN

Olay-Sürümlü Modeller

- Zaman sürümlü modeller düzenli zaman aralıklarında senkron bir tarzda ilerleyen sinyallere sahip sistemleri karakterize eder.
- Olay sürümlü modeller asenkron olup, düzensiz ve çoğunlukla rastgele aralıklarla oluşan çok basit sinyallere sahiptir.
  - Çoğunlukla sinyal ikili olup bir veya sıfır değerini alır.
  - Olayların ne olduğu değil ne zaman oluştuğu önemlidir.
  - Sayısal bilgisayar sistemleri olay-tabanlı sistemler için tipik bir örnektir.
  - Örneğin, sayısal iletişim sisteminde rastgele fakat istatistiksel bir şekilde dağılım ile mesaj varışları modellenir.
  - Mesajın kendisinden çok uzunluğu ve varış oranı önemlidir.
  - Mesajın sistemde olması lojik 1 olmaması ise lojik 0 ile verilir.
  - Mesajlar FIFO sistemine göre kuyrukta bekler.

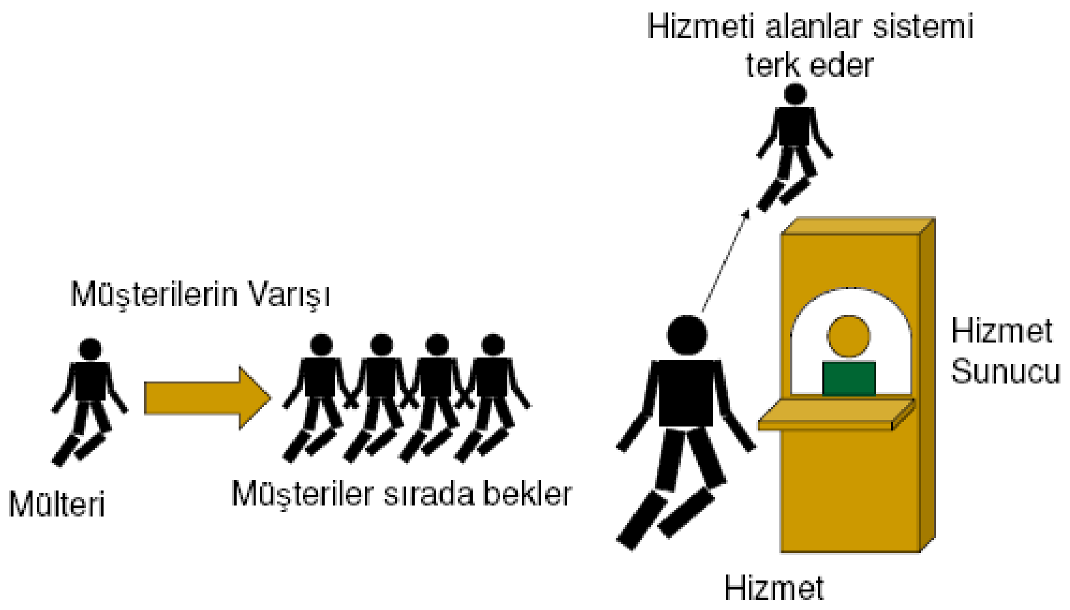
Benzetim Diyagramları

- Olay tabanlı modeller benzetim diyagramlarına sahiptir.
- Benzetim diyagramının genel şekli aşağıda verilmiştir.
- İlk yapı olay dizici olup belirli zamanlarda varan olayları kabul eder.
- Dizilen olaylar müşteri olarak kabul edilir. Örneğin bir bankada işlem görmek için bekleyen müşteriler.
- Eğer servis dolu ise gelen müşteriler kuyrukta bekler. Genellikle ilk giren ilk çıkar prensibi (FIFO) ile bir kuyruk oluşturulur.
- Kuyruktan ayrılan müşteriler serviste işlem görür.
- Dağıtıcı kuyrukta bekleyen müşterileri servislere veya diğer kuyruklara yönlendirme işlemini yapar.
- Kolektör ise tek bir kuyruk oluşturmak için iki veya daha fazla kuyruğun olay zamanını birleştirir.

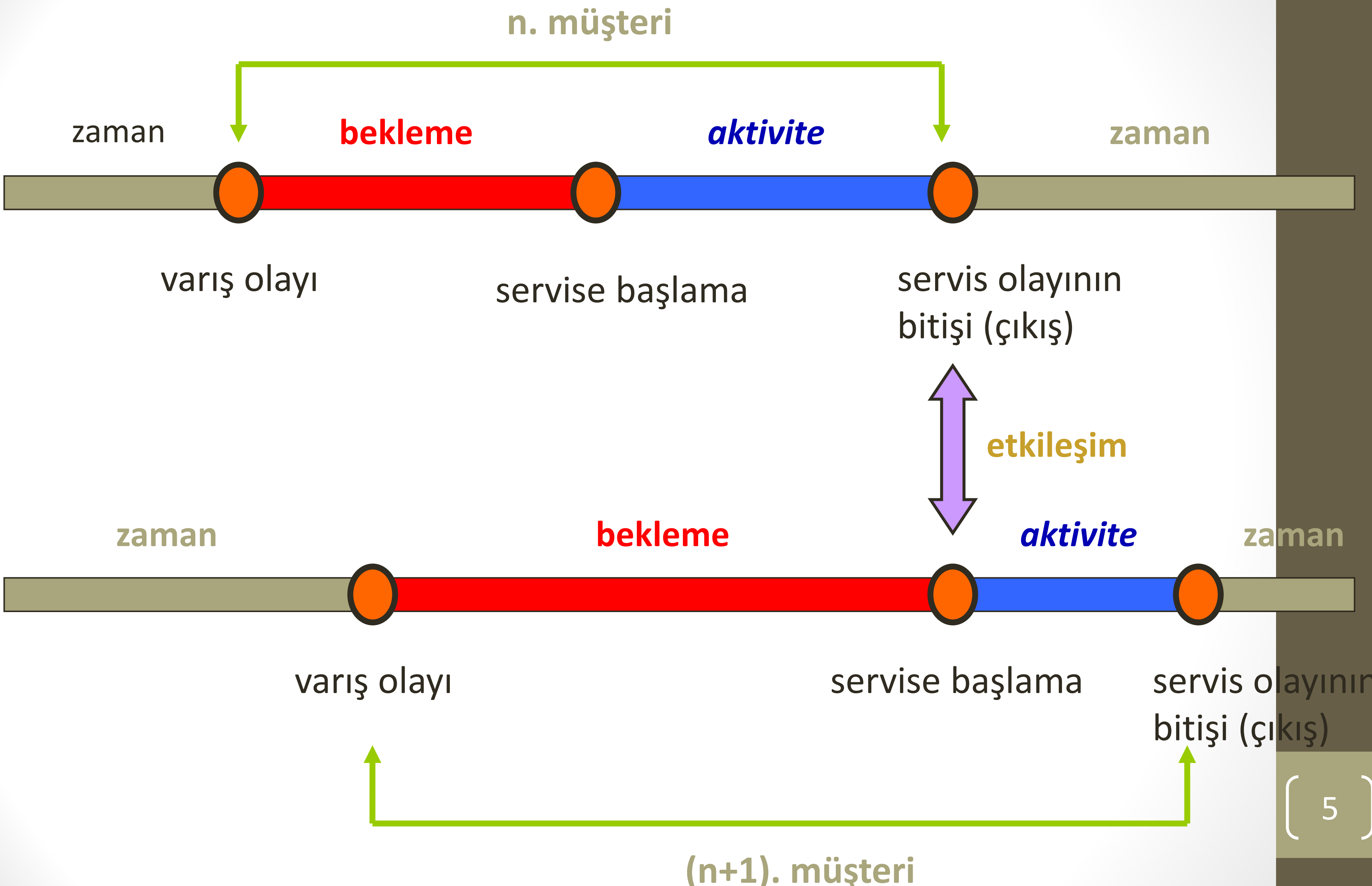


KUYRUK SİSTEMİ

- Kuyruk sistemleri,
  - Üretimde, atölye çevresi kuyruk şebekelerinin karmaşık bir ilişkisi olarak düşünülebilir.
  - Bir iş merkezinde tamamlanan işler, bir sonraki iş merkezinde işlenebilmek için kuyruğa girerler.
  - Bir atölyede çizelgeleme işlemi dinamik bir problemdir.
  - Akış oranları ve diğer performans ölçütleri kuyruk teorisinden yararlanılarak bulunabilir.



Bir Nesnenin Sistemde Akışını Tanımlayan Proses



KUYRUK SİSTEMİ

- Hizmet sistemlerinde, kuyruk problemleri ile sık sık karşılaşılmaktadır.
- Hizmet sistemlerindeki kuyruk olayları ile günlük yaşantımızda sık sık karşılaşmaktayız.
- Michael Fortina (1988), yaptığı bir araştırma sonucunda, çoğu insan tüm hayatı boyunca toplam 5 yılını kuyruklarda bekleyerek, 6 ayını da trafik ışıklarında bekleyerek geçirmektedir.
- Restaurantlarda, bankada, süpermarketlerde, berberlerde, çevre yolundaki gişe önlerinde devamlı olarak kuyruklarla karşılaşırız.
- Bir havaalanında piste uçakların inmesi bir kuyruk problemidir. Havadaki uçaklar, servis görmeyi bekleyen müşteriler, pist ise servis olarak düşünülebilir.
- Telefon, trafik sistemleri, karmaşık kuyruk sistemlerine örnektir. Telefon call'lar switching (anahtarlama) sistemi ile yönlendirilir. Bir sonraki switching'e ulaşıncaya kadar ya da son noktaya ulaşmak için kuyruk oluşturmaktadır.

KUYRUK SİSTEMİ

- Bir kuyruk sistemi,
  - Hizmet veren bir veya birden fazla servise sahiptir.
  - Sisteme gelen müşteriler tüm servisleri dolu bulursa, servisin önündeki kuyruğa ya da kuyruklardan (birden fazla kuyruk varsa) birisine girer.
- Kesikli olay benzetim çalışmalarının büyük bir kısmını,
  - gerçek hayatta karşılaşılan kuyruk sistemlerinin modellenmesi oluşturmakta veya
  - benzetim edilen sistemin en azından bazı bileşenleri bir kuyruk sistemidir.
- Bu nedenle,
  - Kuyruk sisteminin standart notasyonlarının ve
  - kuyruk sistemi tarafından sağlanana servis kalitesini belirleyen performans ölçülerinin bilinmesi önemlidir.
- Aşağıdaki tablo da, pratikte karşılaşılan kuyruk sistemlerine bazı örnekler verilmiştir.

KUYRUK SİSTEMİ

SİSTEM	SERVİSLER	MÜŞTERİLER	
Banka	Vezneler	Müşteriler	
Hastane	Doktorlar, Hemşireler Yataklar	Hastalar	

KUYRUK SİSTEMİ

SİSTEM	SERVİSLER	MÜŞTERİLER	
Bilgisayar Sistemi	Merkezi İşlem Birimi, Girdi-Çıktı Aygıtları	İşler	
Montaj Hattı	İşçiler, Makinalar	Üretilen birimler	
Havaalanı	Pist,Güvenlik Birimleri	Uçaklar, Yolcular	

Bir Kuyruk Sisteminin Bileşenleri

- Bir kuyruk sisteminin 5 bileşeni vardır. Bunlar;
  - Varış prosesi (Arrival process)
  - Servis prosesi (Service process)
  - Kuyruk disiplini (Queueing Discipline)
  - Sistemde izin verilen müşteri sayısı
  - Müşterinin geldiği yığının genişliği

Bir Kuyruk Sisteminin Bileşenleri

- ***Varışlar*:**
  - Müsteriler sisteme belirli bir varış yapısında girerler
- ***Kuyrukta Bekleme*** :
  - Müşteriler sırada veya sıralarda hizmet almak için beklerler
- ***Hizmet*** :
  - Müşterilerin hizmeti alması ve müteakiben sistemi terk etmeleri gereklidir

Bir Kuyruk Sisteminin Bileşenleri

1.Varış Prosesi

Bir kuyruk sisteminde **varış prosesi**; müşterilerin sisteme geliş modelini tanımlar. Bu durumda varış prosesi, müşterilerin varışlar arası zamanları ile karakterize edilir. Varışlar, sabit zamanlarda ya da rassal zamanlarda olabilir. Varışlar rassal zamanlarda oluyorsa, varışlar arası zaman bir dağılım ile modellenir.

A_i : (i-1). ve i. müşteri varışları arasındaki varışlar arası zaman aralığı olsun.

a_1, a_2, ...: rassal değişkenlerdir.

E(a) : varışlararası ortalama (beklenen) zaman

λ = 1/E(A) : Müşterilerin varış oranı (Birim zamanda gelen müşteri sayısı)

Örnek : Bir dakikada 5 varış olan bir sistemde varışlar arası zaman aralığı ortalaması

$E(a)=1/\lambda=1/5=0.20$ dak

Varış Prosesi

- **Deterministik Varış Süreci**
- **Rassal Varış Süreci**
  - *Poison Dağılımı*
- Poison Dağılımına Bağlı Olan Varışlar için Koşullar
- *Düzenlilik* – Müşteri hizmet imkanından her an faydalanabilir
- *Durağanlık*– Bekleme hattı her müşteri için aynı zaman ve uzunluktadır, durağandır.
- *Bağımsızlık* – Müşteriler birbirinden bağımsız olarak sisteme giriş yaparlar.
- Poison Dağılıma Bağlı Varışlar

t süresinde **k** varışın olma olasılığı

$$P(X=k)=\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

λ = birim zamanda ortalama varış hızı
t = zaman
e = 2.7182818
k! = k (k-1) (k-2) (k-3) . . . (3) (2) (1)

Örnek - Bilgisayar Donanım Problemi

- Müşteriler Poison dağılıma uygun varış yapmaktadır.
- Salı 8:00-9:00 = 6 müşteri (ortalama) ise;
- 8:00-8:30 Saatleri arasında varış yapma olasılığı nedir?
- λ = 6 müsteri varısı / saat
- t = 30 dk. = 0.5 saat
- λ t = 6(0.5) = 3 müşteri

$$\boxed{P(X=k)=\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}}$$

$P(X=0) = 3^0 e^{-3} / 0! = e^{-3} = 0.049787$

$P(X=1) = 3^1 e^{-3} / 1! = 3e^{-3} = 0.149361$

$P(X=2) = 3^2 e^{-3} / 2! = 9e^{-3}/2 = 0.224042$

$P(X=3) = 3^3 e^{-3} / 3! = 27e^{-3}/6 = 0.224042$

$P(X=4) = 3^4 e^{-3} / 4! = 81e^{-3} /24= 0.168031$

Örnek:

- **Örnek 3.18.** Bir şehirde ender rastlanan bir hastalıktan, bir hafta içinde ortalama ölen kişi sayısı 4’ dür. Belli bir hafta içinde bu hastalıktan,
- **a)** Hiç kimsenin ölmemesi
- **b)** En az 2 kişinin ölmesi
- **c)** 3 kişinin ölmesi
- olasılıklarını hesaplayınız.

Örnek:

X: *bir haftada bu hastalıktan ölenlerin sayısı*

$$\boxed{P(X=k)=\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}}$$ k= $0,1,2,\ldots,\ \lambda=4$

a) $P(X=0)=\frac{e^{-4}4^0}{0!}=0.0183$

b) $P(X\geq 2)=1-P(X<2)=1-\left(P(X=0)+P(X=1)\right)=1-\left(\frac{e^{-4}4^0}{0!}+\frac{e^{-4}4^1}{1!}\right)=$

$=1-(0.0183+0.0733)=1-0.0916=0.9084$

c) $P(X=3)=\frac{e^{-4}4^3}{3!}=0.195$

Bir Kuyruk Sisteminin Bileşenleri

2.Servis Prosesi

Servis prosesi, servis sayısı ve servis zamanı dağılımı ile karakterize edilir. Her servis kendisine ait bir kuyruğa veya tüm servisleri besleyen ortak (tek) bir kuyruğa sahip olabilir.

$\mathbf{S_i}$: i. müşterinin servis zamanı

S_1, S_2, ... rassal değişkenler

E(s) : Bir müşterinin servis zamanı ortalaması

$\mu = 1/E(s)$: Servis oranı (Birim zamanda servis gören müşteri sayısı)

Bir Kuyruk Sisteminin Bileşenleri

Örnek :

Ortalama servis zamanı 2 dakika ise, servis oranı

$\mu=1/E(s)=1/2=0.5$ servis/dakika

Kuyruk sistemlerinde en önemli parametre trafik yoğunluğudur.

ρ = (varış oranı)/[(servis oranı)*c]

c: servis sayısı

$\rho = L / (\mu * c) = [1/E(a)] / [\{1/E(s)\}*c] = E(s)/[E(a)*c]$

Bir Kuyruk Sisteminin Bileşenleri

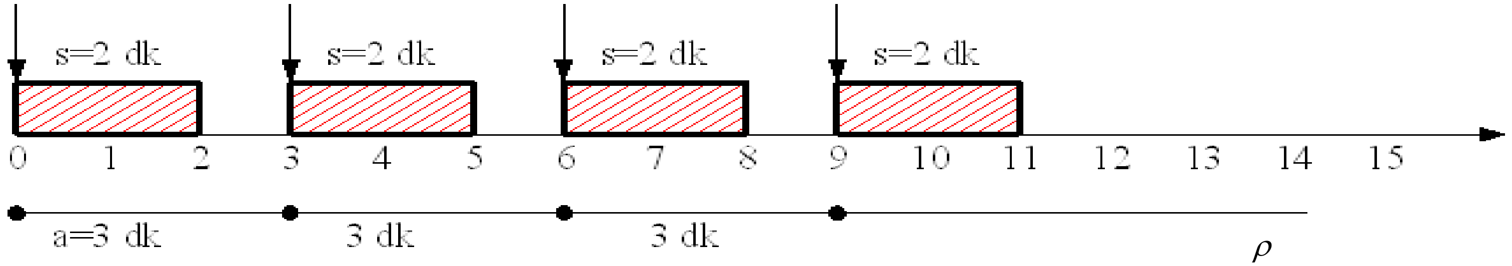
Trafik Yoğunluğu (ρ)

ρ <1 ise	**servis (1- ρ) oranında boştur.**
ρ =1 ise	**servis %100 doludur ve kuyruk yoktur.**
ρ >1 ise	**sistemde sürekli artan bir kuyruk oluşur.**

Bir Kuyruk Sisteminin Bileşenleri

Örnek :

3 dakikada bir servisin olduğu bir sistemde servis zamanı 2 dakika olsun. Gelişler ve servis süreleri bir zaman çizelgesinde gösterilirse;



ρ =E(s) / E(a) = 2/3=0.667 (doluluk oranı)

= (1-ρ) = 1-0.667 = 0.333 (servisin boş kalma oranı)

Analitik ve benzetim modelinde ρ <1 olduğu kabul edilir.

Üssel Hizmet Dağılımının Süreye Bağlılığı

$$\boxed{f(X) = \mu e^{-\mu X}}$$

μ = ortalama servis hızı *(birim zamanda hizmet sunulabilen ortalama müşteri sayısı)*

1 / μ = ortalama servis zamanı

"t" süresinde hizmetin tamamlanma olasılığı

$$\boxed{P(X \le t) = 1 - e^{-\mu t}}$$

Örnek - Bilgisayar Donanım Problemi

- Servis süresi = 4 dk.
- Üssel dağılım
- **Servis zamanının < 3 dk.’dan kısa olma olasılığı ?**
- Ortalama servis zamanı = $1/\mu$ = 4 dk
- Ortalama servis hızı = μ = 1x60/4 müşteri / saat=15 müşteri/saat
- Bir hizmetin 3 dk.’dan kısa verilme olasılıgı ;
- 3 dk.’yı saate çevirelim, 3/60 = 0.05 saat
- $P(X<0.05) = 1 - e^{(-15 \times 0.05)} = 1 - e^{(-0.75)}$
- = 1- 0.47237 = **0.52763**

Bir Kuyruk Sisteminin Bileşenleri

Kuyruk Disiplini:

Servise alınacak müşteri düzenini belirler.

FİFO : İlk giren ilk çıkar prensibi

LİFO : Son giren ilk çıkar prensibi

ÖNCELİK (PRIORITY) : Müşterilerin önemine göre servis

Aksi belirtilmedikçe, **FIFO** kullanılır.

Kuyruk Modeli Notasyonu

- Kendall (1953) kuyruk sistemi modellerini sınıflandırmak için bir sistem geliştirmiştir.
- 1/2/3
  - 1: Varış prosesi
  - 2: Servis prosesi
  - 3: Servis sayısı
- Bu sınıflandırma sistemi aşağıdaki gibi genişletilmiştir.
- 1/2/3/4/5/6
  - 4: Paralel servis sayısı
  - 5: Sistemde izin verilen müşteri sayısı
  - 6: Müşterinin geldiği yığının genişliği

Bir Kuyruk Sisteminin Bileşenleri

1 ve 2 için

- M: Üstel dağılıma sahip servis ya da varışlar arası zaman
- D: Sabit servis ya da varışlar arası zaman
- E_k: k-Erlang dağılmış servis ya da varışlar arası zaman
- G: Genel dağılım

4 için

- FIFO: İlk giren ilk çıkar
- SIRO: Rassal sırada servis
- PRI: Öncelikli servis
- GD: Genel kuyruk disiplini

M / D / 3 / PRI / 50 / ∞

- ∞ → Yığın genişliği
- 50 → Sistemde 50 müşteri sınırı
- PRI → Öncelikli servis
- 3 → 3 servis
- D → Sabit servis süresi
- M → Varışlar arası zaman üstel dağılım

Modeldeki Formüllerin Özeti

Varışlar		Hizmet	
Varış hızı	$\boxed{\lambda}$	Hizmet hızı	$\boxed{\mu}$
"t" sürede "k" varışını olma olasılığı	$\boxed{\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}}$	"t" sürede "k" hizmetin verilme olasılığı	$\boxed{\frac{(\mu t)^k e^{-\mu t}}{k!}}$
Varışlar arasındaki ortalama zaman	$\boxed{1/\lambda}$	Ortalama hizmet zamanı	$\boxed{1/\mu}$
Herhangi bir varışın "t" süre.inde gerçekleşme olasılığı	$\boxed{1-e^{-\lambda t}}$	Hizmetin "t" süresinde tamamlanma olasılığı	$\boxed{1-e^{-\mu t}}$
Müteakip varışın "t" zamanı içinde oluşmama olasılığı	$\boxed{e^{-\lambda t}}$	Servis süresinin "t" süresinden büyük olma olasılığı	$\boxed{e^{-\mu t}}$

Durağan Hal Performans Ölçütleri

- **P_0:** Sistemde müşteri olmama olasılığı
- **P_n:** sistemde “n” müşteri olma olasılığı
- **L:** Sistemdeki ortalama müsteri sayısı
- **L_q:** Sıradaki ortalama müşteri sayısı
- **W:** Sistemde bir müşteri tarafından harcanan ortalama zaman
- **W_q:** Sırada bir müşteri tarafından harcanan ortalama zaman
- **P_w:** Varış yapan müşterinin hizmet almak için bekleme olasılığı
- ρ **:** Hizmet hattının kullanım hızı (hatların meşguliyet oranı, %)

Little Modeli

- Kuyruk teroisi kapsamındaki performans kriterleri arasında karşılıklı ilişkileri “Little” formülleriyle çözümlemek mümkündür.
- **$L = \lambda W$**
- **$L_q = \lambda W_q$**
- **$L = L_q + \lambda / \mu$**
- **Kuyruk Sistemlerinin Gösterimi**
  - **Varıs Süreci / Hizmet Süreci/ Sunucu Sayısı**
  - **M** *Markoviyan*
  - **D** *Deterministik*
  - **G** *Genel*
  - **M / D / 5**
  - **M / D / 5 / 10 / 20**

M / M / 1 Kuyruk Sistemi

- **Özellikler**
  - Gelisler Poison dagılımdadır
  - Hizmet süresi Üssel dagılım sergiler
  - Tekli hizmet sunucu vardır
  - Kuyruk potansiyel olarak sonsuz uzunluktadır
  - Gelen müsteri sayısı sonsuzdur

Performans Ölçütleri

- **$P0 = 1- (\lambda / \mu)$** → Sistemde müşteri olmama olasılığı
- **$Pn = [1 - (\lambda / \mu)] (\lambda / \mu)^n$** → sistemde “n” müşteri olma olasılığı
- **$L = \lambda / (\mu - \lambda)$** → sistemdeki ortalama müşteri sayısı
- **$Lq = \lambda^2 / [\mu(\mu - \lambda)]$** → Sıradaki ortalama müşteri sayısı
- **$W = 1 / (\mu - \lambda)$** →Sistemde bir müşteri tarafından harcanan ortalama zaman
- **$Wq = \lambda / [\mu(\mu - \lambda)]$** →Sırada bir müşteri tarafından harcanan ortalama zaman
- **$Pw = \lambda / \mu$** → Varış yapan müşterinin hizmet almak için bekleme olasılığı
- **$\rho = \lambda / \mu$** → Hizmet hattının kullanım oranı
- Bir müşterinin, sistemde “t” süresinden fazla bekleme olasılığı ;
- $P(X>t)= e^{(-(\mu- \lambda)t)}$

Örnek – Ayakkabı Şirketi

- **Müşteriler, 12 dakikada bir ortalama hızda** ve **posion dağılıma** uygun olarak varış yapmaktadır.
- Servis hızı ortalama **8 dk. / müşteri**
- **şirket yönetimi;** bu hizmet için **performans düzeyinin belirlenmesini** istemektedir.
- **Veriler**
- λ = 1/ 12 müsteri / dk. = 60/ 12 = 5 müsteri/saat
- μ= 1/ 8 müsteri / dk. = 60/ 8 = 7.5 müsteri/saat
- **Performans Hesaplamaları**
- P0 = 1- (λ / μ) = 1 - (5 / 7.5) = 0.3333
- Pn = [1 - (λ / μ)] (λ/ μ) = (0.3333)(0.6667)^n
- L = λ / (μ– λ) = 2
- Lq = λ^2/ [μ(μ – λ)] = 1.3333
- W = 1 / (μ – λ) = 0.4 saat = 24 dk.
- Wq = λ / [μ(μ – λ)] = 0.26667 saat = 16 dk.
- Pw = λ / μ = 0.6667
- ρ = λ / μ = 0.6667