Özdevinirler Kuramı ve Biçimsel Diller

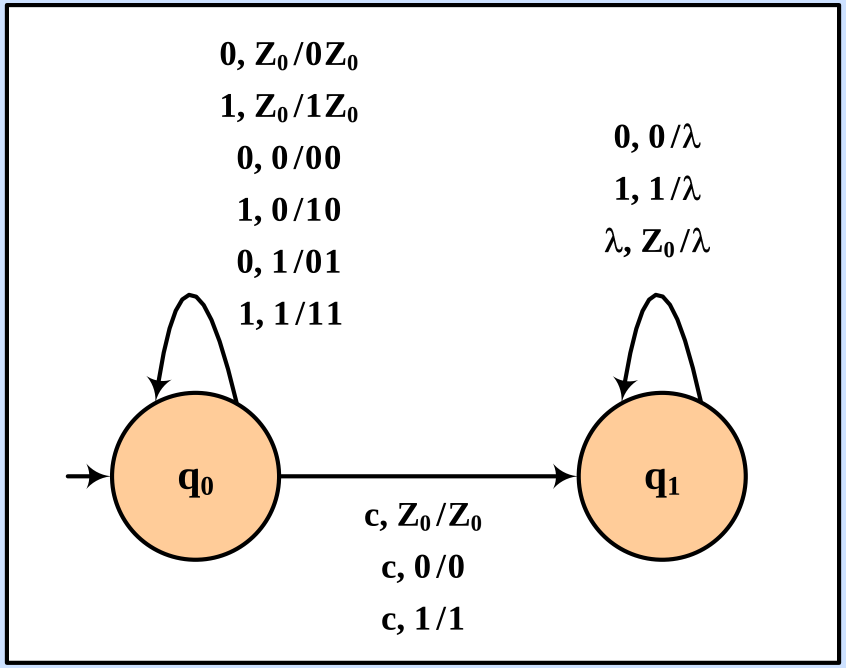
Geçen Haftanın Özeti

➢ Yığıtlı Özdevinirler (*Pushdown Automata*)

- Yığıtlı özdevinirler, bağlamdan-bağımsız dilleri (CFL) tanıyan makine modelidir.
- Biçimsel olarak, yığıtlı özdevinir (PDA) bir yedili olarak tanımlanır.

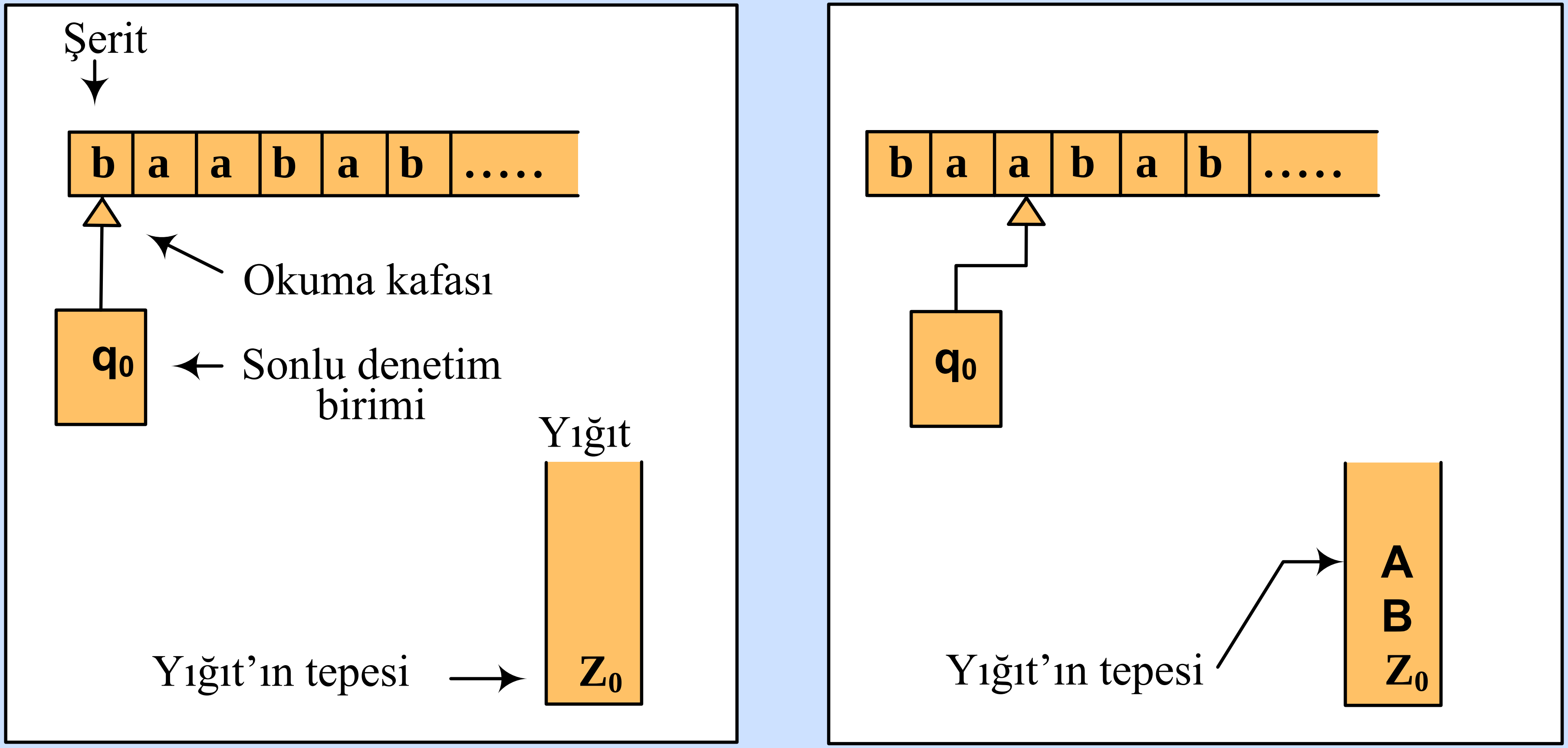
  PDA = $< Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F >$

- **PDA'nın Geçiş Çizeneği**



Bölüm 5 : Yığıtlı Özdevinirler (*Pushdown Automata*)

➢ PDA'nın Soyut Makine Modeli



a) Başlangıç Görünümü

a) 2 Hareket Sonraki Görünüm

Bölüm 5 : Yığıtlı Özdevinirler (*Pushdown Automata*)

➢ Anlık Tanımlar (*Instantaneous Descriptions*)

Anlık tanım (ID) = (p, v, X)

p : PDA'nın durumu

v : giriş dizgisinin henüz işlenmemiş kesimi

X : yığıtın içeriği

➢ PDA'nın Tanıdığı Dil

Uç durumla tanıyan PDA modeli:

$$T(M) = \{ w \mid w \in V_T^* \ , \ (q_0, w, Z_0) \vdash^* (p, \lambda, \gamma) \ , \ p \in F \}$$

Boş yığıtla tanıyan PDA modelinde:

$$T(M) = \{ w \mid w \in V_T^* , \ (q_0, w, Z_0) \vdash^* (p, \lambda, \lambda) \ , \ p \in Q \}$$

➢ PDA'nın Deterministik Olma Koşulu

- **Her $\delta(q, a, X)$ için tanımlı en çok bir hareket olmalı,**
- **Eğer $\delta(q, \lambda, X)$ için bir hareket tanımlı ise, hiçbir a giriş simgesi için,**
  $\delta(q, a, X)$ hareketinin tanımlı olmamalı

5.2. Bağlamdan-Bağımsız Dilbilgisi (CFG) – Yığıtlı Özdevinir (PDA) Eşdeğerliği

5.2.1. Verilen bir CFG'nin Eşdeğeri PDA'nın Bulunması

- **CFG'nin Eşdeğeri PDA'nın Bulunması İçin 1. Yöntem**

$G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$ **Bu yöntemin uygulanabilmesi için dilbilgisinin Greibach normal biçiminde olması gerekir.**

$M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \delta, Z_0, F \rangle$

$Q = \{q_0\}$

$\Sigma = V_T$

$\Gamma = V_N$

$Z_0 = S$

$F = \Phi$

δ : Dilbilgisndeki her $A \Rightarrow a\alpha$ için PDA'da $\delta(q_0, a, A) = (q_0, \alpha)$

her $A \Rightarrow a$ için de PDA'da $\delta(q_0, a, A) = (q_0, \lambda)$

➢ **Örnek 5.5.** Prefix notasyonundaki (işleç öncelikli) aritmetik deyimleri türeten $G_{5.5}$ dilbilgisi aşağıdaki gibi tanımlanıyor.

$G_{5.5} = < V_N, V_T, P, S >$

$V_N = \{S\}$

$V_T = \{+, -, *, /, v, c\}$

$P: S \Rightarrow + SS \mid - SS \mid * SS \mid / SS \mid v \mid c$

$M_{5.5} = < Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \delta, Z_0, \Phi >$

$Q = \{q_0\}$

$\Sigma = \{+, -, *, /, v, c\}$

$\Gamma = \{S\}$

$Z_0 = S$

$F = \Phi$

$\delta : \delta(q_0, +, S) = (q_0, SS)$

$\delta(q_0, -, S) = (q_0, SS)$

$\delta(q_0, *, S) = (q_0, SS)$

$\delta(q_0, /, S) = (q_0, SS)$

$\delta(q_0, v, S) = (q_0, \lambda)$

$\delta(q_0, c, S) = (q_0, \lambda)$

➢ **Örnek 5.6.** {a, b} alfabesinde, eşit sayıda a ve b içeren dizgileri türeten aşağıdaki CFG veriliyor.

$G_{5.6} = < V_N, V_T, P, S >$

$V_N = \{S, A, B\}$

$V_T = \{a, b\}$

$P: \; S \Rightarrow b\,A \mid a\,B$

$A \Rightarrow b\,AA \mid a\,S \mid a$

$B \Rightarrow a\,BB \mid b\,S \mid b$

$M_{5.6} = < Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \delta, Z_0, \Phi >$

$Q = \{q_0\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$\Gamma = \{S, A, B\}$

$Z_0 = S$

$F = \Phi$

$\delta: \delta(q_0, b, S) = (q_0, A)$

$\delta(q_0, a, S) = (q_0, B)$

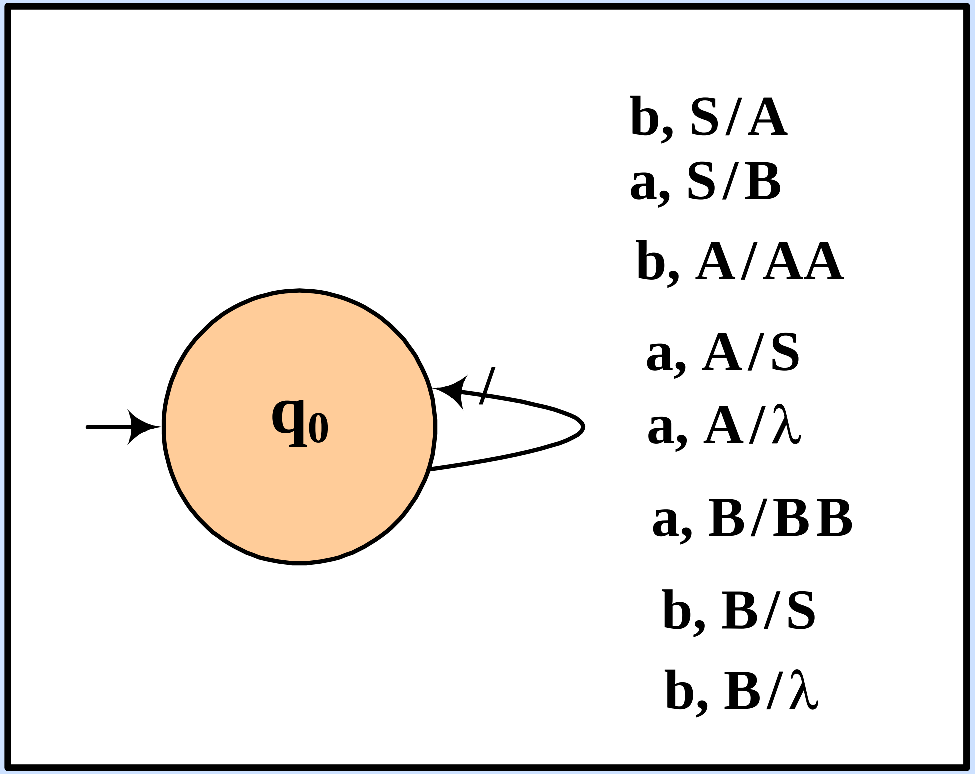
$\delta(q_0, b, A) = (q_0, AA)$

$\delta(q_0, a, A) = \{(q_0, S), (q_0, \lambda)\}$

$\delta(q_0, a, B) = (q_0, BB)$

$\delta(q_0, b, B) = \{(q_0, S), (q_0, \lambda)\}$

- **$L_{5.6}$ Dilini Tanıyan PDA'nın ($M_{5.6}$) Geçiş Çizeneği**



- **CFG'nin Eşdeğeri PDA'nın Bulunması İçin 2. Yöntem**

- **Bu yöntemin kullanılabilmesi için, PDA tanımında küçük bir değişiklik yapmak gerekir.**

PDA'nın hareketleri : $\delta(q, a, Z) = (p, \alpha)$

$a \in V_T \cup \{\lambda\}$

$Z \in \Gamma \cup \{\lambda\}$ **(Temel modelden farklılık)**

$\alpha \in \Gamma^*$

CFG'nin Eşdeğeri PDA'nın Bulunması İçin 2. Yöntem (devam)

- $G = < V_N, V_T, P, S >$
- $M = < Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \delta, Z_0, F >$

$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$

$\Sigma = V_T$

$\Gamma = V_N \cup V_T \cup \{Z_0\}$

$F = \{q_2\}$

δ :

- Dilbilgisi tanımından bağımsız olarak PDA'da
  $\delta(q_0, \lambda, \lambda) = (q_1, S)$ ve $\delta(q_1, \lambda, Z_0) = (q_2, \lambda)$
  hareketleri tanımlanır.
- Dilbilgisindeki her a giriş simgesi için PDA'da
  $\delta(q_1, a, a) = (q_1, \lambda)$ hareketi tanımlanır.
- Dilbilgisindeki her $A \Rightarrow \alpha$ yeniden yazma kuralı için PDA'da
  $\delta(q_1, \lambda, A) = (q_1, \alpha)$ hareketi tanımlanır.

- **Örnek 5.7.** {a, b} alfabesinde aşağıdaki CFG veriliyor.

$G_{5.7} = < V_N, V_T, P, S >$

$V_N = \{S\}$

$V_T = \{a, b\}$

$P : S \Rightarrow aSb \mid aSbb \mid ab \mid abb$

$L_{5.7} = \{ a^n b^m \mid n \geq 1 , \; n \leq m \leq 2n \}$

- $M_{5.7} = < Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \delta, Z_0, \Phi >$

$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$\Gamma = \{a, b, S, Z_0\}$

$F = \{q_2\}$

$\delta : \delta(q_0, \lambda, \lambda) = (q_1, S)$

$\delta(q_1, a, a) = (q_1, \lambda)$

$\delta(q_1, b, b) = (q_1, \lambda)$

$\delta(q_1, \lambda, S) = (q_1, aSb)$

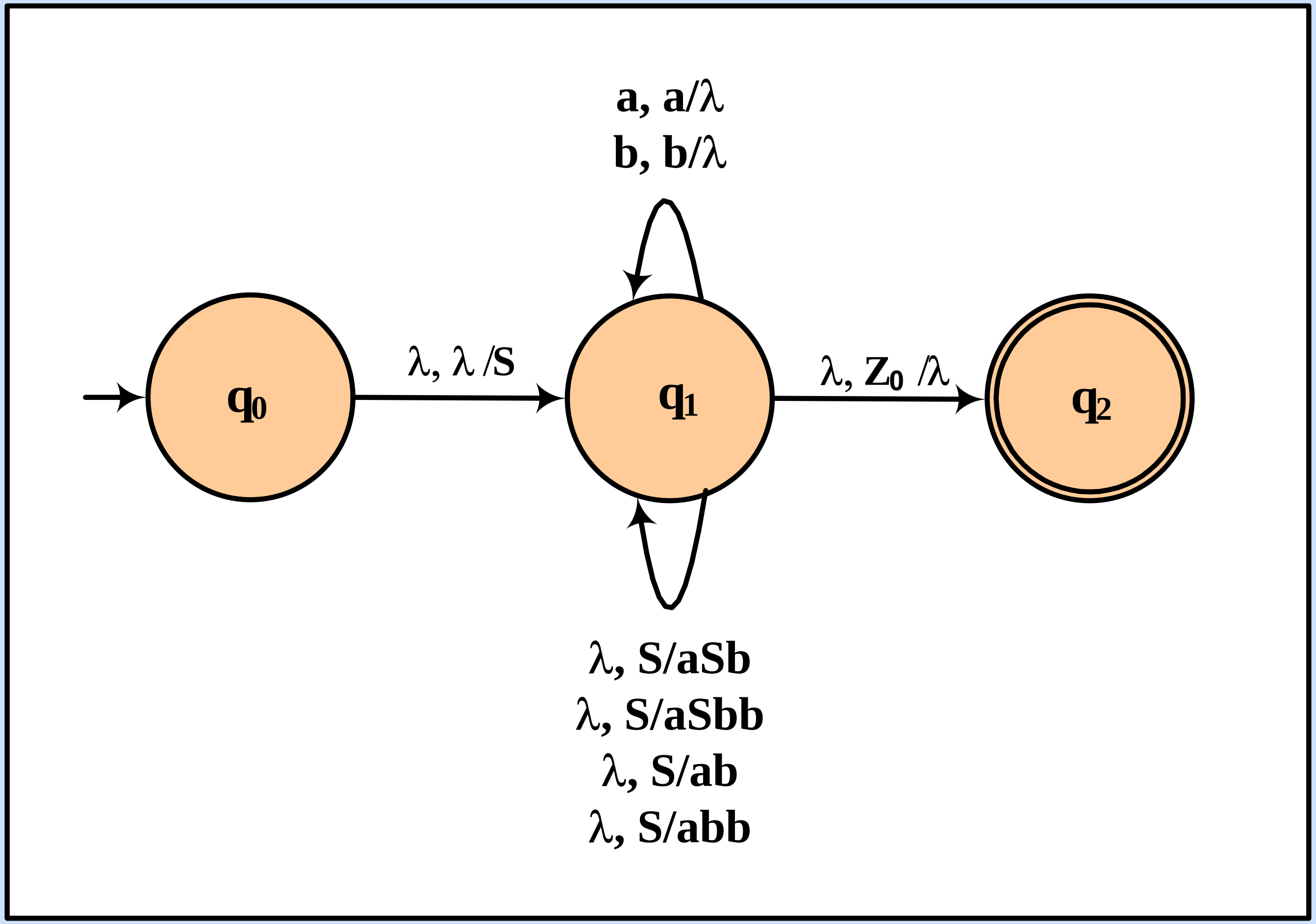
$\delta(q_1, \lambda, S) = (q_1, aSbb)$

$\delta(q_1, \lambda, S) = (q_1, ab)$

$\delta(q_1, \lambda, S) = (q_1, abb)$

$\delta(q_1, \lambda, Z_0) = (q_2, \lambda)$

- $L_{5.7}$ Dilini Tanıyan PDA'nın ($M_{5.7}$) Geçiş Çizeneği (2. yönteme göre)



5.2.2. Verilen bir PDA’nın Eşdeğeri CFG’nin Bulunması

- $M = < Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \delta, Z_0, F >$

  Verilen PDA’ya eşdeğer, Greibach normal biçimindeki bağlamdan-bağımsız dilbilgisi aşağıdaki gibi bulunur:

  $G = < V_N, V_T, P, S >$

  $V_T = \Sigma$

  $V_N = \{S, [q, A, p] \mid A \in \Gamma, \; p, q \in Q\}$

  P :

  - PDA’nın her durumuna karşılık CFG’de bir yeniden yazma kuralı:

    √$q \in Q \;:\; S \Rightarrow [q_0, Z_0, q]$

  - PDA’nın her hareketine karşılık CFG’de bir ya da birçok yeniden yazma kuralı:

    √ $\delta(q_i, a, A) = (q_j, B_1B_2B_3\ldots B_k) \in P$:

    her $p_1, p_2, .., p_k \in Q$ birleşimi için bir yeniden yazma kuralı

    $[q_i, A, p_k] \Rightarrow a[q_j, B_1, p_1]\,[p_1, B_2, p_2]\ldots\,[p_{k-1}, B_k, p_k]$

Bölüm 5 : Yığıtlı Özdevinirler (*Pushdown Automata*)

- **Bu yönteme göre, verilen bir PDA'ya eşdeğer CFG'nin yeniden yazma kuralları aşağıdaki gibi oluşturulur:**

1. $\surd q \in Q$: $S \Rightarrow [q_0, Z_0, q]$

2. $\surd\, [\delta(q_0, \lambda, A) = (q_1, \lambda)\,]$: $[q_0, A, q_1] \Rightarrow \lambda$

3. $\surd\, [\delta(q_0, a, A) = (q_1, \lambda)\,]$: $[q_0, A, q_1] \Rightarrow a$

4. $\surd\, [\delta(q_0, a, A) = (q_1, B_1)]$: $\surd p_1 \in Q$:
$[q_0, A, p_1] \Rightarrow a[q_1, B_1, p_1]$

5. $\surd\, [\delta(q_0, a, A) = (q_1, B_1B_2)]$: $\surd p_1, p_2 \in Q$:
$[q_0, A, p_2] \Rightarrow a[q_1, B_1, p_1]\,[p_1, B_2, p_2]$

6. $\surd\, [\,\delta(q_0, a, A) = (q_1, B_1B_2B_3)]$: $\surd p_1, p_2, p_3 \in Q$:
$[q_0, A, p_3] \Rightarrow a[q_1, B_1, p_1]\,[p_1, B_2, p_2]\,[p_2, B_3, p_3]$

- **Örnek 5.8.** Aşağıdaki PDA veriliyor.

$M_{5.8} = < Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \delta, Z_0, \Phi >$

$Q = \{q_0, q_1\}$

$\Sigma = \{0, 1\}$

$\Gamma = \{Z_0, X\}$

δ: $\delta(q_0, 0, Z_0) = (q_0, XZ_0)$

$\delta(q_0, 0, X) = (q_0, XX)$

$\delta(q_0, 1, X) = (q_1, \lambda)$

$\delta(q_1, 1, X) = (q_1, \lambda)$

$\delta(q_1, \lambda, Z_0) = (q_1, \lambda)$

- $G_{5.8} = < V_N, V_T, P, S >$

$V_T = \{0, 1\}$

$A_1=[q_0, X, q_0]$ $A_5 = [q_1, X, q_0]$

$A_2=[q_0, X, q_1]$ $A_6 = [q_1, X, q_1]$

$A_3=[q_0, Z_0, q_0]$ $A_7 = [q_1, Z_0, q_0]$

$A_4=[q_0, Z_0, q_1]$ $A_8 = [q_1, Z_0, q_1]$

$V_N = \{S, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8\}$

- **Örnek 5.8.**

$M_{5.8} = < Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \delta, Z_0, \Phi >$

$Q = \{q_0, q_1\}$

$\Sigma = \{0, 1\}$

$\Gamma = \{Z_0, X\}$

δ: $\delta(q_0, 0, Z_0) = (q_0, XZ_0)$

$\delta(q_0, 0, X) = (q_0, XX)$

$\delta(q_0, 1, X) = (q_1, \lambda)$

$\delta(q_1, 1, X) = (q_1, \lambda)$

$\delta(q_1, \lambda, Z_0) = (q_1, \lambda)$

$G_{5.8} = < V_N, V_T, P, S >$

$V_N = \{S, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8\}$

$V_T = \{0, 1\}$

P : $S \Rightarrow [q_0, Z_0, q_0]$

$S \Rightarrow [q_0, z_0, q_1]$

$[q_0, Z_0, q_0] \Rightarrow 0[q_0, X, q_0][q_0, Z_0, q_0]$

$[q_0, Z_0, q_1] \Rightarrow 0[q_0, X, q_0][q_0, Z_0, q_1]$

$[q_0, Z_0, q_0] \Rightarrow 0[q_0, X, q_1][q_1, Z_0, q_0]$

$[q_0, Z_0, q_1] \Rightarrow 0[q_0, X, q_1][q_1, Z_0, q_1]$

$[q_0, X, q_0] \Rightarrow 0[q_0, X, q_0][q_0, X, q_0]$

$[q_0, X, q_1] \Rightarrow 0[q_0, X, q_0][q_0, X, q_1]$

$[q_0, X, q_0] \Rightarrow 0[q_0, X, q_1][q_1, X, q_0]$

$[q_0, X, q_1] \Rightarrow 0[q_0, X, q_1][q_1, X, q_1]$

$[q_0, X, q_1] \Rightarrow 1$

$[q_1, X, q_1] \Rightarrow 1$

$[q_1, Z_0, q_1] \Rightarrow \lambda$

- **Örnek 5.8.**

$M_{5.8} = < Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \delta, Z_0, \Phi >$

$Q = \{q_0, q_1\}$

$\Sigma = \{0, 1\}$

$\Gamma = \{Z_0, X\}$

δ: $\delta(q_0, 0, Z_0) = (q_0, XZ_0)$

$\delta(q_0, 0, X) = (q_0, XX)$

$\delta(q_0, 1, X) = (q_1, \lambda)$

$\delta(q_1, 1, X) = (q_1, \lambda)$

$\delta(q_1, \lambda, Z_0) = (q_1, \lambda)$

- $G_{5.8} = < V_N, V_T, P, S >$

$V_T = \{0, 1\}$

$V_N = \{S, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8\}$

P : $S \Rightarrow A_3 \mid A_4$

$A_3 \Rightarrow 0A_1A_3 \mid 0A_2A_7$

$A_4 \Rightarrow 0A_1A_4 \mid 0A_2A_8$

$A_1 \Rightarrow 0A_1A_1 \mid 0A_2A_5$

$A_2 \Rightarrow 0A_1A_2 \mid 0A_2A_6 \mid 1$

$A_6 \Rightarrow 1$

$A_8 \Rightarrow \lambda$