MA4703 Control Óptimo: Teoría y Laboratorio. Semestre Primavera 2022
Profesor: Héctor Ramírez C. **Auxiliar:** Javier Madariaga R. **Ayudante:** Pablo Araya Z.

Laboratorio #3

Problemas de Tiempo Mínimo

Descripción: En este laboratorio abordaremos técnicas numéricas para resolver problemas de control óptimo a tiempo mínimo.

Parte A. Control de corriente eléctrica y Método de resolución directo

Para este laboratorio consideremos el circuito eléctrico mostrado en la Figura 1, el cual consiste en dos circuitos acoplados por inductancias L_1 y L_2 vía una variable de acoplamiento α. R_c y R_w denotan resistencias, i_1, i_2 serán nuestras variables de estados y representan las corrientes eléctricas, y u representa un voltaje controlable. En cierto sentido, este modelo simula el acoplamiento entre un campo magnetico y corrientes de Foucault. Por razones físicas se debe cumplir que $\alpha \in [0, 1]$.

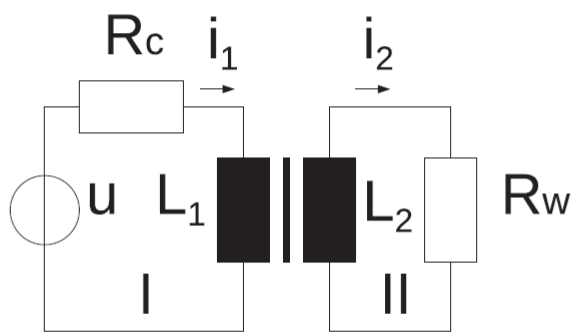

Figure 1: Circuito Eléctrico

Este circuito electrico es modelado mediante la siguiente dinámica a valor inicial.

$$
\begin{aligned}
L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}(t) + K \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}(t) + R_c i_1(t) &= u(t), \\
K \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}(t) + L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}(t) + R_w i_2(t) &= 0, \\
i_1(0) &= -i_0, \\
i_2(0) &= 0, \\
u(t) &\in [-a, a] \, \forall t \geq 0;
\end{aligned}
$$

donde la constante $K := \alpha\sqrt{L_1 L_2}$. El objetivo es llevar el vector de corrientes al punto $(i_0, 0)$ en el menor tiempo posible. Luego de que ese punto sea alcanzado, la corriente debe permaneces en dicho estado.

Ejercicio 1 Muestre que el sistema puede ser escrito como

$$
i'(t) = Ai(t) + Bu(t), \quad A := \frac{1}{(1-\alpha^2)L_1 L_2} \begin{bmatrix} -L_2 R_c & \alpha\sqrt{L_1 L_2} R_w \\ \sqrt{L_1 L_2} R_c & -L_1 R_w \end{bmatrix}, \quad B := \frac{1}{(1-\alpha^2)L_1 L_2} \begin{bmatrix} L_2 \\ -K \end{bmatrix}.
$$

De ahora en adelante consideraremos la siguiente elección de parámetros. $i_0 = 1$, $L_1 = 3.5$, $L_2 = 2$, $R_c = 1$, $R_w = 3$, $\alpha = 0.9$, y $a = 50$.

Ejercicio 2 Muestre **numéricamente** que el sistema, con la configuración de parámetros escogida, es controlable.

Ejercicio 3 Evidencie, por medio de cálculos **numéricos**, que si se escoge un control constante $u(\cdot) \equiv \bar{u}$, entonces

$$\lim_{t\to\infty} i'(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4 Escriba el problema del enunciado como un problema de control óptimo de tiempo mínimo.

Ejercicio 5 Para $t_f > 0$ fijo, discretice (de forma equidistribuída) en N puntos la dinámica del problema anterior en el intervalo de tiempo $[0, t_f]$ mediante la fórmula de discretización de Euler. Escriba un nuevo problema de optimización no lineal, ahora de dimensión finita, en el cual sus variables sean t_f y $\{u(i)\}_{i=1}^{N}$ (donde $u(i)$ denota el valor del control en el i-ésimo punto de la discretización de $[0, t_f]$).

Ejercicio 6 Resuelva el problema discretizado para distintos valores de N. Grafique la trayectoria óptima (discretizada) y el control óptimo (discretizado) en $[0, t_f]$. Comente la solución obtenida. Considere varias condiciónes iniciales para el método u_0^i y t_{f0}. Investigue el comportamiento del comando `minimize` de `scipy`, con otros métodos de optimización. **Debe ser capaz de realizar un estudio completo evidenciando la complejidad de la solución con respecto a N.**

Parte B. Método de resolución indirecto

Gracias a la caracterización de controles extremales, sabemos que el control óptimo viene dado por

$$u^*(t) = a \cdot \text{signo}\,\{p(t)^\top B\}, \tag{1}$$

donde $p(t)$ es una solución no trivial del sistema $\dot{p}(t) = -A^\top p(t)$. Bajo normalización, tomaremos como condición inicial del sistema adjunto el vector $p(0) = (-1, h)$, donde h es un parámetro a determinar. Note que el valor de t_f y de h queda determinado por las condiciones $i_1(t_f; u^*) = i_0$, $i_2(t_f; u^*) = 0$.

Ejercicio 7 Escriba en `Python` una función F que tome como parámetros a t_f y h, resuelva el sistema original y el sistema adjunto al utilizar el control descrito por la ecuación 1, y entregue las posiciones finales de los estados i_1 e i_2. Con el uso de `Python`, encuentre ceros para la función F. A partir de estas soluciones, muestre los sistemas y el control u^* asociados a dichas soluciones.

Ejercicio 8 Utilice el programa `BOCOP` para resolver el problema de tiempo mínimo con diferentes métodos de resolución. Comente los resultados obtenidos.

Ejercicio 9 Compare las soluciones al utilizar los tres métodos (método directo, indirecto y el uso de `BOCOP`). **Debe se capaz de realizar una comparación satisfactoria tanto al ver los sistemas entregados, como su tiempo y complejidad en la ejecución.**