Q1)

$T_1 = O(n^4)$
$T_2 = O(3^n)$
$T_3 = O(n!)$
$T_4 = O(\ln(\ln n))$
$T_5 = O(4^n)$
$T_6 = O(n^a)$ for $0<a<1$

$$T_4 < T_6 < T_1 < T_2 < T_5 < T_3$$

Şimdi sırayla limit alarak, bu sıralamanın doğruluğunu kanıtlayalım.

$\rightarrow T_4 \stackrel{?}{=} O(T_6)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(\ln n)}{n^a} \underset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n.(\ln n)}}{a.n^{1-a}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a.n^{2-a}.\ln n} = 0 \Rightarrow T_4 \in O(T_6)$$

$0<a<1$ olduğundan burası pozitif

$\Rightarrow T_6 \stackrel{?}{=} O(T_1)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^a}{n^4} \underset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{a.n^{1-a}}{4.n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{4.n^{3-(1-a)}} = 0 \Rightarrow T_6 \in O(T_1)$$

$0<a<1$ old. pozitif ifade burası

$\Rightarrow T_1 \stackrel{?}{=} O(T_2)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{3^n} \underset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{4.n^3}{3^n.\ln 3} = \underset{\text{L'usoptal}}{\cdots} = \lim_{n\to\infty} \frac{4.3.2.1.n^0}{3^n.(\ln 3)^4} = 0 \Rightarrow T_1 \in O(T_2)$$

$\rightarrow T_2 \stackrel{?}{=} O(T_5)$

$\lim_{n\to a} \frac{3^n}{4^n} \rightarrow$ 4^n'in büyüme hızı, 3^n'den daha fazladır $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{4^n} = 0 \Rightarrow T_2 \in O(T_5)$

$\rightarrow T_5 \stackrel{?}{=} O(T_3)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{\sqrt{2\pi n}.\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}.\left(\frac{n}{4e}\right)^n} = 0 \Rightarrow T_5 \in O(T_3)$$

$n! \cong \sqrt{2\pi n}.\left(\frac{n}{e}\right)^n$
Stirling formula

2)

Bu algoritma, kendisine gelen dizinin en büyük elemanıyla, en küçük elemanının ortalamasına en yakın elemanı bulup return eder.

plum = dizinin min. elemanı

watermelon = dizinin max. elemanı

orange = en büyük elemanla, en küçük elemanın ortalamasına en yakın dizi elemanı.

orangeTime = for döngüsü, normal koşullar altında bittiğinde (break'e gelmeden son döngüde), bir üstteki while döngüsünden çıkmak için tutulan flag.

fruits : fonksiyona gönderilen dizi

fruit : fonksiyona gönderilen dizideki bir eleman (for döngüsü ile değişir bu eleman)

Analiz: while'ın altındaki for, arrayin tüm elemanlarını gezdiğinden, n defa çalışır, eğer son döngüde break'e girerse n+n şeklinde çalışır yani $\theta(n)$, üstteki while'da for bitince biteceğinden $\theta(n)$, en alttaki for ise arrayin tüm elemanlarını gezip karşılaştırma yapacağından $\theta(n)$

Tüm program $\theta(n)+\theta(n) = \theta(n)$ 'dir.

worst case: Arrayin minimum elemanının en sonda olma durumudur. Bu durumda for'un son döngüsü break'e gireceğinden, else ifadesine girilmeyecek ve for döngüsü baştan başlayacaktır.

$\theta(n+n) = \theta(n)$

Best case: Arrayin n elemanı varsa n-2'ye kadar yapılan shiftler de 1. dönüş n defa yapılacağından $\Rightarrow \theta(n)$

Average case: Best case = Worst Case $= \theta(n)$

Dolayısıyla average $= \theta(n)$'dir.

3a Sıkıştırma teoremini kullanırsak

$$\int_0^n (i^2+1)^2 \le \sum_{i=0}^{n-1} (i^2+1)^2 \le \int_1^{n+1} (i^2+1)^2$$

(sınırların önemi yok.)

$$\int (i^2+1)^2 = \int i^4+2i^2+1 = \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + c$$

$$\circledast \left. \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x \right|_0^n = \frac{n^5}{5} + \frac{2n^3}{3} + n$$

$$\circledast \left. \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x \right|_1^{n+1} = \frac{(n+1)^5}{5} + \frac{2(n+1)^3}{3} + (n+1) - \frac{1}{5} - \frac{2}{3} - 1$$

Toplam iki $\circledast$ işaretli sonuçlar arasında olacak, ve en büyük terimleri n^5 olduğundan iki ifadenin de

$$\sum_{i=0}^{n-1} (i^2+1)^2 \in \Theta(n^5)$$

3b Sıkıştırma teoremi kullanırsak

$$\int_0^n \log i^2 \le \sum_{i=2}^{n-1} \log i^2 \le \int_1^{n+1} \log i^2$$

(sınırların önemi yok.)

$$\circledast \int_0^n \log i^2 = 2\int_0^n \log i = \Big|_0^n n\log n - n$$

$$= n\log n - n$$

$$\circledast \int_0^{n+1} \log i^2 = \Big|_0^{n+1} n\log n - n = (n+1)\log(n+1) - n - 1$$

2 yıldızlı ($\circledast$) ifadeyi incelersek, ikisininde en büyük terimleri $n\log n$'dir dolayısıyla

$$\sum_{i=2}^{n-1} \log i^2 \in \Theta(n\log n)$$

3c

$$\sum_{i=1}^{n} (i+1).2^{i-1}$$, sıkıştırma teoremini kullanırsak,

$$\int_0^n (i+1).2^{i-1} \le \sum_{i=1}^{n} (i+1).2^{i-1} \le \int_1^{n+1} (i+1).2^{i-1}$$

(sınırların önemi yok)

$$\int_0^n \underbrace{(i+1)}_{u} . \underbrace{2^{i-1} di}_{dv} \qquad \int_1^{n+1} (i+1)\, 2^{i-1}$$

$$v = \int_0^n 2^{i-1} di = \frac{2^{n-1}}{\ln 2}$$

$$du = \int u = \int i+1 = 1.di$$

$$u.v - \int v.du$$

$$(i+1).\frac{2^{n-1}}{\ln 2} - \int_0^n \frac{2^{n-1}}{\ln 2}.1\, di$$

$$\Big|_0^n (n+1).\frac{2^{n-1}}{\ln 2} - \frac{2^{n-1}}{\ln^2 2}$$

$$\boxed{(n+1).\frac{2^{n-1}}{\ln 2} - \frac{2^{n-1}}{\ln^2 2}}$$

Aynı çıkacak 2 integralinde en büyük değeri $n.2^n$ olduğundan

$$\sum_{i=1} (i+1).2^{i-1} \in \Theta(n.2^n)$$

3d $$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{i-1} (i+j)$$

$$\sum_{j=0}^{i-1} (i+j) = i + (i+1) + (i+2) + \dots + (i+(i-1))$$

$$= i.i + \frac{(i-1).i}{2}$$

$$= \frac{3i^2-i}{2}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} 3i^2-i$$, sıkıştırma teoremini uygularsak.

$$\int_0^n 3i^2-i \le \sum_{i=1}^{n-1} 3i^2-i \le \int_1^{n+1} 3i^2-i$$

$$\circledast \int_0^n 3i^2-i = \Big|_0^n \frac{3i^3}{3} - \frac{i^2}{2} = n^3 - \frac{n^2}{2}$$

$$\circledast \int_1^{n+1} 3i^2-i = \Big|_1^{n+1} \frac{3i^3}{3} - \frac{i^2}{2} = (n+1)^3 - \frac{(n+1)^2}{2} - \frac{1}{2}$$

2 yıldızlı ($\circledast$) ifadeyi incelersek, ikisininde en büyük terimleri n^3 tür. dolayısıyla

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{i-1} (i+j) \in \Theta(n^3)$$

4)

Fonksiyon çalışmaya başladığında $i = n$ olacağından içerideki döngü n kere dönecek ve ardından $i = \frac{n}{2}$ olacak, bu sefer içerideki döngü $\frac{n}{2}$ kere dönecek ve ardından $i = \frac{n}{4}$ olacak, bu sefer içerideki döngü $\frac{n}{4}$ kere dönecek ve döngü bu şekilde devam edecek.

$$n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \frac{n}{8} + \cdots + 1 = \sum_{i=0}^{\log_2 n} \frac{n}{2^i}$$, sıkıştırma teoremini kullanırsak.

$$\int_0^{\log_2 n} \frac{n}{2^i}\,di \leq \sum_{i=0}^{\log_2 n} \frac{n}{2^i} \leq \int_1^{\log_2 (n+1)} \frac{n}{2^i}\,di$$

$$(*) \int_0^{\log_2 n} \frac{n}{2^i}\,di = n.\int_0^{\log_2 n} 2^{-i}\,di = n.\left(\frac{2^{-i}}{\ln 2}\Big|_0^{\log_2 n}\right)$$

$$= n\left(\frac{2^{\log_2 n^{-1}}}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}\right) = n\left(\frac{1}{n.\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}\right)$$

$$= \frac{1}{\ln 2} - \frac{n}{\ln 2}$$

$$(*) \int_1^{\log_2 (n+1)} \frac{n}{2^i}\,di = n.\int_1^{\log_2 (n+1)} 2^{-i}\,di = n.\left(\frac{2^{-i}}{\ln 2}\Big|_1^{\log_2 (n+1)}\right)$$

$$= n.\left(\frac{2^{\log_2 (n+1)^{-1}}}{\ln 2} - \frac{1}{2\ln 2}\right)$$

$$= \left(\frac{n}{(n+1)\ln 2} - \frac{n}{2\ln 2}\right)$$

2 yıldızlı ifadeye baktığımızda en büyük terimler n olduğundan,

$$\underline{\underline{fun \in \Theta(n)}}$$

5

a) $n^3 \overset{?}{\in} O(3^{2n})$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{3^{2n}} \xrightarrow{\text{L'Hospital}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{9^n \cdot \ln 9} = \cdots$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{6}{9^n (\ln 9)^3} = 0,$$

So, $n^3 \in O(3^{2n})$ ✓

b) $n \overset{?}{\in} o(\log\log(n))$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log\log n} \xrightarrow{\text{L'Hospital}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n\ln(n)}} = n \cdot \ln(n) = \infty$$

So, $n \in \omega(\log(\log n))$ ✗
$n \notin o(\log(\log n))$

d) $\sqrt{10n^2+7n+3} \in \Theta(n)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{10n^2+7n+3}}{n}$$

$\sqrt{10n^2+7n+3}$ ifadesinde, düşük katsayılı ifadeleri ve max terimin katsayısını eliminate edersek, (notasyonda bu eliminate edilenlerin bir önemi yok) geriye $\sqrt{n^2}$ kalır.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = 1 \rightarrow \text{constant}$$

Dolayısıyla $\sqrt{10n^2+7n+3} \in \Theta(n)$ 'dir ✓

c) $n^2\log^2 n \in O(n!)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2\log^2 n}{n!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\log^2 n}{\sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n}$$

↓ L'Hospital

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n\log^2 n + n^2 \cdot \frac{1}{n\ln(n)}}{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n \cdot e^{-n}\cdot \ln(n) + \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n\log^2 n \cdot \ln(n) + n}{\ln n\left(\sqrt{2\pi n}\cdot n^n \cdot e^{-n}\cdot \ln n\right) + \sqrt{\frac{\pi}{2n}}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n}$$

⇒ Paydadaki ifadenin, büyüme oranı (n^n), paydaki ifadeden daha yüksek olduğundan ($n\log^2 n$), sonuç 0 dır.

$= 0$

$\Rightarrow n^2\log^2 n \in O(n!)$