Routh - Hurwitz Kararlılık Kriteri Sayısal kontrol

Bir polinom köklerinin sağ yarım düzlemde olup olmadığını belirlemede kullanılır.

Zamanda ayrık sistemlerin kararlılığı için z'ye göre tanımlanmış karakteristik denklemin köklerinin birim daire içinde olup olmadığı araştırılır. Routh kriterinin zamanda ayrık sistemlere uygulanması için birim dairenin içinin w düzleminin sol yarısına dönüştürülmesi ve sonra Routh kriterinin uygulanması gerekir.

Bir karakteristik denklemin köklerini bulmadan önce en azından hangi bölgede olduğunu bulmak için geliştirilmiş bir yöntemdir.

Routh kriterinin uygulanmasında Routh tablosu düzenlenir.

$$G(s) = \frac{P(s)}{q(s)} = \frac{P(s)}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$ şeklinde

bir transfer fonksiyonumuz olsun. Bu kontrol sisteminin karakteristik denklemi ⇒ $q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$ dır.

Routh tablosunun düzenlenmesinde: S'in en yüksek kuvvetinin katsayısından başlanır ve birinci satıra S^n 'in karşısına $a_n, a_{n-2}, a_{n-4} \dots$ yazılır. İkinci satıra S'in en yüksek kuvvetinden bir küçük olan kuvveti S^{n-1} yazılır ve karşısına $a_{n-1}, a_{n-3}, a_{n-5}, \dots$ yazılır.

S^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...
S^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...
S^{n-2}	b_{n-1}	b_{n-3}	b_{n-5}	...
S^{n-3}	c_{n-1}	c_{n-3}	c_{n-5}	...
⋮	⋮	⋮	⋮	
S^0	V_{n-1}	V_{n-3}	V_{n-5}	...

Tabloda S^n ve S^{n-1} terimleri karşısındaki satırlar karakteristik denklemin katsayılarıdır.

Diğer katsayılar şu şekilde belirlenir:

$$b_{n-1} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \qquad b_{n-3} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}$$

$$c_{n-1} = -\frac{1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix} \qquad c_{n-3} = -\frac{1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_{n-1} & b_{n-5} \end{vmatrix} \qquad c_{n-5} = -\frac{1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{\dots} \\ b_{n-1} & b_{\dots} \end{vmatrix}$$

Routh kriterinin uygulamasında aşağıdaki şu koşulların sağladığı gözönünde tutulmalıdır.

1. $G_{L}(s)$ in payının derecesi paydanın derecesinden küçük olmalı.
2. Karakteristik denklem $q(s)$ in bütün köklerinin sol yarım s düzleminde olup olmadığının kontrol edilmesinde orjinde ve jw ekseni üzerinde basit katlı kökler bulunabilir.

Birinci sütundaki terimlerin işaretinin değişme sayısı kadar karakteristik denklemin sağ yarım düzleminde kökü vardır. Bir sistemin kararlı olabilmesi için gerek ve yeter koşul birinci sütundaki bütün terimlerinin pozitif olmasıdır. Routh tablosu hazırlanırken üç durumla karşılaşılabilir:

1. Tablonun birinci sütunundaki bütün terimler pozitiftir.
2. Birinci sütunda bir tane 0 vardır ve bu 0'la başlayan satırda başka 0 yoktur.
3. Birinci sütunda bir tane 0 vardır ve bu satırla başlayan satırın bütün elemanları sıfırdır.

Tablo Değerlendirme (Routh - Hurwitz)

Tablonun birinci sütunundaki katsayılar boyunca hiçbir işaret değişikliği olmuyorsa bütün kökler sol yarı düzlemdedir ve sistemimiz kararlıdır.

Tablonun birinci sütunundaki katsayılar yukarıdan aşağıya doğru kaç kez işaret değiştirmiş ise sağ yarı düzlemde o kadar kök vardır. Dolayısıyla sistem kararsızdır.

İlk sütundaki katsayıların biri sıfır olur ama ondan sonra hiç işaret değişikliği olmazsa sistem sınırda kararlıdır. İlk sütunda birden fazla sıfır varsa sistem kararsızdır.

Soru: $q(s) = s^4 + 0.5s^3 + 1.5s^2 + 2.5s + 5 = 0$ karakteristik denklemi ile sistemin kararlılığını Ruth-Hurwitz kriteriyle inceleyiniz.

s^4	1	1.5	5	0
s^3	0.5	2.5	0	0
s^2	a = −3.5	b = 5	0	0
s^1	c = +3.215	d = 0	0	0
s^0	e = +5	0	0	0
0	0	0	0	

$$a = \frac{-1}{(0.5)} \begin{vmatrix} (1) & (1.5) \\ (0.5) & (2.5) \end{vmatrix} = \frac{(2.5) - (0.5).(1.5)}{0.5} = -3.5$$

$$b = \frac{-1}{(0.5)} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0.5 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{0 - (0.5).(5)}{0.5} = 5$$

$$c = \frac{-1}{(-3.5)} \begin{vmatrix} (0.5) & (2.5) \\ (-3.5) & (5) \end{vmatrix} = \frac{(0.5).(5) - (2.5)(-3.5)}{(3.5)} = 3.215$$

$$d = \frac{-1}{(-3.5)} \cdot \begin{vmatrix} (0.5) & 0 \\ (-3.5) & 0 \end{vmatrix} = \frac{0.(0.5) - 0.(-3.5)}{3.5} = 0$$

$$e = \frac{-1}{(3.215)} \cdot \begin{vmatrix} (-3.5) & 5 \\ (3.215) & 0 \end{vmatrix} = \frac{0.(-3.5) - (5).(3.215)}{(-3.215)} = 5$$

Birinci sütuna bakarsak; terimlerin işareti artı iken eksiye sonra tekrar artıya dönüştüğünden iki kez işaret değişimi vardır. Bu nedenle sağ yarım s-düzleminde iki kök vardır. Sistem kararsız bir sistemdir.

Soru: $q(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10 = 0$ karakteristik denklemine sahip sistemin kararlılığını Routh-Hurwitz kriterine göre inceleyiniz.

s^5	1	2	11
s^4	2	4	10
s^3	$a = \varepsilon$	$b = 6$	0
s^2	$c = -12/\varepsilon$	$d = 10$	0
s^1	$e = 6$	0	0
s^0	10		

Routh tablosunda sıfır olan terim yerine ε gibi çok küçük bir sayı konur. Bundan sonraki hesaplarda ε 'nun diğer terimler yanında küçük olduğu kabul edilerek hesap yapılır. Birinci sütunda iki kez işaret değişimi vardır. O halde sağ yarım düzlemde iki kök vardır ve sistem kararsızdır.

$$a = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \varepsilon$$

$$b = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 6$$

$$c = -\frac{1}{\varepsilon}\begin{vmatrix} 2 & \varepsilon \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -12/\varepsilon \quad \rightarrow -\frac{1}{\varepsilon}(12 - 4\varepsilon)$$

Not: ε'lu değerleri yok kabul ediyoruz.

$$d = -\frac{1}{\varepsilon}\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ \varepsilon & 0 \end{vmatrix} = 10 \qquad -\frac{1}{\varepsilon} \quad -10\varepsilon)$$

$$e = -\frac{1}{-12/\varepsilon}\begin{vmatrix} \varepsilon & 6 \\ -12/\varepsilon & 10 \end{vmatrix} = \frac{\varepsilon}{12}\left(10\varepsilon + \frac{72}{\varepsilon}\right) = 6$$

Kökler İmajiner eksen üzerindeyse sistemimiz sınırda kararlıdır.

Soru: $q(s) = -s^5 - 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10$

s^5	-1	2	11	0	teklerin satırı
s^4	-2	4	10	0	çiftlerin satırı
s^3	$a = 0$	$b = 6$	$c = 0$		
s^2	$d = -12/\varepsilon$	$e = 10$	$f = 0$		
s^1	$k = -6$	$l = 0$	$m = 0$		
s^0	$p = 10$	$r = 0$	$s = 0$		

$a = -\frac{1}{(-2)} \cdot \begin{vmatrix} (-1) & (2) \\ (-2) & (4) \end{vmatrix} = 0 \quad b = -\frac{1}{(-2)} \cdot \begin{vmatrix} (-1) & (11) \\ (-2) & (10) \end{vmatrix} = 6 \quad c = -\frac{1}{(-2)} \begin{vmatrix} (-1) & (0) \\ (-2) & (0) \end{vmatrix} = 0$

Birinci sütunun üçüncü satırında bir tane "0" var. Devamındaki satırlarda bir tane daha "0" varsa ya da işaret değişimi varsa sistem kesinlikle kararsızdır.

$d = -\frac{1}{0} \begin{vmatrix} (-2) & (4) \\ (\varepsilon) & (6) \end{vmatrix} = \infty$ olacağından $a = 0$ yerine ε yazarız, işaret değişikliği olmasın diye $a = -\varepsilon$

$d = -\frac{1}{(-\varepsilon)} \cdot \begin{vmatrix} (-2) & (4) \\ (\varepsilon) & (6) \end{vmatrix} = \frac{1}{\varepsilon}(-12 - 4\varepsilon) \cong -\frac{12}{\varepsilon}$

$e = -\frac{1}{(-\varepsilon)} \cdot \begin{vmatrix} (-2) & (10) \\ (-\varepsilon) & (0) \end{vmatrix} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot (0 - (-10\varepsilon)) = +10$

NOT: Bir kere işaret değiştirdiğinden bir kökü vardır ve kararsızdır.

$f = -\frac{1}{(-\varepsilon)} \cdot \begin{vmatrix} (-2) & (0) \\ (-\varepsilon) & 0 \end{vmatrix} = 0$

$k = -\frac{1}{(-12/\varepsilon)} \begin{vmatrix} (-\varepsilon) & (6) \\ (-12/\varepsilon) & (10) \end{vmatrix} = \frac{\varepsilon}{12}\left(-10\varepsilon + \frac{72}{\varepsilon}\right) = -6$

$l = -\frac{1}{(-12/\varepsilon)} \begin{vmatrix} (-\varepsilon) & (0) \\ (-12/\varepsilon) & (0) \end{vmatrix} = 0 \quad m = -\frac{1}{(-12/\varepsilon)} \begin{vmatrix} (-\varepsilon) & (0) \\ (-12/\varepsilon) & (0) \end{vmatrix} = 0$

$p = -\frac{1}{(-6)} \begin{vmatrix} (-12/\varepsilon) & (10) \\ (-6) & (0) \end{vmatrix} = 10 \quad r = -\frac{1}{(-6)} \cdot \begin{vmatrix} (-12/\varepsilon) & (0) \\ (-6) & (0) \end{vmatrix} = 0 \quad s = -\frac{1}{(-6)} \cdot \begin{vmatrix} (-12/\varepsilon) & (0) \\ (-6) & 0 \end{vmatrix} =$

Soru 1 $q(s) = s^3 + 2s^2 + 4s + K$ $K = ?$ olmalıdır.

s^3	1	4	0
s^2	2	K	0
s^1	$a = (8-K)/2$	$b = 0$	0
s^0	$c = K$	$d = 0$	0

$$a = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & K \end{vmatrix} = \frac{8-K}{2} \qquad b = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$c = \frac{-1}{(8-K)/2} \cdot \begin{vmatrix} (2) & (K) \\ \left(\frac{8-K}{2}\right) & (0) \end{vmatrix} = K \qquad d = \frac{-1}{(8-K)/2}\begin{vmatrix} (2) & (0) \\ \left(\frac{8-K}{2}\right) & (0) \end{vmatrix} = 0$$

Sistemin kararlı olması için;

$K = 0$ için

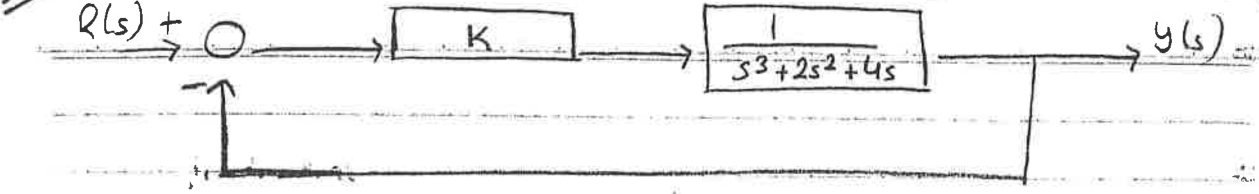
s^3	1	4	0
s^2	2	0	0
s^1	4	0	0
s^0	0	0	0

$K = 8$ için

s^3	1	4	0
s^2	2	8	0
s^1	0	0	0
s^0	8	0	0

$\frac{8-K}{2} > 0$ $K > 0$ $\boxed{0 < K < 8}$

Soru // Şekildeki sistemin kararlı olabilmesi için K hangi aralıkta olmalıdır?



$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K\cdot\left(\frac{1}{s^3+2s^2+4s}\right)}{1+\left(-K\cdot\left(\frac{1}{s^3+2s^2+4s}\right)\right)} = \frac{K}{s^3+2s^2+4s+K} = \frac{P(s)}{G(s)}$$

Denklemin Routh - Hurwitz tablosu:

s^3	1	4	0
s^2	2	K	0
s^1	$a=(8-K)/2$	$b=0$	0
s^0	$c=K$	0	0

Sistemin kararlı olabilmesi için sağ tarafta kök olmamalı.

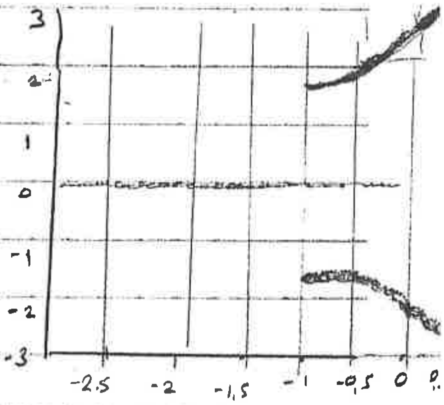
I: $\frac{8-K}{2} > 0 \Rightarrow K<8$

II: $K>0$

dolayısıyla $0<K<8$ olmalı.

Bu aralıkta K'ya değerler vererek farklı denklemler ve bunlara ait kökler bulunabilir. Bu denklemlerin üç tane kökü olacaktır (0-20 aralığında). Bunları matlabda gösterirsek;

```
K= [0: 0.5 :20];
  for i=1 : length (K)
      q= [1 2 4 K(i)]
      p(:,i)= roots (q);
  end
  plot (real(p), imag(p), 'x'); grid;
  xlabel ('Gercel Eksen'),
  ylabel ('Imajiner Eksen')
```



BODE DİYAGRAMI

Sürekli zamanlı sistemlere kontrol edici tasarlamak ve sistem hakkında kararlar verebilmek için transfer fonksiyonuna uygulanan bir model.

Genlik eğrisi ve faz eğrisi elde edilir. Hatırlatma!

$|H(j\omega)| = 20\log(j\omega)$ — $\angle H(j\omega)$

$z = a + ib$

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$\angle z = \text{Arctan}\,\frac{b}{a}$

Soru! $H(s) = \dfrac{s+1}{(s+2).(s-10)}$ transfer fonk. bode diyagramını çiziniz.

$\boxed{s = j\omega}$

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega+1)}{(j\omega+2)\,(j\omega-10)}$$

$|H(j\omega)|$ = Genlik eğrisi $= +20\log|j\omega+1| - 20\log|j\omega+2| - 20\log|j\omega-10|$

$\angle H(j\omega)$ = Faz eğrisi $= \text{Arctan}|j\omega+1| - \text{Arctan}|j\omega+2| - \text{Arctan}|j\omega-10|$

W'ya farklı değerler vereceğiz. Bu değerler en küçük değerden biraz daha küçük ve en büyük değerden daha büyük değerler olacak.
w kesinlikle (–) olamaz.

NOT! Payı ve paydayı sıfır yapan değerler

Yukarıdaki soruda $w=0.1$ $w=1$ $w=2$ $w=10$ $w=20$ seçilir.

	$\lvert H(j\omega)\rvert$	$\angle H(j\omega)$
$w=0.1$	-26	2.5°
$w=1$	-24	26°
$w=2$	-10	70°
$w=10$	5	95°
$w=20$	18	162°

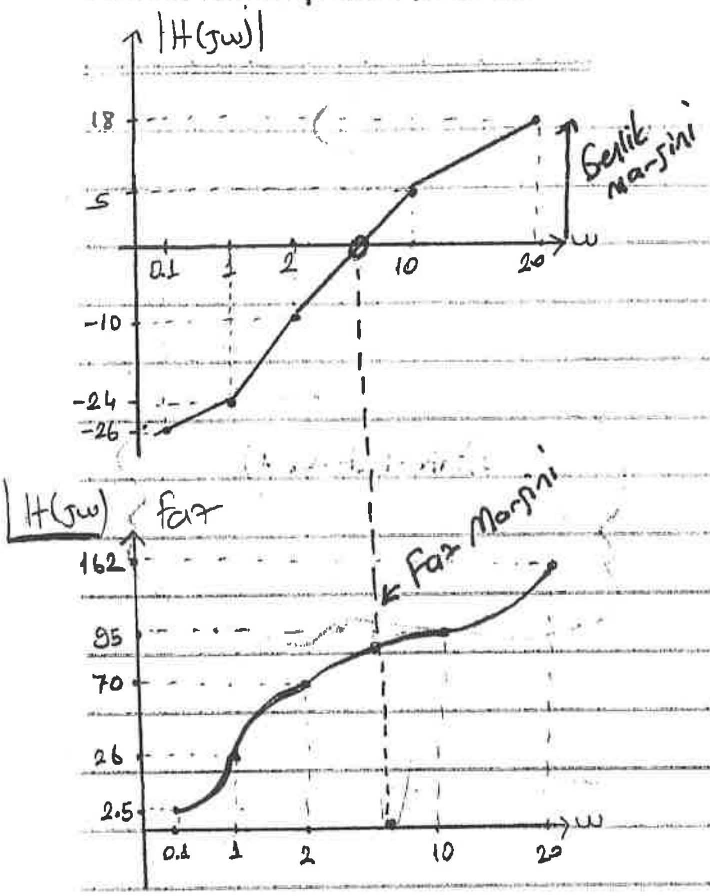
değerler doğru olmayabilir?

$w=0.1$ için

$$|H(j\omega)| = +20.\log\sqrt{(0.1)^2+(1)^2} - 20\log\sqrt{(0.1)^2+2^2} - 20.\log\sqrt{(0.1)^2+(-10)^2} = -26$$

$$\angle H(j\omega) = \text{Arctan}\,\frac{0.1}{1} - \text{Arctan}\,\frac{0.1}{2} - \text{Arctan}\,\frac{0.1}{-10} = 2.5^\circ$$

Genlik eğrisi ⇒



Fazın -180 olduğu nokta bulunur. Burası genlik marjinalidir.

Genliğin 0 olduğu noktadaki frekans değerine karşılık gelen açı değeri 180° dir. Bu da faz marjinidir.

Soru: $H(s) = \dfrac{(s+2)}{(s)\cdot(s+1)\cdot(s-3)}$ transfer fonksiyonunun bode diyagramını çiziniz.

$s = j\omega$ idi.

Genlik denklemi $\Rightarrow |H(j\omega)| = 20\log|j\omega+2| - 20\log|j\omega| - 20\log|j\omega+1| - 20\log|j\omega-3|$

Açı (faz) denklemi $\Rightarrow \angle H(j\omega) = \text{Arctan}(j\omega+2) - \text{Arctan}(j\omega) - \text{Arctan}(j\omega+1) - \text{Arctan}(j\omega-3)$

	ω
$j\omega+2=0$	2
$j\omega=0$	0
$j\omega+1=0$	1
$j\omega-3=0$	3

} kırılma noktaları

Hatırlatma :)
$|a+jb| = \sqrt{a^2+b^2}$
$\angle a+jb = \text{Arctan}\dfrac{b}{a}$

$\omega=0.1$ $\omega=0$ $\omega=1$ $\omega=2$ $\omega=3$ $\omega=10$ değerlerini verdik.

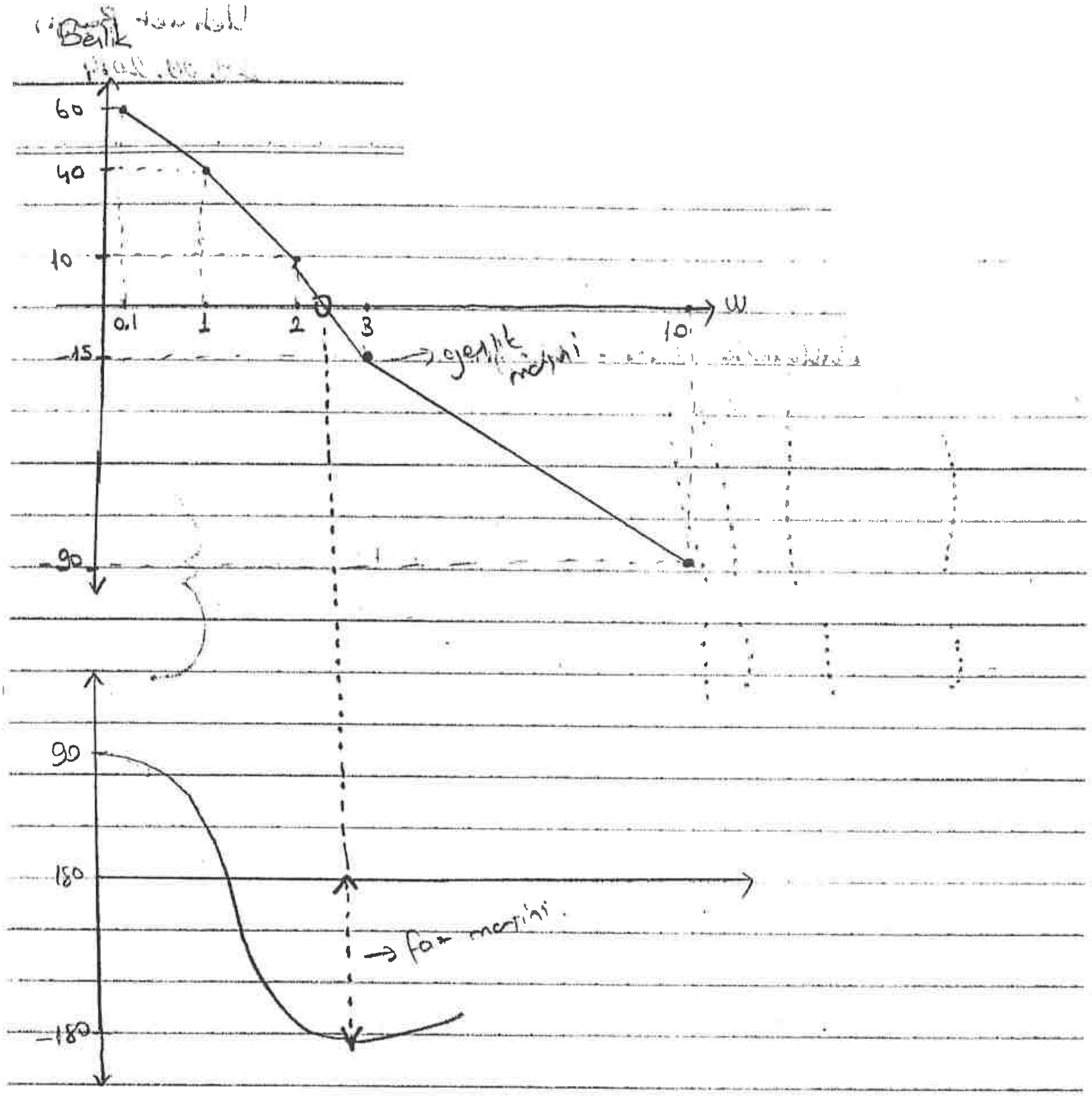
	$\lvert H(j\omega)\rvert$	$\angle H(j\omega)$
$\omega=0.1$	60	90
$\omega=1$	40	...
$\omega=2$	10	180
$\omega=3$	-15	
$\omega=10$	-90	-180

NOT! $\angle jb = \text{Arctan}\dfrac{b}{a} = \text{Arctan}\infty$

∞ yapan tan değeri $90°$ idir.

#
$|H(j\omega)| = 20\log\sqrt{(0.1)^2+2^2} - 20\log\sqrt{(0.1)^2+0^2} - 20\log\sqrt{(0.1)^2+1^2} - 20\log\sqrt{(0.1)^2+(-3)^2} = 60$

$\angle H(j\omega) = \text{Arctan}(2+0{,}1j) - \text{Arctan}(0{,}1j) - \text{Arctan}(1+0{,}1j) - \text{Arctan}(-3+0{,}1j) = 90$



Fazın -180° olduğu nokta bulunur, bunun genliği genlik marjinalidir.

Genliğin 0 olduğu noktanın frekans değerine karşılık gelen açı değeri 180°dir. Bu da faz marjinalidir.

(ilk ders) [illegible]

Matlab 2013a 28.09.2014

1. Durum uzayı modeli oluşturma
2. Transfer fonksiyonu.
3. Sıfır kutupsal kazanım modeli.

1) Diferansiyel Denklemlerde Durum Uzayı. (ss)

$$\frac{dh_1}{dt} = -2h_1 + 3h_2 + 2V$$

$$\frac{dh_2}{dt} = 4h_1 - 2h_2 - V$$

$$q = h_1 - 2h_2 + \frac{1}{2}V$$

matris formunda yazalım:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

$$\begin{cases} x = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \\ u = V \\ y = q \end{cases}$$

Dolayısıyla;

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \quad D = \frac{1}{2}$$

Matlab'da gösterimi:

```
A = (-2 3 ; 4 -2)
B = ( 2 ; -1)
C = ( 1 -2)
D = (1/2)
```

durum uzayı = state space (ss)

durum uzayını oluşturmak için;

```
ht_model = ss(A,B,C,D);
```

2) Transfer Fonksiyonu (tf)

$$G = \frac{2s+1}{3s^2+2s+4}$$

matlab'da göstermek için;

bu tanımlamanın önceliği var!

```
G = tf([2 1], [3 2 4])
```

veya

```
s = tf('s')
G = (2*s +1)/(3*s^2 +2*S + 4)
```

3) Zero Pole Gain (Sıfır Kutupsal kazanç) Modeli

Çarpanlarına ayrılmış halde $H = 7 \cdot \frac{(s+1)\,(s+3)}{(s+2)\,(s+2)\,(s+4)}$ bir fonksiyon verilsin.

$s+1=1$ $s=-1$	$s+3=0$ $s=-3$	...

H = zpk([-1 -3], [-2 -2 -4], 7)

NOT! Modeller kendi arasında dönüşüm yapabilirler.

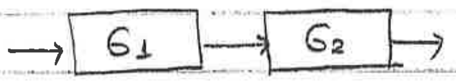
Durumdan transfer fonk. dönüşüm => [num, den] = ss2tf(A, B, C, D)

pay payda f = tf(num, den)

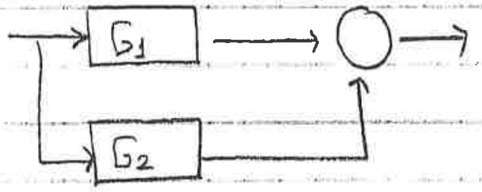
Başka dönüşümler; ss2zp, ss2tf, tf2ss, zp2ss, zp2tf, tf2zp

Blok diyagramları

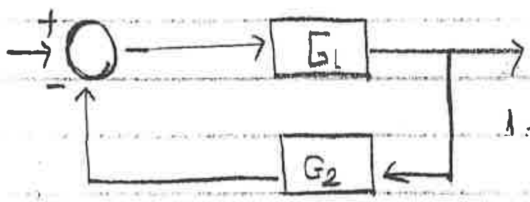
Matlab



$G_1 \times G_2$ series(G1, G2)

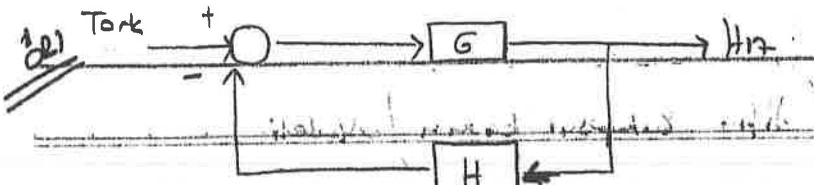


$G_1 + G_2$ parallel(G1, G2)



$\frac{G_1}{1 + G_1 \cdot G_2}$ feedback(G1, G2)

1a)



transfer fonksiyonları:

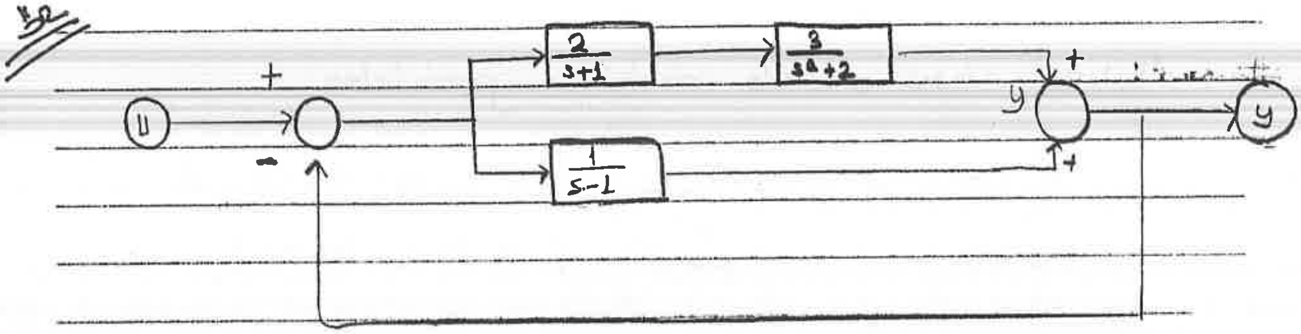
$G(s) = 2s^2 + 5s + 1$

$H(s) = \dfrac{5(s+2)}{s+10}$

Matlab'da gösteriniz?

```
T1 = tf[2 5 1]          ← transfer
H = zpk(-2, -10, 5)     ← sıfır kutupsal.
cloop = feedback(G, H)
```

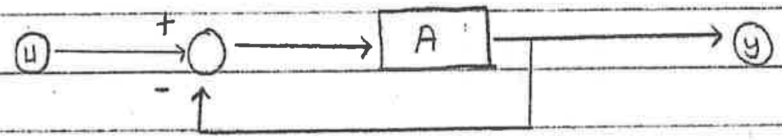
2)



transfer fonksiyonu ve matlab kodu=?

$$A = \left(\frac{2}{s+1}\right)\left(\frac{3}{s^2+2}\right) + \left(\frac{1}{s-1}\right) = \frac{s^3+s^2+8s-4}{s^4+s^2-2}$$

Yeni diyagramımız;



Geribeslemeli bir sistem olduğu için; $T(s) = \dfrac{G(s)}{1+G(s).H(s)}$

$H(s)=1$ negatif geri besleme anlamına gelir.

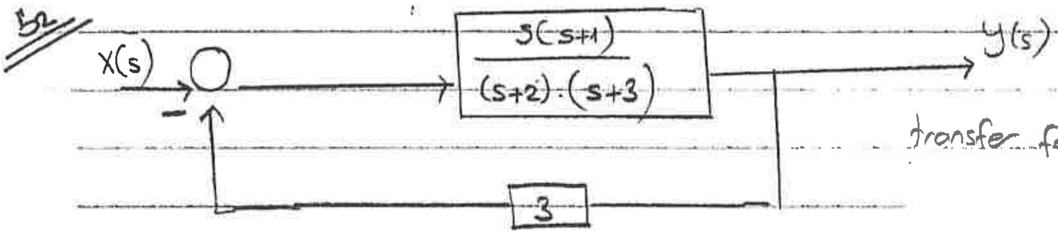
Son denklemimiz $= T(s) = \dfrac{A}{1+A.1} = \dfrac{\dfrac{s^3+s^2+8s-4}{s^4+s^2-2}}{1+\dfrac{s^3+s^2+8s-4}{s^4+s^2-2}}$

Matlab kodu ⇒ feedback sys (123,1) ;

```
sys_1 = 2/s+1 ;
sys_2 = 3/s^2 +2 ;
sys_3 = 1/s-1 ;
sys_12 = series ( sys_1 , sys_2 ) ;
sys_123 = parallel ( sys_12 , sys_3 );
sys_fb = feedback ( sys_123, 1 );
```

Kaynak: mathworks / control toolbox matlab. Matematiksel çözümü?

S2/



transfer fonksiyonu = ?

$$T_s = \frac{G_s}{1 + G_s \cdot H_s} \Rightarrow \text{genel formül.}$$

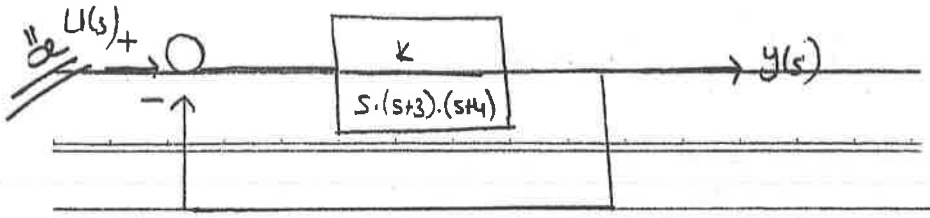
$$\left[X(s) - 3 \cdot Y(s) \right] \cdot \frac{s(s+1)}{(s+2)(s+3)} = Y(s)$$

$$\Rightarrow X(s) - 3Y(s) = \frac{Y(s) \cdot (s+2)(s+3)}{s \cdot (s+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{X(s)}{Y(s)} - 3 = \frac{(s+2)(s+3)}{s^2+s}$$

$$\Rightarrow \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{(3s^2+3s)+(s^2+5s+6)}{s^2+s}$$

$$\Rightarrow \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s(s+1)}{4s^2+8s+6} \rightarrow \text{sistemin transfer fonk.}$$



Sistemin trasfer fonksiyonunu bulunuz. Bu sistemin kararlı olabilmesi için K değeri hangi aralıkta olmalıdır? (Routh- Hurwitz)

$$\Rightarrow [u(s)-y(s)] \cdot \frac{K}{s(s+3)(s+4)} = y(s)$$

$$\Rightarrow u(s)-y(s) = \frac{y(s)\cdot(s)(s+3)(s+4)}{K}$$

$$\Rightarrow \frac{u(s)}{y(s)} - 1 = \frac{s\cdot(s+3)\cdot(s+4)}{K}$$

$$\Rightarrow \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{K}{s^3+7s^2+12s+K}$$

karakteristik denklem $q(s) = s^3+7s^2+12s+K$

Routh Tablosu $\Rightarrow$

s^3	1	12	0
s^2	7	K	0
s^1	$a=\left(\frac{84-K}{7}\right)$	$b=0$	
s^0	$c=K$	$d=0$	

$$a = \frac{-1}{7}\begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 7 & K \end{vmatrix} = \frac{84-K}{7} \qquad b = \frac{-1}{7}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$c = \frac{-1}{(84-K)/7}\begin{vmatrix} 7 & K \\ \frac{(84-K)}{7} & 0 \end{vmatrix} = \frac{7}{K-84}\cdot\left(-K\cdot\frac{(84-K)}{7}\right) = K$$

Sistemin kararlı olabilmesi için tablomuzun birinci sütununda yukarıdan aşağıya doğru hiçbir işaret değişikliği olmaması gerekir. Yani pozitifle başlarsa pozitifle devam etmeli.

$$\frac{84-K}{7} > 0 \qquad K > 0$$

$$\Rightarrow K < 84 \qquad K > 0 \qquad \boxed{0 < K < 84}$$

*Ö2 $T(s)=\dfrac{s+5}{s\cdot(s+2)}$ transfer fonksiyonunun Bode diyagramı=?

$$F(s)=\frac{(j\omega+5)}{(j\omega)\cdot(j\omega+2)}$$

Genlik denklemi $|H(j\omega)| = 20\log|j\omega+5| - 20\log|j\omega| - 20\log|j\omega+2|$

Açı (faz) denklemi $\angle H(j\omega) = \text{Arctan}(j\omega+5) - \text{Arctan}(j\omega) - \text{Arctan}(j\omega+2)$

	ω
$j\omega+5=0$	5
$j\omega=0$	0
$j\omega+2=0$	2

Kırılma noktaları 0, 2 ve 5

$\omega=0.1$ $\omega=2$ $\omega=5$ $\omega=10$ değerlerini verdik.

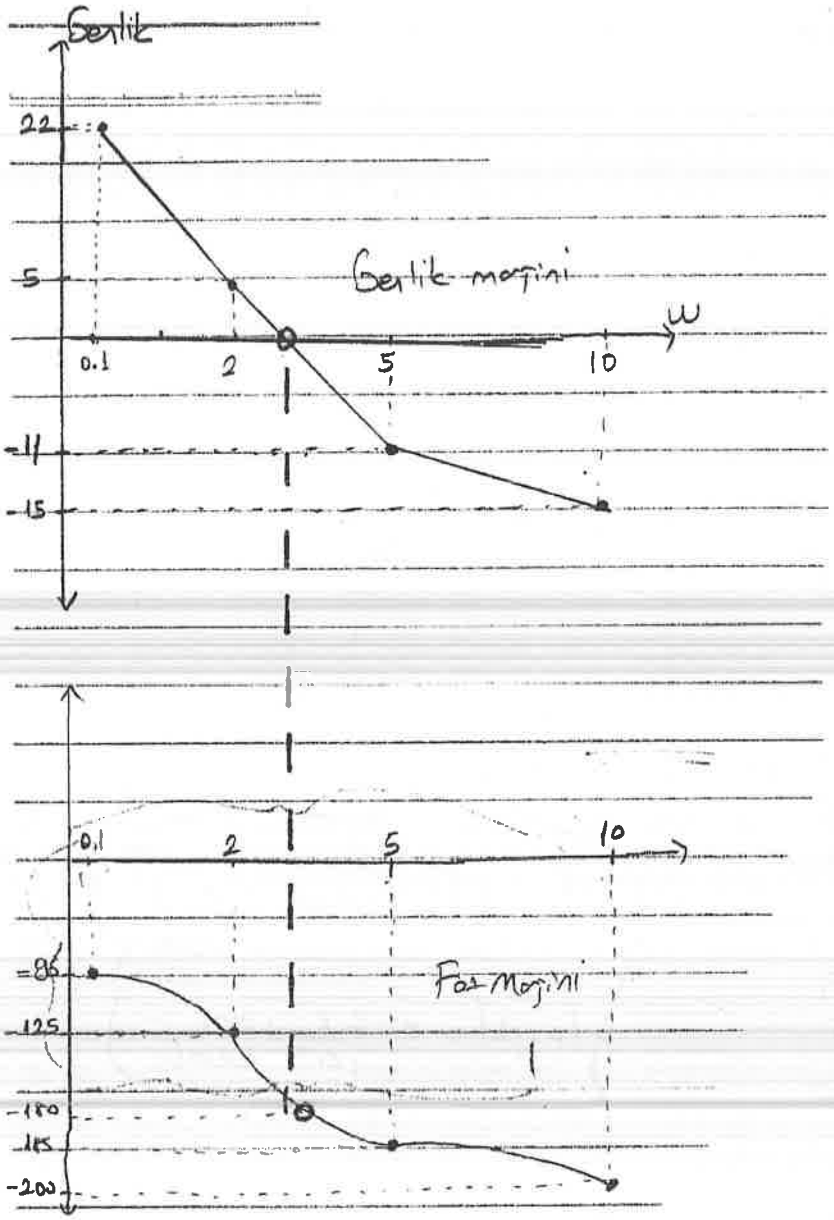
	$\lvert H(j\omega)\rvert$	$\angle H(j\omega)$
$\omega=0.1$	22	-95
$\omega=2$	5	-125
$\omega=5$	-11	-185
$\omega=10$	-15	-200

$|a+jb| = \sqrt{a^2+b^2}$ → Genlik hesabı

$\angle a+jb = \arctan\dfrac{b}{a}$ → açı hesabı.

0.1 için # $|H(j\omega)| = 20\log\sqrt{(0.1)^2+5^2} - 20\log\sqrt{(0.1)^2+0^2} - 20\log\sqrt{(0.1)^2+2^2} = 22$

$$\angle H(j\omega) = \text{Arctan}\,\frac{0.1}{5} - \text{Arctan}\,\frac{0.1}{0} - \text{Arctan}\,\frac{0.1}{2} = -95$$


Genlik
22
5
-11
-15
Genlik marjini
ω
0.1
2
5
10
0.1
2
5
10
-86
-125
-180
-185
-200
Faz marjini

Laplace Dönüşümü

Zaman düzleminde çözümü karmaşık olan doğrusal diferansiyel denklemleri karmaşık frekans düzleminde toplama, çarpma, bölme gibi basit cebirsel denklemlere dönüştürür.

Genel bir sürekli zamanlı $x(t)$ sinyali için Laplace dönüşümü

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$

şeklindedir.

Bazı Laplace Dönüşüm çiftleri —

$x(t)$	$X(s)$	$x(t)$	$X(s)$
$u(t)$	$1/s$	$\cos w_0 t . u(t)$	$\dfrac{s}{s^2+w_0^2}$
$-u(-t)$	$1/s$		
$t.u(t)$	$1/s^2$	$\sin w_0 t . u(t)$	$\dfrac{w_0}{s^2+w_0^2}$
$t^k.u(t)$	$k!/s^{k+1}$		
$e^{-at} u(t)$	$\dfrac{1}{s+a}$	$e^{-at}. \cos w_0 t . u(t)$	$\dfrac{(s+a)}{(s+a)^2+w_0^2}$
$-e^{-at} u(-t)$	$1/s+a$	$e^{-at} \sin w_0 t\, u(t)$	$\dfrac{(w_0)}{(s+a)^2+w_0^2}$
$t.e^{-at}.u(t)$	$\dfrac{1}{(s+a)^2}$		

Sr

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 8y = 2 \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

ters Laplace dönüşümü uygulayınız.

$$s^2 Y(s) + 6s\,Y(s) + 8Y(s) = 2/s$$

$$Y(s) = \frac{2}{s(s+2).(s+4)} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{4s} + \frac{1}{2(s+2)} + \frac{1}{4.(s+4)}$$

$$y(t) = \frac{1}{4} - \frac{e^{-2t}}{2} + \frac{e^{-4t}}{4}$$

Ör: $x(t) = -e^{-at} \cdot u(-t) \Rightarrow \frac{1}{s+a}$

$x(t) = e^{at} u(-t) \Rightarrow -\frac{1}{s-a}$

Ör: $x(t) = e^{-2t} u(t) + e^{-3t} u(t)$ laplace dönüşümü bulunuz.

$$X(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+3} = \frac{2\left(s+\frac{5}{2}\right)}{(s+2)(s+3)}$$

Ör: $x(t) = e^{-3t} u(t) + e^{2t} u(-t)$ laplace dönüşümü?

$$X(s) = \frac{1}{s+3} + \frac{1}{s-2} = \frac{-5}{(s-2)(s+3)}$$

Ör: $x(t) = e^{2t}(ut) + e^{-3t} u(-t)$ laplace dönüşümü?

$$X(s) = \frac{1}{s-2} + \left(-\frac{1}{s+3}\right) = \frac{5}{(s-2)(s-3)}$$

Ör: $x(t) = e^{-2t} [u(t) - u(t-5)]$ laplace dönüşümü?

$x(t) = e^{-2t} \cdot u(t) - e^{-2t} \cdot u(t-5)$

$x(t) = e^{-2t} u(t) - e^{-10} e^{-2(t-5)} u(t-5)$

$$X(s) = \frac{1}{s+2} - e^{-10} \cdot e^{-5s} \frac{1}{s+2} = \frac{1}{s+2}\left(1 - e^{-5(s+2)}\right)$$

Ör: Aşağıdaki fonksiyonlara ters laplace dönüşümü uygulayın.

$X(s) = \frac{s}{s^2+4}$ $\qquad x(t) = \cos 2t\, u(t)$

$X(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2+4}$ $\qquad x(t) = e^{-t} \cdot \cos 2t\, u(t)$

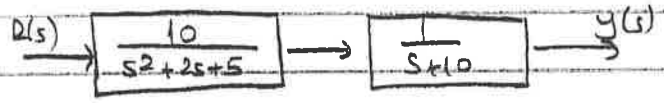
Transfer Modellerinin MATLAB ile Analizi
Pratik.

s^3+3s^2+4 polinomunun kökleri   1- p=[1 3 0 4]
2- r= roots(p)

$G_1(s)=\dfrac{10}{s^2+2s+5}$ ⇒ Pay1 = [10]; Payda1 = [1 2 5]; G1=tf(Pay1,Pay

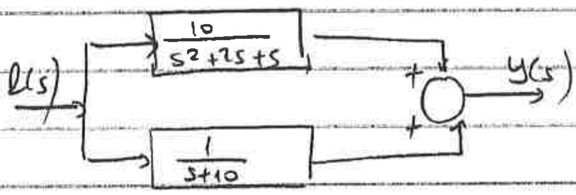
$G_2(s)=\dfrac{1}{s+1}$ ⇒ Pay2 = [1]; Payda2 = [1 1]; G2=tf(Pay2,Payda2)

Seri bağlı iki sistemin transfer fonksiyonlarının indirgenmesi "series" komutuyla ya da "*" sembolüyle yapılır.



1- Pay1=[10]; Payda1=[1 2 5]; Sistem1 = tf(Pay1, Payda1);
2- Pay2=[1]; Payda2=[1 1]; Sistem2 = tf(Pay2, Payda2)
3- Sistem = Sistem1 * Sistem2
(ya da Sistem = Series(Sistem1, Sistem2))

#

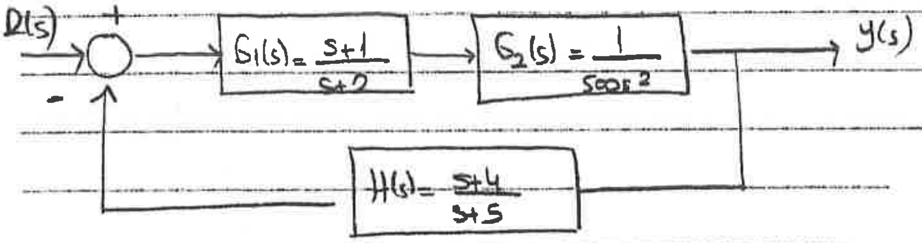


Paralel bağlı iki sistemde ya parallel komutu ya da (+) kullanılır.
3- Sistem = Sistem1 + Sistem2
(ya da Sistem = Parallel(Sistem1, Sistem2))

Geri bildirim döngüsünün indirgenmesi feedback komutuyla yapılır

T = feedback (G, H, işaret) negatifse işaret − (belirtilmemişse de bu kullan)

pozitifse işaret +



$G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s)$

$[R(s) - Y(s) \cdot H(s)] \cdot G(s) = Y(s)$

$R(s) \cdot G(s) - Y(s) \cdot H(s) \cdot G(s) = Y(s)$

$Y(s)[1 + G(s) \cdot H(s)] = R(s) \cdot G(s)$

$T(s) \quad \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)} = \frac{s^2 + 6s + 5}{s^4 + 7s^3 + 11s^2 + 5s + 4}$

Matlab Kodu:

```
1- PayG1 = [1 1]; PaydaG1 = [1 2]; G1 = tf(PayG1, PaydaG1)
2- PayG2 = [1]; PaydaG2 = [1 0 0]; G2 = tf(PayG2, PaydaG2)
3- G = series (G1, G2)
4- PayH = [1 4]; PaydaH = [1 5]; H = tf(PayH, PaydaH)
5- T = feedback (G, H)
```

Soru: $f(t) = 5u(t) + 3e^{-2t}$ için Laplace Dönüşümü = ?

$$\mathcal{L}\{5u(t)\} = 5.\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{5}{s}$$

$$\mathcal{L}\{3.e^{-2t}\} = 3.\mathcal{L}\{e^{-2t}\} = \frac{3}{s+2}$$

$$F(s) = \frac{5}{s} + \frac{3}{s+2} = \frac{8s+10}{s(s+2)}$$