# Özdevinirler Kuramı ve Biçimsel Diller

# Bölüm 5 : Yığıtlı Özdevinirler (*Pushdown Automata*)

## Geçen Hafta Eksik Kalan Kısım (Bölüm 4 : Bağlamdan-Bağımsız Dilbilgisi ve Diller)

## Chomsky Normal Biçimindeki Dilbilgisi ile Tümcelerin Türetilmesi

**Normal biçimde olmayan bağlamdan-bağımsız bir dilbilgisi ile n uzunluğundaki bir tümcenin kaç adımda türetilebileceği kestirilemez. Tümce bir adımda da türetilebilir, k >> n olmak üzere, k adımda da türetilebilir. CNF bir dilbilgisi ile tümcelerin türetilmesinde ise belirsizlik yoktur.**

- **Örnek 4.9.** $P: S \Rightarrow AB$

$$A \Rightarrow BS \mid 1$$

$$B \Rightarrow SA \mid 0$$

$$S \Rightarrow AB \Rightarrow 1B \Rightarrow 10$$

$$S \Rightarrow AB \Rightarrow BSB \Rightarrow 0SB \Rightarrow 0ABB \Rightarrow 01BB \Rightarrow 010B \Rightarrow 0100$$

$$S \Rightarrow AB \Rightarrow 1B \Rightarrow 1SA \Rightarrow 1ABA \Rightarrow 11BA \Rightarrow 11SAA \Rightarrow 11ABAA \Rightarrow 111BAA$$
$$\Rightarrow 1110AA \Rightarrow 11101A \Rightarrow 111011$$

**Görüldüğü gibi, CNF bir dilbilgisi ile n uzunluğundaki bir tümce 2n-1 adımda türetilmektedir.**

# 4.4.2. Greibach Normal Biçimi

- **Tanım4.2.** Eğer bağlamdan-bağımsız bir dilbilgisinin yeniden yazma kurallarının tümü

$$S \Rightarrow \lambda$$

$$A \Rightarrow a\,\alpha \;:\; A \in V_N\,,\;\; a \in V_T\,,\;\; \alpha \in V_N^*$$

biçiminde ise, dilbilgisi Greibach normal biçimindedir.

- **Lemma 4.1.** Bağlamdan-bağımsız bir dilbilgisinin yeniden yazma kurallarından biri:

$$A \Rightarrow \alpha_1\, B\, \alpha_2 \qquad (k_1)$$

olsun. Eğer dilbilgisinin tüm B kuralları

$$B \Rightarrow \beta_1 \mid \beta_2 \mid \;\ldots\; \mid \beta_n$$

ise, dilbilgisinden $k_1$ kuralını çıkarıp yerine

$$A \Rightarrow \alpha_1\, \beta_1\, \alpha_2 \mid \alpha_1\, \beta_2\, \alpha_2 \mid \;\ldots\; \mid \alpha_1\, \beta_n\, \alpha_2 \qquad (k_2)$$

kuralları konulduğunda eşdeğer (aynı dili türeten) bir dilbilgisi elde edilir.

- **Lemma 4.2.** Eğer bağlamdan-bağımsız bir dilbilgisi doğrudan özyineli (*direct recursive*) yeniden yazma kuralları içeriyorsa, bu dilbilgisine eşdeğer, doğrudan özyineli kural içermeyen bir dilbilgisi bulunabilir. Bunun için doğrudan özyineli kuralların yerine konulacak yeni kurallar aşağıdaki gibi bulunur.

Dilbilgisinin A kurallarının bir kesimi doğrudan özyineli ise,

A kuralları iki gruba ayrılır:

$$A \Rightarrow A\alpha_1 \mid A\alpha_2 \mid \ldots \mid A\alpha_r \qquad (g_1)$$

$$A \Rightarrow \beta_1 \mid \beta_2 \mid \ldots \mid \beta_s \qquad (g_2)$$

A kurallarından doğrudan özyineli olanların $(g_1)$ yerine aşağıdaki kurallar konulur:

$A \Rightarrow \beta_i B$ $\quad i = 1, 2, .. , s$ $\quad$ B : yeni bir değişken

$B \Rightarrow \alpha_j B$ $\quad j = 1, 2, \ldots , r$

$B \Rightarrow \alpha_j$ $\quad j = 1, 2, \ldots , r$

## Greibach Normal Biçimindeki Dilbilgisi ile Tümcelerin Türetilmesi

**Normal biçimde olmayan bağlamdan-bağımsız bir dilbilgisi ile tümcelerin kaç adımda türetileceğinin belirsiz olduğunu; CNF dilbilgisi ile belirsizliğin ortadan kalktığını ve n uzunluğundaki bir tümcenin 2n-1 adımda türetildiğini gördük. GNF dilbilgisi ile de tümcelerin kaç adımda türetileceği belirsiz değildir.**

- **Örnek 4.10.** P : $S \Rightarrow aB \mid bA$

$$A \Rightarrow aS \mid bAA \mid a$$

$$B \Rightarrow bS \mid aBB \mid b$$

$$S \Rightarrow aB \Rightarrow ab$$

$$S \Rightarrow bA \Rightarrow baS \Rightarrow baaB \Rightarrow baab$$

$$S \Rightarrow aB \Rightarrow aaBB \Rightarrow aabSB \Rightarrow aabaBB \Rightarrow aababB \Rightarrow aababb$$

$$S \Rightarrow bA \Rightarrow baS \Rightarrow baaB \Rightarrow baaaBB \Rightarrow baaabB \Rightarrow baaabbS \Rightarrow baaabbaB \Rightarrow baaabbab$$

**Görüldüğü gibi GNF bir dilbilgisi ile n uzunluğundaki bir tümce n adımda türetilmektedir.**

## ➢ Chomsky Normal Biçimindeki Bağlamdan-Bağımsız Dilbilgisinin Greibach Normal Biçimine Dönüştürülmesi

**1. Adım.**

**1.1. Dilbilgisinin sözdizim değişkenleri $A_1$, $A_2$, $A_3$, …, $A_k$ gibi dizinli değişkenlerle değiştirilir. Bu değişiklik yapılırken S'nin yerine dizin değeri en küçük olan ($A_1$) değişken konulur.**

**1.2. Lemma 4.1 kullanılarak yeniden yazma kurallarının tümü**

$$A_i \Rightarrow A_j \gamma \qquad\qquad j \geq i$$

**koşulunu sağlayacak biçime dönüştürülür.**

**2. Adım.**

**2.1. Lemma 4.2 kullanılarak doğrudan özyineli kuralların yerine yeni kurallar konulur. Bu adımın sonunda, dizin değeri en büyük ($A_k$) değişkenle başlayan tüm kurallar GNF'e uygun biçime dönüşmüş olur. Bu adımda dilbilgisine $B_1$, $B_2$, … gibi yeni değişkenler de eklenir.**

**3. Adım.**

**3.1. Lemma 4.1 kullanılarak, $A_{k-1}$, $A_{k-2}$, ….., $A_2$, $A_1$ sırasında tüm $A_i$ kuralları GNF'e uygun biçime dönüştürülür.**

**3.2. Lemma 4.1 kullanılarak tüm $B_j$ kuralları (sol tarafında 2. adımda eklenen değişkenlerin yer aldığı kurallar) GNF'e uygun biçime dönüştürülür.**

# Bölüm 5 : Yığıtlı Özdevinirler (*Pushdown Automata*)

- **Örnek 4.11.**

$G_{4.11} = < V_N, V_T, P, S >$

$V_N = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ $A_1$ : Başlangıç değişkeni

$V_T = \{a, b\}$

P : $A_1 \Rightarrow A_2A_3$ (1)

$A_1 \Rightarrow A_2A_4$ (2)

$A_2 \Rightarrow a$ (3)

$A_3 \Rightarrow b$ (4)

$A_4 \Rightarrow A_1A_3$ (5)

- **Algoritma uygulanarak elde edilen Greibach normal biçimindeki dilbilgisinin yeniden yazma kuralları:**

P : $A_1 \Rightarrow aA_3 \mid aA_4$

$A_2 \Rightarrow a$

$A_3 \Rightarrow b$

$A_4 \Rightarrow aA_3A_3 \mid aA_4A_3$

- **$A_2$ yararsız bir değişkendir. $A_2$ atılıp diğer değişkenler yeniden adlandırılırsa:**

P : $S \Rightarrow aB \mid aC$

$B \Rightarrow b$

$C \Rightarrow aBB \mid aCB$

# Özdevinirler Kuramı ve Biçimsel Diller

## ➢ Yığıtlı Özdevinirler *(Pushdown Automata)*

➢ **Yığıtlı özdevinirler, bağlamdan-bağımsız dilleri (CFL) tanıyan makine modelidir.**

➢ **Biçimsel olarak, yığıtlı özdevinir (PDA) bir yedili olarak tanımlanabilir.**

**PDA = $< Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F >$**

**Q : Sonlu sayıda durum içeren Durumlar Kümesi**

**$\Sigma$ : Sonlu sayıda giriş simgesinden oluşan Giriş Alfabesi**

**$\Gamma$ : Sonlu sayıda simge içeren Yığıt Alfabesi. Yığıt ve giriş alfabelerindeki simgelerin tümü ya da bir bölümü ortak olabileceği gibi iki alfabede hiç ortak simge bulunmayabilir de.**

**$q_0$ : Başlangıç durumu ($q_0 \in Q$).**

**Başlangıç durumu durumlar kümesinin bir elemanı olduğuna göre Q boş olmayan bir kümedir.**

# Bölüm 5 : Yığıtlı Özdevinirler (*Pushdown Automata*)

**$Z_0$: Yığıt Başlangıç simgesi (yığıt alfabesindeki simgelerden biri)**

**F : Uç durumlar kümesi (durumlar kümesinin bir altkümesi)**

**$\delta$ : Geçiş ya da Hareket İşlevi**

**$[Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma]$ 'dan $[Q \times \Gamma^*]$ 'ya bir eşleme (D PDA)**

**'nın sonlu altkümelerine bir eşleme (ND PDA)**

**Geçiş ya da hareket örnekleri:**

$\delta(q_0, 0, A) = (q_0, BA)$

$\delta(q_0, 1, A) = (q_1, \lambda)$

$\delta(q_1, 1, Z_0) = (q_2, Z_0)$

$\delta\,(q_1, \lambda, B) = (q_1, AB)$ <<< $\lambda$-hareketi

$\delta(q_2, 0, B) = \{\, (q_2, \lambda), (q_3, BB)\}$

**Normal harekette yapılan işlemler:**

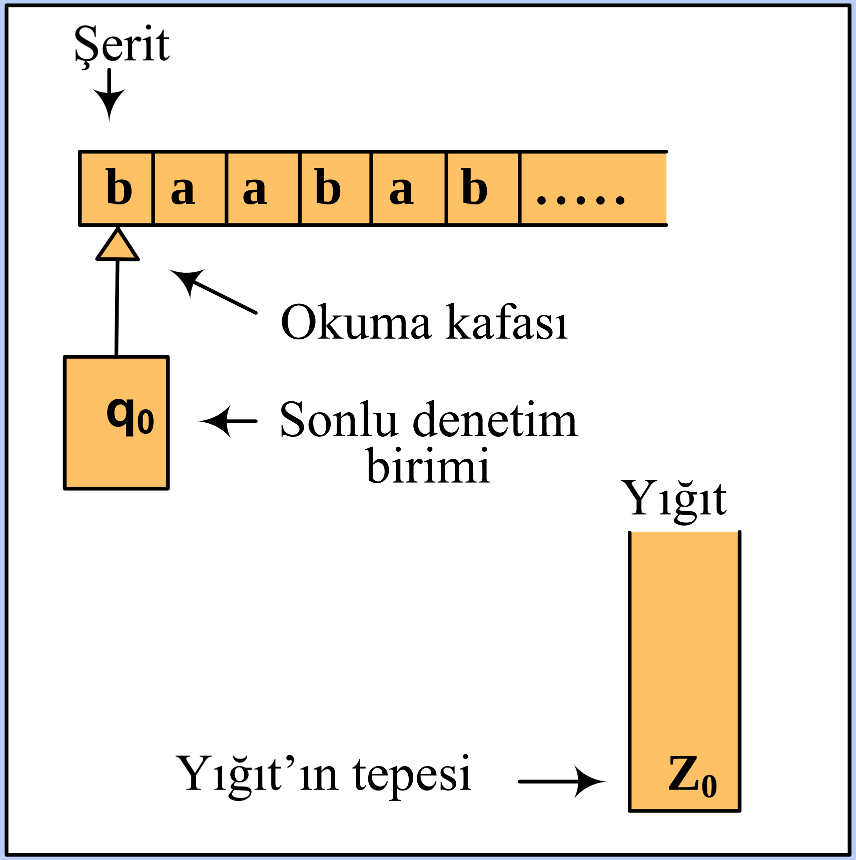
$\delta(p, s, A) = (q, \beta)$ : *read* (s) ; *if* (p, s *and* A) : $p \rightarrow q$, *pop* (A), *push* ($\beta$)

**$\lambda$ Hareketinde yapılan işlemler:**

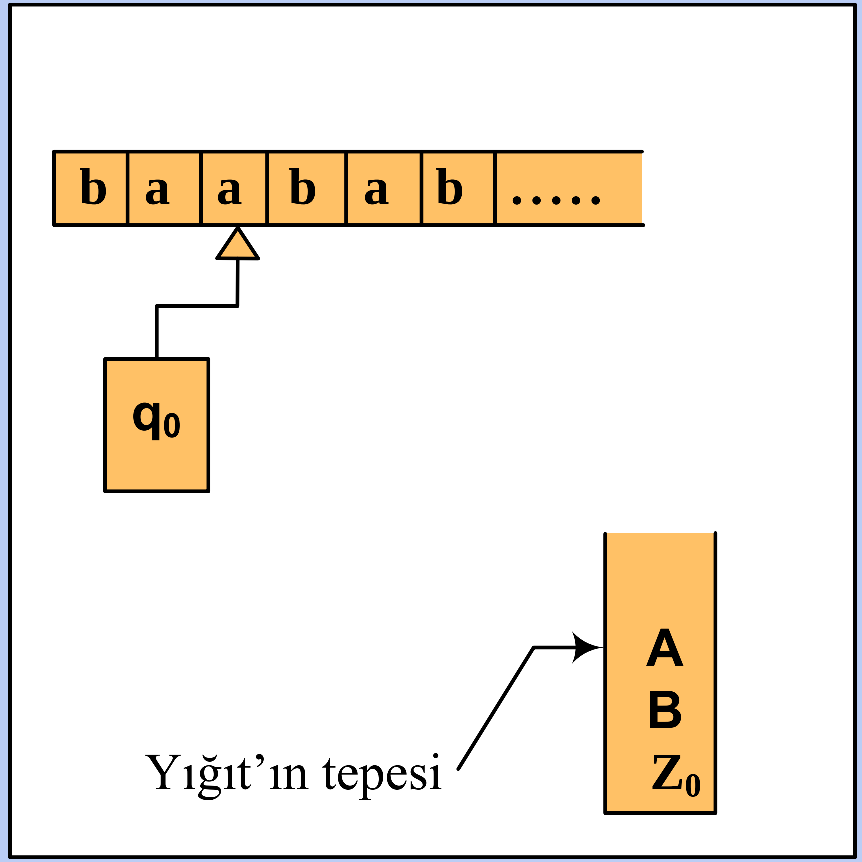
$\delta(p, \lambda, A) = (q, \beta)$ : *if* (p *and* A) : $p \rightarrow q$, *pop* (A) *push* ($\beta$)

$\lambda$ hareketinde *read* (s) işlemi yapılmıyor.

## PDA'nın Soyut Makine Modeli




**a**) Başlangıç Görünümü




**a**) 2 Hareket Sonraki Görünüm

# Bölüm 5 : Yığıtlı Özdevinirler (*Pushdown Automata*)

## ➢ Anlık Tanımlar (*Instantaneous Descriptions*)

**Anlık tanım (ID) = (p, v, X)**

**p : PDA'nın durumu**

**v : giriş dizgisinin henüz işlenmemiş kesimi**

**X : yığıtın içeriği**

## ➢ PDA'nın Tanıdığı Dil

**Uç durumla tanıyan PDA modeli:**

$$T(M) = \{w \mid w \in V_T^*\ ,\ \ (q_0, w, Z_0) \vdash^* (p, \lambda, \gamma)\ ,\ \ p \in F\}$$

**Boş yığıtla tanıyan PDA modelinde:**

$$T(M) = \{w \mid w \in V_T^*\ ,\ \ (q_0, w, Z_0) \vdash^* (p, \lambda, \lambda)\ ,\ \ p \in Q\}$$

# Bölüm 5 : Yığıtlı Özdevinirler (*Pushdown Automata*)

- **Örnek 5.1.** $L_{5.1}$ dili aşağıdaki gibi tanımlanıyor:

$$L_{5.1} = \{w\ c\ w^R \mid w \in (0 + 1)^*\}$$

Bu dili türeten bir dilbilgisi aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$G_{5.1} = <V_N, V_T, P, S>$

$V_N = \{S\}$

$V_T = \{0, 1, c\}$

$P : S \Rightarrow 0S0 \mid 1S1 \mid c$

$L_{5.1}$'i tanıyan PDA'yı tanımlayalım:

$M_{5.1} = < Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, \Phi >$

$Q = \{q_0, q_1\}$

$\Sigma = \{0, 1, c\}$

$\Gamma = \{0, 1, Z_0\}$

$\delta :\ \delta(q_0, 0, Z_0) = (q_0, 0Z_0)$

$\delta(q_0, 1, Z_0) = (q_0, 1Z_0)$

$\delta(q_0, c, Z_0) = (q_1, Z_0)$

$\delta(q_0, 0, 0) = (q_0, 00)$

$\delta(q_0, 1, 0) = (q_0, 10)$

$\delta(q_0, 0, 1) = (q_0, 01)$

$\delta(q_0, 1, 1) = (q_0, 11)$

$\delta(q_0, c, 0) = (q_1, 0)$

$\delta(q_0, c, 1) = (q_1, 1)$

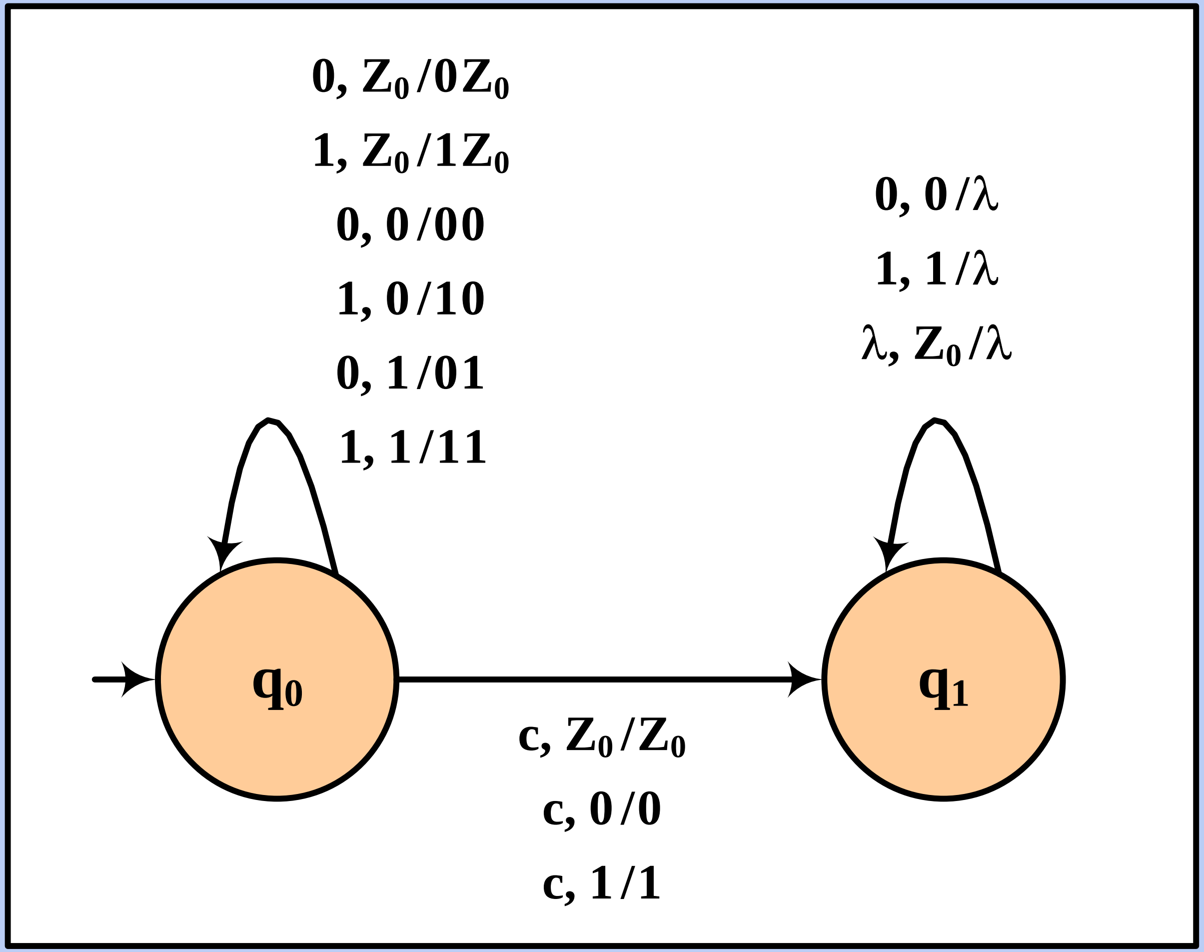
$\delta(q_1, 0, 0) = (q_1, \lambda)$

$\delta(q_1, 1, 1) = (q_1, \lambda)$

$\delta(q_1, \lambda, Z_0) = (q_1, \lambda)$

- $M_{5.1}$ deterministik bir PDA'dır.

- **$L_{5.1}$ Dilini Tanıyan PDA'nın ($M_{5.1}$) Geçiş Çizeneği**



# Bölüm 5 : Yığıtlı Özdevinirler (*Pushdown Automata*)

- **Örnek 5.2.** $L_{5.2}$ dili aşağıdaki gibi tanımlanıyor:

$$L_{5.2} = \{w\, w^R \mid w \in (0+1)^*\}$$

Bu dili türeten bir dilbilgisi aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$G_{5.2} = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$

$V_N = \{S\}$

$V_T = \{0, 1\}$

$P: \; S \Rightarrow 0S0 \mid 1S1 \mid \lambda$

$L_{5.2}$'yi tanıyan PDA'yı tanımlayalım:

$M_{5.2} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, \Phi \rangle$

$Q = \{q_0, q_1\}$

$\Sigma = \{0, 1\}$

$\Gamma = \{A, B, Z_0\}$

$\delta: \delta(q_0, 0, Z_0) = (q_0, AZ_0)$

$\delta(q_0, 1, Z_0) = (q_0, BZ_0)$

$\delta(q_0, \lambda, Z_0) = (q_1, \lambda)$

$\delta(q_0, 0, A) = \{(q_0, AA), (q_1, \lambda)\}$

$\delta(q_0, 1, A) = (q_0, BA)$

$\delta(q_0, 0, B) = (q_0, AB)$

$\delta(q_0, 1, B) = \{(q_0, BB), (q_1, \lambda)\}$

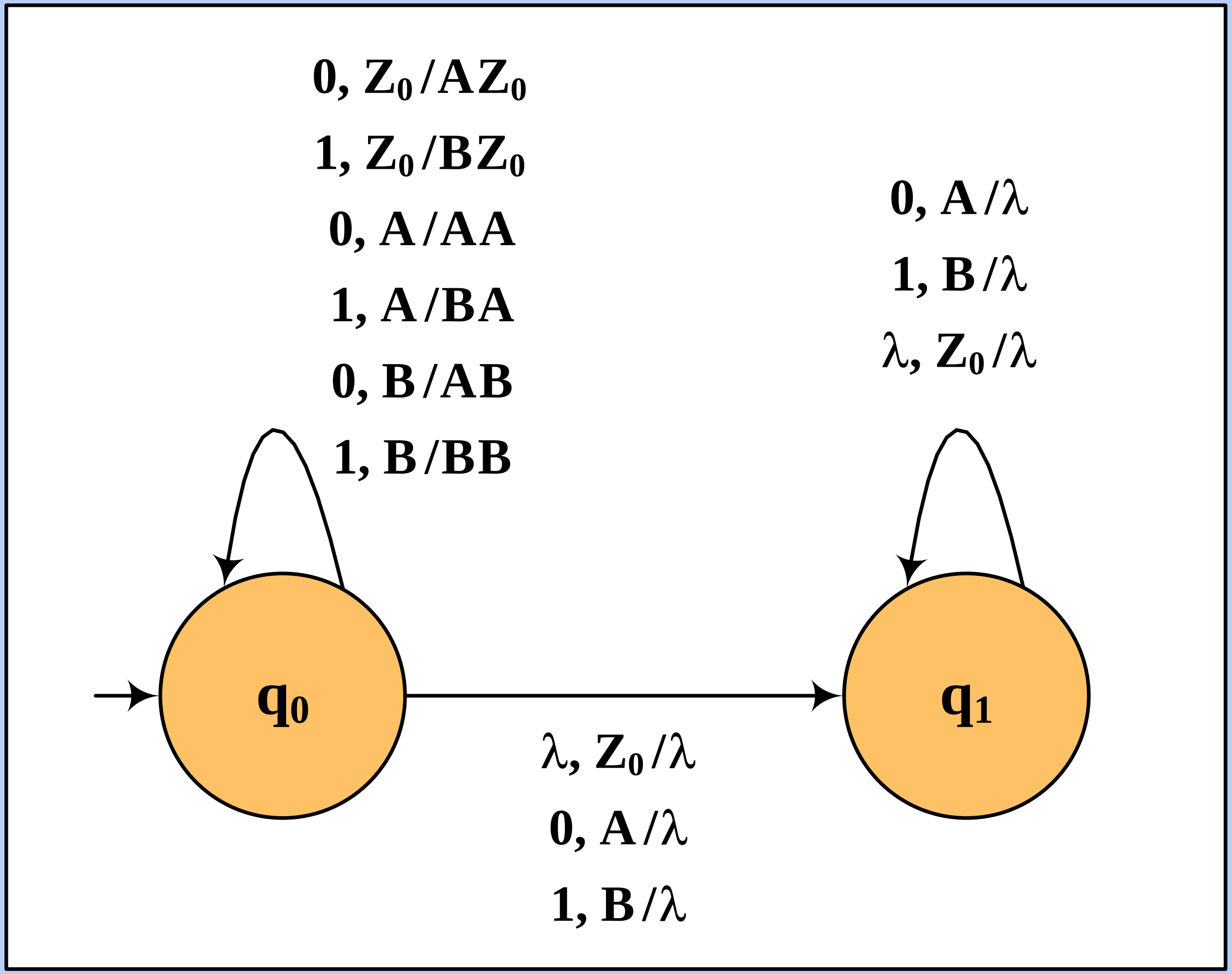
$\delta(q_1, 0, A) = (q_1, \lambda)$

$\delta(q_1, 1, B) = (q_1, \lambda)$

$\delta(q_1, \lambda, Z_0) = (q_1, \lambda)$

- M5.2 deterministik olmayan (*non deterministic*) bir PDA'dır.

- **$L_{5.2}$ Dilini Tanıyan PDA'nın ($M_{5.2}$) Geçiş Çizeneği**



# Bölüm 5 : Yığıtlı Özdevinirler (*Pushdown Automata*)

- **Örnek 5.3.** $L_{5.3}$ dili, {0, 1} alfabesindeki palindram'ları içeren dil olarak tanımlanıyor:

$$L_{5.3} = \{w\,w^R + w\,0\,w^R + w\,1\,w^R \quad | \quad w \in (0 + 1)^*\}$$

- $G_{5.3} = <V_N, V_T, P, S>$

  $V_N = \{S\}$

  $V_T = \{0, 1\}$

  $P : \ S \Rightarrow 0S0 \mid 1S1 \mid \lambda \mid 0 \mid 1$

- $L_{5.3}$'ü tanıyan PDA'yı tanımlayalım:

  $M_{5.3} = <Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, \Phi>$

  $Q = \{q_0, q_1\}$

  $\Sigma = \{0, 1\}$

  $\Gamma = \{0, 1, Z_0\}$

- $\delta$ : $\delta(q_0, 0, Z_0) = \{(q_0, 0\,Z_0), (q_1, Z_0)\}$

  $\delta(q_0, 1, Z_0) = \{(q_0, 1\,Z_0), (q_1, Z_0)\}$

  $\delta(q_0, \lambda, Z_0) = (q_1, \lambda)$

  $\delta(q_0, 0, 0) = \{(q_0, 0\,0), (q_1, 0), (q_1, \lambda)\}$

  $\delta(q_0, 1, 0) = \{(q_0, 1\,0), (q_1, 0)\}$

  $\delta(q_0, 0, 1) = \{(q_0, 0\,1), (q_1, 1)\}$

  $\delta(q_0, 1, 1) = \{(q_0, 1\,1), (q_1, 1), (q_1, \lambda)\}$

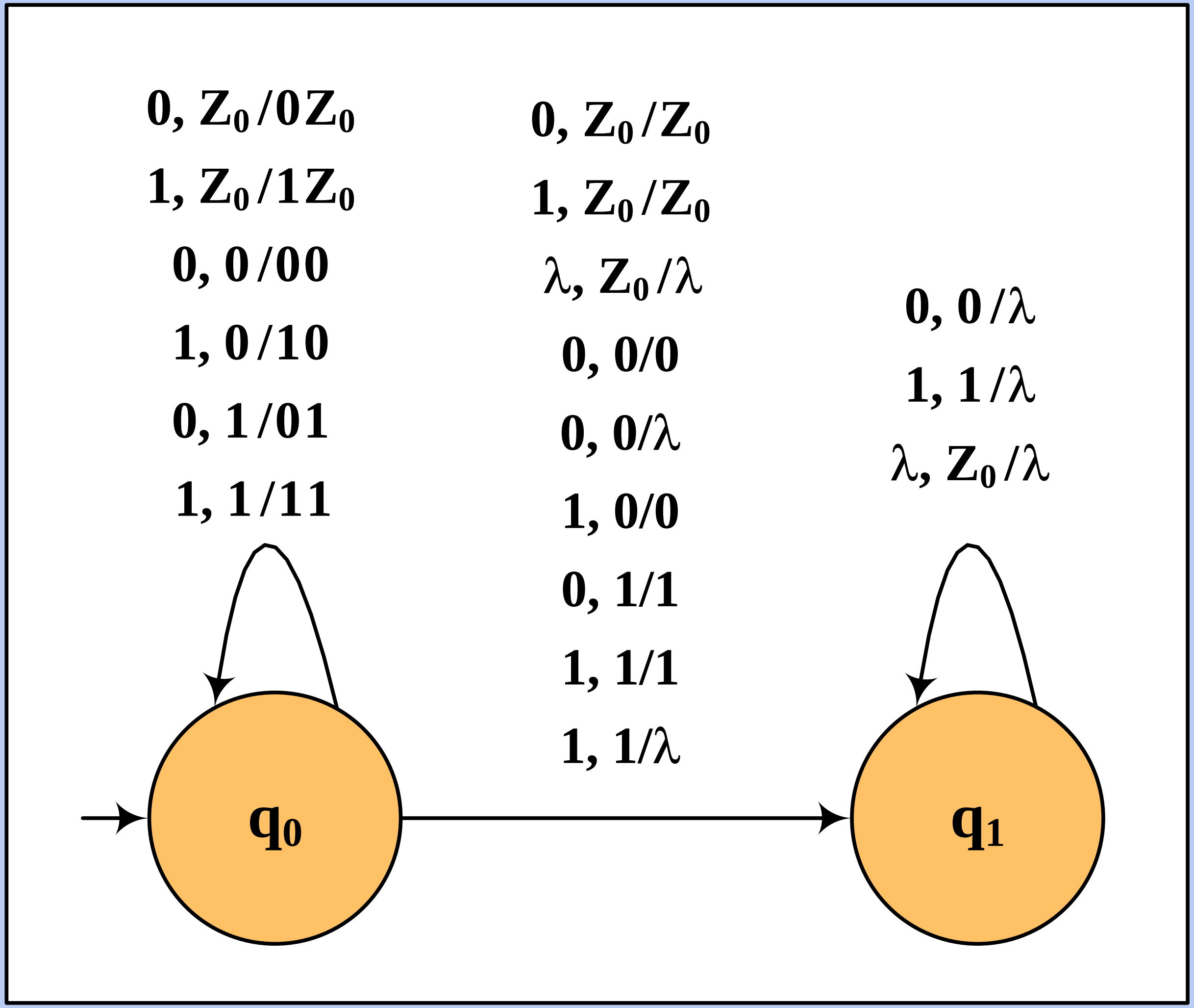
  $\delta(q_1, 0, 0) = (q_1, \lambda)$

  $\delta(q_1, 1, 1) = (q_1, \lambda)$

  $\delta(q_1, \lambda, Z_0) = (q_1, \lambda)$

- $M_{5.3}$ deterministik olmayan (*non deterministic*) bir PDA'dır.

- **$L_{5.3}$ Dilini Tanıyan PDA'nın ($M_{5.3}$) Geçiş Çizeneği**



- **Örnek 5.4.** $L_{5.4}$ dili aşağıdaki gibi tanımlanıyor:

$$L_{5.4} = \{a^i\, b^n\, a^j\, b^n\, a^k \mid i, j, k, n \geq 1\}$$

- $G_{5.4} = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$

$V_N = \{S, A, B\}$

$V_T = \{a, b\}$

$P : S \Rightarrow ABA$

$A \Rightarrow aA \mid a$

$B \Rightarrow bBb \mid bAb$

- $M_{5.4} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, \Phi \rangle$

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$\Gamma = \{B, Z_0\}$

$\delta : \delta(q_0, a, Z_0) = (q_1, Z_0)$

$\delta(q_1, a, Z_0) = (q_1, Z_0)$

$\delta(q_1, b, Z_0) = (q_2, BZ_0)$

$\delta(q_2, b, B) = (q_2, BB)$

$\delta(q_2, a, B) = (q_3, B)$

$\delta(q_3, a, B) = (q_3, B)$

$\delta(q_3, b, B) = (q_4, \lambda)$

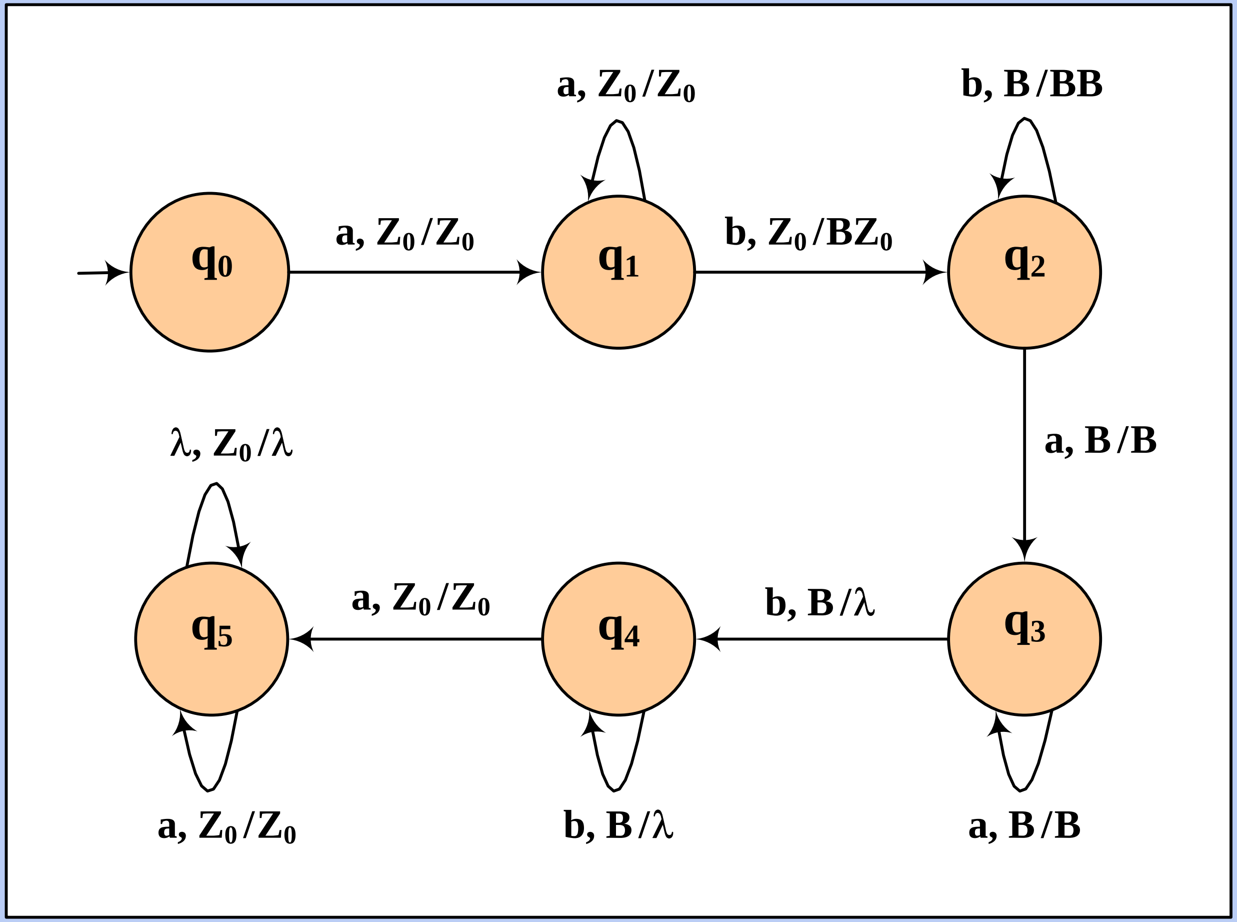
$\delta(q_4, b, B) = (q_4, \lambda)$

$\delta(q_4, a, Z_0) = (q_5, Z_0)$

$\delta(q_5, a, Z_0) = (q_5, Z_0)$

$\delta(q_5, \lambda, Z_0) = (q_5, \lambda)$

- **$L_{5.4}$ Dilini Tanıyan PDA'nın ($M_{5.4}$) Geçiş Çizeneği**



## PDA'nın Deterministik Olma Koşulu

- **Her δ(q, a, X) için tanımlı en çok bir hareket olması,**
- **Eğer δ(q, λ, X) için bir hareket tanımlı ise de, hiçbir a giriş simgesi için, δ(q, a, X) hareketinin tanımlı olmaması**

- **Yukarıda verilen örneklerden $M_{5.1}$ deterministiktir. $M_{5.2}$, $M_{5.3}$ ve $M_{5.4}$ deterministik değildir.**